

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

**Фізико-математичний факультет**

**Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей**

«На правах рукопису»

УДК 519.21

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_ Олег КЛЕСОВ

« » \_\_\_\_\_ 2024 р.

**Магістерська дисертація**

**на здобуття ступеня магістра**

**за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова  
математика»**

**зі спеціальності 111 «Математика»**

**на тему: «Оцінювання параметрів квазічирпованого сигналу»**

Виконала:

студентка II курсу, групи ОМ-21мн

Кругол Анна Михайлівна \_\_\_\_\_

Керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор

Іванов Олександр Володимирович \_\_\_\_\_

Рецензент:

професор кафедри дослідження операцій

Київського національного університету

імені Тараса Шевченка

д.ф.-м.н., с.н.с.

Мацак Іван Каленикович \_\_\_\_\_

Засвідчую, що у цій магістерській  
дисертації немає запозичень з праць  
інших авторів без відповідних посилань.  
Студентка \_\_\_\_\_

Київ–2024

**Національний технічний університет України**  
**«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**  
**Фізико-математичний факультет**  
**Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей**

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-науковою програмою

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

\_\_\_\_\_ Олег КЛЕСОВ

«05» лютого 2024 р.

**ЗАВДАННЯ**  
**на магістерську дисертацію**  
**Кругол Анні Михайлівні**

1. Тема дисертації «Оцінювання параметрів квазічирпованого сигналу», науковий керівник дисертації Іванов Олександр Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор, затверджені наказом по університету №1523-с від 01.04.24.
2. Термін подання студентом дисертації 11 червня 2024.
3. Об'єкт дослідження модель спостереження квазічирпованого сигналу на фоні адитивного шуму.
4. Предмет дослідження консистентність та асимптотична нормальність оцінки найменших квадратів параметрів квазічирпованого сигналу в присутності сильно або слабо залежного випадкового шуму.
5. Перелік завдань, які потрібно виконати:
  - 1) Поставити задачу оцінювання параметрів квазічирпованого сигналу у присутності сильно або слабо залежного гауссівського випадкового шуму.

- 2) Довести теорему про сильну консистентність оцінки найменших квадратів параметрів квазічирпованого сигналу.
- 3) Довести теорему про асимптотичну нормальність оцінки найменших квадратів параметрів квазічирпованого сигналу.
6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу 18 слайдів.
7. Дата видачі завдання 5 лютого 2024 року.

#### Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомлення з літературою	05.02.2024–16.02.2024	виконано
2.	Доведення теореми про сильну консистентність оцінки найменших квадратів параметрів квазічирпованого сигналу.	19.02.2024–11.03.2024	виконано
3.	Доведення теореми про асимптотичну нормальність оцінки найменших квадратів параметрів квазічирпованого сигналу.	12.03.2024–19.05.2024	виконано
4.	Оформлення магістерської дисертації.	20.05.2024–31.05.2024	виконано

Студентка  
Науковий керівник дисертації

Анна КРУГОЛ  
Олександр ІВАНОВ

## Реферат

Магістерська дисертація: 45 сторінок, 18 слайдів для проектора, 21 першоджерел.

В роботі розглянуто неперервний у часі квазічирпований сигнал, що спостерігається разом з адитивним стаціонарним гауссівським шумом, який може бути сильно або слабо залежним.

Мета роботи полягає в отриманні властивостей випадкового шуму, за яких оцінка найменших квадратів параметрів квазічирпованого сигналу є сильно консистентною та асимптотично нормальною.

Завданням роботи є доведення сильної консистентності та асимптотичної нормальності оцінки найменших квадратів невідомих амплітуд, кутової частоти та параметра лінійної модуляції квазічирпованого сигналу. Об'єктом дослідження є тригонометрична модель регресії виду «квазічирпований сигнал+шум» з неперервним часом спостереження.

Робота містить доведення теорем про сильну консистентність та асимптотичну нормальність оцінки найменших квадратів параметрів квазічирпованого сигналу при виконанні певних умов до гауссівського випадкового шуму та параметричних множин, в яких знаходяться невідомі істинні значення параметрів. Для отримання вказаних результатів було використано рівномірний посиленний закон великих чисел для розглянутого випадкового шуму, зваженого синусами та косинусами від лінійних та квадратичних аргументів. Крім цього, було використано поняття спектральної міри функції регресії.

Ключові слова: гармонічний сигнал, елементарний чирпований сигнал, сильно/слабо залежний стаціонарний гауссівський процес, оцінка найменших квадратів, рівномірний закон великих чисел, інтеграли Френеля, сильна консистентність, спектральна міра функції регресії, асимптотична нормальність.

## Abstract

Master degree thesis contains 45 pages, 18 slides for projector, 21 primary sources.

In the thesis, a time continuous chirp-like signal observed together with additive strongly or weakly dependent stationary Gaussian noise is considered.

The goal of the work is obtaining the properties of random noise under which the least squares estimate of the parameters of the chirp-like signal is strongly consistent and asymptotically normal.

The task of the research is to prove the strong consistency and asymptotic normality of the least squares estimates of unknown amplitudes, angular frequency and linear modulation parameter of the chirp-like signal. The research object is a trigonometric regression model of the form «chirp-like signal+noise» with continuous observation time.

The thesis contains proofs of the theorems on strong consistency and asymptotic normality of the least squares estimate of the chirp-like signal parameters under certain conditions for Gaussian random noise and parametric sets containing unknown true values of the parameters. To obtain these results, the uniform strong law of large numbers is used for the considered random noise weighted by sines and cosines of linear and quadratic variables. In addition, the concept of the spectral measure of the regression function is used.

Keywords: harmonic signal, elementary chirp signal, strongly/weakly dependent stationary Gaussian process, least squares estimate, uniform law of large numbers, Fresnel integrals, strong consistency, spectral measure of the regression function, asymptotic normality.

# **Зміст**

<b>Вступ</b>	<b>7</b>
<b>1 Постановка задачі</b>	<b>9</b>
<b>2 Сильна консистентність ОНК параметрів квазічирпованого сигналу</b>	<b>11</b>
<b>3 Асимптотична нормальність ОНК параметрів квазічирпованого сигналу</b>	<b>18</b>
<b>4 Висновки</b>	<b>43</b>
<b>Список використаних джерел</b>	<b>44</b>

# Вступ

Моделі синусоїдних сигналів, що спостерігаються на фоні випадкових шумів різного походження, широко використовуються в обробці мовних та музичних текстів, у медицині, зокрема, кардіографії, сейсмології, астрономії, технічних застосуваннях, в економіці та інших галузях. Синусоїдний сигнал можна записати у вигляді

$$X(t) = \sum_{j=1}^M (A_j^0 \cos(\phi_j^0 t) + B_j^0 \sin(\phi_j^0 t)) + \varepsilon(t), \quad M \geq 1; \quad (1)$$

$t \in \mathbb{N}$ , якщо розглядається модель з дискретним часом, або  $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ , якщо модель з неперервним часом спостереження. У запису (1) синусоїдного сигналу  $A_j^0, B_j^0$  є амплітудами,  $\phi_j^0$  є частотами гармонічних коливань, а стохастичний процес  $\varepsilon(t), t \in \mathbb{Z}$  або  $t \in \mathbb{R}$ , є випадковим шумом, який маскує сигнал.

Задача статистичного оцінювання невідомих параметрів  $A_j^0, B_j^0, \phi_j^0$  моделі (1) називається проблемою виявлення прихованих періодичностей, що має 200-річну історію та величезну математичну та прикладну бібліографію. Ми пошлемось тільки на роботи Artis et al. [1], Ivanov [2], Quinn and Hannan [3], Kundu and Nandi [4], Ivanov et al. [5], які містять велику кількість посилань на публікації з даної тематики.

Ще однією важливою тригонометричною моделлю в обробці сигналів є, так звана, модель чирпованого сигналу (chirp signal model). CHIRP – це абревіатура терміну «Compressed High-Intensity Radiated Pulse», який дослівно перекладається як «Стиснутий Високоінтенсивний Випромінюваний Імпульс», а адекватно – «Лінійна частотна модуляція». Крім цього, англійське слово «chirp» перекладається як «щебіт». Сигнали такого типу застосовуються в радіо та ехолокації в якості засобу формування та обробки зонduючого імпульсу. Застосування chirp-сигналу (ми будемо говорити «чирпованого сигналу») дозволяє підвищити точність вимірювань та якість в отриманні зображення та характеристик зондованого об'єкту.

Чирпований сигнал можна записати у наступному вигляді:

$$X(t) = \sum_{j=1}^{M'} (C_j^0 \cos(\phi_j^0 t + \psi_j^0 t^2) + D_j^0 \sin(\phi_j^0 t + \psi_j^0 t^2)) + \varepsilon(t), \quad M' \geq 1; \quad (2)$$

час  $t$ , як і в моделі (1), може бути дискретним або неперервним. У порівнянні з моделлю (1), тут присутні додаткові невідомі параметри  $\psi_j^0$ , які в англійській літературі називаються chirp rates або frequency rates. Ці параметри контролюють швидкість зростання початкових частот коливань  $\phi_j^0$ .

Для дискретного часу  $t$  та випадкового шуму, який є лінійним часовим рядом типу  $MA(\infty)$ -процесу, за останні 20 років отримано багато результатів щодо консистентності та асимптотичної нормальності оцінки найменших квадратів (ОНК) та деяких інших оцінок параметрів сигналу (2). Серед великої кількості робіт на цю тему вкажемо на публікації Nandi, Kundu [6], [7], Kundu, Nandi [8], [9], Lahiri [10], Lahiri, Kundu, Mitra [11].

Для неперервного часу  $t$  та випадкового шуму, який є гауссівським стаціонарним процесом з сильною або слабкою залежністю, сильну консистентність та асимптотичну нормальність ОНК параметрів моделі (2) доведено у роботах Ivanov, Hladun [12], [13].

У роботі Grover, Kundu, Mitra [14] розглянуто властивості ОНК параметрів дискретної моделі сигналу, яка займає проміжне положення між моделями сигналів (1) та (2). Автори цієї роботи називають модель такого сигналу «chirp-like model», а ми будемо називати такий сигнал квазічирпованим. Математичний запис квазічирпованого сигналу має вигляд

$$X(t) = \sum_{j=1}^M (A_j^0 \cos(\phi_j^0 t) + B_j^0 \sin(\phi_j^0 t)) + \sum_{k=1}^{M'} (C_k^0 \cos(\psi_k^0 t^2) + D_k^0 \sin(\psi_k^0 t^2)) + \varepsilon(t), \quad (3)$$

$M, M' \geq 1$ , де  $A_j^0, B_j^0, C_k^0, D_k^0$  – амплітуди,  $\phi_j^0$  – частоти,  $\psi_k^0$  – frequency rates, які ми назвемо темпами частот.

Такий вибір моделі автори вказаної роботи зробили завдяки наступним обставинам. По-перше, стверджується, що модель (3) демонструє такий же тип поведінки, як і модель (2), та здатна моделювати той самий фізичний феномен.



По-друге, модель (3) не тільки є альтернативною до моделі (2), але її також можна розглядати як узагальнення моделі (1), якщо покласти  $C_k = D_k = 0, k = \overline{1, M'}$ .

Кожний доданок 1-ої суми моделі (3) є звичайним гармонічним коливанням, а кожний доданок 2-ої суми моделі (3) може сам по собі входити у, так звану, елементарну чирповану модель сигналу

$$X(t) = C^0 \cos(\psi^0 t^2) + D^0 \sin(\psi^0 t^2) + \varepsilon(t), \quad (4)$$

яка розглядалась у роботах Casazza, Fiskus [15] та Mboup, Adali [16].

Задача вивчення статистичних властивостей ОНК параметрів моделі (3) з довільними  $M, M' > 1$ , є вельми складною, і тому в магістерській дисертації ми розглянемо задачу оцінювання параметрів елементарної квазічирпованої моделі (3) з  $M = M' = 1$ . З подальшого буде видно, що і така задача не є простою.

За результатами, отриманими у даній магістерській дисертації, було зроблено доповідь на XII Всеукраїнській науковій конференції молодих математиків [21].

## 1 Постановка задачі

Нехай спостерігається стохастичний процес

$$X(t) = g(t, \theta^0) + \varepsilon(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (5)$$

де  $g$  є сумою гармонічного коливання та елементарної чирпованої частини, тобто

$$g(t, \theta^0) = A^0 \cos(\phi^0 t) + B^0 \sin(\phi^0 t) + C^0 \cos(\psi^0 t^2) + D^0 \sin(\psi^0 t^2), \quad (6)$$

$$\theta^0 = (\theta_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0, \theta_4^0, \theta_5^0, \theta_6^0)^* = (A^0, B^0, \phi^0, C^0, D^0, \psi^0)^*, \quad (7)$$

де "\*" є знаком транспонування,

$(A^0)^2 + (B^0)^2 > 0, (C^0)^2 + (D^0)^2 > 0; \quad \varepsilon = \varepsilon(t), t \in \mathbb{R}$ , є випадковим шумом, визначеним на ймовірнісному просторі  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Припустимо, що

**A1.**  $\varepsilon$  – вибірково неперервний стаціонарний гауссівський стохастичний процес

з нульовим середнім та коваріаційною функцією  $B(t) = E\varepsilon(t)\varepsilon(0)$ , що задовольняє одній з умов:

(i)  $B(t) = L(|t|)|t|^{-\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , де  $L$  – неспадна повільно змінна на нескінченності функція;

(ii)  $B(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$ .

Припустимо також, що істинні значення амплітуд  $(A^0, B^0, C^0, D^0)$  є різними числами, а істинні значення кутової частоти та темпу частоти  $(\phi^0, \psi^0)$  є різними додатними числами. Для деяких фіксованих чисел  $0 < \underline{\phi} < \bar{\phi} < +\infty$ ;  $0 < \underline{\psi} < \bar{\psi} < +\infty$ , нехай  $\phi^0 \in (\underline{\phi}, \bar{\phi})$ ,  $\psi^0 \in (\underline{\psi}, \bar{\psi})$ .

**Означення 1.** Будь-який випадковий вектор

$$\theta_T = (A_T, B_T, \phi_T, C_T, D_T, \psi_T), \quad (8)$$

що мінімізує значення функціоналу

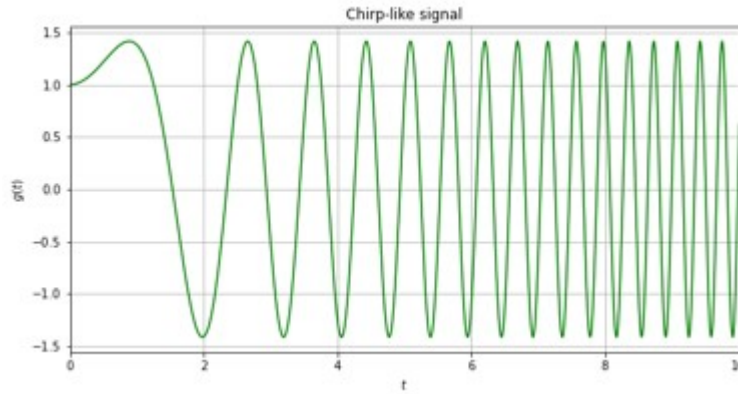
$$Q_T(\theta) = \frac{1}{T} \int_0^T [X(t) - g(t, \theta)]^2 dt \quad (9)$$

на параметричній множині  $\Theta \subset \mathbb{R}^6$ , де амплітуди  $(A, B, C, D)$  можуть приймати будь-які значення, а параметри  $(\phi, \psi)$  приймають значення у множині  $[\underline{\phi}, \bar{\phi}] \times [\underline{\psi}, \bar{\psi}]$ , називається ОНК параметра  $\theta^0$ .

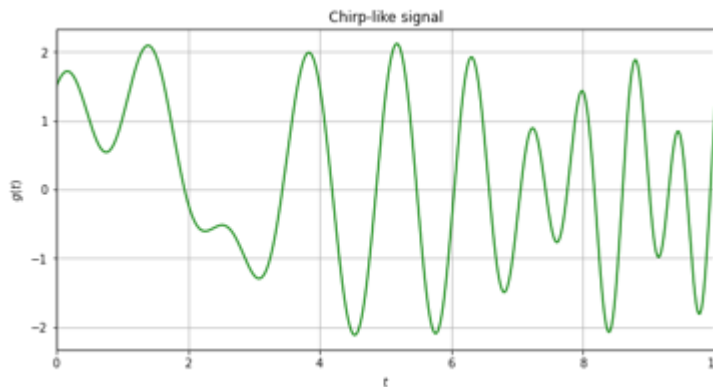
У розділі 2 магістерської дисертації ми доведемо, що так означена ОНК  $\theta_T$  векторного параметра  $\theta^0$  моделі (5), (6), (7) є сильно консистентною у деякому сенсі (теорема 1).

У розділі 3 ми покажемо, що ОНК  $\theta_T$  є асимптотично нормальною оцінкою параметра  $\theta^0$  (теорема 2), причому доведення цього факту є достатньо громіздким та вимагає додаткових умов, яким повинен задовольняти стохастичний процес  $\varepsilon$ .

**Приклад 1.** Квазічирпований сигнал з параметрами  $\theta^0 = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$



**Приклад 2.** Квазічирпований сигнал з параметрами  $\theta^0 = (0.5, 0.5, 5, 1, 1, 0.5)$



## 2 Сильна консистентність ОНК параметрів квазічирпованого сигналу

Сформулюємо теорему, яка є основним результатом цього розділу роботи.

**Теорема 1.** Нехай виконується умова **A1**. Тоді ОНК  $\theta_T$  є сильно консистентною оцінкою параметра  $\theta^0$  у тому сенсі, що  $A_T \rightarrow A^0, B_T \rightarrow B^0, T(\phi_T - \phi^0) \rightarrow 0, C_T \rightarrow C^0, D_T \rightarrow D^0, T^2(\psi_T - \psi^0) \rightarrow 0$  м.н. при  $T \rightarrow \infty$ .

Для доведення теореми 1 нам знадобляться дві леми.

**Лема 1.** Нехай  $\alpha_T, \beta_T, T > 0$  - деякі функції, такі, що  $\alpha_T \rightarrow \infty, \beta_T \rightarrow \infty$  при  $T \rightarrow \infty$ . Тоді при  $T \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 1) \int_0^1 \frac{\cos(\alpha_T t)}{\sin(\alpha_T t)} dt &\rightarrow 0; & 2) \int_0^1 \frac{\cos(\beta_T t^2)}{\sin(\beta_T t^2)} dt &\rightarrow 0; \\
 3) \int_0^1 \frac{\cos(\alpha_T t)}{\sin(\alpha_T t)} \frac{\cos(\beta_T t^2)}{\sin(\beta_T t^2)} dt &\rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

*Доведення. Маємо*

$$1) \left| \int_0^1 \sin(\alpha_T t) dt \right| = \left| \frac{1 - \cos(\alpha_T)}{\alpha_T} \right| \leq \frac{2}{|\alpha_T|} \rightarrow 0 \text{ при } T \rightarrow \infty;$$

$$\left| \int_0^1 \cos(\alpha_T t) dt \right| = \left| \frac{\sin(\alpha_T)}{\alpha_T} \right| \leq \frac{1}{|\alpha_T|} \rightarrow 0 \text{ при } T \rightarrow \infty.$$

2) З властивостей інтегралів Френеля  $C(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt$ ,  $S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , випливає, що

$$\left| \int_0^1 \frac{\cos(\beta_T t^2)}{\sin(\beta_T t^2)} dt \right| = \int_0^1 \frac{\cos(|\beta_T| t^2)}{\sin(|\beta_T| t^2)} dt = \frac{1}{\sqrt{|\beta_T|}} \left| \int_0^{\sqrt{|\beta_T|}} \frac{\cos(t^2)}{\sin(t^2)} dt \right| \leq \frac{1}{\sqrt{|\beta_T|}} \rightarrow 0 \text{ при } T \rightarrow \infty.$$

3) Оскільки усі чотири випадки у 3) доводяться аналогічно, запишемо доведення одного з них.

$$\left| \int_0^1 \cos(\alpha_T t) \cos(\beta_T t^2) dt \right| \leq \frac{1}{2} \left| \int_0^1 \cos(\alpha_T t + \beta_T t^2) dt \right| + \frac{1}{2} \left| \int_0^1 \cos(\alpha_T t - \beta_T t^2) dt \right| \leq \frac{4}{\sqrt{|\beta_T|}} \rightarrow 0, \text{ при } T \rightarrow \infty, \text{ де остання нерівність є результатом леми 1 у роботі Ivanov, Hladun [12].}$$

■

**Лема 2.** Якщо виконується умова **A1**, то при  $T \rightarrow \infty$

$$\sup_{\phi, \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\cos(\phi t)}{\sin(\phi t)} \varepsilon(t) dt \right| \rightarrow 0 \text{ м.н.} \quad (10)$$

$$\sup_{\psi, \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\cos(\psi t^2)}{\sin(\psi t^2)} \varepsilon(t) dt \right| \rightarrow 0 \text{ м.н.} \quad (11)$$

*Доведення.* У роботі Ivanov, Hladun [12] було доведено, що

$$\sup_{\phi, \psi, \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\cos(\phi t + \psi t^2)}{\sin(\phi t + \psi t^2)} \varepsilon(t) dt \right| \rightarrow 0 \text{ м.н. при } T \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Збіжності (10) та (11) є частинними випадками (12), і можуть бути отримані, якщо взяти у (12)  $\phi = 0$  або  $\psi = 0$ , відповідно.

■

Доведення теореми 1. Продиференціюємо функціонал  $Q_T(\theta)$  за змінними  $A, B, C, D$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_T(\theta_T)}{\partial A} &= -\frac{2}{T} \int_0^T [X(t) - g(t, \theta)] \cos(\phi t) dt = 0; \\ \frac{\partial Q_T(\theta_T)}{\partial B} &= -\frac{2}{T} \int_0^T [X(t) - g(t, \theta)] \sin(\phi t) dt = 0; \\ \frac{\partial Q_T(\theta_T)}{\partial C} &= -\frac{2}{T} \int_0^T [X(t) - g(t, \theta)] \cos(\psi t^2) dt = 0; \\ \frac{\partial Q_T(\theta_T)}{\partial D} &= -\frac{2}{T} \int_0^T [X(t) - g(t, \theta)] \sin(\psi t^2) dt = 0;\end{aligned}\tag{13}$$

Таким чином, отримуємо систему лінійних рівнянь для оцінок  $(A_T, B_T, C_T, D_T)$ , що є підсистемою системи нормальних рівнянь для ОНК  $\theta_T$ :

$$\begin{aligned}& \begin{bmatrix} \langle \cos(\phi T t), \cos(\phi T t) \rangle & \langle \sin(\phi T t), \cos(\phi T t) \rangle & \langle \cos(\psi T t^2), \cos(\phi T t) \rangle & \langle \sin(\psi T t^2), \cos(\phi T t) \rangle \\ \langle \cos(\phi T t), \sin(\phi T t) \rangle & \langle \sin(\phi T t), \sin(\phi T t) \rangle & \langle \cos(\psi T t^2), \sin(\phi T t) \rangle & \langle \sin(\psi T t^2), \sin(\phi T t) \rangle \\ \langle \cos(\phi T t), \cos(\psi T t^2) \rangle & \langle \sin(\phi T t), \cos(\psi T t^2) \rangle & \langle \cos(\psi T t^2), \cos(\psi T t^2) \rangle & \langle \sin(\psi T t^2), \cos(\psi T t^2) \rangle \\ \langle \cos(\phi T t), \sin(\psi T t^2) \rangle & \langle \sin(\phi T t), \sin(\psi T t^2) \rangle & \langle \cos(\psi T t^2), \sin(\psi T t^2) \rangle & \langle \sin(\psi T t^2), \sin(\psi T t^2) \rangle \end{bmatrix} \times \\ & \times \begin{bmatrix} A_T \\ B_T \\ C_T \\ D_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle X(T), \cos(\phi T t) \rangle \\ \langle X(T), \sin(\phi T t) \rangle \\ \langle X(T), \cos(\psi T t^2) \rangle \\ \langle X(T), \sin(\psi T t^2) \rangle \end{bmatrix} = M_T Y_T = X_T,\end{aligned}\tag{14}$$

де використано позначення  $\langle u(t), v(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)v(t)dt$ .

Із леми 1 випливає, що

$$M_T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + o_T(1) & o_T(1) & o_T(1) & o_T(1) \\ o_T(1) & \frac{1}{2} + o_T(1) & o_T(1) & o_T(1) \\ o_T(1) & o_T(1) & \frac{1}{2} + o_T(1) & o_T(1) \\ o_T(1) & o_T(1) & o_T(1) & \frac{1}{2} + o_T(1) \end{bmatrix},\tag{15}$$

де символом  $o_T(1)$  позначено випадкові процеси, що прямують до нуля м.н. при

$T \rightarrow \infty$ .

Розглянемо далі координати вектора  $X_T$ . Будемо використовувати позначення

$$a_T = \frac{\sin T(\phi^0 - \phi_T)}{T(\phi^0 - \phi_T)}, \quad b_T = \frac{1 - \cos T(\phi^0 - \phi_T)}{T(\phi^0 - \phi_T)},$$

$$x_T = \int_0^1 \cos(T^2(\psi^0 - \psi_T)t^2) dt, \quad y_T = \int_0^1 \sin(T^2(\psi^0 - \psi_T)t^2) dt. \quad (16)$$

Маємо

$$X_T^{(1)} = \langle \varepsilon(t), \cos(\phi_T t) \rangle + A^0 \langle \cos(\phi^0 t), \cos(\phi_T t) \rangle +$$

$$+ B^0 \langle \sin(\phi^0 t), \cos(\phi_T t) \rangle + C^0 \langle \cos(\psi^0 t^2), \cos(\phi_T t) \rangle +$$

$$+ D^0 \langle \sin(\psi^0 t^2), \cos(\phi_T t) \rangle. \quad (17)$$

Перший доданок у (17) прямує до нуля м.н. при  $T \rightarrow \infty$  за лемою 2. Далі, з леми 1 випливає, що

$$\langle \cos(\phi^0 t), \cos(\phi_T t) \rangle = \frac{1}{2T} \int_0^T \cos((\phi^0 - \phi_T)t) dt +$$

$$+ \frac{1}{2T} \int_0^T \cos((\phi^0 + \phi_T)t) dt = \frac{a_T}{2} + o_T(1);$$

$$\langle \sin(\phi^0 t), \cos(\phi_T t) \rangle = \frac{1}{2T} \int_0^T \sin((\phi^0 - \phi_T)t) dt +$$

$$+ \frac{1}{2T} \int_0^T \sin((\phi^0 + \phi_T)t) dt = \frac{b_T}{2} + o_T(1);$$

$$\langle \cos(\psi^0 t^2), \cos(\phi_T t) \rangle = o_T(1); \quad \langle \sin(\psi^0 t^2), \cos(\phi_T t) \rangle = o_T(1). \quad (18)$$

Таким чином,

$$X_T^{(1)} = \frac{A^0}{2} a_T + \frac{B^0}{2} b_T + o_T(1). \quad (19)$$

Аналогічно,

$$X_T^{(2)} = \frac{B^0}{2} a_T - \frac{A^0}{2} b_T + o_T(1). \quad (20)$$

Крім цього,

$$X_T^{(3)} = \langle \varepsilon(t), \cos(\psi_T t^2) \rangle + A^0 \langle \cos(\phi^0 t), \cos(\psi_T t^2) \rangle + B^0 \langle \sin(\phi^0 t), \cos(\psi_T t^2) \rangle +$$

$$+ C^0 \langle \cos(\psi^0 t^2), \cos(\psi_T t^2) \rangle + D^0 \langle \sin(\psi^0 t^2), \cos(\psi_T t^2) \rangle. \quad (21)$$

Перший доданок у (21) прямує до нуля м.н. при  $T \rightarrow \infty$  за лемою 2. З леми 1 випливає, що

$$\begin{aligned}
\langle \cos(\psi^0 t^2), \cos(\psi_T t^2) \rangle &= \frac{1}{2T} \int_0^T \cos((\psi^0 - \psi_T)t^2) dt + \\
&\quad + \frac{1}{2T} \int_0^T \cos((\psi^0 + \psi_T)t^2) dt = \frac{x_T}{2} + o_T(1); \\
\langle \sin(\psi^0 t^2), \cos(\psi_T t^2) \rangle &= \frac{1}{2T} \int_0^T \sin((\psi^0 - \psi_T)t^2) dt + \\
&\quad + \frac{1}{2T} \int_0^T \sin((\psi^0 + \psi_T)t^2) dt = \frac{y_T}{2} + o_T(1); \\
\langle \cos(\phi^0 t), \cos(\psi_T t^2) \rangle &= o_T(1); \quad \langle \sin(\phi^0 t), \cos(\psi_T t^2) \rangle = o_T(1). \quad (22)
\end{aligned}$$

З (21) та (22) отримуємо

$$X_T^{(3)} = \frac{C^0}{2} x_T + \frac{D^0}{2} y_T + o_T(1). \quad (23)$$

Аналогічно

$$X_T^{(4)} = \frac{D^0}{2} x_T - \frac{C^0}{2} y_T + o_T(1). \quad (24)$$

Застосовуючи співвідношення (15), (19), (20), (23), (24) до системи рівнянь (14), отримуємо такі вирази для ОНК амплітуд:

$$\begin{aligned}
A_T &= A^0 a_T + B^0 b_T + o_T(1); \quad B_T = B^0 a_T - A^0 b_T + o_T(1); \\
C_T &= C^0 x_T + D^0 y_T + o_T(1); \quad D_T = D^0 x_T - C^0 y_T + o_T(1). \quad (25)
\end{aligned}$$

Оскільки,  $|a_T|, |b_T|, |x_T|, |y_T| \leq 1$ , з (25) випливає, що

$$\begin{aligned}
|A_T| &\leq |A^0| + |B^0| + o_T(1); \quad |B_T| \leq |A^0| + |B^0| + o_T(1); \\
|C_T| &\leq |C^0| + |D^0| + o_T(1); \quad |D_T| \leq |C^0| + |D^0| + o_T(1); \quad (26)
\end{aligned}$$

Нехай,

$$G(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{T} \int_0^T (g(t, \theta_1) - g(t, \theta_2))^2 dt, \quad \theta_1, \theta_2 \in \Theta.$$

З означення ОНК випливає, що

$$0 \geq Q_T(\theta_T) - Q_T(\theta^0) = G(\theta_T, \theta^0) + \frac{2}{T} \int_0^T \varepsilon(t) [g(t, \theta^0) - g(t, \theta_T)] dt. \quad (27)$$

З Лема 2 та нерівностей (26) маємо, що:

$$2T^{-1} \int_0^T \varepsilon(t) [g(t, \theta^0) - g(t, \theta_T)] dt \rightarrow 0 \quad \text{м.н. при } T \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Отже, враховуючи (28), з (27) отримуємо

$$G_T(\theta_T, \theta^0) \rightarrow 0 \quad \text{м.н. при } T \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Перетворимо інтеграл

$$G_T(\theta_T, \theta^0) = \frac{1}{T} \int_0^T [A_T \cos(\phi_T t) + B_T \sin(\phi_T t) + C_T \cos(\psi_T t^2) + D_T \sin(\psi_T t^2) - A^0 \cos(\phi^0 t) - B^0 \sin(\phi^0 t) - C^0 \cos(\psi^0 t^2) - D^0 \sin(\psi^0 t^2)]^2 dt. \quad (30)$$

Користуючись нерівностями (26) та лемою 1, отримуємо

$$\begin{aligned} G_T(\theta_T, \theta^0) &= (A_T)^2 \langle \cos(\phi_T t), \cos(\phi_T t) \rangle + (B_T)^2 \langle \sin(\phi_T t), \sin(\phi_T t) \rangle + \\ &+ (C_T)^2 \langle \cos(\psi_T t^2), \cos(\psi_T t^2) \rangle + (D_T)^2 \langle \sin(\psi_T t^2), \sin(\psi_T t^2) \rangle - \\ &- 2A_T A^0 \langle \cos(\phi_T t), \cos(\phi^0 t) \rangle - 2A_T B^0 \langle \cos(\phi_T t), \sin(\phi^0 t) \rangle - \\ &- 2B_T A^0 \langle \sin(\phi_T t), \cos(\phi^0 t) \rangle - 2B_T B^0 \langle \sin(\phi_T t), \sin(\phi^0 t) \rangle - \\ &- 2C_T C^0 \langle \cos(\psi_T t^2), \cos(\psi^0 t^2) \rangle - 2C_T D^0 \langle \cos(\psi_T t^2), \sin(\psi^0 t^2) \rangle - \\ &- 2D_T C^0 \langle \sin(\psi_T t^2), \cos(\psi^0 t^2) \rangle - 2D_T D^0 \langle \sin(\psi_T t^2), \sin(\psi^0 t^2) \rangle + o_T(1) = \\ &= \frac{1}{2} [(A_T)^2 + (B_T)^2 + (A^0)^2 + (B^0)^2] - [A_T A^0 + B_T B^0] a_T - [A_T B^0 - B_T A^0] b_T + \\ &+ \frac{1}{2} [(C_T)^2 + (D_T)^2 + (C^0)^2 + (D^0)^2] - [C_T C^0 + D_T D^0] x_T - [C_T D^0 - D_T C^0] y_T + o_T(1). \end{aligned} \quad (31)$$

Підставимо рівності (25) у (31):

$$G_T(\theta_T, \theta^0) = \frac{1}{2} ((A^0)^2 + (B^0)^2) (1 - a_T^2 - b_T^2) + \frac{1}{2} ((C^0)^2 + (D^0)^2) (1 - x_T^2 - y_T^2) + o_T(1) \rightarrow 0 \quad \text{м.н. при } T \rightarrow \infty. \quad (32)$$

Оскільки,  $a_T^2 + b_T^2 \leq 1$ ,  $x_T^2 + y_T^2 \leq 1$ , то (29) прямуватиме до нуля тоді і тільки тоді, коли

$$a_T^2 + b_T^2 \rightarrow 1, \quad x_T^2 + y_T^2 \rightarrow 1 \quad \text{м.н. при } T \rightarrow \infty. \quad (33)$$



Дослідимо детальніше кожен з величин у (33). Отримуємо

$$a_T^2 + b_T^2 = \left( \frac{\sin T(\phi^0 - \phi_T)}{T(\phi^0 - \phi_T)} \right)^2 + \left( \frac{1 - \cos T(\phi^0 - \phi_T)}{T(\phi^0 - \phi_T)} \right)^2 = \left( \frac{\sin \frac{T}{2}(\phi^0 - \phi_T)}{\frac{T}{2}(\phi^0 - \phi_T)} \right)^2.$$

Отже, для того, щоб виконувалось  $a_T^2 + b_T^2 \rightarrow 1$ , необхідно і достатньо, щоб

$$T(\phi^0 - \phi_T) \rightarrow 0 \quad \text{м.н. при } T \rightarrow \infty. \quad (34)$$

Маємо далі

$$x_T^2 + y_T^2 = \left( \int_0^1 \cos(\mu_T t^2) dt \right)^2 + \left( \int_0^1 \sin(\mu_T t^2) dt \right)^2, \quad \text{де } \mu_T = T^2(\psi^0 - \psi_T). \quad (35)$$

Нехай  $\Omega_0 \in \Omega$ ,  $P(\Omega_0) = 1$ , є деякою випадковою подією, для якої справедливий результат  $x_T^2 + y_T^2 \rightarrow 1$  м.н. при  $T \rightarrow \infty$ . Якщо для будь-якої елементарної події  $\omega \in \Omega_0$

$$\mu_T \rightarrow 0 \quad \text{м.н. при } T \rightarrow \infty, \quad (36)$$

тоді величина  $x_T^2 + y_T^2$  прямуватиме до 1 м.н. при  $T \rightarrow \infty$  за т. Лебега про мажоровану збіжність.

Припустимо, що (36) не виконується для деякого  $\omega_0 \in \Omega_0$  і розглянемо усі можливі варіанти поведінки випадкової величини  $\mu_T$ .

Нехай, для деякого  $\omega_0 \in \Omega$ ,  $\mu_T \not\rightarrow 0$  при  $T \rightarrow \infty$ . Тоді існує  $\varepsilon_0 > 0$  і послідовність  $T_n$ ,  $n \geq 1$ ,  $T_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , така, що  $|\mu_{T_n}| \geq \varepsilon_0$ ,  $n \geq 1$ . Нехай множина значень  $\{\mu_{T_n}, n \geq 1\}$  є обмеженою, тоді існує підпослідовність  $\{T_{n_k}, k \geq 1\}$  така, що  $\mu_{T_{n_k}} \rightarrow \mu \neq 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Якщо ж множина значень  $\{\mu_{T_n}, n \geq 1\}$  є необмеженою, тоді для деякої підпослідовності  $\{T_{n_k}, k \geq 1\}$   $\mu_{T_{n_k}} \rightarrow +\infty$  або  $-\infty$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Позначимо  $\mu_{T_{n_k}} = \mu_k$ ,  $x_{T_{n_k}} = x_k$ ,  $y_{T_{n_k}} = y_k$ , і, використовуючи попередні виклади, визначимо можливі варіанти збіжності  $\mu_k$  при  $k \rightarrow \infty$ .

- (i)  $\mu_k \rightarrow +\infty$  або  $-\infty$ ;                      (ii)  $\mu_k \rightarrow \mu \neq 0$ .

Покажемо, що для варіантів (i) та (ii)

$$x_k^2 + y_k^2 \not\rightarrow 1 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (37)$$

Справді,

$$\begin{aligned}
x_k^2 + y_k^2 &= \left( \int_0^1 \cos(\mu_k t^2) dt \right)^2 + \left( \int_0^1 \sin(\mu_k t^2) dt \right)^2 = \\
&= \left( \int_0^1 \cos(|\mu_k| t^2) dt \right)^2 + \left( \int_0^1 \sin(|\mu_k| t^2) dt \right)^2 = \\
&= \frac{1}{|\mu_k|} \left( \int_0^{\sqrt{|\mu_k|}} \cos(s^2) ds \right)^2 + \frac{1}{|\mu_k|} \left( \int_0^{\sqrt{|\mu_k|}} \sin(s^2) ds \right)^2 \leq \frac{2}{|\mu_k|}, \quad (38)
\end{aligned}$$

звідки випливає, що для варіанту (i) виконується (37).

У випадку (ii) за т. Лебега про мажоровану збіжність та за нерівністю Коші-Буняковського матимемо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k^2 + y_k^2) = \left( \int_0^1 \cos(\mu t^2) dt \right)^2 + \left( \int_0^1 \sin(\mu t^2) dt \right)^2 \leq 1, \quad (39)$$

і рівність буде досягатися тоді і тільки тоді, коли для деяких сталих  $m_1$  та  $m_2$   
 $\cos(\mu t^2) = m_1, \quad \sin(\mu t^2) = m_2, \quad t \in [0, 1].$

Однак, це неможливо, і тому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k^2 + y_k^2) < 1. \quad (40)$$

Таким чином, отримуємо

$$\mu_T = T^2(\psi^0 - \psi_T) \rightarrow 0 \quad \text{м.н. при } T \rightarrow \infty. \quad (41)$$

Зі співвідношень (25), (34), (41) випливає консистентність оцінок  $A_T, B_T, C_T, D_T$ .

■

### 3 Асимптотична нормальність ОНК параметрів квазічирпованого сигналу

Зробимо додаткове припущення

**A2.** (i) Процес  $\varepsilon$ , що задовольняє умову **A1**(i), має спектральну щільність  $f(\lambda) = \tilde{L} \left( \frac{1}{|\lambda|} \right) |\lambda|^{\alpha-1}$ ,  $\alpha > \frac{1}{2}$ , де  $\tilde{L}$  є повільно змінною на нескінченності функцією, і  $f$  має 4-й спектральний момент.

(ii) Спектральна щільність процесу  $\varepsilon$ , що задовольняє умові **A1(ii)**, має 4-й спектральний момент.

У роботі Ivanov, Hladun [13] наведено приклад одночасного виконання умов **A1** та **A2**.

У цьому розділі отримано другий основний результат роботи.

**Теорема 2.** Нехай виконуються умови **A1** та **A2**. Тоді нормована ОНК

$$\left( T^{\frac{1}{2}}(A_T - A^0), T^{\frac{1}{2}}(B_T - B^0), T^{\frac{3}{2}}(\phi_T - \phi^0), T(C_T - C^0), T(D_T - D^0), T^3(\psi_T - \psi^0) \right)^*$$

є асимптотично нормальною  $N(0, \Sigma)$  при  $T \rightarrow \infty$ , де  $\Sigma$  є матрицею 6 порядку, що задана формулами (112)-(114), а також (85), (86) та (81).

Доведенню теореми 2 передують важливі леми, які будуть сформульовані після того, як ми їх доведемо.

Позначимо

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} g(t, \theta) = g_i(t, \theta), \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} g(t, \theta) = g_{ij}(t, \theta), \quad i, j = \overline{1, 6}. \quad (42)$$

Запишемо систему нормальних рівнянь для  $\theta_T$ :

$$0 = Q'_T(\theta_T) = \left( -2 \int_0^T [X(t) - g(t, \theta_T)] g_i(t, \theta_T) dt \right)_{i=1}^6, \quad (43)$$

де

$$\begin{aligned} g_1(t, \theta) &= \cos(\phi t); & g_2(t, \theta) &= \sin(\phi t); \\ g_3(t, \theta) &= -At \sin(\phi t) + Bt \cos(\phi t); \\ g_4(t, \theta) &= \cos(\psi t^2); & g_5(t, \theta) &= \sin(\psi t^2); \\ g_6(t, \theta) &= -Ct^2 \sin(\psi t^2) + Dt^2 \cos(\psi t^2). \end{aligned}$$

Зауваження. У данному розділі ми використовуємо таке ж значення  $Q_T(\theta)$ , як і у формулі (9), але без нормувального множника  $\frac{1}{T}$ .

Розглянемо матрицю Гессе

$$Q''_T(\theta) = \left( -2 \int_0^T [X(t) - g(t, \theta)] g_{ij}(t, \theta) dt + 2 \int_0^T g_i(t, \theta) g_j(t, \theta) dt \right)_{i,j=1}^6 \quad (44)$$

та розклад кожного рядка (44) в ряд Тейлора зі своїм значенням  $\bar{\theta}$  у кожному рядку:

$$-\frac{1}{2}Q'_T(\theta^0) = \frac{1}{2}Q'_T(\theta_T) - \frac{1}{2}Q'_T(\theta^0) = \frac{1}{2}Q''_T(\bar{\theta})(\theta_T - \theta^0). \quad (45)$$

Введемо діагональну матрицю

$$d_T = \text{diag}(T^{\frac{1}{2}}, T^{\frac{1}{2}}, T^{\frac{3}{2}}, T^{\frac{1}{2}}, T^{\frac{1}{2}}, T^{\frac{5}{2}}, ). \quad (46)$$

Тоді співвідношення (45) можна переписати у вигляді

$$d_T(\theta_T - \theta^0) = \left( d_T^{-1} \left( \frac{1}{2} Q''_T(\bar{\theta}) \right) d_T^{-1} \right)^{-1} d_T^{-1} \left( \frac{1}{2} Q'_T(\theta^0) \right). \quad (47)$$

Дослідимо спочатку асимптотичну поведінку матриці

$$\begin{aligned} d_T^{-1} \left( \frac{1}{2} Q''_T(\bar{\theta}) \right) d_T^{-1} &= d_T^{-1} \left( \int_0^T [g(t, \bar{\theta}) - g(t, \theta^0)] g_{ij}(t, \bar{\theta}) dt \right)_{i,j=1}^6 d_T^{-1} - \\ &- d_T^{-1} \left( \int_0^T \varepsilon(t) g_{ij}(t, \bar{\theta}) dt \right)_{i,j=1}^6 d_T^{-1} + d_T^{-1} \left( \int_0^T g_i(t, \bar{\theta}) g_j(t, \bar{\theta}) dt \right)_{i,j=1}^6 d_T^{-1} = \\ &= J^{(1)} - J^{(2)} + J^{(3)}. \end{aligned} \quad (48)$$

Покажемо, що при  $T \rightarrow \infty$  матриці  $J^{(1)}$  та  $J^{(2)}$  збігаються до нульової матриці м.н. Розглянемо матрицю

$$d_T^{-1} (g_{ij}(t, \bar{\theta})) d_T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-t \sin(\bar{\phi}t)}{T^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t \cos(\bar{\phi}t)}{T^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-t \sin(\bar{\phi}t)}{T^2} & \frac{t \cos(\bar{\phi}t)}{T^2} & \frac{-t^2 (\bar{A} \cos(\bar{\phi}t) + \bar{B} \sin(\bar{\phi}t))}{T^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-t^2 \sin(\bar{\psi}t^2)}{T^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t^2 \cos(\bar{\psi}t^2)}{T^3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-t^2 \sin(\bar{\psi}t^2)}{T^3} & \frac{t^2 \cos(\bar{\psi}t^2)}{T^3} & \frac{-t^4 (\bar{C} \cos(\bar{\psi}t^2) + \bar{D} \sin(\bar{\psi}t^2))}{T^5} \end{bmatrix} \quad (49)$$

З теореми 1 випливає, що для  $t \in [0, T]$

$$|g(t, \bar{\theta}) - g(t, \theta^0)| = |\bar{A} \cos(\bar{\phi}t) + \bar{B} \sin(\bar{\phi}t) + \bar{C} \cos(\bar{\psi}t^2) + \bar{D} \sin(\bar{\psi}t^2) -$$

$$\begin{aligned}
& -A^0 \cos(\phi^0 t) - B^0 \sin(\phi^0 t) - C^0 \cos(\psi^0 t^2) - D^0 \sin(\psi^0 t^2) | \leq \\
& \leq |(\bar{A} - A^0) \cos(\bar{\phi} t) + (\bar{B} - B^0) \sin(\bar{\phi} t) + A^0 (\cos(\bar{\phi} t) - \cos(\phi^0 t)) + \\
& + B^0 (\sin(\bar{\phi} t) - \sin(\phi^0 t))| + |(\bar{C} - C^0) \cos(\bar{\psi} t^2) + (\bar{D} - D^0) \sin(\bar{\psi} t^2) + \\
& + C^0 (\cos(\bar{\psi} t^2) - \cos(\psi^0 t^2)) + D^0 (\sin(\bar{\psi} t^2) - \sin(\psi^0 t^2))| \leq \\
& \leq |\bar{A} - A^0| + |\bar{B} - B^0| + (|A^0| + |B^0|) |\bar{\phi} - \phi^0| t + |\bar{C} - C^0| + |\bar{D} - D^0| + |\bar{\psi} - \psi^0| t^2 \leq \\
& \leq |A_T - A^0| + |B_T - B^0| + (|A^0| + |B^0|) |\phi_T - \phi^0| T + |C_T - C^0| + |D_T - D^0| + |\psi_T - \psi^0| T^2 = \\
& = u_T \rightarrow 0 \quad \text{м.н. при } T \rightarrow \infty. \quad (50)
\end{aligned}$$

Маємо далі

$$\begin{aligned}
& |J_{13}^{(1)}| \leq \frac{u_T}{2}; \quad |J_{23}^{(1)}| \leq \frac{u_T}{2}; \quad |J_{46}^{(1)}| \leq \frac{u_T}{3}; \quad |J_{56}^{(1)}| \leq \frac{u_T}{3}; \\
& |J_{33}^{(1)}| \leq \frac{u_T}{T^3} \int_0^T t^2 |\bar{A} \cos(\bar{\phi} t) + \bar{B} \sin(\bar{\phi} t)| dt = \\
& = \frac{u_T}{T^3} \int_0^T t^2 |(\bar{A} - A^0) \cos(\bar{\phi} t) + (\bar{B} - B^0) \sin(\bar{\phi} t) + A^0 \cos(\bar{\phi} t) + B^0 \sin(\bar{\phi} t)| dt \leq \\
& \leq \frac{1}{3} (|A_T - A^0| + |B_T - B^0| + |A^0| + |B^0|) u_T; \\
& |J_{66}^{(1)}| \leq \frac{u_T}{T^5} \int_0^T t^4 |\bar{C} \cos(\bar{\psi} t^2) + \bar{D} \sin(\bar{\psi} t^2)| dt = \\
& = \frac{u_T}{T^5} \int_0^T t^4 |(\bar{C} - C^0) \cos(\bar{\psi} t^2) + (\bar{D} - D^0) \sin(\bar{\psi} t^2) + C^0 \cos(\bar{\psi} t^2) + D^0 \sin(\bar{\psi} t^2)| dt \leq \\
& \leq \frac{1}{5} (|C_T - C^0| + |D_T - D^0| + |C^0| + |D^0|) u_T. \quad (51)
\end{aligned}$$

Усі інші елементи матриці  $J^{(1)}$  дорівнюють нулю. Тому з (51) випливає, що

$$J^{(1)} \rightarrow 0 \quad \text{м.н. при } T \rightarrow \infty. \quad (52)$$

Розглянемо далі матрицю  $J^{(2)}$ .

$$\begin{aligned}
|J_{13}^{(2)}| & = \left| \frac{1}{T^2} \int_0^T \varepsilon(t) t \sin(\bar{\phi} t) dt \right| \leq \left| \frac{1}{T^2} \int_0^T \varepsilon(t) t (\sin(\bar{\phi} t) - \sin(\phi^0 t)) dt \right| + \\
& + \left| \frac{1}{T^2} \int_0^T \varepsilon(t) t \sin(\phi^0 t) dt \right| = I_1(T) + I_2(T); \quad (53)
\end{aligned}$$

$$I_1(T) \leq \frac{1}{T} \int_0^T |\varepsilon(t)| dt \cdot |\phi_T - \phi^0| T,$$

де другий множник прямує до нуля при  $T \rightarrow \infty$  за теоремою 1.

З умови **A1** випливає, що

$$\frac{1}{T} \int_0^T |\varepsilon(t)| dt \leq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon^2(t) dt \right) \rightarrow \frac{1}{2} (1 + B(0))$$

м.н. при  $T \rightarrow \infty$ , тому  $I_1(T) \rightarrow 0$  м.н. при  $T \rightarrow \infty$ .

З іншого боку, за умови **A1(i)** маємо

$$\begin{aligned} EI_2^2(T) &= T^{-4} \int_0^T \int_0^T tsB(t-s) \sin(\phi^0 t) \sin(\phi^0 s) dt ds \leq \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T B(t-s) dt ds = \\ &= \int_0^T \int_0^T B(T(t-s)) dt ds = \int_{-1}^1 (1-|t|) B(Tt) dt \leq 2 \int_0^1 B(Tt) dt \leq \frac{2}{1-\alpha} B(T). \end{aligned}$$

Покладемо  $T_n = n^\beta$ , де  $\beta\alpha > 1$ . Тоді  $I_2(T_n) \rightarrow 0$  м.н. при  $n \rightarrow \infty$ .

Розглянемо послідовність випадкових величин

$$\sup_{T_n \leq T \leq T_{n+1}} |I_2(T) - I_2(T_n)| \leq \left( \left( \frac{T_{n+1}}{T_n} \right)^2 - 1 \right) I_2(T_n) + I_3(T_n),$$

$$I_3(T_n) = \frac{1}{T_n} \int_{T_n}^{T_{n+1}} |\varepsilon(t)| dt.$$

Оскільки,

$$EI_3^2(T_n) \leq \frac{1}{T_n^2} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_{T_n}^{T_{n+1}} E|\varepsilon(t)\varepsilon(s)| dt ds \leq B(0) \left( \frac{T_{n+1} - T_n}{T_n} \right)^2 = O(n^{-2}),$$

то  $I_3(T_n) \rightarrow 0$  м.н. при  $n \rightarrow \infty$ , а, отже,  $J_{13}^{(2)} \rightarrow 0$  м.н. при  $T \rightarrow \infty$ .

За умови **A1(ii)** також отримуємо, що  $J_{13}^{(2)} \rightarrow 0$  м.н. при  $T \rightarrow \infty$ . Доведення цього факту аналогічно попередньому, беручи до уваги співвідношення

$$\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T |B(t-s)| dt ds = O(T^{-1}).$$

Аналогічно до  $J_{13}^{(2)}$  отримуємо, що також  $J_{23}^{(2)}, J_{46}^{(2)}, J_{56}^{(2)} \rightarrow 0$  м.н. при  $T \rightarrow \infty$ .

Оскільки доведення того факту, що елементи  $J_{33}^{(2)}$  та  $J_{66}^{(2)}$  збігаються до нуля

м.н. при  $T \rightarrow \infty$  є аналогічним, доведемо це лише для елементу  $J_{66}^{(2)}$ :

$$\begin{aligned}
\left| J_{66}^{(2)} \right| &= \left| \frac{1}{T^5} \int_0^T \varepsilon(t) t^4 [(\bar{C} - C^0) \cos(\bar{\psi} t^2) + (\bar{D} - D^0) \sin(\bar{\psi} t^2) + \right. \\
&\quad + C^0 (\cos(\bar{\psi} t^2) - \cos(\psi^0 t^2)) + D^0 (\sin(\bar{\psi} t^2) - \sin(\psi^0 t^2)) + C^0 \cos(\psi^0 t^2) + \\
&\quad \left. + D^0 \sin(\psi^0 t^2)] dt \right| \leq [ |C_T - C^0| + |D_T - D^0| + (|C^0| + |D^0|) |\psi_T - \psi^0| T^2 ] \cdot \\
&\quad \cdot \left[ \frac{1}{T} \int_0^T |\varepsilon(t)| dt + \left| \frac{C^0}{T^5} \int_0^T \varepsilon(t) t^4 \cos(\psi^0 t^2) dt \right| + \left| \frac{D^0}{T^5} \int_0^T \varepsilon(t) t^4 \sin(\psi^0 t^2) dt \right| \right],
\end{aligned} \tag{54}$$

де перший доданок прямує до нуля м.н. за теоремою 1; збіжність м.н. до нуля другого та третього доданків доводиться аналогічно до збіжності  $I_2(T)$ . Отже,

$$J^{(2)} \rightarrow 0 \quad \text{м.н. при } T \rightarrow \infty. \tag{55}$$

Далі розглянемо матрицю  $J^{(3)}$ . З теореми 1 отримуємо, що (див. Іванов, Нладун [13])

$$\lim_{T \rightarrow \infty} J^{(3)} = \lim_{T \rightarrow \infty} d_T^{-1} \left( \int_0^T g_i(t, \bar{\theta}) g_j(t, \bar{\theta}) dt \right)_{i,j=1}^6 = \lim_{T \rightarrow \infty} d_T^{-1} J^{(3)}(\theta^0),$$

$$J_{11}^{(3)}(\theta^0) = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\phi^0 t) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(2\phi^0 t) dt,$$

$$J_{12}^{(3)}(\theta^0) = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\phi^0 t) \sin(\phi^0 t) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T \sin(2\phi^0 t) dt,$$

$$\begin{aligned}
J_{13}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \cos(\phi^0 t) t (-A^0 \sin(\phi^0 t) + B^0 \cos(\phi^0 t)) dt = \\
&= -\frac{A^0}{2T^2} \int_0^T t \sin(2\phi^0 t) dt + \frac{B^0}{4} + \frac{B^0}{2T^2} \int_0^T t \cos(2\phi^0 t) dt,
\end{aligned}$$

$$J_{22}^{(3)}(\theta^0) = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\phi^0 t) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(2\phi^0 t) dt,$$

$$\begin{aligned}
J_{23}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \sin(\phi^0 t) t (-A^0 \sin(\phi^0 t) + B^0 \cos(\phi^0 t)) dt = \\
&= -\frac{A^0}{4} + \frac{A^0}{2T^2} \int_0^T t \cos(2\phi^0 t) dt + \frac{B^0}{2T^2} \int_0^T t \sin(2\phi^0 t) dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{33}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T^3} \int_0^T (-A^0 t \sin(\phi^0 t) + B^0 t \cos(\phi^0 t))^2 dt = \\
&= \frac{(A^0)^2 + (B^0)^2}{6} - \frac{(A^0)^2}{2T^3} \int_0^T t^2 \cos(2\phi^0 t) dt + \frac{B^0}{2T^3} \int_0^T t^2 \cos(2\phi^0 t) dt - \\
&\quad - \frac{A^0 B^0}{T^3} \int_0^T t^2 \sin(2\phi^0 t) dt; \quad (56)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{41}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\psi^0 t^2) \cos(\phi^0 t) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt + \\
&\quad + \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{42}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\psi^0 t^2) \sin(\phi^0 t) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T \sin(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt + \\
&\quad + \frac{1}{2T} \int_0^T \sin(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt; ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{43}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \cos(\psi^0 t^2) t (-A^0 \sin(\phi^0 t) + B^0 \cos(\phi^0 t)) dt = \\
&= -\frac{A^0}{2T^2} \int_0^T t \sin(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt - \frac{A^0}{2T^2} \int_0^T t \sin(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt + \\
&\quad + \frac{B^0}{2T^2} \int_0^T t \cos(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt + \frac{B^0}{2T^2} \int_0^T t \cos(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{51}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\psi^0 t^2) \cos(\phi^0 t) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T \sin(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt - \\
&\quad - \frac{1}{2T} \int_0^T \sin(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{52}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\psi^0 t^2) \sin(\phi^0 t) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt - \\
&\quad - \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{53}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \sin(\psi^0 t^2) t (-A^0 \sin(\phi^0 t) + B^0 \cos(\phi^0 t)) dt = \\
&= -\frac{A^0}{2T^2} \int_0^T t \cos(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt + \frac{A^0}{2T^2} \int_0^T t \cos(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt + \\
&\quad + \frac{B^0}{2T^2} \int_0^T t \sin(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt - \frac{B^0}{2T^2} \int_0^T t \sin(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt,
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
J_{61}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T^3} \int_0^T t^2 (-C^0 \sin(\psi^0 t^2) + D^0 \cos(\psi^0 t^2)) \cos(\phi^0 t) dt = \\
&= -\frac{C^0}{2T^3} \int_0^T t^2 \sin(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt + \frac{C^0}{2T^3} \int_0^T t^2 \cos(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt + \\
&\quad + \frac{D^0}{2T^3} \int_0^T t^2 \cos(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt + \frac{D^0}{2T^3} \int_0^T t^2 \sin(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt, \\
J_{62}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T^3} \int_0^T t^2 (-C^0 \sin(\psi^0 t^2) + D^0 \cos(\psi^0 t^2)) \sin(\phi^0 t) dt = \\
&= -\frac{C^0}{2T^3} \int_0^T t^2 \cos(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt + \frac{C^0}{2T^3} \int_0^T t^2 \cos(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt + \\
&\quad + \frac{D^0}{2T^3} \int_0^T t^2 \sin(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt + \frac{D^0}{2T^3} \int_0^T t^2 \sin(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt, \\
J_{63}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T^4} \int_0^T t^2 (-C^0 \sin(\psi^0 t^2) + D^0 \cos(\psi^0 t^2)) t (-A^0 \sin(\phi^0) + B^0 \cos(\phi^0)) dt = \\
&= \frac{A^0 C^0}{2T^4} \int_0^T t^3 \cos(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt - \frac{A^0 C^0}{2T^4} \int_0^T t^3 \cos(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt - \\
&\quad - \frac{A^0 D^0}{2T^4} \int_0^T t^3 \cos(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt - \frac{A^0 D^0}{2T^4} \int_0^T t^3 \sin(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt - \\
&\quad - \frac{B^0 C^0}{2T^4} \int_0^T t^3 \sin(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt + \frac{B^0 C^0}{2T^4} \int_0^T t^3 \sin(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt + \\
&\quad + \frac{B^0 D^0}{2T^4} \int_0^T t^3 \cos(\phi^0 t + \psi^0 t^2) dt + \frac{B^0 D^0}{2T^4} \int_0^T t^3 \cos(\phi^0 t - \psi^0 t^2) dt; \quad (57) \\
J_{44}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\psi^0 t^2) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(2\psi^0 t^2) dt, \\
J_{45}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\psi^0 t^2) \sin(\psi^0 t^2) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T \sin(2\psi^0 t^2) dt, \\
J_{46}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T^3} \int_0^T \cos(\psi^0 t^2) t^2 (-C^0 \sin(\psi^0 t^2) + D^0 \cos(\psi^0 t^2)) dt = \\
&= -\frac{C^0}{2T^3} \int_0^T t^2 \sin(2\psi^0 t^2) dt + \frac{D^0}{6} + \frac{D^0}{2T^3} \int_0^T t^2 \cos(2\psi^0 t^2) dt, \\
J_{55}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\psi^0 t^2) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(2\psi^0 t^2) dt, \\
J_{56}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T^3} \int_0^T \sin(\psi^0 t^2) t^2 (-C^0 \sin(\psi^0 t^2) + D^0 \cos(\psi^0 t^2)) dt = \\
&= -\frac{C^0}{6} + \frac{C^0}{2T^3} \int_0^T t^2 \cos(2\psi^0 t^2) dt + \frac{D^0}{2T^3} \int_0^T t^2 \sin(2\psi^0 t^2) dt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{66}^{(3)}(\theta^0) &= \frac{1}{T^5} \int_0^T (-C^0 t^2 \sin(\psi^0 t^2) + D^0 t^2 \cos(\psi^0 t^2))^2 dt = \\
&= \frac{(C^0)^2 + (D^0)^2}{10} - \frac{(C^0)^2}{2T^5} \int_0^T t^4 \cos(2\psi^0 t^2) dt + \frac{D^0}{2T^5} \int_0^T t^4 \cos(2\psi^0 t^2) dt - \\
&\quad - \frac{C^0 D^0}{T^5} \int_0^T t^4 \sin(2\psi^0 t^2) dt. \quad (58)
\end{aligned}$$

Використовуючи метод інтегрування частинами, можна показати, що для  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,

$$\int_0^T t^n \frac{\cos}{\sin}(\alpha t) dt = O(T^n), \quad t \rightarrow \infty. \quad (59)$$

Далі з властивостей інтегралів Френеля отримуємо, що для  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , (див. Ivanov, Hladun [12])

$$\left| \int_0^T \frac{\cos}{\sin}(\alpha t + \beta t^2) dt \right| \leq \frac{4}{\sqrt{|\beta|}}. \quad (60)$$

З формули 2.655 таблиць інтегралів Градштейна, Рижика [17] випливає, що для  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^T t^n \frac{\cos}{\sin}(\alpha t + \beta t^2) dt = O(T^{n-1}), \quad T \rightarrow \infty. \quad (61)$$

Таким чином, застосовуючи формули (59)-(61) до (56)-(59), можемо сформулювати наступну лему.

**Лема 3.** Якщо виконується умова **A1**, то

$$d_T^{-1} \left( \frac{1}{2} Q''(\bar{\theta}) \right) d_T^{-1} \rightarrow H \quad \text{м.н. при } T \rightarrow \infty, \quad (62)$$

де  $H = \text{diag}(H_1, H_2)$  – блочно-діагональна матриця з блоками

$$H_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{B^0}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{A^0}{2} \\ \frac{B^0}{2} & -\frac{A^0}{2} & \frac{(A^0)^2 + (B^0)^2}{3} \end{bmatrix}; \quad H_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{D^0}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{C^0}{3} \\ \frac{D^0}{3} & -\frac{C^0}{3} & \frac{(C^0)^2 + (D^0)^2}{5} \end{bmatrix}.$$

Введемо діагональну матрицю

$$s_T = \text{diag} \left( 1, 1, 1, T^{\frac{1}{2}}, T^{\frac{1}{2}}, T^{\frac{3}{2}} \right). \quad (63)$$

Розглянемо гауссівський випадковий вектор  $s_T d_T^{-1} \left( -\frac{1}{2} Q'_T(\theta^0) \right) = \xi_T$ ,

$$\begin{aligned} \xi_T = & \left( \frac{1}{T^{\frac{1}{2}}} \int_0^T \varepsilon(t) \cos(\phi^0 t) dt, \frac{1}{T^{\frac{1}{2}}} \int_0^T \varepsilon(t) \sin(\phi^0 t) dt, \frac{1}{T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T \varepsilon(t) t (-A^0 \sin(\phi^0 t) + \right. \\ & + B^0 \cos(\phi^0 t)) dt, \int_0^T \varepsilon(t) \cos(\psi^0 t^2) dt, \int_0^T \varepsilon(t) \sin(\psi^0 t^2) dt, \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon(t) t^2 (-C^0 \sin(\psi^0 t^2) + \\ & \left. + D^0 \cos(\psi^0 t^2)) dt \right)^* = (\xi_T^1, \xi_T^2, \xi_T^3, \xi_T^4, \xi_T^5, \xi_T^6)^*. \quad (64) \end{aligned}$$

Позначимо  $W_T = (W_{ij,T})_{i,j=1}^6 = E \xi_T \xi_T^*$  коваріаційну матрицю вектора  $\xi_T$ . Розділимо коваріаційну матрицю  $W_T$  на блоки розмірності  $3 \times 3$  наступним чином

$$W_T = \begin{bmatrix} W_T^{(11)} & W_T^{(12)} \\ W_T^{(21)} & W_T^{(22)} \end{bmatrix}, \quad (65)$$

де  $W_T^{(11)} = E \xi_T^{(1)} \left( \xi_T^{(1)} \right)^*$ ,  $W_T^{(22)} = E \xi_T^{(2)} \left( \xi_T^{(2)} \right)^*$  – коваріаційні матриці векторів  $\xi_T^{(1)} = (\xi_T^1, \xi_T^2, \xi_T^3)$  і  $\xi_T^{(2)} = (\xi_T^4, \xi_T^5, \xi_T^6)$ , відповідно  $W_T^{(12)} = \left( W_T^{(21)} \right)^* = E \xi_T^{(1)} \left( \xi_T^{(2)} \right)^*$  – взаємні коваріаційні матриці векторів  $\xi_T^{(1)}$  і  $\xi_T^{(2)}$ .

Для знаходження граничного розподілу ОНК  $\hat{\theta}_T$  нам потрібно дослідити граничну при  $T \rightarrow \infty$  поведінку матриці  $W_T$ .

1) Блок  $W_T^{(11)}$ .

Нехай  $\tilde{g}(t, \theta)$ ,  $(t, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \Theta$ ,  $\Theta \subset \mathbb{R}^q$  – відкрита множина, є деякою неперервно диференційованою функцією на  $\Theta$ .

Введемо сім'ю матричних мір  $\mu_T(d\lambda, \theta)$  на  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ , де  $\mathcal{B}$  –  $\sigma$ -алгебра борелевих підмножин  $\mathbb{R}$  з матричними щільностями  $\left( \mu_T^{jl} \right)_{j,l=1}^q$ ,

$$\mu_T^{jl}(\lambda\theta) = \tilde{g}_T^j(\lambda\theta) \tilde{g}_T^l(\lambda\theta) \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}_T^j(\lambda\theta)|^2 d\lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}_T^l(\lambda\theta)|^2 d\lambda \right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\tilde{g}_T^j(\lambda\theta) = \int_0^T e^{i\lambda t} \tilde{g}_j(t, \theta) dt, \quad \tilde{g}_j = \frac{\partial \tilde{g}(t, \theta)}{\partial \theta_j}, \quad j, l = \overline{1, q}. \quad (66)$$

Позначимо

$$\tilde{d}_T^2(\theta) = \text{diag} \left( \tilde{d}_{iT}^2(\theta) \right)_{i=1}^q, \quad \tilde{d}_{iT}^2(\theta) = \int_0^T \tilde{g}_i^2(t, \theta) dt, \quad i = \overline{1, q}. \quad (67)$$

Зауважимо, що за тотожністю Планшереля

$$\tilde{d}_{jT}^2(\theta) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}^j(\lambda, \theta)|^2 d\lambda. \quad (68)$$

Припустимо, що сім'я мір  $\mu_T(d\lambda, \theta)$  слабо збігається при  $T \rightarrow \infty$  до додатно визначеної матричної міри  $\mu(d\lambda, \theta)$ .

Додатна визначеність матричної міри  $\mu(d\lambda, \theta)$  означає, що елементи  $\mu^{jl}(d\lambda, \theta)$  матриці  $\mu_T(d\lambda, \theta) \in$  комплексні заряди обмеженої варіації та матриця  $\mu_T(B, \theta)$  невід'ємно визначена для будь-якої множини  $B \in \mathcal{B}$ , причому  $\mu(\mathbb{R}, \theta)$  – додатно визначена матриця.

**Означення 2.** (Grenander [18]; Ibragimov, Rozanov [19]; Ivanov et al [5]) Міра  $\mu(d\lambda, \theta)$  називається спектральною мірою функції  $\tilde{g}(t, \theta)$ , або, що те ж саме, спектральною мірою вектор-функції  $\nabla \tilde{g}(t, \theta)$ .

Нехай,  $\tilde{g}(t, \theta^0) = A^0 \cos(\phi^0 t) + B^0 \sin(\phi^0 t)$ . Тоді спектральна міра  $\mu(d\lambda, \theta^0)$  має вигляд (див. Ivanov et al [5])

$$\begin{pmatrix} \delta & i\rho & \bar{\beta} \\ -i\rho & \delta & \bar{\gamma} \\ \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad (69)$$

де

$$\beta = \frac{\sqrt{3}(B^0\delta + iA^0\rho)}{2\sqrt{(A^0)^2 + (B^0)^2}}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{3}(-A^0\delta + iB^0\rho)}{2\sqrt{(A^0)^2 + (B^0)^2}},$$

міра  $\delta = \delta(d\lambda)$  та заряд  $\rho = \rho(d\lambda)$  зосереджені у точках  $\pm\phi^0$ , причому  $\delta\{\pm\phi^0\} = \frac{1}{2}$ ,  $\rho(\{\pm\phi^0\}) = \pm\frac{1}{2}$ .

Робота Ivanov et al [5], [20] містить результат, який для функції  $\tilde{g}(t, \theta^0) = A^0 \cos(\phi^0 t) + B^0 \sin(\phi^0 t)$  може бути сформульованим наступним чином.

**Лема 4.** Якщо виконано умову **A1** та послаблену умову **A2(i)**, а саме: процес  $\varepsilon$ , що задовольняє умову **A1(i)**, має спектральну щільність  $f(\lambda) = \tilde{L}(\frac{1}{|\lambda|})|\lambda|^{\alpha-1}$ ,

де  $\tilde{L}$  – повільно змінна на нескінченності функція, то випадковий вектор  $\xi_T = \tilde{d}_T^{-1}(\theta) \int_0^T \varepsilon(t) \nabla \tilde{g}(t, \theta) dt$  має граничну при  $T \rightarrow \infty$  коваріаційну матрицю  $\sigma = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \mu(d\lambda, \theta^0)$ .

Враховуючи (69) та Лему 4, отримуємо

$$\sigma = 2\pi f(\phi^0) \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}B^0}{2\sqrt{(A^0)^2+(B^0)^2}} \\ 0 & 1 & \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{(A^0)^2+(B^0)^2}} \\ \frac{\sqrt{3}B^0}{2\sqrt{(A^0)^2+(B^0)^2}} & \frac{-\sqrt{3}A^0}{2\sqrt{(A^0)^2+(B^0)^2}} & 1 \end{bmatrix}. \quad (70)$$

Також зауважимо, що для даної тригонометричної функції

$$\tilde{d}_{1T}(\theta^0) \sim \frac{T^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{d}_{2T}(\theta^0) \sim \frac{T^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{d}_{3T}(\theta^0) \sim T^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1}{6} [(A^0)^2 + (B^0)^2]}. \quad (71)$$

Тому, враховуючи (70) і (71), коваріаційна матриця  $W_T^{(11)}$  випадкового вектора  $\xi_T^{(1)}$  може бути знайдена, як

$$W^{(11)} = Q\sigma Q, \text{ де } Q = \text{diag} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{(A^0)^2 + (B^0)^2}{6}} \right). \quad (72)$$

Отже

$$W^{(11)} = 2\pi f(\phi^0) \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{B^0}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{A^0}{2} \\ \frac{B^0}{2} & -\frac{A^0}{2} & \frac{(A^0)^2+(B^0)^2}{3} \end{bmatrix} = 2\pi f(\phi^0) H_1. \quad (73)$$

2) Блок  $W_T^{(22)}$ .

Позначимо  $-C^0 \sin(\psi^0 t^2) + D^0 \cos(\psi^0 t^2) = \beta^0 \cos(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0)$ , де  $\beta^0 = \sqrt{(C^0)^2 + (D^0)^2}$ ,  $\text{tg} \hat{\beta}^0 = \frac{C^0}{D^0}$ . Також будемо використовувати позначення

$$\begin{aligned} \mu_T(\lambda, \hat{\beta}^0) &= \begin{bmatrix} \mu_{11,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) & \mu_{12,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) \\ \mu_{21,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) & \mu_{22,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \int_0^T \cos(\lambda t) \cos(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt & \int_0^T \cos(\lambda t) \sin(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt \\ \int_0^T \sin(\lambda t) \cos(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt & \int_0^T \sin(\lambda t) \sin(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned}
\mu_{11,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) &= \frac{1}{2} \int_0^T \cos(\psi^0 t^2 - \lambda t + \hat{\beta}^0) dt \pm \frac{1}{2} \int_0^T \cos(\psi^0 t^2 + \lambda t + \hat{\beta}^0) dt = \\
\mu_{22,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) &= \frac{1}{2} \int_0^T \cos \left( \psi^0 \left( t - \frac{\lambda}{2\psi^0} \right)^2 - \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \right) dt \pm \\
&\quad \pm \frac{1}{2} \int_0^T \cos \left( \psi^0 \left( t + \frac{\lambda}{2\psi^0} \right)^2 - \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \right) dt = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\psi^0}} \int_{-\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}}^{T\sqrt{\psi^0} - \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \cos \left( s^2 - \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \right) ds \pm \\
&\quad \pm \frac{1}{2\sqrt{\psi^0}} \int_{\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}}^{T\sqrt{\psi^0} + \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \cos \left( s^2 - \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \right) ds = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\psi^0}} \left[ \cos \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left( \int_0^{T\sqrt{\psi^0} - \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \cos(s^2) ds - \int_0^{-\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \cos(s^2) ds \right) + \right. \\
&+ \sin \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left( \int_0^{T\sqrt{\psi^0} - \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \sin(s^2) ds - \int_0^{-\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \sin(s^2) ds \right) \pm \\
&\quad \pm \cos \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left( \int_0^{T\sqrt{\psi^0} + \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \cos(s^2) ds - \int_0^{\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \cos(s^2) ds \right) \pm \\
&\quad \left. \pm \sin \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left( \int_0^{T\sqrt{\psi^0} + \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \sin(s^2) ds - \int_0^{\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \sin(s^2) ds \right) \right]; \quad (75)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{12,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) &= \frac{1}{2} \int_0^T \sin(\psi^0 t^2 + \lambda t + \hat{\beta}^0) dt \pm \frac{1}{2} \int_0^T \sin(\psi^0 t^2 - \lambda t + \hat{\beta}^0) dt = \\
\mu_{21,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) &= \frac{1}{2} \int_0^T \sin \left( \psi^0 \left( t + \frac{\lambda}{2\psi^0} \right)^2 - \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \right) dt \pm \\
&\quad \pm \frac{1}{2} \int_0^T \sin \left( \psi^0 \left( t - \frac{\lambda}{2\psi^0} \right)^2 - \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \right) dt = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\psi^0}} \int_{\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}}^{T\sqrt{\psi^0} + \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \sin \left( s^2 - \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \right) ds \pm \\
&\quad \pm \frac{1}{2\sqrt{\psi^0}} \int_{-\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}}^{T\sqrt{\psi^0} - \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \sin \left( s^2 - \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \right) ds = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\psi^0}} \left[ \cos \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left( \int_0^{T\sqrt{\psi^0} + \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \sin(s^2) ds - \int_0^{\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \sin(s^2) ds \right) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sin \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left( \int_0^{T\sqrt{\psi^0} + \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \cos(s^2) ds - \int_0^{\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \cos(s^2) ds \right) \pm \\
& \pm \cos \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left( \int_0^{T\sqrt{\psi^0} - \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \sin(s^2) ds - \int_0^{-\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \sin(s^2) ds \right) \mp \\
& \mp \sin \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left( \int_0^{T\sqrt{\psi^0} - \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \cos(s^2) ds - \int_0^{-\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}}} \cos(s^2) ds \right) \Big]. \quad (76)
\end{aligned}$$

Використовуючи введені вище позначення для інтегралів Френеля, отримуємо

$$\begin{aligned}
\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T(\lambda, \hat{\beta}^0) &= \begin{bmatrix} \mu_{11}(\lambda, \hat{\beta}^0) & \mu_{12}(\lambda, \hat{\beta}^0) \\ \mu_{21}(\lambda, \hat{\beta}^0) & \mu_{22}(\lambda, \hat{\beta}^0) \end{bmatrix}, \\
\mu_{11,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) &= \frac{1}{2\sqrt{\psi^0}} \left[ \cos \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left( \sqrt{\frac{\pi}{8}} - C \left( -\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) \right) + \right. \\
\mu_{22,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) &+ \sin \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left( \sqrt{\frac{\pi}{8}} - S \left( -\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) \right) \pm \\
&\pm \cos \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left( \sqrt{\frac{\pi}{8}} - C \left( \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) \right) \pm \\
&\left. \pm \sin \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left( \sqrt{\frac{\pi}{8}} - S \left( \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) \right) \right]; \quad (77)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{12,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) &= \frac{1}{2\sqrt{\psi^0}} \left[ \cos \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left( \sqrt{\frac{\pi}{8}} - S \left( \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) \right) - \right. \\
\mu_{21,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) &- \sin \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left( \sqrt{\frac{\pi}{8}} - C \left( \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) \right) \pm \\
&\pm \cos \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left( \sqrt{\frac{\pi}{8}} - S \left( -\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) \right) \mp \\
&\left. \mp \sin \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \left( \sqrt{\frac{\pi}{8}} - C \left( -\frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) \right) \right]; \quad (78)
\end{aligned}$$

Із (75) та (76), за властивостями інтегралів Френеля, отримуємо, що рівномірно за  $T, \lambda > 0$

$$|\mu_{ij}(\lambda, \hat{\beta}^0)| \leq \frac{4}{\sqrt{\psi^0}}, \quad i, j = 1, 2. \quad (79)$$

Крім того, для будь-якого  $\Lambda > 0$  та  $i, j = 1, 2$

$$\begin{aligned}
& 2\sqrt{\psi^0} \sup_{\lambda \in [0, \Lambda]} \left| \mu_{ij,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) - \mu_{ij}(\lambda, \hat{\beta}^0) \right| \leq \sup_{\lambda \in [0, \Lambda]} \left| C \left( T\sqrt{\psi^0} + \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \right| + \\
& + \sup_{\lambda \in [0, \Lambda]} \left| C \left( T\sqrt{\psi^0} - \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \right) \right| + \sup_{\lambda \in [0, \Lambda]} \left| S \left( T\sqrt{\psi^0} + \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \right| + \\
& + \sup_{\lambda \in [0, \Lambda]} \left| S \left( T\sqrt{\psi^0} - \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \right| \rightarrow 0 \text{ при } T \rightarrow \infty. \quad (80)
\end{aligned}$$

Вирази у (77) та (78) можна записати у більш стислому вигляді, звівши подібні доданки та користуючись непарністю функцій  $S(x)$  та  $C(x)$ :

$$\begin{aligned}
\mu_{11}(\lambda, \hat{\beta}^0) &= \sqrt{\frac{\pi}{8\psi^0}} \left( \cos \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) + \sin \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \right) = \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{4\psi^0}} \cos \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 - \frac{\pi}{4} \right); \\
\mu_{22}(\lambda, \hat{\beta}^0) &= \frac{1}{\sqrt{\psi^0}} \left( \cos \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) C \left( \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) + \sin \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) S \left( \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) \right); \\
\mu_{12}(\lambda, \hat{\beta}^0) &= \sqrt{\frac{\pi}{8\psi^0}} \left( \cos \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) - \sin \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) \right) = \\
&= -\sqrt{\frac{\pi}{4\psi^0}} \sin \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 - \frac{\pi}{4} \right); \\
\mu_{21}(\lambda, \hat{\beta}^0) &= -\frac{1}{\sqrt{\psi^0}} \left( \cos \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) S \left( \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) - \sin \left( \frac{\lambda^2}{4\psi^0} - \hat{\beta}^0 \right) C \left( \frac{\lambda}{2\sqrt{\psi^0}} \right) \right) \quad (81)
\end{aligned}$$

Далі дослідимо інтеграли виду  $\int_0^T t \frac{\cos(\lambda t)}{\sin(\lambda t)} \frac{\cos(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0)}{\sin(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0)} dt$ .

$$\begin{aligned}
(i) \int_0^T t \cos(\lambda t) \cos(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt &= \frac{1}{2\psi^0} \left[ \sin(\psi^0 T^2 + \hat{\beta}^0) \cos(\lambda T) - \sin(\hat{\beta}^0) + \right. \\
&\quad \left. + \lambda \mu_{22,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) \right]; \\
(ii) \int_0^T t \sin(\lambda t) \cos(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt &= \frac{1}{2\psi^0} \left[ \sin(\psi^0 T^2 + \hat{\beta}^0) \sin(\lambda T) - \lambda \mu_{12,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) \right]; \\
(iii) \int_0^T t \cos(\lambda t) \sin(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt &= \frac{1}{2\psi^0} \left[ -\cos(\psi^0 T^2 + \hat{\beta}^0) \cos(\lambda T) + \cos(\hat{\beta}^0) - \right. \\
&\quad \left. - \lambda \mu_{21,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) \right];
\end{aligned}$$



$$(iv) \int_0^T t \sin(\lambda t) \sin(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt = \frac{1}{2\psi^0} \left[ -\cos(\psi^0 T^2 + \hat{\beta}^0) \sin(\lambda T) + \lambda \mu_{11,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) \right]. \quad (82)$$

Очевидно, що інтеграли (82) обмежені за  $T$  величиною

$$\frac{1}{2\psi^0} \left( 2 + \lambda \frac{4}{\sqrt{\psi^0}} \right) = \frac{1}{\psi^0} + \frac{\lambda}{(\psi^0)^{\frac{3}{2}}}. \quad (83)$$

Далі розглянемо інтеграли  $\int_0^T t^2 \frac{\cos}{\sin}(\lambda t) \cos(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt$ .

$$(v) \int_0^T t^2 \cos(\lambda t) \cos(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt = \frac{1}{2\psi^0} \left[ T \sin(\psi^0 T^2 + \hat{\beta}^0) \cos(\lambda T) - \mu_{12,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) + \lambda \int_0^T t \sin(\lambda t) \sin(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt \right];$$

$$(vi) \int_0^T t^2 \sin(\lambda t) \cos(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt = \frac{1}{2\psi^0} \left[ T \sin(\psi^0 T^2 + \hat{\beta}^0) \sin(\lambda T) - \mu_{22,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) - \lambda \int_0^T t \cos(\lambda t) \sin(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt \right]. \quad (84)$$

Враховуючи умову **A2**, скористаємося стандартною формулою

$B(t) = 2 \int_0^\infty f(\lambda) \cos(\lambda t) dt$ . Тоді за т. Лебега про мажоровану збіжність отримуємо

$$\begin{aligned} W_{11,T}^{(22)} &= 2 \int_0^\infty f(\lambda) \int_0^T \int_0^T \cos(\lambda(t-s)) \cos(\psi^0 t^2) \cos(\psi^0 s^2) dt ds = \\ &= 2 \int_0^\infty f(\lambda) \left[ (\mu_{11,T}(\lambda, 0))^2 + (\mu_{21,T}(\lambda, 0))^2 \right] d\lambda \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 2 \int_0^\infty f(\lambda) \left[ (\mu_{11,T}(\lambda, 0))^2 + \right. \\ &\quad \left. + (\mu_{21,T}(\lambda, 0))^2 \right] d\lambda = W_{11}^{(22)} \quad (85) \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} W_{22}^{(22)} &= 2 \int_0^\infty f(\lambda) \left[ (\mu_{12,T}(\lambda, 0))^2 + (\mu_{22,T}(\lambda, 0))^2 \right] d\lambda; \\ W_{12}^{(22)} &= 2 \int_0^\infty f(\lambda) [\mu_{11,T}(\lambda, 0)\mu_{12,T}(\lambda, 0) + \mu_{21}(\lambda, 0)\mu_{22}(\lambda, 0)] d\lambda; \quad (86) \end{aligned}$$

Маємо далі

$$W_{33,T}^{(22)} = \frac{2(\beta^0)^2}{T^2} \int_0^\infty f(\lambda) \int_0^T \int_0^T \cos(\lambda(t-s)) t^2 s^2 \cos(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0).$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \cos(\psi^0 s^2 + \hat{\beta}^0) ds dt d\lambda = \frac{2(\beta^0)^2}{T^2} \int_0^\infty f(\lambda) \left[ \left( \int_0^T t^2 \cos(\lambda t) \cos(\psi^0 s^2 + \hat{\beta}^0) dt \right)^2 + \right. \\
& + \left. \left( t^2 \sin(\lambda t) \cos(\psi^0 s^2 + \hat{\beta}^0) dt \right)^2 \right] d\lambda = \frac{(\beta^0)^2}{2(\psi^0)^2 T^2} \int_0^\infty f(\lambda) \left[ \left( T \sin(\psi^0 T^2 + \hat{\beta}^0) \cdot \right. \right. \\
& \cdot \cos(\lambda T) - \mu_{12,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) + \lambda \int_0^T t \sin(\lambda t) \sin(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt \left. \right)^2 + \left( T \sin(\psi^0 T^2 + \hat{\beta}^0) \cdot \right. \\
& \cdot \sin(\lambda T) - \mu_{22,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) - \lambda \int_0^T t \cos(\lambda t) \sin(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt \left. \right)^2 \Big] d\lambda = \\
& = \left( \frac{\beta^0}{2\psi^0} \right)^2 \sin^2(\psi^0 T^2 + \hat{\beta}^0) + O(T^{-1}), \quad \text{при } T \rightarrow \infty \quad (87)
\end{aligned}$$

Саме в цьому місці доведення використано існування 4-го спектрального моменту спектральної щільності  $f(\lambda)$  з умови **A2**. Це стає зрозумілим, якщо ми підставимо під знаки квадратів в інтегралі (87) відповідні вирази з блоку формул (82).

З іншого боку,

$$\begin{aligned}
W_{23,T}^{(22)} &= \frac{2\beta^0}{T} \int_0^\infty f(\lambda) \int_0^T \int_0^T \cos(\lambda(t-s)) t^2 \cos(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) \cdot \cos(\psi^0 s^2) ds dt d\lambda = \\
&= \frac{2(\beta^0)^2}{T} \int_0^\infty f(\lambda) \left[ \left( \int_0^T t^2 \cos(\lambda t) \cos(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt \right) \cdot \int_0^T \cos(\lambda t) \cos(\psi^0 t^2) dt + \right. \\
&+ \left. \int_0^T t^2 \sin(\lambda t) \cos(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt \cdot \int_0^T \sin(\lambda t) \cos(\psi^0 t^2) dt \right] d\lambda = \\
&= \frac{\beta^0}{T\psi^0} \int_0^\infty f(\lambda) \left[ \left( T \sin(\psi^0 T^2 + \hat{\beta}^0) \cos(\lambda T) - \mu_{12,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) + \right. \right. \\
&+ \left. \lambda \int_0^T t \sin(\lambda t) \sin(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt \right) \mu_{11,T}(\lambda, 0) + \left( T \sin(\psi^0 T^2 + \right. \\
&+ \left. \hat{\beta}^0) \sin(\lambda T) - \mu_{22,T}(\lambda, \hat{\beta}^0) - \lambda \int_0^T t \cos(\lambda t) \sin(\psi^0 t^2 + \hat{\beta}^0) dt \right) \mu_{21,T} \Big] d\lambda = \\
&= \frac{\beta^0}{\psi^0} \sin(\psi^0 T^2 + \hat{\beta}^0) \int_0^\infty f(\lambda) \left[ \mu_{11,T}(\lambda, 0) \cos(\lambda T) + \mu_{21,T}(\lambda, 0) \sin(\lambda T) \right] d\lambda + O(T^{-1}) \\
& \hspace{25em} \text{при } T \rightarrow \infty \quad (88)
\end{aligned}$$

Аналогічно

$$\lim_{T \rightarrow \infty} W_{13,T}^{(22)} = 0. \quad (89)$$

3) Блоки  $W_T^{(12)}$  та  $W_T^{(21)}$ .

Оскільки  $W_T^{(21)} = \left(W_T^{(12)}\right)^*$ , то достатньо знайти границю при  $T \rightarrow \infty$  блока  $W_T^{(12)}$ . Позначимо

$$-A^0 \sin(\phi^0 t) + B^0 \cos(\phi^0 t) = \alpha^0 \cos(\phi^0 t + \hat{\alpha}^0), \text{ де } \alpha^0 = \sqrt{(A^0)^2 + (B^0)^2}, \text{ tg } \hat{\alpha}^0 = \frac{A^0}{B^0}.$$

Покажемо, що величини

$$\begin{aligned} W_{11,T}^{(12)} &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \int_0^T B(t-s) \cos(\phi^0 t) \cos(\psi^0 s^2) dt ds; \\ W_{12,T}^{(12)} &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \int_0^T B(t-s) \sin(\phi^0 t) \cos(\psi^0 s^2) dt ds; \\ W_{13,T}^{(12)} &= \frac{\alpha^0}{T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T \int_0^T B(t-s) t \cos(\phi^0 t + \hat{\alpha}^0) \cos(\psi^0 s^2) dt ds; \\ W_{21,T}^{(12)} &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \int_0^T B(t-s) \cos(\phi^0 t) \sin(\psi^0 s^2) dt ds; \\ W_{22,T}^{(12)} &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \int_0^T B(t-s) \sin(\phi^0 t) \sin(\psi^0 s^2) dt ds; \\ W_{23,T}^{(12)} &= \frac{\alpha^0}{T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T \int_0^T B(t-s) t \cos(\phi^0 t + \hat{\alpha}^0) \sin(\psi^0 s^2) dt ds; \end{aligned} \quad (90)$$

збігаються до нуля при  $T \rightarrow \infty$ .

Нехай  $G(t, s)$  деяка неперервна функція. Розглянемо заміну змінних в інтегралі

$$\begin{aligned} I &= \int_0^T \int_0^T B(t-s) G(t, s) dt ds = \int_0^T B(u) \left[ \int_0^{T-u} G(u+v, v) dv \right] du + \\ &\quad + \int_0^T B(u) \left[ \int_0^{T-u} G(v, u+v) dv \right] du = I_1 + I_2, \end{aligned}$$

що узагальнює стандартну заміну змінних в інтегралі  $I$  при  $G(t, s) \equiv 1$ . Зробимо у внутрішньому інтегралі інтеграла  $I_2$  заміну змінних  $u+v \rightarrow v$ . Тоді матимемо

$$I_2 = \int_0^T B(u) \int_u^T G(v-u, v) dv du \text{ та}$$

$$I = \int_0^T B(u) \left[ \int_0^T G(v-u, v) dv - \int_0^u G(v-u, v) dv + \int_0^{T-u} G(u+v, v) dv \right] du. \quad (91)$$

Якщо використовувати (91), то у нас під знаками інтегралів не буде величин

$\frac{\cos}{\sin}(\psi^0(u+v)^2)$ , а натомість будуть  $\frac{\cos}{\sin}(\psi^0 v^2)$ , що спрощує обчислення.

Також зауважимо, що згідно з формулами (75)-(83),

$$\left| \int_0^{g(T,u)} \frac{\cos(\phi^0 v)}{\sin(\psi^0 v^2)} dv \right| \leq \frac{4}{\sqrt{\psi^0}}, \quad (92)$$

$$\left| \int_0^{g(T,u)} v \frac{\cos(\phi^0 v)}{\sin(\psi^0 v^2)} dv \right| \leq \frac{1}{\psi^0} \left( 1 + \frac{2\phi^0}{\sqrt{\psi^0}} \right), \quad (93)$$

де  $g(T, u)$  – деяка функція, що залежить від  $T$  та/або  $u$

Використовуючи формули (91)-(93), отримуємо

$$\begin{aligned} W_{11,T}^{(12)} &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T B(u) \left[ \int_0^T \cos(\phi^0 v - \phi^0 u) \cos(\psi^0 v^2) dv - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^u \cos(\phi^0 v - \phi^0 u) \cos(\psi^0 v^2) dv + \int_0^{T-u} \cos(\phi^0 v + \phi^0 u) \cos(\psi^0 v^2) dv \right] du \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T |B(u)| \left[ \left| \int_0^T \cos(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| + \left| \int_0^T \sin(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| + \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_0^u \cos(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| + \left| \int_0^u \sin(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| + \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_0^{T-u} \cos(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| + \left| \int_0^{T-u} \sin(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| \right] du \leq \\ &\leq \frac{24}{\sqrt{\psi^0}} \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T |B(u)| du. \quad (94) \end{aligned}$$

Очевидно, що за умови **A1(ii)**

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T |B(u)| du \rightarrow 0 \quad \text{при } T \rightarrow \infty. \quad (95)$$

За умови **A1(i)** при  $\alpha \in (\frac{1}{2}; 1)$  маємо

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T |B(u)| du = \sqrt{T} \int_0^1 |B(Tu)| du \leq \frac{\sqrt{T}}{1-\alpha} B(T) = \frac{L(T)}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{T^{\alpha-\frac{1}{2}}} \rightarrow 0$$

при  $T \rightarrow \infty$ . (96)

Отже, враховуючи (95) та (96), з (94) випливає, що

$$W_{11,T}^{(12)} \rightarrow 0 \quad \text{при } T \rightarrow \infty. \quad (97)$$

Аналогічно,

$$W_{12,T}^{(12)}, W_{21,T}^{(12)}, W_{22,T}^{(12)} \rightarrow 0 \quad \text{при } T \rightarrow \infty. \quad (98)$$

Маємо далі

$$\begin{aligned} W_{13,T}^{(12)} &= \frac{\alpha^0}{T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T B(u) \left[ \int_0^T (v-u) \cos(\phi^0 v - \phi^0 u + \hat{\alpha}^0) \cos(\psi^0 v^2) dv - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^u (v-u) \cos(\phi^0 v - \phi^0 u + \hat{\alpha}^0) \cos(\psi^0 v^2) dv + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{T-u} (v+u) \cos(\phi^0 v + \phi^0 u + \hat{\alpha}^0) \cos(\psi^0 v^2) dv \right] du \leq \\ &\leq \frac{\alpha^0}{T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T |B(u)| \left[ \left| \int_0^T v \cos(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| + \left| \int_0^T v \sin(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| + \right. \\ &\quad \left. u \left| \int_0^T \cos(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| + u \left| \int_0^T \sin(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| + \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_0^T v \cos(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| + \left| \int_0^T v \sin(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| + \right. \\ &\quad \left. + u \left| \int_0^u \cos(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| + u \left| \int_0^u \sin(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| + \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_0^{T-u} v \cos(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| + \left| \int_0^{T-u} v \sin(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| + \right. \\ &\quad \left. + u \left| \int_0^{T-u} \cos(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| + u \left| \int_0^{T-u} \sin(\phi^0 v) \cos(\psi^0 v^2) dv \right| \right] du \leq \\ &\leq \frac{\alpha^0}{T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T |B(u)| \left[ \frac{6}{\psi^0} \left( 1 + \frac{2\phi^0}{\sqrt{\psi^0}} \right) + \frac{24}{\sqrt{\psi^0}} u \right] du \leq \\ &\leq \frac{6\alpha^0}{\psi^0} \left( 1 + \frac{2\alpha^0}{\sqrt{\psi^0}} \right) \cdot \frac{1}{T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T |B(u)| du + \frac{24\alpha^0}{\sqrt{\psi^0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T |B(u)| du \rightarrow 0 \quad \text{при } T \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (99)$$

Аналогічно

$$W_{23,T}^{(12)} \rightarrow 0 \quad \text{при } T \rightarrow \infty. \quad (100)$$

Математичні сподівання  $W_{31,T}^{(12)} = E\xi_T^1 \xi_T^6$ ,  $W_{32,T}^{(12)} = E\xi_T^2 \xi_T^6$ ,  $W_{33,T}^{(12)} = E\xi_T^3 \xi_T^6$ , для подальшого доведення не знадобляться, достатньо тільки знати, що  $E(\xi_T^6)^2 < \infty$  (див. формулу (87)).

З наведених вище підрахунків випливає наступне твердження.

**Лема 5.** Нехай виконуються умови **A1** та **A2**. Тоді

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[ W_T - \text{diag} \left( 0, 0, 0, 0, 0, \left( \frac{\beta^0}{2\psi^0} \right)^2 \sin^2 \left( \psi^0 T^2 + \hat{\beta}^0 \right) \right) \right] = W,$$

де  $W = \text{diag} (W^{(11)}, W^{(22)})$  – блочно-діагональна матриця з блоками

$$W^{(11)} = 2\pi f(\phi^0) H_1 = 2\pi f(\phi) \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{B^0}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{A^0}{2} \\ \frac{B^0}{2} & -\frac{A^0}{2} & \frac{(A^0)^2 + (B^0)^2}{3} \end{bmatrix};$$

$$W^{(22)} = \begin{bmatrix} W_{11}^{(22)} & W_{12}^{(22)} & 0 \\ W_{21}^{(22)} & W_{22}^{(22)} & 0 \\ 0 & 0 & 0; \end{bmatrix};$$

$$W_{11}^{(22)} = 2 \int_0^\infty f(\lambda \left[ (\mu_{11}(\lambda, 0))^2 + (\mu_{11}(\lambda, 0))^2 \right]) d\lambda;$$

$$W_{22}^{(22)} = 2 \int_0^\infty f(\lambda \left[ (\mu_{12}(\lambda, 0))^2 + (\mu_{22}(\lambda, 0))^2 \right]) d\lambda; \quad (101)$$

$$W_{21}^{(22)} = 2 \int_0^\infty f(\lambda [\mu_{11}(\lambda, 0)\mu_{12}(\lambda, 0) + \mu_{21}(\lambda, 0)\mu_{22}(\lambda, 0)]) d\lambda,$$

причому функції  $\mu_{ij}(\lambda, 0)$ ,  $i, j = 1, 2$ , задані формулами (81).

Доведення теореми 2. Користуючись результатами леми 3 та леми 5, перейдемо до доведення асимптотичної нормальності ОНК параметрів квазічирпованого сигналу. Розглянемо матрицю  $H$  з леми 3. Використовуючи елементарні обчислення, отримуємо, що  $\det(H_1) = \frac{(A^0)^2 + (B^0)^2}{96}$ ,  $\det(H_2) = \frac{(C^0)^2 + (D^0)^2}{90}$  і  $H^{-1} = \text{diag}(H_1^{-1}, H_2^{-1})$ , де

$$H_1^{-1} = \frac{2}{(A^0)^2 + (B^0)^2} \begin{bmatrix} (A^0)^2 + 4(B^0)^2 & -3A^0 B^0 & -6B^0 \\ -3A^0 B^0 & 4(A^0)^2 + (B^0)^2 & 6A^0 \\ -6B^0 & 6A^0 & 12 \end{bmatrix}; \quad (102)$$

$$H_2^{-1} = \frac{1}{2((C^0)^2 + (D^0)^2)} \begin{bmatrix} 4(C^0)^2 + 9(D^0)^2 & -5C^0 D^0 & -15D^0 \\ -5C^0 D^0 & 9(C^0)^2 + 4(D^0)^2 & 15C^0 \\ -15D^0 & 15C^0 & 45 \end{bmatrix}. \quad (103)$$

Позначимо

$$K_T = \left( d_T^{-1} \left( \frac{1}{2} Q_T''(\bar{\theta}) \right) d_T^{-1} \right)^{-1} - H^{-1} \rightarrow 0 \quad \text{м.н. при } T \rightarrow \infty, \quad (104)$$

а також введемо діагональну матрицю

$$c_T = \text{diag}(1, 1, 1, T^{\frac{1}{2}}, T^{\frac{1}{2}}, T^{\frac{1}{2}}). \quad (105)$$

Враховуючи позначення (63), (64), (104) та (105), перепишемо (47) у вигляді

$$c_T d_T (\theta_T - \theta^0) = c_T K_T s_T^{-1} \xi_T + c_T H^{-1} s_T^{-1} \xi_T = V_{1T} + V_{2T}. \quad (106)$$

Зауважимо, що  $c_T d_T (\theta_T - \theta^0) = \left( T^{\frac{1}{2}}(A_T - A^0), T^{\frac{1}{2}}(B_T - B^0), T^{\frac{3}{2}}(\phi_T - \phi^0), T(C_T - C^0), T(D_T - D^0), T^3(\psi_T - \psi^0) \right)^*$  – це вектор із формулювання теореми 2.

Розглянемо окремо кожен доданок в (106).

$$V_{1T} = \begin{bmatrix} K_{11,T} \cdot \xi_T^1 + K_{12,T} \cdot \xi_T^2 + K_{13,T} \cdot \xi_T^3 + \frac{K_{14,T} \cdot \xi_T^4}{\sqrt{T}} + \frac{K_{15,T} \cdot \xi_T^5}{\sqrt{T}} + \frac{K_{16,T} \cdot \xi_T^6}{T^{\frac{3}{2}}} \\ K_{21,T} \cdot \xi_T^1 + K_{22,T} \cdot \xi_T^2 + K_{23,T} \cdot \xi_T^3 + \frac{K_{24,T} \cdot \xi_T^4}{\sqrt{T}} + \frac{K_{25,T} \cdot \xi_T^5}{\sqrt{T}} + \frac{K_{26,T} \cdot \xi_T^6}{T^{\frac{3}{2}}} \\ K_{31,T} \cdot \xi_T^1 + K_{32,T} \cdot \xi_T^2 + K_{33,T} \cdot \xi_T^3 + \frac{K_{34,T} \cdot \xi_T^4}{\sqrt{T}} + \frac{K_{35,T} \cdot \xi_T^5}{\sqrt{T}} + \frac{K_{36,T} \cdot \xi_T^6}{T^{\frac{3}{2}}} \\ \sqrt{T} K_{41,T} \cdot \xi_T^1 + \sqrt{T} K_{42,T} \cdot \xi_T^2 + \sqrt{T} K_{43,T} \cdot \xi_T^3 + K_{44,T} \cdot \xi_T^4 + K_{45,T} \cdot \xi_T^5 + \frac{K_{46,T} \cdot \xi_T^6}{T} \\ \sqrt{T} K_{51,T} \cdot \xi_T^1 + \sqrt{T} K_{52,T} \cdot \xi_T^2 + \sqrt{T} K_{53,T} \cdot \xi_T^3 + K_{54,T} \cdot \xi_T^4 + K_{55,T} \cdot \xi_T^5 + \frac{K_{56,T} \cdot \xi_T^6}{T} \\ \sqrt{T} K_{61,T} \cdot \xi_T^1 + \sqrt{T} K_{62,T} \cdot \xi_T^2 + \sqrt{T} K_{63,T} \cdot \xi_T^3 + K_{64,T} \cdot \xi_T^4 + K_{65,T} \cdot \xi_T^5 + \frac{K_{66,T} \cdot \xi_T^6}{T} \end{bmatrix}. \quad (107)$$

Покажемо, що  $V_{1T} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$  при  $T \rightarrow \infty$ . Кожен елемент вектора  $V_{1T}$  є лінійною комбінацією процесів  $\xi_T^1, \xi_T^2, \xi_T^3, \xi_T^4, \xi_T^5, T^{-1}\xi_T^6$  та елементів матриці  $K_{ij,T}, i, j = \overline{1, 6}$ . За формулами (73) та (85)-(89), що описують граничну поведінку коваріаційної матриці вектора  $\xi_T$ , отримуємо слабку збіжність процесів  $\xi_T^1, \xi_T^2, \xi_T^3, \xi_T^4, \xi_T^5$  до гауссівських випадкових величин з нульовим середнім та дисперсіями  $\pi f(\phi^0), \pi f(\phi^0), \frac{1}{3}\pi f(\phi^0) ((A^0)^2 + (B^0)^2), W_{11}^{(22)}, W_{22}^{(22)}$  (див. відповідні формули). Величини  $K_{ij,T}, i, j = \overline{1, 6}$  прямує до нуля м.н. при  $T \rightarrow \infty$ , однак, для того, щоб зробити висновок про збіжність до нуля вектора  $V_{1T}$ , необхідно додатково пояснити граничну поведінку елементів  $\sqrt{T}K_{mn,T}, m = \overline{4, 6}, n = \overline{1, 3}$ . Позначимо  $H_T = (H_{ij,T})_{i,j=1}^6 = d_T^{-1} \left( \frac{1}{2} Q_T''(\bar{\theta}) \right) d_T^{-1}$ . Тоді кожен елемент  $K_{mn,T}, m = \overline{4, 6}$ ,

$n = \overline{1, 3}$ , можна зобразити у вигляді

$$\frac{1}{\det(H_1)} \sum_{\sigma \in S_5} \text{sign}(\sigma) H_{1,\sigma(1),T} \cdot \dots \cdot H_{R-1,\sigma(R-1)} \cdot H_{R+1,\sigma(R+1),T} \cdot \dots \cdot H_{5,\sigma(5),T}, \quad (108)$$

де  $S_5$  – група перестановок 5-го порядку і, відповідно, сума береться по всіх перестановках  $\sigma$  з цієї групи;  $\text{sign}$  позначено знак перестановки, який дорівнює 1 або -1 залежно від парності числа інверсій в ній. Зауважимо, що у кожному доданку суми (108) всі множники обмежені та присутній, принаймні, один множник з наступного списку:

$$\begin{aligned} J_{41}^{(3)}(\bar{\theta}) &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\bar{\psi}t^2) \cos(\bar{\phi}t) dt; & J_{42}^{(3)}(\bar{\theta}) &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\bar{\psi}t^2) \sin(\bar{\phi}t) dt; \\ J_{43}^{(3)}(\bar{\theta}) &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \cos(\bar{\psi}t^2) t (-\bar{A} \sin(\bar{\phi}t) + \bar{B} \cos(\bar{\phi}t)) dt; \\ J_{51}^{(3)}(\bar{\theta}) &= \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\bar{\psi}t^2) \cos(\bar{\phi}t) dt; & J_{52}^{(3)}(\bar{\theta}) &= \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\bar{\psi}t^2) \sin(\bar{\phi}t) dt; \\ J_{53}^{(3)}(\bar{\theta}) &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \sin(\bar{\psi}t^2) t (-\bar{A} \sin(\bar{\phi}t) + \bar{B} \cos(\bar{\phi}t)) dt; & (109) \\ J_{61}^{(3)}(\bar{\theta}) &= \frac{1}{T^3} \int_0^T t^2 (-\bar{C} \sin(\bar{\psi}t^2) + \bar{D} \cos(\bar{\psi}t^2)) \cos(\bar{\phi}t) dt; \\ J_{62}^{(3)}(\bar{\theta}) &= \frac{1}{T^3} \int_0^T t^2 (-\bar{C} \sin(\bar{\psi}t^2) + \bar{D} \cos(\bar{\psi}t^2)) \sin(\bar{\phi}t) dt; \\ J_{63}^{(3)}(\bar{\theta}) &= \frac{1}{T^4} \int_0^T t^2 (-\bar{C} \sin(\bar{\psi}t^2) + \bar{D} \cos(\bar{\psi}t^2)) t (-\bar{A} \sin(\bar{\phi}t) + \bar{B} \cos(\bar{\phi}t)) dt. \end{aligned}$$

З теореми 1, формул (60) та (61) отримуємо, що величини  $\sqrt{T} J_{ij}^{(3)}(\bar{\theta}) \rightarrow 0$  м.н. при  $T \rightarrow \infty$ ,  $i = \overline{4, 6}$ ,  $j = \overline{1, 3}$ . Наприклад, для елемента  $J_{43}^{(3)}(\bar{\theta})$  матимемо

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{T} J_{43}^{(3)}(\bar{\theta}) \right| &\leq |A_T - A^0| \left| \frac{1}{2T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T t \sin(\bar{\phi}t + \bar{\psi}t^2) dt \right| + |A_T - A^0| \cdot \\ &\cdot \left| \frac{1}{2T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T t \sin(-\bar{\phi}t + \bar{\psi}t^2) dt \right| + |A^0| \left| \frac{1}{2T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T t \sin(\bar{\phi}t + \bar{\psi}t^2) dt \right| + \\ &+ |A^0| \left| \frac{1}{2T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T t \sin(-\bar{\phi}t + \bar{\psi}t^2) dt \right| + |B_T - B^0| \left| \frac{1}{2T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T t \cos(\bar{\phi}t + \bar{\psi}t^2) dt \right| + \\ &+ |B_T - B^0| \left| \frac{1}{2T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T t \cos(-\bar{\phi}t + \bar{\psi}t^2) dt \right| + |B^0| \left| \frac{1}{2T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T t \cos(\bar{\phi}t + \bar{\psi}t^2) dt \right| + \\ &+ |B^0| \left| \frac{1}{2T^{\frac{3}{2}}} \int_0^T t \cos(-\bar{\phi}t + \bar{\psi}t^2) dt \right| \rightarrow 0 \quad \text{м.н. при } T \rightarrow \infty. \end{aligned}$$



Крім того, матриця  $H_T$  збігається до невиродженої матриці  $H$ , тому при  $T \rightarrow \infty \det(H_T) \rightarrow \det(H) \neq 0$ . Отже, можемо зробити висновок, що елементи  $\sqrt{T}K_{mn,T} \rightarrow 0$  м.н. при  $T \rightarrow \infty, m = \overline{4,6}, n = \overline{1,3}$ .

Враховуючи вище наведені міркування, отримуємо, що координати вектора  $V_{1T}$  прямують до 0, принаймні, за ймовірністю при  $T \rightarrow \infty$ .

З іншого боку,

$$V_{2T} = \begin{bmatrix} h_{11} \cdot \xi_T^1 + h_{12} \cdot \xi_T^2 + h_{13} \cdot \xi_T^3 \\ h_{21} \cdot \xi_T^1 + h_{22} \cdot \xi_T^2 + h_{23} \cdot \xi_T^3 \\ h_{31} \cdot \xi_T^1 + h_{32} \cdot \xi_T^2 + h_{33} \cdot \xi_T^3 \\ h_{44} \cdot \xi_T^4 + h_{45} \cdot \xi_T^5 + \frac{h_{46} \cdot \xi_T^6}{T} \\ h_{54} \cdot \xi_T^4 + h_{55} \cdot \xi_T^5 + \frac{h_{56} \cdot \xi_T^6}{T} \\ h_{64} \cdot \xi_T^4 + h_{65} \cdot \xi_T^5 + \frac{h_{66} \cdot \xi_T^6}{T} \end{bmatrix}, \text{ де } h_{ij}, i, j = \overline{1,6} \text{ — елементи матриці } H^{-1}. \quad (110)$$

Величини  $\frac{h_{46} \cdot \xi_T^6}{T}, \frac{h_{56} \cdot \xi_T^6}{T}, \frac{h_{66} \cdot \xi_T^6}{T}$  збігаються до нуля у середньому квадратичному. Тоді випадковий вектор  $c_T d_T(\theta_T - \theta^0)$  слабо збігається до гауссівського випадкового вектора:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c_T d_T(\theta_T - \theta^0) = \begin{bmatrix} h_{11} \cdot \xi^1 + h_{12} \cdot \xi^2 + h_{13} \cdot \xi^3 \\ h_{21} \cdot \xi^1 + h_{22} \cdot \xi^2 + h_{23} \cdot \xi^3 \\ h_{31} \cdot \xi^1 + h_{32} \cdot \xi^2 + h_{33} \cdot \xi^3 \\ h_{44} \cdot \xi^4 + h_{45} \cdot \xi^5 \\ h_{54} \cdot \xi^4 + h_{55} \cdot \xi^5 \\ h_{64} \cdot \xi^4 + h_{65} \cdot \xi^5 \end{bmatrix} \quad (111)$$

з коваріаційною матрицею

$$\Sigma = \text{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2), \quad (112)$$

де

$$\Sigma_1 = \frac{4\pi f(\phi^0)}{(A^0)^2 + (B^0)^2} \begin{bmatrix} (A^0)^2 + 4(B^0)^2 & -3A^0 B^0 & -6B^0 \\ -3A^0 B^0 & 4(A^0)^2 + (B^0)^2 & 6A^0 \\ -6B^0 & 6A^0 & 12 \end{bmatrix}; \quad (113)$$

$$\Sigma_2 = \frac{1}{4((C^0)^2 + (D^0)^2)^2} \begin{bmatrix} 4(C^0)^2 + 9(D^0)^2 & -5C^0D^0 \\ -5C^0D^0 & 9(C^0)^2 + 4(D^0)^2 \\ -15D^0 & 15C^0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_{11}^{(22)} & W_{12}^{(22)} \\ W_{21}^{(22)} & W_{22}^{(22)} \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} 4(C^0)^2 + 9(D^0)^2 & -5C^0D^0 & -15D^0 \\ -5C^0D^0 & 9(C^0)^2 + 4(D^0)^2 & 15C^0 \end{bmatrix}, \quad (114)$$

а величини  $W_{11}^{(22)}, W_{22}^{(22)}, W_{12}^{(22)} = W_{21}^{(22)}$  задано формулами (85), (86) та (81).

Теорему 2 доведено. ■

**Наслідок 1.** За умов **A1** та **A2** для довільних  $\delta_i \in (0, \frac{1}{2}), i = 1, 2, 3; \delta_j \in (0, 1), j = 4, 5, 6$ , випадкові величини  $T^{\frac{1}{2}-\delta_1}(A_T - A^0), T^{\frac{1}{2}-\delta_2}(B_T - B^0), T^{\frac{3}{2}-\delta_3}(\phi_T - \phi^0), T^{1-\delta_4}(C_T - C^0), T^{1-\delta_5}(D_T - D^0), T^{3-\delta_6}(\psi_T - \psi^0) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$  при  $T \rightarrow \infty$ .

**Наслідок 2.** Якщо  $rank(\mathcal{R}) = 5$  (означення  $\mathcal{R}$  див. нижче), то  $rank(W) = 5$ , тобто нормована ОНК  $c_T d_T(\theta_T - \theta^0)$  асимптотично при  $T \rightarrow \infty$  має сингулярний нормальний розподіл.

Доведення. Матрицю  $W$  з (112) можна записати як добуток трьох блочно діагональних матриць

$$\Sigma = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathcal{R}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}^* = R\mathcal{R}R^*,$$

де  $R_1 = H_1^{-1}$  (формула 102),  $R_2$  – це матриця  $H_2^{-1}$  (формула 103) без останнього стовпчика, тобто  $R$ -матриця порядку  $6 \times 5$ . Матриця  $\mathcal{R}$  є коваріаційною матрицею граничного випадкового вектора  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5)^*$ , і ми припускаємо, що  $rank(\mathcal{R}) = 5$ .

Розглянемо квадратну матрицю  $M$  матриці  $R$ , отриману викресленням останнього рядка матриці  $R$ . Тоді (див. текст перед формулою (102))

$$\det M = \det H_1^{-1} \times \det \left( \frac{0,5}{(C^0)^2 + (D^0)^2} \begin{bmatrix} 4(C^0)^2 + 9(D^0)^2 & -5C^0D^0 \\ -5C^0D^0 & 9(C^0)^2 + 4(D^0)^2 \end{bmatrix} \right) = \\ = \frac{864}{(A^0)^2 + (B^0)^2} > 0.$$

Отже  $\text{rank}(R) = \text{rank}(R^*) = 5, \text{rank}(R\mathcal{R}) = \text{rank}(R) = 5$  і  $\text{rank}(\Sigma) = \text{rank}(R\mathcal{R}R^*) = \text{rank}(R\mathcal{R}) = 5$ .



## 4 Висновки

У магістерській дисертації отримано сильну консистентність та асимптотичну нормальність ОНК параметрів квазічирпованого сигналу, який є корисною модифікацією чирпованого, тобто лінійно частотно модульованого сигналу. Розглянуто модель з неперервним часом спостережень цього сигналу на фоні випадкового шуму. Ми припускаємо, що шум є вибірково неперервним стаціонарним гауссівським стохастичним процесом, коваріаційна функція та спектральна щільність якого задовольняють умовам сильної або слабкої залежності, причому для доведення асимптотичної нормальності оцінок вимагається існування 4-го спектрального моменту.

Доведення основних результатів роботи істотно використовує рівномірний посилений закон великих чисел для випадкового шуму, зваженого синусами та косинусами від лінійних та квадратичних аргументів. Зокрема, доведення асимптотичної нормальності ОНК параметрів квазічирпованого сигналу є громіздким та використовує нетривіальні властивості інтегралів Френеля та їх ускладнень.

Природним напрямком продовження дослідження є доведення сильної консистентності та асимптотичної нормальності параметрів квазічирпованого сигналу, що є сумою декількох сигналів, розглянутих у магістерській дисертації.

## Список використаних джерел

- [1] M. Artis, M. Hoffmann, D. Nachane, and J. Toro, “The Detection of Hidden Periodicities: A Comparison of Alternative Methods,” Economics Working Papers No ECO2004/10, European University Institute, San Domenico, Italy, 2004.

- [2] A. V. Ivanov, “Consistency of the Least Squares Estimator of the Amplitudes and Angular Frequencies of a Sum of Harmonic Oscillations in Model with Long-Range Dependence,” *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, vol. 80, pp. 61–69, 2010.
- [3] B. G. Quinn and E. J. Hannan, *The Estimation and Tracking of Frequency*. Cambridge University Press, 2012.
- [4] D. Kundu and S. Nandi, “Statistical Signal Processing: Frequency Estimation.,” *Springer*, p. 141, 2012.
- [5] A. V. Ivanov, N. N. Leonenko, M. D. Ruiz-Medina, and B. M. Zhurakovsky, “Estimation of Harmonic Component in Regression with Cyclically Dependent Errors,” *Statistics: A journal of Theoretical and Applied Statistics*, vol. 49, no. 1, pp. 156–186, 2015.
- [6] S. Nandi and D. Kundu, “Asymptotic Properties of Least Squares Estimators of the Parameters of the Chirp Signals,” *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, vol. 56, pp. 529–544, 2004.
- [7] S. Nandi and D. Kundu, *Statistical Signal Processing: Frequency Estimation*. No. 2nd edition, Springer, 2020.
- [8] D. Kundu and S. Nandi, “Parameter Estimation of Chirp Signals in Presence of Stationary Noise,” *Statist Sinica*, vol. 18, pp. 187–202, 2008.
- [9] D. Kundu and S. Nandi, “On Chirp and some Related Signal Analysis: a Brief Review and some New Results,” *Sankhya A*, vol. 83, no. 2, pp. 844–890, 2021.
- [10] A. Lahiri, *Estimators of Parameters of Chirp Signals and their Properties*. Ph. D thesis, Indian Institute of Technology, Kanpur, India, 2011.
- [11] A. Lahiri, D. Kundu, and A. Mitra, “Estimating the Parameters of Multiple Chirp Signals,” *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 139, pp. 189–206, 2015.
- [12] A. Ivanov and V. Hladun, “Consistency of the LSE for chirp signal parameters in the models with strongly and weakly dependent noise,” *Austrian J. Stat.*, no. 52(SI), pp. 107–126, 2023.

- [13] A. Ivanov and V. Hladun, “Asymptotic normality of the lse for chirp signal parameters,” *Modern Stochastics: Theory and Applications*, vol. 11, no. 2, pp. 195–216, 2024.
- [14] R. Grover, D. Kundu, and A. Mitra, “Asymptotic Properties of Least Squares Estimators and Sequential Least Squares Estimators of a Chirp-Like Signal Model Parameters,” *Circuits Systems and Signal Processing*, vol. 40, no. 11, pp. 5421–5465, 2021.
- [15] P. Casazza and M. Fickus, “Fourier transforms of finite chirps.,” *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, vol. 2006, pp. 1–7, 2006.
- [16] M. Mboup and T. Adal, “A generalization of the Fourier transform and its application to spectral analysis of chirp-like signals,” *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 32, pp. 305–312, 2012.
- [17] I. Gradshteyn and I. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products (Eighth Edition)*. Academic Press, 2014.
- [18] U. Grenander, “On the estimation of regression coefficients in the case of an autocorrelated disturbance,” *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 25, no. 2, pp. 252–272, 1954.
- [19] I. Ibragimov and Y. Rozanov, “Gaussian random processes,” *Springer*, p. 277, 1978.
- [20] A. Ivanov, N. Leonenko, M. D. Ruiz-Medina, and I. N. Savich, “Limit theorems for weighted nonlinear transformations of gaussian stationary processes with singular spectra,” *Ann. Probab.*, vol. 41, no. 2, pp. 1088–1114, 2013.
- [21] А. М. Кругол, В. В. Гладун, О. В. Іванов, “Властивості ОНК параметрів квазічирпованого сигналу”, XII Всеукраїнська конференція молодих математиків, 9-11 травня 2024, Київ, ст. 25-26.