НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО"
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

"На правах рукопису"
УДК 517.5

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
_________ Клесов О.І.
"07" червня 2024 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра
за освітньо-науковою програмою
"Страхова та фінансова математика"
зі спеціальності 111 "Математика"
на тему:
"Функціональні рівняння для функцій кількох змінних"

Виконав:
Студент VI курсу, групи ОМ-21мн
Дворний Артем Володимирович _________

Науковий керівник:
Завідувач кафедри, доктор
фізико-математичних наук, професор
Клесов Олег Іванович _________

Рецензент:
Завідувач кафедри інформаційних систем і технологій
Національного транспортного університету,
доктор фізико-математичних наук, професор
Гавриленко Валерій Володимирович _________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент _________

Київ — 2024

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО"
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти — другий (магістерський)
Спеціальність — 111 "Математика"
Освітньо-наукова програма "Страхова та фінансова математика"

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри

_________ Клесов О.І.
" " 2024 р.

Завдання
на магістерську дисертацію студенту
Дворному Артему Володимировичу

1. Тема дисертації "Функціональні рівняння для функцій кількох змінних", науковий керівник дисертації Клесов Олег Іванович, доктор фізико-математичних наук, професор, затверджено наказом по університету від "01" квітня 2024 року №1523-с.

2. Термін подання студентом дисертації 11 червня 2024 року.

3. Об'єкт дослідження: функції кількох змінних, що є розв'язками функціонального рівняння Коші.

4. Предмет дослідження: умови лінійності функцій кількох змінних, що є розв'язками функціонального рівняння Коші.

5. Перелік завдань, які необхідно виконати:

   (а) Ознайомитися з літературою, в якій були встановлені умови лінійності для одновимірних розв'язків функціонального рівняння Коші, вивчити методи доведення теорем такого типу, ознайомитися з властивостями розв'язків функціонального рівняння Коші.

   (б) Довести відомі для одновимірного випадку умови лінійності для функцій кількох змінних, що є розв'язками функціонального рівняння Коші.

(в) Сформулювати та довести нові умови лінійності для функцій кількох змінних, що є розв'язками функціонального рівняння Коші.

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу: 15 слайдів.

7. Дата видачі завдання: 05 лютого 2024 року.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Огляд літератури стосовно функціонального рівняння Коші	05.02.24-25.02.24	Виконано
2.	Вивчення властивостей розв'язків функціонального рівняння Коші	25.02.24-14.03.24	Виконано
3.	Вивчення методів доведення умов лінійності	14.03.24-28.03.24	Виконано
4.	Доведення умов лінійності, відомих для одновимірних функцій	28.03.24-25.04.24	Виконано
5.	Формулювання та доведення нових умов лінійності	25.04.24-23.05.24	Виконано
6.	Аналіз результатів, отримання висновків	23.05.24-01.06.24	Виконано
7.	Оформлення магістерської дисертації	01.06.24-10.06.24	Виконано

Студент Дворний Артем Володимирович
Науковий керівник Клесов Олег Іванович

Реферат

Магістерська дисертація містить 15 сторінок, 15 слайдів ілюстративного матеріалу та 4 першоджерела.

Об'єктом даної роботи є функції кількох змінних, які є розв'язками функціонального рівняння Коші.

Предметом дослідження є умови лінійності таких розв'язків функціонального рівняння Коші.

Метою роботи є знаходження нових умов лінійності для багатовимірних розв'язків функціонального рівняння Коші.

Ключові слова: функціональне рівняння Коші, адитивні функції, умови лінійності, функції кількох змінних, неперервність функції, обмеженість функції.

Abstract

The master's thesis contains 15 pages, 15 presentation slides and 4 bibliography items.

The object of this thesis is multivariable functions which satisfy Cauchy's functional equation.

The aim of this thesis is to establish new linearity conditions for multivariable functions which satisfy Cauchy's functional equation.

Key words: Cauchy's functional equation, additive functions, linearity conditions, multivariable functions, continuity of a function, boundedness of a function.

Зміст

1 Вступ

Функціональне рівняння

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

відоме математикам вже багато років; функції, що його задовольняють, мають назву адитивних. Лінійна функція

$$f(x) = cx, \quad c \in \mathbb{R},$$

є одним з розв'язків рівняння; питання, чи є вона єдиним розв'язком, тривалий час залишалося відкритим. Одним з перших важливих результатів була робота Коші [1] 1821го року, в якій він показав, що за умови неперервності лінійна функція дійсно є єдиним розв'язком рівняння (1). Подальше дослідження адитивних функцій призвело, з плином часу, до кількох важливих результатів; так, Гамель довів [2] в 1905му році, спираючись на аксіому вибору, що існують адитивні нелінійні функції, а умови лінійності були послаблені до наявності вимірної мажоранти на множині додатньої міри [3]. Проте ці результати стосувалися функцій $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; умови лінійності адитивних функцій, областю визначення яких є простори, відмінні від $\mathbb{R}$, не є настільки добре вивченими. Дана робота має своєю метою визначити нові умови лінійності для адитивних функцій, областю визначення яких є $\mathbb{R}^n$; для цього в роботі також наводяться доведення, відомі для функцій $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і адаптовані для багатовимірного випадку.

2 Властивості багатовимірних адитивних функцій

Адитивні функції мають декілька властивостей, які справджуються як і в одновимірному, так і в багатовимірному випадку; вони наведені тут, для подальшого посилання в доведеннях:

1. $f(0) = 0$; дійсно, $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ і тому $f(0) = 0$.

2. $f(-x) = -f(x)$; дійсно, $f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x)$ і тоді $-f(x) = f(-x)$.

3. $f(qx) = qf(x)$, для всіх $q \in \mathbb{Q}$. Для початку $f(nx) = f(x + \ldots + x) = f(x) + \ldots + f(x) = nf(x)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$; також $f(x) = f(\frac{nx}{n}) = nf(\frac{x}{n})$ і тому $\frac{1}{n}f(x) = f(\frac{x}{n})$. З цього і з властивості 2 $f(qx) = qf(x)$, $q \in \mathbb{Q}$.

3 Умови лінійності

Наступні чотири умови лінійності є добре відомими для одновимірних адитивних функцій. Тут їх доведено для багатовимірного випадку; основною метою цього є доведення двох інших, не відомих раніше, умов лінійності багатовимірних адитивних функцій.

3.1 Неперервність

Теорема 1. Нехай $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — адитивна функція. Якщо $f(x)$ є неперервною на $\mathbb{R}^n$, то $f(x)$ лінійна.

Доведення. Нехай $c \in \mathbb{R}$ — деяке дійсне число і c_n — послідовність раціональних чисел, що збігається до c. Тоді, з одного боку,

$$\lim_{n\to\infty} f(c_n x) = \lim_{n\to\infty} c_n f(x) = f(x) \lim_{n\to\infty} c_n = c f(x).$$

З іншого боку, за неперервністю f маємо $\lim\limits_{n\to\infty} f(c_n x) = f(cx)$. Отже, $f(cx) = cf(x)$, $\forall c \in \mathbb{R}$, тобто f є лінійною. $\square$

3.2 Неперервність в деякій точці

Теорема 2. Нехай $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — адитивна функція. Якщо $f(x)$ є неперервною в деякій точці $x_0 \in \mathbb{R}^n$, то $f(x)$ лінійна.

Доведення. Розіб'ємо доведення на дві частини: за умови неперервності в нулі і за умови неперервності в довільній точці.

Частина 1. Нехай $f(x)$ неперервна в 0. Нехай $x \in \mathbb{R}^n$ — довільна точка, і $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — деяка послідовність, що збігається до x. Тоді, за неперервністю в 0, $f(x - x_n) \to 0$. Тепер розпишемо $f(x)$ як

$$f(x) = f(x - x_n + x_n) = f(x - x_n) + f(x_n) \Rightarrow f(x) - f(x - x_n) = f(x_n).$$

Переходячи до границі при $n \to \infty$, в лівій частині рівності отримуємо $f(x)$, а в правій $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Оскільки x була довільною, з цього випливає неперервність $f(x)$ всюди; за теоремою 1 $f(x)$ є лінійною.

Частина 2. Тепер розглянемо випадок, коли $f(x)$ є неперервною в довільній точці $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тоді нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність точок, яка прямує до 0 при $n \to \infty$. В цьому випадку $x_0 - x_n$ прямує до x_0, $f(x_0 - x_n)$

прямує до $f(x_0)$ за неперервністю і

$$f(x_0) = f(x_0 + x_n - x_n) = f(x_0 - x_n) + f(x_n),$$

і, перейшовши до границі, маємо

$$f(x_0) = f(x_0) + \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

або

$$0 = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Оскільки послідовність x_n була довільною, то за означенням Гейне $f(x)$ є неперервною в 0, і за частиною 1 цього доведення є лінійною. $\square$

3.3 Обмеженість

Теорема 3. Нехай $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — адитивна функція. Якщо $|f(x)| < c$ для деякого $c > 0$ в деякій замкненій кулі $\bar{B}(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n$, то f є лінійною.

Доведення. Як і з неперервністю в точці, розіб'ємо доведення на два: обмеженість в $\bar{B}(0, r)$, та обмеженість в довільній $\bar{B}(x_0, r)$.

Частина 1. Спершу припустимо обмеженість в замкненій кулі з центром в нулі, тобто $|f(x)| < c$ для деякого $c \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \bar{B}(0, r)$. Покажемо, що тоді $f(x)$ неперервна в нулі. Нехай $\varepsilon > 0$ — деяке число; тоді оберемо додатнє $q \in \mathbb{Q}$ таке, що $\frac{c}{q} < \varepsilon$. Оберемо $\delta > 0$ таке, що $\delta < \frac{r}{q}$; тоді $\forall x\colon ||x|| < \delta$ маємо $||qx|| = q||x|| < q\delta < r$, тобто $qx \in \bar{B}(0, r)$. Тоді виконується наступне: $\forall x\colon ||x|| < \delta$ маємо

$$|f(x)| = \left|\frac{1}{q} f(qx)\right| = \frac{1}{q}|f(qx)| < \frac{c}{q} < \varepsilon.$$

Отже, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ таке, що $\forall x\colon ||x|| < \delta$ маємо $|f(x)| < \varepsilon$. Отже, $f(x)$ є неперервною в нулі, і за теоремою 2 є лінійною.

Частина 2. Тепер нехай $|f(x)| < c$ для деякого $c \in \mathbb{R}\ \forall x \in \bar{B}(x_0, r)$, де $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Розглянемо $\bar{B}(0, r)$; $\forall x \in \bar{B}(0, r)$ маємо $||(x_0 - x) - x_0|| = ||x|| \leq r$; отже, $x_0 - x \in \bar{B}(x_0, r)$. Тоді $\forall x \in \bar{B}(0, r)$

$$|f(x)| = |-f(x)| = |f(-x)| = |f(-x + x_0 - x_0)| = |f(x_0 - x)+$$
$$+ f(-x_0)| \leq |f(x_0 - x)| + |f(-x_0)| < c + |f(-x_0)|.$$

Оскільки $|f(-x_0)|$ — певне число, отримали обмеженість $f(x)$ в замкненій кулі $\bar{B}(0, r)$. З частини 1 доведення $f(x)$ неперервна в нулі, а отже лінійна. $\square$

3.4 Обмеженість з одного боку

Теорема 4. Нехай $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — адитивна функція. Якщо $f(x) < c$ (або $f(x) > c$) для деякого $c \in \mathbb{R}$ в деякій замкненій кулі $\bar{B}(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n$, то f є лінійною.

Доведення. Розіб'ємо це доведення на дві частини: для $\bar{B}(0, r)$ та для $\bar{B}(x_0, r)$.

Частина 1. Нехай $f(x) > c$ на $\bar{B}(0, r)$. Тоді $-f(x) < -c$, і $f(-x) < -c$. Оскільки з належності x кулі $\bar{B}(0, r)$ випливає належність $-x$ цій же кулі (так як $||x|| = ||-x||$), то $\forall x \in \bar{B}(0, r)$ також маємо $f(x) < -c$. Отже, $|f(x)| < c$ на $\bar{B}(0, r)$, f обмежена і за теоремою 3 лінійна. (У випадку припущення $f(x) < c$ як початкового розглядаємо $-f$; з лінійності $-f$ випливає лінійність f.)

Частина 2. Нехай тепер $f(x) > c$ на певній довільній кулі $\bar{B}(x_0, r)$. З доведення про обмеженість $x_0 - x \in \bar{B}(x_0, r)$ при $x \in \bar{B}(0, r)$. Тоді $\forall x \in \bar{B}(0, r)$ маємо

$$f(x) = f(x - x_0 + x_0) = -f(x_0 - x) - f(x_0) < -c - f(x_0).$$

Оскільки $f(x_0)$ — певне число, то $f(x)$ обмежена знизу на $\bar{B}(0, r)$. З частини 1 цього доведення f обмежена, а отже лінійна. (Якщо ж $f(x) < c$ на $\bar{B}(x_0, r)$, розглянемо $-f$, як і в першій частині доведення.) $\square$

Теорему 4 використаємо для доведення нового твердження про умови лінійності:

3.5 Відсутність значень з інтервалу на замкненій кулі

Теорема 5. Нехай $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — адитивна функція. Якщо існує деякий проміжок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ такий, що $f(x) \notin [a, b]$ на деякій замкненій кулі $\bar{B}(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n$, то f є лінійною.

Доведення. Тут теж розіб'ємо доведення на два: для $\bar{B}(0, r)$ та для довільної $\bar{B}(x_0, r)$.

Частина 1. Для початку нехай $\exists \bar{B}(0, r)$ та $\exists [a, b] \in \mathbb{R}$ такі, що $\forall x \in \bar{B}(0, r)$ $f(x) \notin [a, b]$. Очевидно, що $0 \notin [a, b]$, оскільки $f(0) = 0$ і $0 \in \bar{B}(0, r)$. Вважаємо, що на $\bar{B}(0, r)$ $f(x)$ приймає значення як більші за b, так і менші за a — інакше f є обмеженою з одного боку і, за попереднім твердженням, лінійною. Також вважаємо, що $0 < a < b$; випадок $a < b <$

0 розглянемо окремо. Нехай $f(x) > b$ для деякого $x \in \bar{B}(0,r)$. Знайдемо додатнє $q \in \mathbb{Q}$ таке, що $qf(x) \in [a,b]$. Оскільки $f(x) > b$ і $qf(x) \leq b$, маємо $q \in (0,1)$. Тоді $||qx|| = q||x|| \leq qr < r$, $\forall x \in \bar{B}(0,r)$. Тоді маємо $qx \in \bar{B}(0,r)$ і $f(qx) \in [a,b]$. Отримали протиріччя; отже, $f(x) \leq b$, і за теоремою 4 $f(x)$ лінійна. (Якщо ж $a < b < 0$, помітимо, що тоді $f(-x) = -f(x) \notin [-b,-a]$ для $\forall x \in \bar{B}(0,r)$. Оскільки з належності x кулі $\bar{B}(0,r)$ випливає належність $-x$ цій же кулі, маємо $f(x) \notin [-b,-a]$ для $\forall x \in \bar{B}(0,r)$, і розглядаємо проміжок $[-b,-a]$.)

Частина 2. Нехай тепер $\forall x \in \bar{B}(x_0,r)$ $f(x) \notin [a,b]$ для деякого $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Як вже було згадано, $x_0 - x \in \bar{B}(x_0,r)$ при $x \in \bar{B}(0,r)$. Тоді $\forall x \in \bar{B}(0,r)$ маємо

$$f(x) = f(x - x_0 + x_0) = -f(x_0 - x) - f(x_0).$$

Оскільки $x_0 - x \in \bar{B}(x_0,r)$, то $f(x_0 - x) \notin [a,b]$ і $-f(x_0 - x) \notin [-b,-a]$; з цього маємо $f(x) \notin [-b - f(x_0), -a - f(x_0)]$. Отже, маємо проміжок, значення з якого функція f не приймає на $\bar{B}(0,r)$; за першою частиною доведення f лінійна. $\square$

Теорема 5 дає можливість достатньо легко довести іншу нову умову лінійності адитивної багатовимірної функції:

3.6 Прямування модуля функції до нескінченності при прямуванні норми аргументу до нескінченності

Теорема 6. Нехай $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — адитивна функція. Якщо

$$\lim_{||x|| \to +\infty} |f(x)| = +\infty,$$

то f є лінійною.

Доведення. Візьмемо довільне число $c > 0$; тоді для цього числа існує число $M > 0$ таке, що при $||x|| > M$ маємо $|f(x)| > c$. Візьмемо таке x_0, що $||x_0|| = M' > M$. Розглянемо $\bar{B}(x_0, \frac{M'-M}{2})$; для кожного $x \in \bar{B}(x_0, \frac{M'-M}{2})$ маємо

$$\begin{aligned} ||x|| = ||x - x_0 + x_0|| = ||x_0 - (x_0 - x)|| \geq ||x_0|| - ||x_0 - x|| \geq \\ \geq M' - \frac{M' - M}{2} = \frac{M' + M}{2} > M. \end{aligned}$$

Отже, $||x|| > M$ для $\forall x \in \bar{B}(x_0, \frac{M'-M}{2})$. Як наслідок, $|f(x)| > c$, $\forall x \in \bar{B}(x_0, \frac{M'-M}{2})$, тобто $f(x) \notin [-c; c]$ на $\bar{B}(x_0, \frac{M'-M}{2})$. За теоремою 5 f лінійна. $\square$

4 Висновки

В даній роботі було представлено доведення умов лінійності багатовимірних адитивних функцій. Серед них наведено умови лінійності, відомі для одновимірних адитивних функцій. На основі них в роботі представлено нові умови лінійності для розв'язків функціонального рівняння Коші. Вони можуть бути використані для подальшого дослідження функціонального рівняння Коші, зокрема, для узагальнення поданих в роботі умов лінійності на функціонали в банахових просторах над $\mathbb{R}$, або для дослідження властивостей багатовимірних адитивних функцій.

5 Література

[1] Cauchy Augustin-Louis. Analyse Algébrique. Cours d'Analyse de l'Ecole royale polytechnique. Paris : L'Imprimerie Royale, Debure fréres, Libraires du Roi et de la Bibliothéque du Roi, 1821, 576 p.

[2] Hamel G. Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung f(x+y)=f(x)+f(y) // Mathematische Annalen, 1905. №60. C. 459-462

[3] Aczél J. Lectures on functional equations and their applications. New York: Academic Press, 1966, 510 p.

[4] Клесов О.І. Застосування правильно змінних функцій у теорії ймовірностей. Конспект лекцій, 2016.