НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ «КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК ___519.21______

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

________ Олег КЛЕСОВ

«___»____________2024 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Системи масового обслуговування з керуванням»

Виконав (-ла):
студент (-ка) II курсу магістратури, групи ОМ-21мн
Лісєєва Антоніна Романівна ___________

Науковий керівник:
Доктор фізико-математичних наук, професор
Пилипенко Андрій Юрійович ___________

Рецензент:
старший науковий сівробітник
інституту математики НАН України,
кандидат фізико-математичних наук
Рябов Георгій Валентинович ___________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент (-ка) ______________

Київ – 2024 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-науковою програмою

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
_______ Олег КЛЕСОВ
«___»____________20__ р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Лісєєвій Антоніні Романівні

1. Тема дисертації «Системи масового обслуговування з керуванням», науковий керівник дисертації доктор фізико-математичних наук, професор Пилипенко Андрій Юрійович, затверджені наказом по університету №1523-с від 01.04.2024

2. Термін подання студентом дисертації 11 червня 2024

3. Об'єкт дослідження системи масового обслуговування

4. Предмет дослідження розрахунок параметрів якості функціонування систем масового обслуговування.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити

1) Ознайомитись з поняттями марковського процесу.

2) Ознайомитись з основними моделями теорії масового обслуговування.

3) Побудувати модель масового обслуговування з різними інтенсивностями обробки.

4) Знайти середню вартість обслуговування сервера.

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу 18 слайдів.

7. Дата видачі завдання 02 листопада 2023 року.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомлення з літературою. Ознайомлення з поняттями марковського процесу та основними моделями теорії масового обслуговування.	02.11.2023 – 12.11.2023	виконано
2.	Побудова моделі масового обслуговування з різними інтенсивностями обробки.	12.11.2023 - 01.06.2024	виконано
3.	Знаходження середньої вартості обслуговування сервера.	12.11.2024 - 01.06.2024	виконано
4.	Оформлення магістерської дисертації.	20.05.2024 – 07.07.2024	виконано

Студент Антоніна ЛІСЄЄВА

Науковий керівник Андрій ПИЛИПЕНКО

Реферат

Магістерська дисертація: 35 сторінок, 18 слайдів для проектора,
15 першоджерел.

Об’єктом дослідження є системи масового обслуговування.

Предметом дослідження є розрахунок параметрів якості функціонування систем масового обслуговування.

Мета даної магістерської роботи є дослідження марковської моделі системи масового обслуговування з керуванням.

Завдання роботи полягає у обчисленні середнього часу проведеного в різних режимах системи масового обслуговування, а також середньої кількості переключень між режимами.

Актуальність дослідження магістерської дисертації зумовлена тим, що системи масового обслуговування є важливими в багатьох сферах, наприклад: фінанси, телекомунікації, транспорт, охорона здоров'я. Зі збільшенням обсягів даних та розвитком технологій безумовно зростає і потреба в оптимізації таких систем для забезпечення високої якості обслуговування.
Ланцюги Маркова, а саме марковські моделі є важливим інструментом для аналізу систем масового обслуговування, вони дозволяють враховувати випадкові фактори і ймовірнісності переходів між станами. Використовуючи ці моделі дозволяє підвищити ефективність роботи систем, зменшити час очікування та оптимізувати використання ресурсів.

Ключові слова: рекурентні рівняння, марковські процеси, системи масового обслуговування.

Abstract

Master degree thesis contains 35 pages, 18 slides for projector, 15 primary sources

The object of the research is queuing systems.

The subject of the study is the calculation of the parameters of the quality of functioning of queuing systems.

The purpose of this master's thesis is to study a Markov model of a queuing system with control.

The task of this work is to calculate the average time spent in different modes of the queuing system, as well as the average number of switches between modes.

The relevance of the master's thesis is due to the fact that queuing systems are important in many areas, such as finance, telecommunications, transportation, and healthcare. With the increase in data volumes and the development of technology, the need to optimize such systems to ensure high quality of service is certainly growing.

Markov chains, namely Markov models, are an important tool for analysing queuing systems, they allow to take into account random factors and probabilities of transitions between states. Using these models, it is possible to increase the efficiency of systems, reduce waiting time and optimize the use of resources.

Key words: recurrent equations, Markov processes, queuing systems.

ЗМІСТ

ВСТУП

Системи масового обслуговування є дуже важливим напрямом сучасної математики та інженерії.

Вперше концепція СМО була досліджена данським інженером і математиком Агнером Крарупом Ерлангом (Agner Krarup Erlang). Ерланг почав свої дослідження на початку 20-го століття, працюючи в телефонній компанії. Його дослідження були спрямовані на аналіз телефонних систем, а саме на вивчення часу очікування і обслуговування дзвінків. Він опублікував свою першу статтю на цю тему у 1909 році, заклавши основу для подальшого розвитку теорії черг. Перший підручник з теорії масового обслуговування був написаний Ерлангом та опублікований у 1917 під назвою "Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges" [2] (Розв'язання деяких проблем у теорії ймовірностей, що мають значення для автоматичних телефонних станцій). Ерланг розробив методи аналізу телефонних станцій, що стали поштовхом для подальшого розвитку теорії масового обслуговування.

У розвиток теорії систем масового обслуговування вагомий внесок зробили українські вчені Б. В. Гнеденко та І. Н. Коваленко. Б. В. Гнеденко [4] розробив методи аналізу надійності та резервування в СМО, що дозволяють підвищувати та оцінювати ефективність функціонування систем. І. Н. Коваленко [5] розробив методи оптимізації та моделювання стохастичних систем масового обслуговування.

З розвитком технологій, збільшенням обсягів даних та користувачів, системи масового обслуговування знаходять застосування у багатьох галузях, таких як фінанси, телекомунікації, транспорт, охорона здоров'я.

Однією з найактуальніших проблем в теорії систем масового обслуговування є оптимізація параметрів якості функціонування систем з керуванням.

Ефективне керування систем масового обслуговування дозволяє забезпечити високий рівень обслуговування та оптимізувати використання ресурсів, мінімізувати час очікування клієнтів і підвищити загальну продуктивність системи.

Таким чином, можемо стверджувати про актуальність магістерської роботи, що присвячена дослідження марковської моделі системи масового обслуговування з керуванням, розрахунку параметрів якості функціонування систем масового обслуговування та обчисленню середнього часу проведеного в різних режимах системи масового обслуговування, а також середньої кількості переключень між режимами.

В першому розділі магістерської дисертації наведено основні позначення, які використовуються в роботі.

Другий розділ присвячено теоретичним відомостям, таким як поняття про рекурентні рівняння та ланцюги Маркова, на яких ґрунтується дослідження і використовуються, як апарат для розв'язання задач.

В третьому розділі сформульована основна задача даної роботи, а саме задача про знаходження середнього часу проведеного в різних режимах системи масового обслуговування, середньої кількості переключень між режимами, а також середньої вартості обслуговування сервера.

Наприкінці роботи, сформульовано висновки та наведено список використаних джерел.

РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

x, y, z, a, b, c: позначення змінних у математичних виразах або функціях.

∑: Символ суми, використовується для позначення суми.

∀: Квантор загальності.

∃: Квантор існування.

⇒: Логічне перетворення.

⇔: Логічна еквівалентність.

det: Детермінант матриці.

П: Добуток елементів.

Δ**:** Зміна або приріст величини.

t: Час.

***τ*:** Постійна часу.

λ: Інтенсивність вхідного потоку заявок (середня кількість заявок, що надходять до системи за одиницю часу).

μ: Інтенсивність обслуговування (середня кількість заявок, що обслуговуються за одиницю часу.

РОЗДІЛ 2. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1. Рекурентні рівняння

Рекурентні рівняння є різницевими або диференціальними рівняннями, що визначають ймовірності станів системи через ймовірності попередніх станів. Для систем масового обслуговування з дискретним часом рекурентні рівняння зазвичай мають вигляд різницевих рівнянь.
Різницеве рівняння виду

$$\alpha_{n+k} + p_1(n)\alpha_{n+k-1} + \cdots + p_k(n)a_n = g(n), \qquad (2.1)$$

де $p_i, i = 1, 2, \ldots, k$ – відомі функції, називається *лінійним різницевим рівнянням k-го порядку*.

Крім того, воно називається однорідним, якщо $g(n) = 0$, і неоднорідним, якщо $g(n) \neq 0$. У фізиці це рівняння пов'язано з рушійною силою, яка намагається задати системі певну поведінку. З цієї причини доданок $g(n)$ інколи називають доданком сили. Термін лінійне означає те, що якщо послідовності b_n і c_n є розв'язками однорідного лінійного рівняння, то розв'язком є і лінійна комбінація $\lambda b_n + \mu c_n$ для будь-яких λ, μ.

Для розв'язання різницевого рівняння k-го порядку слід мати початкові дані. Зазвичай ними є перші k членів:

$$a_0, a_1, \ldots, a_k = given. \qquad (2.2)$$

Рівняння (2.1) разом з початковими даними (2.2) утворюють задачу Коші. Справедлива наступна теорема:

Теорема 1. *Задача Коші для рівняння (2.1) має єдиний розв'язок.*

Означення 1. Функції $\mathrm{f_1(n), f_2(n), \ldots, f_r(n)}$ називаються *лінійно залежними* для $\mathrm{n \geq n_0}$, якщо існують такі числа $\mathrm{a_0, a_1, \ldots, a_r}$, що

$$\mathrm{a_1f_1(n) + a_2f_2(n) + \ldots a_rf_r(n) = 0} \qquad (2.3)$$

для всіх $n \geq n_0$:

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_r| \neq 0. \tag{2.4}$$

Функції, які не є лінійно залежними, називаються *лінійно незалежними.*

Означення 2. Множина з k лінійно незалежних розв'язків для однорідного рівняння (2.1) називається *фундаментальним набором розв'язків*.

Маючи набір розв'язків $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_r(n)$ рівняння (2.1), можна одразу перевірити їх лінійну незалежність.

Означення 3. *Казоратіаном* розв'язків $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_r(n)$ називається визначник:

$$C(n) = det\begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \ldots & x_r(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \ldots & x_r(n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1(n+r-1) & x_2(n+r-1) & \ldots & x_r(n+r-1) \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Теорема 2. *Набір k розв'язків $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$ є лінійно незалежним тоді і тільки тоді, коли $C(n) \neq 0$.*

Теорема 3. *Набір розв'язків $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)$ є фундаментальним тоді і тільки тоді, коли $C(n_0) \neq 0$ для деякого $n_0 \in N$.*

Теорема 4. *Якщо $p_k(n) \neq 0$ (де $p_k -$ коефіцієнти рівняння (2.1)) для всіх $n \geq n_0$, то різницеве рівняння має фундаментальний набір розв'язків для $n \geq n_0$.*

Теорема 5. *Нехай* $x_1(n), x_2(n), \dots, x_r(n)$ *– фундаментальний набір розв'язків однорідного рівняння. Тоді загальним розв'язком є*

$x(n) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i(n)$

(2.6)

де β_i *– довільні константи.*

Лінійним однорідним рівнянням зі сталими коефіцієнтами є рівняння виду

$$\alpha_{n+k} + p_1\alpha_{n+k-1} + p_2\alpha_{n+k-2} + \cdots + p_k a_n = 0, \qquad (2.7)$$

де p_i – відомі сталі.

Припустимо що $p_k \neq 0$. Це гарантує нам те, що рівняння має k-ий порядок.

Щоб знайти розв'язки, підставимо λ^n замість α_n. Тоді з рівняння (2.7) маємо:

$$\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + p_2\lambda^{k-2} + \cdots + p_k = 0. \qquad (2.8)$$

Це рівняння відоме як характеристичне рівняння. Розв'язання цього алгебраїчного рівняння k-го порядку дасть нам k коренів λ_i, відомих як характеристичні корені. Оскільки $p_k \neq 0$, вони всі ненульові.

Слід розглянути два випадки.

Випадок 1. Всі корені $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$різні.

Тоді набір $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ є фундаментальним набором розв'язків. Щоб побачити це, обрахуємо $C(0)$:

$$C(0) = det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}.$$

(2.9)

Цей визначник (відомий як визначник Вандермонда) дорівнює:

$C(0) = \prod_{1 \le i \le j \le k} (\lambda_i - \lambda_j),$ (2.10)

Тоді загальним розв'язком різницевого рівняння є:

$x(n) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \lambda_i^n$ (2.11)

Випадок 2. Корені $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ мають кратність $m_1, m_2, \ldots, m_r$ відповідно, $r < k$.

Фундаментальним набором розв'язків рівняння (2.7) буде об'єднання наборів по одному на кожен корінь λ_i.

$\{\lambda_i^n, n\lambda_i^n, n^2\lambda_i^n, \ldots, n^{m_i-1}\lambda_i^n\}$, (2.12)

Рекурентні рівняння відіграють важливу роль у математичному моделюванні систем масового обслуговування. Вони дозволяють аналізувати поведінку системи в часі та в сталому стані, використовуються для опису динаміки ймовірностей різних станів системи. Рекурентні рівняння застосовуються у дискретних та неперервних моделях часу.

2.2. Ланцюги Маркова

Ланцюги Маркова — це математична модель, яка описує систему, яка випадковим чином переходить з одного стану в інший. Ланцюги Маркова характеризуються матрицею ймовірностей переходів між станами. У ланцюгах із неперервним часом часові переходи відбуваються неперервно, час перебування в кожному стані може бути будь-яким цілим невід`ємним дійсним числом. Система може переходити з одного стану в інший протягом певного періоду часу.

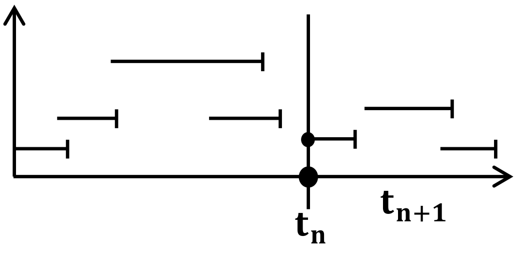
Ланцюги Маркова з неперервним часом:

Нехай, $\left(X(t)\right)_{t\geq 0}$ – випадковий процес зі значеннями в скінченній або зліченій множині Е.

Зазвичай в марковських моделях масового обслуговування $X(t)$ – кількість вимог в системі масового обслуговування в момент $t \geq 0$.

Означення 4: $X(t)_{t\geq 0}$ називається *ланцюгом Маркова з неперервним часом*, якщо для будь-яких моментів часу $0 \leq \mathrm{t}_0 \leq \mathrm{t}_1 \leq \ldots \leq \mathrm{t}_\mathrm{n} \leq \mathrm{t}_{\mathrm{n}+1}$ і будь-яких станів $\mathrm{i}_0, \mathrm{i}_1, \ldots, \mathrm{i}_\mathrm{n}, \mathrm{i}_{\mathrm{n}+1}$ виконується Марковська умова:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}(\mathrm{t}_{\mathrm{n}-1}) = \mathrm{i}_{\mathrm{n}+1} | \mathrm{X}(\mathrm{t}_1) = \mathrm{i}_1, \mathrm{X}(\mathrm{t}_2) = \mathrm{i}_2 \ldots \mathrm{X}(\mathrm{t}_\mathrm{n}) = \mathrm{i}_\mathrm{n}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}(\mathrm{t}_{\mathrm{n}+1}) = \mathrm{i}_{\mathrm{n}+1} | \mathrm{X}(\mathrm{t}_\mathrm{n}) = \mathrm{i}_\mathrm{n}), \quad (2.13)$$



Тобто умовна ймовірність того, що система у стані i у момент часу t, залежить лише від стану сисеми у момент часу t_n і не залежить від станів системи у інші моменти часу. Іншими словами, майбутній розвиток ланцюга Маркова з неперервним часом залежить лише від поточного стану.

З цього випливає **властивість Маркова**:

Якщо ви знаєте що відбувається зараз, то майбутнє не залежить від минулого.

Означення 5. *Ланцюги Маркова з неперервним часом називають однорідним (по часу),* якщо $\forall s \geq 0 \; \forall t \geq 0$:

$$P\left(X_{(s+t)} = j \middle| X_{(s)} = i\right) = P\left(X_{(t)} = j \middle| X_{(0)} = i\right), \tag{2.14}$$

Ймовірність переходу зі стану i в j за час $t \geq 0$:

$$p_{ij}(t) = P\left(X_{(t)} = j \middle| X_{(0)} = i\right), \tag{2.15}$$

Перехідна матриця за час $t \geq 0$:

$$P_{(t)} = \|p_{ij}(t)\|_{i,j \in E}, \tag{2.16}$$

Означення 6. Число $\lambda_{ij} \geq 0, i \neq j$ називається *інтенсивністю переходу з* i в j, якщо:

$$P_{ij}(\Delta) = \lambda_{ij}\Delta + o(\Delta), \Delta \to 0+, \tag{2.17}$$

(ймовірність переходу з i в j за час Δ)

Зауваження: Якщо процес $\left(X(t)\right)_{t \geq 0}$ неперервний за ймовірністю, то інтенсивності існують.

Ланцюги Маркова з неперервним часом є дуже важливим інструментом для моделювання та аналізу систем масового обслуговування, дозволяючи описувати динаміку системи в часі та ймовірності переходів між різними станами системи. Ланцюги Маркова використовуються для моделювання випадкових процесів, де майбутній стан залежить лише від поточного стану і не залежить від історії процесу.

РОЗДІЛ 3. ОСНОВНА ЧАСТИНА

Припустимо, що ми маємо три сервери 1, 2 та 3 (рис.1). На сервер 1 надходять запити для обробки, у той момент, коли сервер 1 переповнений, вмикається сервер 2 і починає обробку запитів, сервер 3 вмикається, коли сервер 2 перезавантажений запитами. Вимкнення серверів відбувається тоді, коли розвантажується попередній.

Нехай $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – інтенсивності надходження запитів на сервера відповідно, μ_1, μ_2, μ_3 – інтенсивності обробки запитів серверами відповідно.

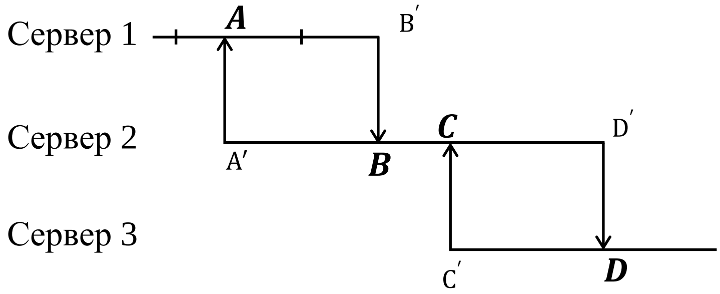


Рис. 1.

$\mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}', \mathrm{D}'$ – критичні точки переходу на новий сервер.

Зазначимо, що $\mathrm{A} = \mathrm{A}', \mathrm{B} = \mathrm{B}', \mathrm{C} = \mathrm{C}', \mathrm{D} = \mathrm{D}'$

Задачею є знайти середній час який вимоги проводять на сервері 1, на сервері 2 та на сервері 3 і скільки переходів із сервера 1 в 2, із 2 в 1, із 2 в 3 і із 3 в 2. Підрахувавши ці числа ми зможемо знайти скільки в середньому витрачається грошей на обслуговування вимог.

Для того, щоб розв'язати таку задачу ми розв'яжемо декілька допоміжних задач про розрахунки деяких числових характеристик системи масового обслуговування з одним сервером, де інтенсивність надходження вимог дорівнює α, а інтенсивність обробки $\mu \neq \alpha$.

3.1 Задача 1

Розглянемо МП з фазовим простором $\{0, 1 \dots, n\}$.

Скільки середнього часу проводимо на сервері до потрапляння в n (рис.2). Введемо позначення, нехай y_i – кількість середнього часу проведеного на $i-$ тому сервері. Вважається, що інтенсивності надходження вимог дорівнюють α, інтенсивності обробки дорівнюють μ.

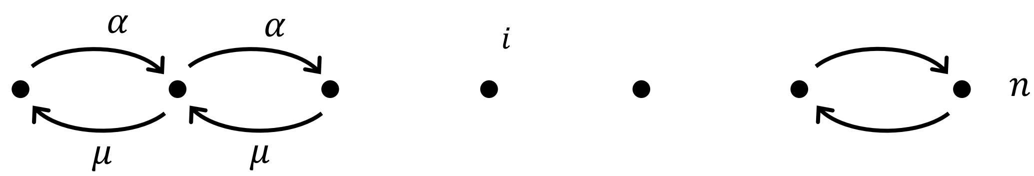


Рис. 2.

Для цього потрібно взяти за перший крок кількість часу, яку будемо проводити в точці i плюс кількість часу, який будемо проводити в точках за інші кроки (рис. 2).

На першому кроці, в середньому, перебуваємо час з параметром сум інтенсивності виходу із i, тобто:

$$y_i = \frac{1}{\alpha+\mu} + \frac{\alpha}{\alpha+\mu} y_{i+1} + \frac{\mu}{\alpha+\mu} y_{i-1}, \qquad (3.1)$$

З граничними умовами маємо:

$$y_0 = \frac{1}{\alpha} + y_1, \; y_n = 0.$$

Запишемо рівняння (3.1) у вигляді:

$$y_i = y_i^{\text{часткове неоднорідне}} + y_i^{\text{загальне однорідне}}, \qquad (3.2)$$

де $y_i^{\text{часткове неоднорідне}} = \mathrm{C} \cdot i$,

$$y_i^{\text{загальне однорідне}} = C_1 \lambda_1^i + C_2 \lambda_2^i$$

Використовуючи теорію по рекурентним рівнянням знайдемо $\boldsymbol{y_i^{\text{загальне однорідне}}}$. Рівняння для нього набуває вигляд:

$$y_i = \frac{\alpha}{\alpha+\mu} y_{i+1} + \frac{\mu}{\alpha+\mu} y_{i-1}$$

Тоді характеристичним рівняння буде:

$$\lambda = \frac{\alpha}{\alpha+\mu}\lambda^2 + \frac{\mu}{\alpha+\mu}$$

$$\lambda^2 \frac{\alpha}{\alpha+\mu} - \lambda + \frac{\mu}{\alpha+\mu} = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot \frac{\alpha}{\alpha+\mu} \cdot \frac{\mu}{\alpha+\mu} = 1 - \frac{4\alpha\mu}{(\alpha+\mu)^2} = \frac{(\alpha+\mu)^2 - 4\alpha\mu}{(\alpha+\mu)^2} =$$

$$= \frac{\alpha^2 - 2\alpha\mu + \mu^2}{(\alpha+\mu)^2} = \frac{(\alpha-\mu)^2}{(\alpha+\mu)^2} = \left(\frac{\alpha-\mu}{\alpha+\mu}\right)^2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \left(\frac{\alpha-\mu}{\alpha+\mu}\right)}{\frac{2\alpha}{\alpha+\mu}} = \frac{(\alpha+\mu)\left(1 \pm \frac{|\alpha-\mu|}{\alpha+\mu}\right)}{2\alpha} = \frac{\alpha+\mu \pm |\alpha-\mu|}{2\alpha}$$

$$\lambda_1 = \frac{\alpha+\mu+\alpha-\mu}{2\alpha} = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha+\mu-\alpha+\mu}{2\alpha} = \frac{\mu}{2}$$

$$y_i^{\text{заг. одн.}} = C_1 \cdot 1^i + C_2 \cdot \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^i, (1^i = 1) \tag{3.3}$$

Знайдемо $\boldsymbol{y_i}^{\text{часткове неоднорідне}}$ **:**

$$y_i = \mathrm{C} \cdot i$$

Підставимо у початкове рівняння (3.1):

$$\mathrm{C} \cdot i = \frac{1}{\alpha+\mu} + \frac{\alpha}{\alpha+\mu} \cdot C(i+1) + \frac{\mu}{\alpha+\mu} C(i-1)$$

$$(\alpha+\mu)\mathrm{C} \cdot i = 1 + \alpha C(i+1) + \mu C(i-1)$$

$$(\alpha+\mu)\mathrm{C} \cdot i = 1 + \alpha \mathrm{C} i + \alpha C + \mu \mathrm{C} i - \mu C$$

$$(\alpha+\mu)\mathrm{C} \cdot i = 1 + (\alpha+\mu)\mathrm{C} i + \alpha C - \mu C$$

$$0 = 1 + (\alpha-\mu)C$$

$$C = \frac{1}{\mu-\alpha} \tag{3.4}$$

Підставимо (3.3) та (3.4) у рівняння (3.2), отримаємо:

$$y_i = \frac{i}{\mu-\alpha} + C_1 \cdot 1^i + C_2 \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^i \qquad (3.5)$$

Знайдемо C_1 та C_2 із системи рівнянь:

$$\begin{cases} y_0 = \frac{1}{\alpha} + y_1 \\ y_n = 0 \end{cases} \Rightarrow / \; y_0 = \frac{0}{\mu\cdot\alpha} + C_1 \cdot 1^0 + C_2 \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^0 = C_1 + C_2 \; /$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\mu-\alpha} + C_1 + C_2 \cdot \frac{\mu}{\alpha} \\ \frac{n}{\mu-\alpha} + C_1 + C_2 \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 - C_2 \cdot \frac{\mu}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\mu-\alpha} \\ C_1 = -\frac{n}{\mu-\alpha} - C_2 \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_2 \left(1 - \frac{\mu}{\alpha}\right) = \frac{\mu}{\alpha(\mu-\alpha)} \\ C_1 = -\frac{n}{\mu-\alpha} - C_2 \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha-\mu}{\alpha} C_2 = \frac{\mu}{\alpha(\mu-\alpha)} \\ C_1 = -\frac{n}{\mu-\alpha} - C_2 \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n \end{cases} \Rightarrow$$

$$C_2 = \frac{\mu}{\alpha(\mu-\alpha)} \cdot \frac{\alpha}{\alpha-\mu} = \frac{-\mu}{(\mu-\alpha)^2}$$

$$C_1 = -\frac{n}{\mu-\alpha} + \frac{\mu^{n+1}}{\alpha^n(\mu-\alpha)^2} = \frac{-n\alpha^n(\mu-\alpha)}{\alpha^n(\mu-\alpha)^2} + \frac{\mu^{n+1}}{\alpha^n(\mu-\alpha)^2} =$$

$$= \frac{\mu^{n+1} - n\alpha^n(\mu-\alpha)}{\alpha^n(\mu-\alpha)^2}$$

Запишемо рівняння (3.1) у загальному вигляді підставивши значення для C_1та C_2:

$$y_i = \frac{i}{\mu-\alpha} + \frac{\mu^{n+1} - n\alpha^n(\mu-\alpha)}{\alpha^n(\mu-\alpha)^2} - \frac{\mu}{(\mu-\alpha)^2}\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^i \qquad (3.6)$$

Отже, отримали рівність (3.6) для знаходження кількості середнього часу, який проводимо на сервері i до потрапляння на сервер $i + 1$.

3.2 Задача 2

Скільки чекати в середньому до потрапляння в 0 або n при старті з точки i. Також розв'язати цю задачу при $n \to \infty$ якщо $\mu > \alpha$.

Аналогічно до розв'язку попередньої задачі отримаємо систему лінійних рівнянь.

$$y_i = \frac{1}{\alpha + \mu} + \frac{\alpha}{\alpha + \mu} y_{i+1} + \frac{\mu}{\alpha + \mu} y_{i-1}, i \geq 1$$

з граничними умовами

$y_0 = 0, y_n = 0$. Випадок $n \to \infty$ отримується граничним переходом.

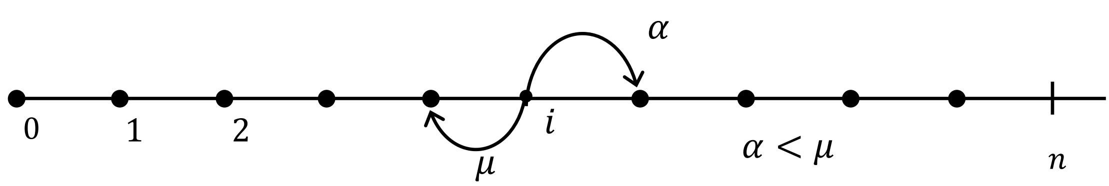


Рис. 3

(3.3)

Із задачі 1 маємо рівняння (3.5):

$$y_i = \frac{i}{\mu - \alpha} + C_1 + C_2 \cdot \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^i$$

Із умови знаємо, що $y_0 = 0 \Rightarrow 0 = 0 + C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = -C_2$

Тоді:

$$y_i = \frac{i}{\mu - \alpha} + C_1 - C_1 \cdot \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^i \quad (3.6)$$

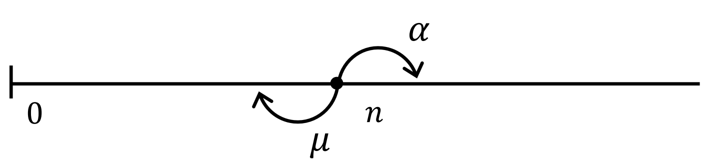


Рис. 4

Маємо умову:

$y_n = 0$

Підставимо у початкове рівняння (3.6) і знайдемо C_1:

$$\frac{n}{\mu - \alpha} + C_1\left(1 - \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n\right) = 0$$

$$C_1 = -\frac{n}{\mu - \alpha} / \left(1 - \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n\right)$$

$$y_i = \frac{i}{\mu-\alpha} + \frac{n}{\mu-\alpha} \cdot \frac{\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^i - 1}{\left(1-\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n\right)} \qquad (3.7)$$

Якщо $\mu > \alpha$, тоді:

$$\frac{\alpha}{\mu} > 1 => \left|1 - \frac{\alpha}{\mu}\right| > 1 => \left|1 - \frac{\alpha}{\mu}\right|^n > 1$$

$$\left|1 - \frac{\alpha}{\mu}\right|^n \to \infty$$

$$\frac{N}{\left|1-\frac{\alpha}{\mu}\right|^n} \to 0$$

$$y_i = \frac{i}{\mu-\alpha} \text{ при } n \to \infty \qquad (3.8)$$

Отже, отримали рівність (3.8) для знаходження кількості часу, який потрібно чекати в середньому до потрапляння в 0 або n при старті з точки i.

3.3 Задача 3

Знайти ймовірність того, що до 0 дійдемо раніше ніж до n $(\text{рис. } 5)$, при :

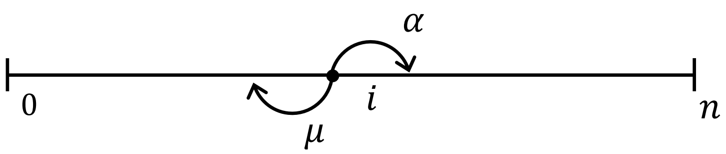


Рис. 5

Введемо позначення, нехай x_i – ймовірність дійти до 0, раніше ніж до n, роблячи перший крок з i.

$$x_i = \frac{\alpha}{\alpha+\mu} x_{i+1} + \frac{\mu}{\alpha+\mu} x_{i-1}, \text{при } 1 \le i \le n-1 \tag{3.9}$$

За умови: $x_0 = 1$, $x_n = 0$

З задачі 1 маємо рівняння (3.5):

$$x_i = C_1 + C_2 \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^i$$

Знайдемо C_1 та C_2 із системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_n = 0 \end{cases} => \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + C_2 \cdot \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n = 0 \end{cases} => \begin{cases} C_1 = 1 - C_2 \\ 1 - C_2 + C_2 \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n = 0 \end{cases} =>$$

$$=> \begin{cases} C_1 = 1 - C_2 \\ C_2\left(\left(1-\frac{\mu}{\alpha}\right)^n\right) = 1 \end{cases} => \begin{cases} C_1 = 1 - \frac{1}{1-\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n} \\ C_2 = 1 - \frac{1}{1-\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n} \end{cases} => \begin{cases} C_1 = \frac{-\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n}{1-\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n} \\ C_2 = \frac{1}{1-\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n} \end{cases}$$

$$x_i = -\frac{\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n}{1-\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n} + \frac{1}{1-\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n}\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^i \tag{3.10}$$

Отже, отримали рівність (3.10) для знаходження ймовірність того, що до 0 дійдемо раніше ніж до n.

3.4 Розв’язок задачі про сервери

А тепер переходимо до розв’язку задачі, яку було сформульовано на початку розділу.

Припустимо, що СМО стартує з точки А першого серверу. Розіб’ємо поведінку СМО на цикли. Кожен цикл складатиметься з інтервалу часу проведеного на першому сервері до потрапляння на другий та інтервалу часу до потрапляння в точку А на сервері 1 (А вимог). Час проведений в кожному циклі складатиметься із суми трьох часів: час на першому, другому та третьому серверах. Відповідні середні значення позначимо x_1, x_2, x_3.

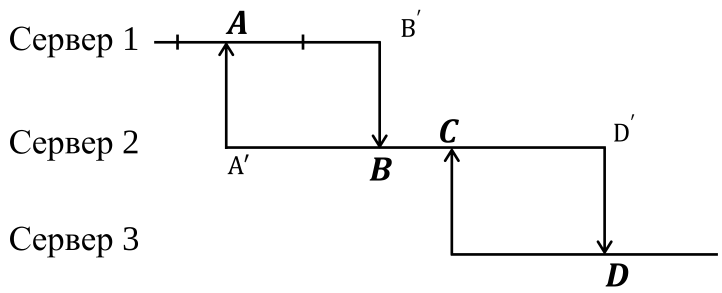


Рис.6

Тоді середня довжина циклу = $x_1 + x_2 + x_3$ (3.11)

Грошей на одиницю часу = $\frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3}$(вартість серверу №1) +

+ $\frac{x_2}{x_1+x_2+x_3}$ (вартість серверу №2) +

$\frac{x_3}{x_1+x_2+x_3}$ (вартість серверу№3) +

q_{11}(вартість переходу із серверу №1 в №2) +

q_{21}(вартість переходу із серверу №2 в №1) +

q_{23}(вартість переходу із серверу №2 в №3) +

q_{32}(вартість переходу із серверу №3 в №2) (3.12)

де, q_{ij} – кількість переходів із стану і в j

Для знаходження x_1, x_2, x_3 ми використаємо формули з задач 1,2,3 розв'язаних вище. Число x_1 знаходиться із Задачі 1. Відповідні розрахунки будуть наведені нижче, після розглядання серверу 2 та 3.

Для знаходження x_2 помітимо наступне. По-перше, СМО при виході з першого сервера потрапляє в точку B. Є дві можливості. Або ми потрапимо в сервер 1 раніше, ніж на сервер 3, або навпаки. Крім того, якщо ми спочатку потрапимо на сервер 3, то нове потрапляння в сервер 2 відбудеться в точці B'.

Нехай $x_2 = x_B$ (3.13)

– час перебування в режимі 2 (до потрапляння на сервер 1), старт із B

$$x_B = (\text{середній час до виходу з } [A'C] \text{ при старті з B}) + (\text{ймовірність зі стану } B \text{ перейти в } C \text{ раніше } A) \cdot x_C$$

де $x_C -$ час в режимі *2*, старт з *C*. Маємо

$$x_C = (\text{час до виходу з } [BD'] \text{ при старті з C}) + (\text{ймовірність перейти з } C \text{ до } B \text{ раніше ніж до } D) \cdot x_B + $$
$$+ (\text{ймовірність перейти з } C \text{ до } D \text{ раніше ніж до B}) \cdot x_C.$$

Для зазначених вище ймовірностей ми знайшли формули, див. Задачу 3. Для середнього часу до виходу з $A'C$ формули знайдені в задачі 2. Отже два останніх рівняння – це система лінійних рівнянь з двома невідомими. Розв'язуючи її отримаємо x_2.

Для знаходження x_3 помітимо, що при потраплянні на сервер 3 СМО стартує з точки *D*. Позначимо через x_D середній час, який СМО проводить на сервері 3 до потрапляння в точку A. Маємо

$$x_3 = (\text{ймовірність дійти до } D \text{ раніше } A \text{ при старті з B}) \cdot x_D \qquad (3.14)$$

Відповідну ймовірність знайдемо з задачі 3.

Для x_D маємо таке рівняння:

$$x_D = (\text{середній час до потрапляння в C з } D') + (\text{ймовірність перейти з } C \text{ в } D \text{ раніше, ніж в A}')x_D$$

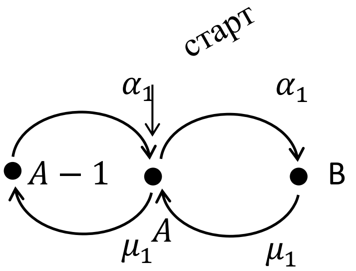
Відповідний середній час та ймовірність знайдемо з задач 2 та 3, відповідно.

Введемо позначення:

Нехай τ_* – час досягнення (*)

Знайдемо середній час проведений на сервері 1.

Застосуємо результат задачі 1



З рівняння (3.6)

$y_i = \frac{i}{\mu-\alpha} + \frac{\mu^{n+1}-n\alpha^n(\mu-\alpha)}{\alpha^n(\mu-\alpha)^2} - \frac{\mu}{(\mu-\alpha)^2}\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^i$, маємо при $i \sim A, n \sim B, \alpha_1,\ \mu_1$ відповідають точкам A та B відповідно.

$$x_1 = \frac{i}{\mu_1-\alpha_1} + \frac{{\mu_1}^{n+1} - n{\alpha_1}^n(\mu_1-\alpha)}{{\alpha_1}^n(\mu_1-\alpha_1)^2} - \frac{\mu_1}{(\mu_1-\alpha_1)^2}\left(\frac{\mu_1}{\alpha_1}\right)^i =>$$

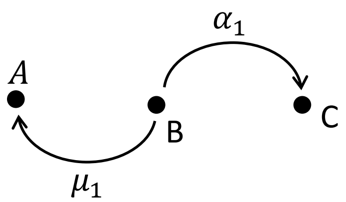
$$=> x_1 = \frac{A}{\mu_1-\alpha_1} + \frac{{\mu_1}^{B+1} - B{\alpha_1}^B(\mu_1-\alpha)}{{\alpha_1}^B(\mu_1-\alpha_1)^2} - \frac{\mu_1}{(\mu_1-\alpha_1)^2}\left(\frac{\mu_1}{\alpha_1}\right)^A \qquad (3.15)$$

- середні час проведений на сервері 1.

Знайдемо середній час проведений на сервері 2.

Для цього знайдемо ймовірності застосовуючи результат із задачі 3.

1. $P_B(\tau_C < \tau_A) -$ з B в C, раніше A



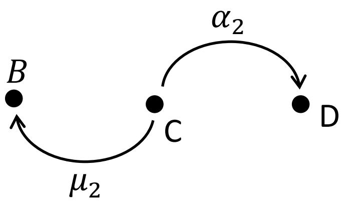
покладено: $i \sim B - A, n \sim C - A,\ \alpha = \alpha_2, \mu = \mu_2$

тоді формула (3.10):

$p_i = \frac{-\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n}{1-\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n} + \frac{1}{1-\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n} \cdot \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^i$ спрощується до вигляду:

$$P_B(\tau_C < \tau_A) = \frac{\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{B-A} - \left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{C-A}}{1-\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{C-A}} \qquad (3.16)$$

2. $P_C(\tau_B < \tau_D) -$ з C в $B,$ раніше D



покладено: $i \sim \mathrm{C} - B, n \sim D - B,\ \alpha = \alpha_2, \mu = \mu_2,$ маємо

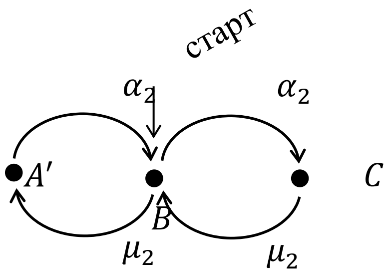
$$P_C(\tau_B < \tau_D) = \frac{\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{C-B} - \left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{D-B}}{1-\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{D-B}} \qquad (3.17)$$

3. $P_C(\tau_D < \tau_B) -$ з C до $D,$ раніше B

$$P_C(\tau_D < \tau_B) = 1 - P_C(\tau_B < \tau_D) = \frac{1-\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{C-B}}{1-\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{D-B}} \qquad (3.18)$$

Знайдемо математичні сподівання застосовуючи результат із задачі 2:

1. Час перебування в інтервалі $A'C$

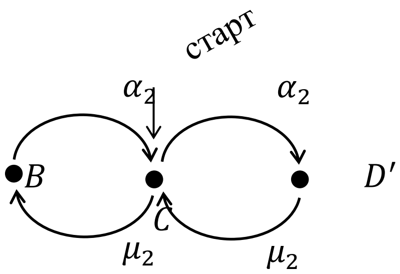


при $i \sim B - A, n \sim C - A, \alpha = \alpha_2,\ \mu = \mu_2,$

З формули (3.7) $y_i = \frac{i}{\mu-\alpha} + \frac{N}{\mu-\alpha} \cdot \frac{\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^i - 1}{\left(1-\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^N\right)}$ маємо:

$$\mathbb{E}_B \min(\tau_{A'}, \tau_C) = \frac{B-A}{\mu_2-\alpha_2} + \frac{C-A}{\mu_2-\alpha_2} \cdot \frac{\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{B-A} - 1}{\left(1-\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{C-A}\right)} \quad (3.19)$$

2. Час перебування в інтервалі BD'



при $i \sim C-D, n \sim D-B, \alpha = \alpha_2,\ \mu = \mu_2$, маємо:

$$\mathbb{E}_C \min(\tau_B, \tau_{D'}) = \frac{C-D}{\mu_2-\alpha_2} + \frac{D-B}{\mu_2-\alpha_2} \cdot \frac{\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{C-D} - 1}{\left(1-\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{D-B}\right)} \quad (3.20)$$

Для зручності, позначимо $\mathbb{E}_B \min(\tau_{A'}, \tau_C) = M_B, \mathbb{E}_C \min(\tau_B, \tau_{D'}) = M_C$, та $P_B(\tau_C < \tau_A) = P_B, P_C(\tau_B < \tau_D) = P_C$, тоді $P_C(\tau_D < \tau_B) = 1 - P_C$.

Маємо систему рівнянь для x_B, x_C:

$$\begin{cases} x_B = M_B + P_B x_C \\ x_C = M_C + P_B x_B + (1-P_C) x_C \end{cases}$$

$$x_C = M_C + P_B(M_B + P_B x_C) + (1-P_C)x_C$$

$$0 = M_C + P_B M_B + {P_B}^2 x_C - P_C x_C = M_C + P_B M_B + ({P_B}^2 - P_C)x_C =>$$

$$=> x_C(P_C - {P_B}^2) = M_C + P_B M_B$$

$$x_C = \frac{M_C + P_B M_B}{(P_C - {P_B}^2)}$$

Отже, x_B виразимо через x_C і отримаємо:

$$x_B = M_B + P_B x_C = M_B + P_B \frac{M_C + P_B M_B}{(P_C - {P_B}^2)}$$

$$= \frac{M_B P_C - M_B {P_B}^2 + P_B M_C + {P_B}^2 M_B}{(P_C - {P_B}^2)} = \frac{M_B P_C + P_B M_C}{(P_C - {P_B}^2)}$$

Тоді,

$x_2 = \frac{M_B P_C + P_B M_C}{(P_C - {P_B}^2)}$, (3.21) – середній час перебування на сервері 2, де

$$M_B = \mathbb{E}_B \min(\tau_{A'}, \tau_C) = \frac{B-A}{\mu_2-\alpha_2} + \frac{C-A}{\mu_2-\alpha_2} \cdot \frac{\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{B-A}-1}{\left(1-\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{C-A}\right)};$$

$$M_C = \mathbb{E}_C \min(\tau_B, \tau_{D'}) = \frac{C-D}{\mu_2-\alpha_2} + \frac{D-B}{\mu_2-\alpha_2} \cdot \frac{\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{C-D}-1}{\left(1-\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{D-B}\right)};$$

$$P_B = P_B(\tau_C < \tau_A) = \frac{\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{B-A} - \left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{C-A}}{1-\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{C-A}};$$

$$P_C = P_C(\tau_B < \tau_D) = \frac{\left(\frac{\mu_3}{\alpha_3}\right)^{C-B} - \left(\frac{\mu_3}{\alpha_3}\right)^{D-B}}{1-\left(\frac{\mu_3}{\alpha_3}\right)^{D-B}}.$$

Знайдемо середній час проведений на сервері 3.

Для цього знайдемо ймовірності застосовуючи результат із задачі 3.

1. $P_B(\tau_D < \tau_A) -$ з B в $D,$ раніше A

   $P_B(\tau_D < \tau_A) = 1 - p_i,$ де $i = B - A, n = D - A,$

тоді формула (3.10):

$p_i = \frac{-\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n}{1-\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n} + \frac{1}{1-\left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^n} \cdot \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^i$ спрощується до вигляду:

$$p_i = \frac{\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{B-A} - \left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{D-A}}{1-\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{D-A}} =$$

$$=> P_B(\tau_D < \tau_A) = \frac{1-\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{B-A}}{1-\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{D-A}}. \qquad (3.22)$$

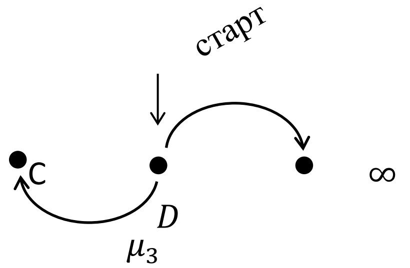
2. $P_C(\tau_D < \tau_A) -$ з C до $D,$ раніше A

   $P_C(\tau_D < \tau_A) = 1 - p_i,$ де $i = C - A, n = D - A,$ маємо:

$$P_C(\tau_D < \tau_A) = \frac{1-\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{C-A}}{1-\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{D-A}}. \qquad (3.23)$$

Знайдемо математичне сподівання застосовуючи результат із задачі 2:

1. Середній час до потрапляння в С з D'



при $i = D - \text{C},\ \alpha = \alpha_3,\ \mu = \mu_3, i = 1$, тоді з формули (3.8)

$y_i = \frac{i}{\mu - \alpha}$ маємо

$$\mathbb{E}_D \tau_C = \frac{D-C}{\mu_3 - \alpha_3}. \tag{3.24}$$

Знайдемо x_D підставивши одержанні значення: $x_D = \mathbb{E}_D \tau_C + P_C(\tau_D < \tau_A) x_D =>$

$$x_D = \frac{\mathbb{E}_D \tau_C}{1 - P_C(\tau_D < \tau_A)} = \frac{D-C}{\mu_3 - \alpha_3} \frac{1 - \left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{D-A}}{-\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{D-A} - \left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{C-A}}$$

Отже,

$x_3 = \frac{1 - \left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{B-A}}{1 - \left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{D-A}} \frac{D-C}{\mu_3 - \alpha_3} \frac{1 - \left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{D-A}}{-\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{D-A} - \left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{C-A}}$ (3.25) – середні час проведений на сервері 3.

Отже, ми отримали рівності для знаходженпня середнього часу (3.15), (3.21), (3.25), тепер ми можемо знайти середню кількість переходів між циклами, довжину циклу та скільки в середньому витрачається грошей на обслуговування вимог.

Переходів між $A \to B$, $B \to A$, по 1 шт. на цикл.

Якщо ми стартуємо із D (тобто за умови що в циклі відвідали D), то розподіл кількості переходів $C \to D$ має геометричний розподіл з параметром $p = P_C(\tau_B < \tau_D)$.

Математичне сподівання дорівнює $\mathbb{E}_D = \frac{1}{p}$.

Тому загальне математичне сподівання кількості переходів $C \to D$ в одному циклі = Загальне математичне сподівання кількості переходів $D \to$ C в одному циклі

$\mathbb{E}_{C\to D} = \mathbb{E}_{D\to \mathrm{C}} = \frac{P_B(\tau_D<\tau_A)}{p} = \frac{P_B(\tau_D<\tau_A)}{P_C(\tau_B<\tau_D)}$, де

$$P_B(\tau_D < \tau_A) = \frac{1-\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{B-A}}{1-\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{D-A}}$$

$$P_C(\tau_B < \tau_D) = \frac{\left(\frac{\mu_3}{\alpha_3}\right)^{C-B} - \left(\frac{\mu_3}{\alpha_3}\right)^{D-B}}{1-\left(\frac{\mu_3}{\alpha_3}\right)^{D-B}}$$

Середня довжина циклу = $x_1 + x_2 + x_3$

Грошей на одиницю часу = $\frac{x_1}{x_1 + x_2 + x_3}$(вартість серверу №1) +

+ $\frac{x_2}{x_1+x_2+x_3}$ (вартість серверу №2) +

$\frac{x_3}{x_1+x_2+x_3}$ (вартість серверу№3) +

$\frac{1}{x_1+x_2+x_3}$(вартість переходу із серверу №1 в №2) +

$\frac{1}{x_1+x_2+x_3}$(вартість переходу із серверу №2 в №1) +

$\frac{\frac{P_B(\tau_D<\tau_A)}{P_C(\tau_B<\tau_D)}}{x_1+x_2+x_3}$(вартість переходу із серверу №2 в №3) +

$\frac{\frac{P_B(\tau_D<\tau_A)}{P_C(\tau_B<\tau_D)}}{x_1+x_2+x_3}$(вартість переходу із серверу №3 в №2),

де x_1, x_2, x_3 відповідають значенням (3.15), (3.21), (3.25),

$$P_B(\tau_D < \tau_A) = \frac{1-\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{B-A}}{1-\left(\frac{\mu_2}{\alpha_2}\right)^{D-A}},$$

$$P_C(\tau_B < \tau_D) = \frac{\left(\frac{\mu_3}{\alpha_3}\right)^{C-B} - \left(\frac{\mu_3}{\alpha_3}\right)^{D-B}}{1-\left(\frac{\mu_3}{\alpha_3}\right)^{D-B}}.$$

Отже, ми отримали рівності для знаходження середнього часу на кожному сервері, довжину циклу та кількість грошей, яку витрачаємо на одиницю часу.

ВИСНОВКИ

У процесі дипломної роботи було досліджено системи масового обслуговування з керуванням. В першому розділі наведено основні позначення, які використовуються в роботі. Другий розділ заклав теоретичну основу, уточнивши ключові терміни та поняття. В третьому розділі була сформульована основна задача даної роботи, а саме задача про знаходження середнього часу проведеного в різних режимах системи масового обслуговування і середньої вартості обслуговування сервера.

Підсумовуючи, ми можемо стверджувати, що застосування теоретичних моделей та практичних підходів, розглянутих у цій роботі, можливо підвищити ефективність функціонування систем масового обслуговування в різних галузях. Подальша адаптація до специфічних умов конкретних систем масового обслуговування може сприяти покращенню якості обслуговування та оптимізації використання ресурсів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Кендалл, А. (1951). Some problems in the theory of queues. Journal of the Royal Statistical Society.

[2] Ерланг, А.К. (1917). Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges. Matematisk Tidsskrift..

[3] Харріс, К. (1974). Fundamentals of Queueing Theory. John Wiley & Sons.
Росс, С. (1983). Introduction to Stochastic Models. Academic Press.

[4] Гнеденко, Б.В. (1968). Моделі надійності та резервування в системах масового обслуговування. Наукова думка.

[5] Коваленко, І.М. (1970). Теорія випадкових процесів та її застосування до систем масового обслуговування. Наукова думка.

[6] Коваленко, І.М. (1980). Системи масового обслуговування та їх застосування. Наукова думка.

[7] Б.В.Гнеденко, І.М.Коваленко. (1987) Введение в теорию массового обслуживания.

[8] Adan, I., & Resing, J. (2002). Queueing theory.

[9] Л.А. Овчаров. (1969) Прикладные задачи теории массового обслуживания М. Машиностроение”.

[10] Sheldon M. Ross. (2003) An introduction to Probability Models. Academic Press.

[11] Глоба Л.С. (2007) Математичні основи побудови інформаційнотелекомунікаційних систем / Посібник для студентів технічних спеціальностей/ Рек. МОН України, НТУУ “КПІ”, Інститут телекомунікацій, кафедра інформаційно-телекомунікаційних мереж.

[12] Aczel J., (1966) Lectures on functional equations and their applications, Mathematics in Science and Engineering.

[13] Costas E., (2010) Introduction to Functional Equations

[14] Джексон, Д. (1957). Networks of Waiting Lines. Operations Research

[15] Feller, W., (1971). An introduction to probability theory and its applications, Vol.1. John Wiley & Sons.