НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 519.21

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
________ Олег КЛЕСОВ
«___»_____________2024 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Властивості деякого випадкового процесу
зі змінним фазовим простором»

Виконав:
студент VI курсу, групи ОМ-21мн
Панченко Богдан Володимирович __________

Науковий керівник:
доцент кафедри математичного аналізу
та теорії ймовірностей,
канд. фіз.-мат. наук
Маловічко Тетяна Володимирівна __________

Рецензент:
доцент кафедри математичних методів
системного аналізу,
канд. фіз.-мат. наук
Подколзін Гліб Борисович __________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент _____________

Київ – 2024 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
_______ Олег КЛЕСОВ
«___»_____________2024 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Панченку Богдану Володимировичу

1. Тема дисертації «Властивості деякого випадкового процесу зі змінним фазовим простором», науковий керівник дисертації Маловічко Тетяна Володимирівна, кандидат фізико-математичних наук, затверджені наказом по університету від «___»_________ 20__ р. №_____
2. Термін подання студентом дисертації 23 травня 2024 року
3. Об'єктом дослідження є випадкові процеси зі змінним фазовим простором.
4. Предметом дослідження є початкові розподіли, при яких випадкові процеси зі змінним фазовим простором зупиняються у наперед вибраних точках на межі області з наперед заданими ймовірностями.
5. Перелік завдань, які потрібно розробити:
   5.1. Ознайомитися з літературою та зробити її огляд.
   5.2. Дослідити існування такої початкової точки, що вінерів процес зі змінним фазовим простором, який стартує з неї, зупиняється в точках в

чотирьох точках на межі області з довільними наперед заданими додатними ймовірностями.

5.3. Узагальнити результати, одержані для вінерового процесу зі змінним фазовим простором, на випадок дифузійного процесу зі змінним фазовим простором.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: до прикладів розділу 2 додаються ілюстрації (5 рисунків).
7. Орієнтовний перелік публікацій: матеріали проведених досліджень стануть основою для підготовки подання публікації до фахового видання.
8. Дата видачі завдання 2 листопада 2023 року

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Огляд літератури	02.11.2023–24.01.2024	виконано
2.	Дослідження існування такої початкової точки, що вінерів процес зі змінним фазовим простором, який стартує з неї, зупиняється в точках в чотирьох точках на межі області з довільними наперед заданими додатними ймовірностями.	25.01.2024–26.02.2024	виконано
3.	Побудова дифузійного процесу зі змінним фазовим простором та доведення, що він є марківським процесом.	26.02.2024–14.03.2024	виконано
4.	Узагальнення результатів, одержаних для вінерового процесу зі змінним фазовим простором, на випадок дифузійного процесу зі змінним фазовим простором.	15.03.2024–08.05.2024	виконано
5.	Оформлення результатів	09.05.2024–23.05.2024	виконано

Студент Богдан ПАНЧЕНКО

Науковий керівник Тетяна МАЛОВІЧКО

Реферат

Магістерська дисертація містить 43 сторінки та 15 посилань і 10 слайдів презентації.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню початкових розподілів, при яких випадкові процеси зі змінним фазовим простором зупиняються у наперед вибраних точках на межі області з наперед заданими ймовірностями.

Метою дисертації є дослідження початкових розподілів вінерового процесу зі змінним фазовим простором та узагальнення результатів, одержаних нього, на випадок дифузійного процесу зі змінним фазовим простором.

В роботі над дисертацією використовувалися фундаментальні результати з теорії випадкових процесів та курсу стохастичних диференціальних рівнянь.

Ключові слова: вінерів процес, вінерів процес на відрізку з поглинанням на кінцях, марківський процес, стохастичне диференціальне рівняння, збіжність за ймовірністю, збіжність у середньому квадратичному.

Abstract

The master's thesis contains 43 pages and 15 references and 10 sides of the presentation.

The thesis is devoted to the study of initial distributions under which random processes with a variable phase space stop at preselected points on the boundary of the region with preset probabilities.

The purpose of the thesis is to study initial distributions of Wiener processes with a variable phase space and to generalize the results obtained for the case of diffusion processes with a variable phase space.

Fundamental results from the theory of random processes and the course of stochastic differential equations were used in the thesis.

Keywords: Wiener process, Wiener process on a bounded interval with absorption at the ends, Markov process, stochastic differential equation, convergence in probability, convergence in mean square.

Зміст

Вступ

Вивчення стохастичних потоків починалось від ідеї розглядати сильні розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь як функції від початкової точки. З розвитком математичних моделей виникла трактовка потоку як сукупності марківських процесів, що певним чином взаємодіють між собою. В тому числі, почали розглядати й потоки зі склеюванням, тобто потоки, траєкторії частинок в яких після зустрічі склеюються в одну.

Такі потоки з'являються як при описі турбулентних явищ, моделей протікання для річкових систем тощо.

Класичним прикладом стохастичного потоку зі склеюванням є потік Арратья [1], який може бути описаний на інтуїтивному рівні як сукупність частинок, що стартують з кожної точки числової прямої, здійснюють броунівський рух та рухаються незалежно до моменту зустрічі, а при зустрічі склеюються та продовжують броунівський рух разом.

Також прикладами стохастичних потоків зі склеюванням можуть бути потоки Харріса у випадку наявності склеювання та потоки Арратья з дрейфом, введені А. А. Дороговцевим [2].

Для стохастичного потоку зі склеюванням n-точковий рух є n-вимірним випадковим процесом, координати якого після зустрічі залишаються рівними.

В роботі [3] розглядався аналогічний процес, який ми будемо називати вінеровим процесом зі змінним фазовим простором. Цей процес починав свій рух в однозв'язній області, на межі якої було вибрано скінченну кількість точок $A_1, A_2, \ldots, A_n$, що розбивали межу області на n дуг. Процес поводився як двовимірний вінерів процес до моменту виходу на межу, а потім поводився як одновимірний вінерів процес на відповідній дузі з поглинанням на кінцях.

В роботі [3] досліджувались початкові розподіли, за яких вінерів процес зі змінним фазовим простором зупинявся у точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ з наперед заданими ймовірностями.

У цій магістерської дисертації доповнюються та узагальнюються результати роботи [3].

1. Огляд літератури

Стохастичні потоки зі склеюванням та їх n-точкові рухи є об'єктом багатьох сучасних досліджень.

Зокрема, Дороговцев А. А., Гнедін А. В. та Вовчанський М. Б. в роботі [4] досліджували розмір кластерів, утворених в потоці Арратья частинками, що зіткнулися з частинкою, яка стартувала з нуля.

Означення.

Сукупність відображень $\{y(u,\cdot) \mid u \in \mathbb{R}\}$, де $y(u) \equiv \{y(u,t) \mid t \in \mathbb{R}^+\}$, називається *потоком Арратья,* якщо:

1) для кожного $u \in \mathbb{R}$ процес $y(u)$ є процесом; $y(u,0) = u$;
2) з $u_1 < u_2$ випливає, що $y(u_1) \le y(u_2)$;
3) характеристика мартингальних частин $y(u_1)$ та $y(u_2)$ дорівнює

$$\int_0^t \mathbb{I}_{\{y(u_1,s)=(u_2,s)\}} ds.$$

Для розміру кластера

$$v(t) = \lambda\{u \mid y(0,t) = y(u,t)\},$$

де λ – міра Лебега, був доведений [4] закон повторного логарифму, а саме, було встановлено, що майже напевно

$$\limsup_{t\to 0+} \frac{v(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t^{-1}}} \ge 1,$$

$$\limsup_{t\to 0+} \frac{v(t)}{2\sqrt{t\ln\ln t^{-1}}} \le 1.$$

Означення.

Нехай a – вимірна функція на $\mathbb{R}$. Сукупність випадкових процесів $\{Y^a(u) \mid u \in \mathbb{R}\}$ називається *потоком Арратья з дрейфом* a, якщо:

1) для кожного $u \in \mathbb{R}$

$$Y_t^a(u) = u + \int_0^t a\left(Y_s^a(u)\right)ds + B_t(u),$$

де $B(u)$ – вінерів процес відносно фільтрації $\mathcal{F}^{Y^a}$, породженої $\left\{Y^a(u) \mid u \in \mathbb{R}\right\}$;

2) для довільних u_1, u_2

$$\left\langle B(u_1), B(u_2)\right\rangle_t = \left(t - \inf\left\{r \mid Y_r^a(u_1) = Y_r^a(u_2)\right\}\right)_+ = \int_0^t \mathbb{I}_{\left\{Y_r^a(u_1) = Y_r^a(u_2)\right\}} dr.$$

Дороговцев А. А. та Вовчанський М. Б. довели [5], що при $u_1 < \ldots < u_N$

$$\left(X^{(n)}(u_1), \ldots, X^{(n)}(u_N)\right) \Rightarrow \left(Y^a(u_1), \ldots, Y^a(u_N)\right),\ n \to \infty,$$

в $\left(\mathcal{D}([0;1])\right)^N$, де $\left(X^{(n)}(u_1), \ldots, X^{(n)}(u_N)\right)$ – апроксимуючий процес, побудований методом дробових кроків.

Дороговцев А. А. та Вовчанський М. Б. [6] отримали оцінки на швидкість збіжності розподілів образів міри Лебега під дією цих апроксимуючих потоків до розподілу міри Лебега під дією потоку Арратья з дрейфом. Вони ввели скінченновимірні щільності, що описують послідовності зіткнень в потоці Арратья, та отримали явний вираз для них, а також дослідили збіжність відповідних апроксимацій точкових мір для потоку Арратья при дискретизації початкового інтервалу.

Означення.

Сукупність $\mathcal{D}(\mathbb{R})$-значних випадкових величин

$$\left\{X(s,t) \mid X(s,t) \equiv X(\cdot, s, t), s \le t\right\}$$

називається *потоком Харріса з інфінітезимальною коваріацією φ,* якщо:

1) для всіх $s \le t \le r$

$$P\left\{X(\cdot, s, r) = X(\cdot, t, r) \circ X(\cdot, s, t)\right\} = 1; \quad X(s,s) = Id \text{ м. н.};$$

2) для всіх $t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n$ випадкові величини $X(t_1, t_2), \ldots, X(t_{n-1}, t_n)$ є незалежними;

3) для всіх $s,t\in\mathbb{R}$ та $h>0$ розподіли $X\left(s,t\right)$ та $X\left(s+h,t+h\right)$ є рівними;

4) $X\left(0,h\right)\to Id$ при $h\to 0+$ за ймовірністю;

5) для довільного x процес $X\left(x,s,r\right)-x$ є вінеровим процесом, який стартує з 0, відносно фільтрації $\sigma\left\{X\left(u_1,u_2\right),\ 0\le u_1\le u_2\le t\right\}_{t\ge 0}$;

6) для довільних $x,y\in\mathbb{R}$

$$\left\langle X\left(x,0,\cdot\right),X\left(y,0,\cdot\right)\right\rangle\left(t\right)=\int_0^t\varphi\left(X\left(x,0,s\right)-X\left(y,0,s\right)\right)ds.$$

У роботі [7] доведено, що потік Харріса існує для будь-якої симетричної неперервної невід'ємно визначеної функції φ, якщо φ задовольняє умову Ліпшиця поза будь-яким околом нуля та її перетворення Фур'є має неперервну відносно міри Лебега компоненту. У випадку, коли φ достатньо гладка, потік можна отримати як розв'язок стохастичних диференціальних рівнянь.

Вовчанський М. Б. [8] показав, що зліченні набори рухів у гладких стохастичних потоках слабко збігаються до відповідних зліченних наборів рухів у потоці Харріса з інфінітезимальною коваріацією, яка визначається характеристичною функцією центрованого стійкого закону. Це відбувається при умові, що інфінітезимальні коваріації гладких потоків збігаються до коваріації граничного потоку рівномірно на компактах. Крім того, показано збіжність скінченних наборів, породжених потоками перетворень числової осі, у слабкій топології.

Дороговцев А. А. та Вовчанський М. Б. [9] ввели для потоків Арратья з дрейфом поняття точкових щільностей, що відповідають скінченному числу точок старту та конкретній послідовності моментів склейки, та встановили збіжність таких точкових щільностей до точкових щільностей для всього потоку.

Дослідженням стохастичних потоків зі склеюванням також займались Берестики, Гарбан та Сен [10]. Вони розглянули альтернативні простір та топологію для стохастичних потоків зі склеюванням, що полегшило доведення збіжності дискретних об'єктів до броунівського потоку, та довели принцип інваріантності (теорема 4.1) для збіжності масштабованих випадкових блукань зі склеюванням на $\mathbb{Z}$ до потоку Арратья за припущення, що крок випадкового блукання є випадковою величиною зі скінченною дисперсією. У попередніх роботах умови були більш жорсткими. Ньюман, Равішанкар та Сан показали [11], що такий принцип інваріантності виконується за умови скінченного п'ятого моменту. У роботі [12] достатньою умовою було існування скінченного моменту порядку $3+\varepsilon,$ а необхідною умовою було існування скінченного моменту порядку $3-\varepsilon.$

Випадковий процес, що описує рух броунівських частинок, які при зустрічі склеюються, проте не уповільнюються, досліджував А. А. Дороговцев [13, 14].

Він розглядав вінерів лист W на $\mathbb{R}\times[0;+\infty)$ та таку невід'ємну функцію $\varphi\in C_0^2(\mathbb{R}),$ що

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi(u)du=1.$$

Для довільного $\varepsilon>0$ він задав функцію φ_ε на $\mathbb{R}$ співвідношенням

$$\varphi_\varepsilon(u)=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)}$$

та позначив через $x_\varepsilon(u,t)$ – розв'язок стохастичного диференціального рівняння

$$dx_\varepsilon(u,t)=\int_{\mathbb{R}}\varphi_\varepsilon\big(x_\varepsilon(u,t)-p\big)W(dp,dt)$$

з початковою умовою $x_\varepsilon(u,0)=u.$

У роботі [14] було показано, що для довільних $u_1<u_2<\ldots<u_n$ випадкові процеси $\{x_\varepsilon(u_1,t),\ldots,x_\varepsilon(u_n,t);\ t\in[0;T]\}$ збігаються за розподілом при $\varepsilon\to 0+$ в просторі $C([0;T],\mathbb{R}^n)$ для кожного $T.$ Граничний розподіл на $C([0;+\infty),\mathbb{R}^n)$ позначався $\mu_{u_1\ldots u_n}.$ Сукупність $\{\mu_{u_1\ldots u_n};\ u_1,\ldots,u_n\in\mathbb{R},n\ge 1\}$

згідно теореми Колмогорова задає випадковий процес $\{x(u,\cdot);\ u \in \mathbb{R}\}$ зі значеннями в $C([0;+\infty))$.

Для цього процесу було доведено такі властивості:

1) $\{x(u,\cdot);\ u \in \mathbb{R}\}$ – однорідний марківський процес у $C([0;+\infty))$, неперервний за ймовірністю;

2) процес x має cadlág модифікацію як випадковий процес, визначений на $\mathbb{R}$ і приймає значення в просторі $C([0;1])$;

3) процес x має cadlág модифікацію як випадковий процес, визначений на $\mathbb{R}$ і приймає значення в просторі $C([0;+\infty))$;

4) для довільного $t \geq 0$ ймовірність того, що $x(\cdot,t)$ як відображення з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ є розривним, дорівнює 1.

2. Теоретичні відомості

Означення.

Гауссівський процес $w=\{w(t),\ t\ge 0\}$ називається *процесом Вінера*, *вінеровим процесом* або *броунівським рухом*, якщо

1) $Ew(t)=0,\quad t\ge 0;$
2) $\operatorname{cov}(w(s),w(t))=\min(s,t),\quad s,t\ge 0.$

Означення.

Процес $\{\xi(t), t\in[0,T]\}$ будемо називати *простим процесом*, якщо він має вигляд

$$\xi(t)=\alpha_0\mathbb{I}_{[t_0,\,t_1]}(t)+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\mathbb{I}_{(t_k,\,t_{k+1}]}(t),\quad t\in[0,T],$$

де $n\in\mathbb{N}$, $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=T$ – деяке розбиття відрізку $[0,T]$, $\alpha_k\ \left(k=\overline{0,n-1}\right)$ – обмежені $\mathcal{F}_{t_k}$-вимірні випадкові величини, $\mathbb{I}_A$ – індикатор множини A, тобто

$$\mathbb{I}_A(t)=\begin{cases}1, & t\in A,\\ 0, & t\notin A.\end{cases}$$

Множину простих процесів позначимо через $\mathcal{L}_0$ або $\mathcal{L}_0([0,T])$.

Означення.

Для простого процесу

$$\xi=\alpha_0\mathbb{I}_{[t_0,\,t_1]}+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k\mathbb{I}_{(t_k,\,t_{k+1}]}\in\mathcal{L}_0([0,T])$$

інтегралом Іто від ξ по w називається випадкова величина

$$I_T(\xi)=\int_0^T\xi(t)dw(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\left(w(t_{k+1})-w(t_k)\right).$$

Аналогічно вводяться інтеграли $\int_S^T\xi(t)dw(t).$

Оператор I_T можна продовжити за неперервністю на $\overline{\mathcal{L}_0([0,T])}$, тобто на замикання $\mathcal{L}_0([0,T])$ в $L_2(\Omega\times[0,T],dP\times dt)$.

Означення.

Нехай $\xi\in\overline{\mathcal{L}_0([0,T])}$. *Інтегралом Іто* від ξ називається границя

$$I_T(\xi) = \lim_{n\to\infty} I_T(\xi_n),$$

де $\{\xi_n\} \subset \mathcal{L}_0([0,T])$, $\xi_n \xrightarrow{L_2} \xi, \quad n \to \infty.$

Означення.

Процес $\{\xi(t), t \in [0,T]\}$ називається *прогресивно вимірним*, якщо для кожного $t \in [0,T]$ відображення

$$\Omega \times [0,t] \ni (\omega, s) \to \xi(\omega, s) \in \mathbb{R}$$

є $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}([0,t])$-вимірним.

Теорема.

Замикання множини простих процесів $\mathcal{L}_0([0,T])$ у просторі

$$L_2\left(\Omega \times [0,T], \mathcal{F}_T \times \mathcal{B}([0,T]), dP \times dt\right)$$

збігається з множиною $\mathcal{L}_2([0,T])$ прогресивно вимірних процесів $\{\xi(t), t \in [0,T]\}$ таких, що

$$E\int_0^T \xi^2(t)\,dt < \infty.$$

Означення.

Прогресивно вимірний процес $\{\xi(t), t \in [0,T]\}$ має *стохастичний диференціал*

$$d\xi(t) = a(t)dt + b(t)dw(t),$$

якщо

a) процеси $a(t)$ та $b(t)$ є прогресивно вимірними;

b) $\int_0^T |a(t)|dt < \infty$ м. н., $\int_0^T |b(t)|dt < \infty$ м. н.;

c) для всіх $t \in [0,T]$ майже напевно

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dw(s).$$

Нехай $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ – потік σ-алгебр, $\{w(t), t \geq 0\}$ – $\mathcal{F}_t$-вінерів процес, ξ_0 – $\mathcal{F}_0$-вимірна випадкова величина, $a(t,x)$ та $b(t,x)$ – вимірні функції.

Означення.

Випадковий процес $\{\xi(t), t \in [0,T]\}$ називається *сильним розв'язком стохастичного диференціального рівняння*

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))dt + b(t, \xi(t))dw(t), \quad t \in [0,T],$$

з початковою умовою $\xi(0) = \xi_0$, якщо він задовольняє такі умови:

1) випадковий процес $\xi(t)$ є $\mathcal{F}_t$-узгодженим та неперервним за t м. н.;

2) $\int_0^T \left|a\left(s, \xi(s)\right)\right| ds < +\infty$ м. н., $\int_0^T b^2\left(s, \xi(s)\right) ds < +\infty$ м. н.;

3) майже напевно виконується рівність

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a\left(s, \xi(s)\right) ds + \int_0^t b\left(s, \xi(s)\right) dw(s), \quad t \in [0, T].$$

Теорема.

Нехай

1) випадкова величина ξ_0 є $\mathcal{F}_0$-вимірною, причому $E\xi_0^2 < +\infty$;

2) функції $a(t, x)$ та $b(t, x)$ задовольняють *умову Ліпшиця* за x, тобто

$$\exists L > 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$\left|a(t, x_1) - a(t, x_2)\right| \le L\left|x_1 - x_2\right|,$$

$$\left|b(t, x_1) - b(t, x_2)\right| \le L\left|x_1 - x_2\right|;$$

3) функції $a(t, x)$ та $b(t, x)$ задовольняють *умову лінійного росту* за x, тобто

$$\exists C > 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\left|a(t, x)\right| \le C\left(1 + |x|\right),$$

$$\left|b(t, x)\right| \le C\left(1 + |x|\right).$$

Тоді

a) існує такий розв’язок $\{\xi(t), t \in [0, T]\}$ з початковою умовою $\xi(0) = \xi_0$ рівняння

$$d\xi(t) = a\left(t, \xi(t)\right) dt + b\left(t, \xi(t)\right) dw(t), \quad t \in [0, T],$$

що

$$E \max_{t \in [0, T]} \xi^2(t) < +\infty;$$

b) якщо $\{\eta(t), t \in [0, T]\}$ – розв’язок цього ж рівняння з початковою умовою ξ_0 такий, що

$$E \max_{t \in [0, T]} \eta^2(t) < +\infty,$$

то

$$P\left\{\xi(t) = \eta(t), \quad t \in [0, T]\right\} = 1.$$

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$\begin{cases} d\xi(t) = a\left(\xi(t)\right) dt + b\left(\xi(t)\right) dw(t), \\ \xi(0) = x_0 \end{cases}$$

та введемо для нього диференціальний оператор L:

$$Lf(x)=a(x)\frac{df}{dx}(x)+\frac{1}{2}b^2(x)\frac{d^2f}{dx^2}(x).$$

Для $x_0\in[x_1,x_2]$ позначимо через τ момент першого виходу розв'язку цього рівняння з інтервалу (x_1,x_2):

$$\tau=\inf\{t\ge 0:\ (\xi(t)=x_1)\vee(\xi(t)=x_2)\}.$$

Теорема.

Нехай функції $a(x)$ та $b(x)$ задовольняють умову теореми існування та єдиності розв'язку, а також існує функція $u\in C^2(\mathbb{R})$, для якої

$$\begin{cases} Lu(x)=-1, & x\in[x_1,x_2], \\ u(x_1)=u(x_2)=0. \end{cases}$$

Тоді для довільного $x_0\in[x_1,x_2]$

$$E_{x_0}\tau=u(x_0).$$

Означення.

Функція $\varphi\in C^2(\mathbb{R})$ називається L-*гармонічною* на відрізку $[x_1,x_2]$, якщо

$$\forall x\in[x_1,x_2]\quad L\varphi(x)=0.$$

Теорема.

Нехай функції $a(x)$ та $b(x)$ задовольняють умову теореми існування та єдиності розв'язку,

$$\forall x\in[x_1,x_2]\quad b(x)\ne 0,$$

функція $\varphi(x)$ є L-гармонічною на відрізку $[x_1,x_2]$, а також $\varphi(x)$ не є сталою.

Тоді для довільного $x_0\in[x_1,x_2]$

$$P_{x_0}\{\xi(\tau)=x_1\}=\frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_0)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)},$$

$$P_{x_0}\{\xi(\tau)=x_2\}=\frac{\varphi(x_0)-\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}.$$

3. Вінерів процес зі змінним фазовим простором

Об’єктом нашого дослідження є наступний процес, який розглядався в роботі [3].

Нехай задана обмежена однозв’язна область Q в $\mathbb{R}^2$ з кусково-гладкою межею. На межі цієї області виберемо скінченну кількість точок $A_1, A_2, \dots, A_n$ (для зручності позначень будемо вважати, що $A_0 = A_n$), що розбивають межу області Q на n дуг.

Будемо розглядати процес $Y_{(x_0,\, y_0)}(\cdot)$, що стартує з точки $(x_0, y_0) \in Q$ та поводиться як двовимірний вінерів процес до моменту виходу на межу області Q. У цей момент процес Y потрапляє на одну з дуг $A_{k-1}A_k$, а потім поводиться, як одновимірний вінерів процес на дузі $A_{k-1}A_k$ з поглинанням на кінцях.

Для формальної побудови цього процесу потрібні такі означення.

Означення.

Вінеровим процесом на відрізку $[a, b]$ *з поглинанням на кінцях*, що стартує з точки $x_0 \in [a, b]$, називається процес

$$\overline{w}(t) = \begin{cases} w_{x_0}(t), & t < \tau_{ab}, \\ w_{x_0}(\tau_{ab}), & t \geq \tau_{ab}, \end{cases}$$

де w_{x_0} – вінерів процес, що стартує з точки x_0, а τ_{ab} – момент першого виходу процесу w_{x_0} з інтервалу (a, b), тобто

$$\tau_{ab} = \inf\left\{t \geq 0 :\ w_{x_0}(t) \in \{a, b\}\right\}.$$

Означення.

Вінеровим процесом на дузі AB *з поглинанням на кінцях*, що стартує з точки $x_0 \in AB,$ називається процес $h^{-1}\left(\overline{w}(\cdot)\right),$ де відображення h^{-1} є оберненим до відображення h, що ставить у відповідність кожній точці M дуги AB довжину дуги AM, а $\overline{w}(\cdot)$ є вінеровим процесом на відрізку $\left[0, |AB|\right]$ з поглинанням на кінцях, що стартує з точки $h(x_0).$

Будемо розглядати процес

$$Y_{(x_0,\, y_0)}(t) = \mathbb{I}_{\{t<\tau\}} \cdot w_{(x_0,\, y_0)}(t) + \mathbb{I}_{\{t\ge\tau\}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{\left\{w(\tau)\in A_{k-1}A_k\right\}} \cdot w^{(k)}_{w(\tau)}(t-\tau),$$

де $w_{(x_0,\, y_0)}(\cdot)$ – двовимірний вінерів процес, що стартує з точки $(x_0, y_0) \in Q,$ τ – момент першого виходу процесу $w_{(x_0,\, y_0)}$ на межу області Q, тобто

$$\tau = \inf\left\{t \ge 0:\ w_{(x_0,\, y_0)}(t) \in \partial Q\right\},$$

$w^{(k)}_{(x_k,\, y_k)},$ $k = \overline{1, n},$ – незалежні в сукупності та незалежні від $w_{(x_0,\, y_0)}$ вінерові процеси на дугах $A_{k-1}A_k$ з поглинанням на кінцях, що стартують з точок $(x_k, y_k) \in A_{k-1}A_k.$

В роботі [3] було доведено, що процес Y є марківським, розглядався процес Y з випадковим початковим розподілом і було доведено таки результат.

Теорема.

Нехай Q – обмежена однозв’язна область в $\mathbb{R}^2$ з регулярною кусково-гладкою межею, $A_1, A_2, \dots, A_n \in \partial Q.$ Тоді існує початковий розподіл процесу $Y(\cdot),$ при якому $Y(\cdot)$ зупиняється в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ з довільними наперед заданими додатними ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_n$ такими, що $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$

Означення.

Точка $a \in \partial Q$ називається *регулярною*, якщо

$$\forall h > 0 \quad P_x\{\tau > h\} \xrightarrow[x \in Q]{x \to a} 0.$$

Для того, щоб точка $a \in \partial Q$ була регулярною, достатньо, щоб зовші області Q існував трикутник з вершиною a [15].

У роботі [3] було доведено, що існує безліч таких початкових розподілів, причому серед є також міра, абсолютно неперервна відносно міри Лебега.

Також у цій статті розглядалось питання, чи можливо вказати таку точку в області Q, щоб процес Y, що стартує з неї, зупинявся в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \partial Q$ з довільними наперед заданими додатними ймовірностями.

Зазначимо, що якщо така точка існує, то вона не обов'язково є єдиною, про що свідчить наступний приклад.

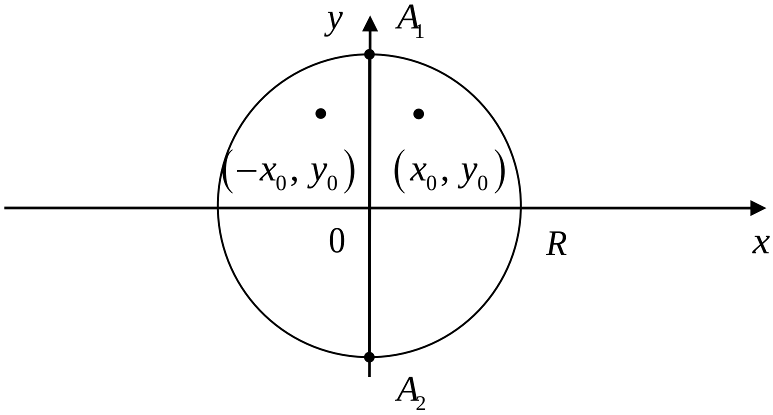
Приклад.

Нехай область Q є відкритим кругом

$$Q = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < R^2 \right\},$$

$A_1(0, R), \quad A_2(0, -R).$ Покажемо, що для довільної точки $(x_0, y_0) \in Q$ при $x_0 > 0$

$$P_{(x_0, y_0)}\{Y \text{ зупиняється в точці } A_k\} = P_{(-x_0, y_0)}\{Y \text{ зупиняється в точці } A_k\}, \quad k = \overline{1, 2}.$$



Позначимо через $\psi_k(x, y)$ $(k \in \{1, 2\})$ ймовірність того, що процес Y при початковому положенні в точці (x, y) зупиниться в точці A_k,

$$\varphi_1(x, y) = \frac{l(x, y)}{\pi R}, \quad x^2 + y^2 = R^2,$$

де $l(x, y)$ – довжина дуги кола з кінцями в точках (x, y) та $A_2(0, -R)$.

Тоді

$$\psi_1(x_0, y_0) = E_{(x_0, y_0)} \varphi_1(w(\tau)).$$

Оскільки

$$l(x, y) = l(-x, y),$$

то

$$\varphi_1(x, y) = \varphi_1(-x, y),$$

$$\varphi_1(w(\tau)) = \varphi_1(\hat{w}(\tau)),$$

де

$$w(t) = (w^1(t), w^2(t)), \quad \hat{w}(t) = (-w^1(t), w^2(t)).$$

Якщо процес w стартує з точки (x, y), то процес стартує з точки $(-x, y)$. Звідси, а також з того, що $\hat{w}$ також є вінеровим процесом на площині, причому

$$\tau = \inf\{t \ge 0 : w(t) \in \partial Q\} = \inf\left\{t \ge 0 : (w^1(t))^2 + (w^2(t))^2 = R^2\right\} =$$

$$= \inf\left\{t \ge 0 : (-w^1(t))^2 + (w^2(t))^2 = R^2\right\} = \inf\{t \ge 0 : \hat{w}(t) \in \partial Q\},$$

випливає, що

$$\psi_1(x_0, y_0) = E_{(x_0, y_0)}\varphi_1(w(\tau)) = E_{(-x_0, y_0)}\varphi_1(\hat{w}(\tau)) = E_{(-x_0, y_0)}\varphi_1(w(\tau)) = \psi_1(-x_0, y_0),$$

$$\psi_2(x_0, y_0) = 1 - \psi_1(x_0, y_0) = 1 - \psi_1(-x_0, y_0) = \psi_2(-x_0, y_0). \qquad \square$$

Відповідь на питання щодо існування початкової точки із зазначеними властивостями для випадку трьох точок на межі була позитивною, тобто у роботі [3] було одержано такий результат.

Теорема.

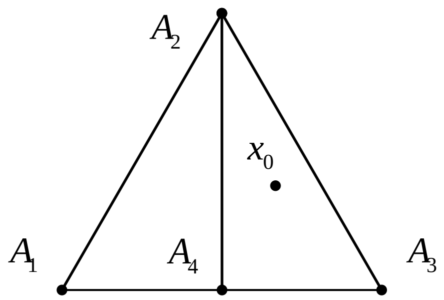
Нехай Q – обмежена однозв’язна область в $\mathbb{R}^2$ з регулярною кусково-гладкою межею, а A_1, A_2, A_3 – точки на межі Q. Тоді існує така точка $x_0 \in Q$, що процес $Y(\cdot)$, що стартує з x_0, зупиняється в точках A_1, A_2, A_3 з довільними наперед заданими додатними ймовірностями p_1, p_2, p_3 такими, що $\sum_{k=1}^{3} p_k = 1$, відповідно.

Для випадку п’яти точок на межі відповідь на наведене питання була негативною, про що свідчив відповідний контрприклад.

Для того, щоб показати, що відповідь буде негативною і для випадку чотирьох точок на межі області, розглянемо таким приклад.

Приклад.

Нехай область Q є внутрішністю правильного трикутника, точки A_1, A_2, A_3 є вершинами цього трикутника, а точка A_4 є серединою сторони A_1A_2. Покажемо, існують додатні числа p_1, p_2, p_3, p_4 такі, що $\sum_{k=1}^{4} p_4,$ для яких не існує такої точки $x_0 \in Q,$ при початковому положенні в якій процес Y зупиняється в точках A_1, A_2, A_3, A_4 з ймовірностями p_1, p_2, p_3, p_4 відповідно.



Позначимо через $\psi_k(x)$ $\left(k\in\{1,2,3,4\}\right)$ ймовірність того, що процес Y при початковому положенні в точці x зупиниться в точці A_k. Припустимо, що існують такі точки $x_0, y_0 \in Q$, що

$$\psi_1(x_0)=\psi_3(x_0)=\frac{1}{4},\quad \psi_2(x_0)=\frac{1}{3},\quad \psi_4(x_0)=\frac{1}{6},$$

$$\psi_1(y_0)=\psi_3(y_0)=\frac{5}{24},\quad \psi_2(y_0)=\frac{1}{3},\quad \psi_4(y_0)=\frac{1}{4}.$$

Легко бачити, що

$$\sum_{k=1}^{4}\psi_k(x_0)=\sum_{k=1}^{4}\psi_k(y_0)=1.$$

Припустимо, що відстань від точки x_0 до сторони A_3A_2 менше відстані від точки x_0 до сторони A_1A_2.

Позначимо

$$B_1(y)=\left\{x\in A_1A_2:\quad 0\le\rho(x,A_1)<y\right\},$$
$$B_2(y)=\left\{x\in A_3A_2:\quad 0\le\rho(x,A_3)<y\right\}.$$

Для довільної точки $x\in A_2A_4$ з симетрії вінерового процесу випливає рівність

$$P_x\left\{Y \text{ потрапляє у } B_1(y)\right\}=P_x\left\{Y \text{ потрапляє у } B_2(y)\right\}.$$

Тому

$$P_{x_0}\left\{Y \text{ потрапляє у } B_1(y)\right\}=\int\limits_{A_2A_4}P_x\left\{Y \text{ потрапляє у } B_1(y)\right\}dP_{x_0}\left\{Y \text{ потрапляє у } A_2x\right\}=$$
$$=\int\limits_{A_2A_4}P_x\left\{Y \text{ потрапляє у } B_2(y)\right\}dP_{x_0}\left\{Y \text{ потрапляє у } A_2x\right\}=$$
$$=P_{x_0}\left\{Y \text{ потрапляє у } B_2(y) \text{ через } A_2A_4\right\}<P_{x_0}\left\{Y \text{ потрапляє у } B_2(y)\right\},$$

а отже,

$$P_{x_0}\left\{Y \text{ потрапляє у } A_1 \text{ через } A_1A_2\right\} = \int\limits_{|A_1A_2|}\left(1-\frac{y}{|A_1A_2|}\right)dP_{x_0}\left\{Y \text{ потрапляє у } B_1(y)\right\} =$$

$$= \int\limits_{|A_3A_2|}\left(1-\frac{y}{|A_3A_2|}\right)dP_{x_0}\left\{Y \text{ потрапляє у } B_1(y)\right\} <$$

$$< \int\limits_{|A_3A_2|}\left(1-\frac{y}{|A_3A_2|}\right)dP_{x_0}\left\{Y \text{ потрапляє у } B_2(y)\right\} =$$

$$= P_{x_0}\left\{Y \text{ потрапляє у } A_3 \text{ через } A_3A_2\right\}.$$

Позначимо

$$C_1(y) = \left\{x \in A_1A_3:\quad 0 \le \rho(x, A_1) < y\right\},$$
$$C_2(y) = \left\{x \in A_1A_3:\quad 0 \le \rho(x, A_3) < y\right\}.$$

Для довільної точки $x \in A_2A_4$ з симетрії вінерового процесу випливає рівність

$$P_x\left\{Y \text{ потрапляє у } C_1(y)\right\} = P_x\left\{Y \text{ потрапляє у } C_2(y)\right\}.$$

Тому

$$P_{x_0}\left\{Y \text{ потрапляє у } C_1(y)\right\} = \int\limits_{A_2A_4} P_x\left\{Y \text{ потрапляє у } C_1(y)\right\}dP_{x_0}\left\{Y \text{ потрапляє у } A_2x\right\} =$$

$$= \int\limits_{A_2A_4} P_x\left\{Y \text{ потрапляє у } C_2(y)\right\}dP_{x_0}\left\{Y \text{ потрапляє у } A_2x\right\} =$$

$$= P_{x_0}\left\{Y \text{ потрапляє у } C_2(y) \text{ через } A_2A_4\right\} < P_{x_0}\left\{Y \text{ потрапляє у } C_2(y)\right\},$$

а отже,

$$P_{x_0}\left\{Y \text{ потрапляє у } A_1 \text{ через } A_1A_4\right\} = \int\limits_{|A_1A_4|}\left(1-\frac{y}{|A_1A_4|}\right)dP_{x_0}\left\{Y \text{ потрапляє у } C_1(y)\right\} =$$

$$= \int\limits_{|A_3A_4|}\left(1-\frac{y}{|A_3A_4|}\right)dP_{x_0}\left\{Y \text{ потрапляє у } C_1(y)\right\} <$$

$$< \int\limits_{|A_3A_4|}\left(1-\frac{y}{|A_3A_4|}\right)dP_{x_0}\left\{Y \text{ потрапляє у } C_2(y)\right\} =$$

$$= P_{x_0}\left\{Y \text{ потрапляє у } A_3 \text{ через } A_3A_4\right\}.$$

Таким чином,

$$\psi_1(x_0) < \psi_3(x_0).$$

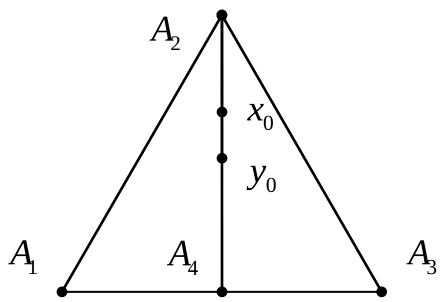
Аналогічно доводиться, що якщо відстань від точки x_0 до сторони A_3A_2 більше відстані від точки x_0 до сторони A_1A_3, то

$$\psi_1(x_0) > \psi_3(x_0).$$

Таким чином, з того, що

$$\psi_1(x_0) = \psi_3(x_0), \quad \psi_1(y_0) = \psi_3(y_0),$$

випливає, що $x_0, y_0 \in A_2A_4$.



Разом із процесом

$$Y(t) = \mathbb{I}_{\{t<\tau\}} \cdot w(t) + \mathbb{I}_{\{t\geq\tau\}} \cdot \sum_{k=1}^{4} \mathbb{I}_{\{w(\tau)\in A_{k-1}A_k\}} \cdot w_{w(\tau)}^{(k)}(t-\tau)$$

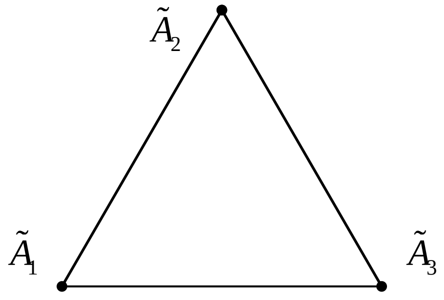
розглянемо процес

$$\tilde{Y}(t) = \mathbb{I}_{\{t<\tau\}} \cdot w(t) + \mathbb{I}_{\{t\geq\tau\}} \cdot \sum_{k=1}^{3} \mathbb{I}_{\{w(\tau)\in \tilde{A}_{k-1}\tilde{A}_k\}} \cdot \tilde{w}_{w(\tau)}^{(k)}(t-\tau),$$

де точки $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3$ є точками A_1, A_2, A_3 відповідно, $\tilde{A}_0$ є точкою A_3,

$$\tilde{w}_{w(\tau)}^{(2)} = w_{w(\tau)}^{(2)}, \quad \tilde{w}_{w(\tau)}^{(3)} = w_{w(\tau)}^{(3)},$$

$\tilde{w}_x^{(1)}$ – незалежний від $\tilde{w}_{w(\tau)}^{(2)}$ та $\tilde{w}_{w(\tau)}^{(3)}$ вінерів процес на відрізку $\tilde{A}_3\tilde{A}_1$ з поглинанням на кінцях, що стартує з точки $x \in \tilde{A}_3\tilde{A}_1$.



Позначимо через $\tilde{\psi}_k(x)$ $\left(k \in \{1, 2, 3\}\right)$ ймовірність того, що процес $\tilde{Y}$ при початковому положенні в точці x зупиниться в точці A_k,

$$\varphi_2(y) = \begin{cases} \dfrac{|A_1 y|}{|A_1 A_2|}, & y \in A_1 A_2, \\ \dfrac{|y A_3|}{|A_2 A_3|}, & y \in A_3 A_2, \\ 0, & y \in A_3 A_1. \end{cases}$$

Тоді

$$\tilde{\psi}_2(x) = E_x \varphi_2\left(w(\tau)\right) = \psi_2(x).$$

А тому

$$\tilde{\psi}_2(x_0) = \psi_2(x_0) = \frac{1}{3}, \quad \tilde{\psi}_2(y_0) = \psi_2(y_0) = \frac{1}{3}.$$

Оскільки $x_0, y_0 \in A_2 A_4$, то з симетрії вінерових процесів випливає, що

$$\tilde{\psi}_1(x_0) = \tilde{\psi}_3(x_0) = \frac{1}{2}\left(1 - \tilde{\psi}_2(x_0)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3},$$
$$\tilde{\psi}_1(y_0) = \tilde{\psi}_3(y_0) = \frac{1}{2}\left(1 - \tilde{\psi}_2(y_0)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Таким чином,

$$\tilde{\psi}_1(x_0) = \tilde{\psi}_2(x_0) = \tilde{\psi}_3(x_0) = \frac{1}{3},$$
$$\tilde{\psi}_1(y_0) = \tilde{\psi}_2(y_0) = \tilde{\psi}_3(y_0) = \frac{1}{3}.$$

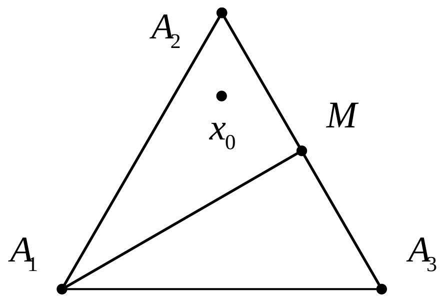
Припустимо, що відстань від точки x_0 до сторони $A_1 A_2$ менше відстані від точки x_0 до сторони $A_1 A_3$.

Тоді аналогічно до того, як було показано, що

$P_{x_0}\left\{Y \text{ потрапляє у } A_1 \text{ через } A_1 A_2\right\} < P_{x_0}\left\{Y \text{ потрапляє у } A_3 \text{ через } A_3 A_2\right\}$,

за припущення, що відстань від точки x_0 до сторони $A_3 A_2$ менше відстані від точки x_0 до сторони $A_1 A_2$, доводиться, що

$$P_{x_0}\left\{\tilde{Y} \text{ потрапляє у } A_3 \text{ через } A_1A_3\right\} < P_{x_0}\left\{\tilde{Y} \text{ потрапляє у } A_2 \text{ через } A_1A_2\right\}.$$



Позначимо для $y \in \left(0, \frac{1}{2}|A_2A_3|\right)$

$$D_1(y) = \left\{x \in A_2A_3 : \quad 0 \le \rho(x, A_2) < y\right\},$$
$$D_2(y) = \left\{x \in A_2A_3 : \quad 0 \le \rho(x, A_3) < y\right\},$$

Для довільної точки x медіани A_1M з симетрії вінерового процесу випливає рівність

$$P_x\left\{w(\tau) \in D_1(y)\right\} = P_x\left\{w(\tau) \in D_2(y)\right\}.$$

Тому

$$P_{x_0}\left\{w(\tau) \in D_2(y)\right\} = \int\limits_{A_1M} P_x\left\{w(\tau) \in D_2(y)\right\} dP_{x_0}\left\{w \text{ потрапляє у } A_1x\right\} =$$
$$= \int\limits_{A_1M} P_x\left\{w(\tau) \in D_1(y)\right\} dP_{x_0}\left\{w \text{ потрапляє у } A_1x\right\} =$$
$$= P_{x_0}\left\{w(\tau) \in D_1(y), \text{ причому } w \text{ перетнув } A_1M\right\} < P_{x_0}\left\{w(\tau) \in D_1(y)\right\},$$

а отже,

$P_{x_0}\left\{Y \text{ потрапляє у } A_3 \text{ через } A_2A_3\right\} - P_{x_0}\left\{Y \text{ потрапляє у } A_2 \text{ через } A_2A_3\right\} =$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}|A_2A_3|}\left(1-\frac{y}{|A_2A_3|}\right)dP_{x_0}\left\{w(\tau)\in D_2(y)\right\} + \int_0^{\frac{1}{2}|A_2A_3|}\frac{y}{|A_2A_3|}dP_{x_0}\left\{w(\tau)\in D_1(y)\right\} -$$

$$- \int_0^{\frac{1}{2}|A_2A_3|}\frac{y}{|A_2A_3|}dP_{x_0}\left\{w(\tau)\in D_2(y)\right\} - \int_0^{\frac{1}{2}|A_2A_3|}\left(1-\frac{y}{|A_2A_3|}\right)dP_{x_0}\left\{w(\tau)\in D_1(y)\right\} =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}|A_2A_3|}\left(1-\frac{2y}{|A_2A_3|}\right)dP_{x_0}\left\{w(\tau)\in D_2(y)\right\} - \int_0^{\frac{1}{2}|A_2A_3|}\left(1-\frac{2y}{|A_2A_3|}\right)dP_{x_0}\left\{w(\tau)\in D_1(y)\right\} =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}|A_2A_3|}\left(1-\frac{2y}{|A_2A_3|}\right)d\left(P_{x_0}\left\{w(\tau)\in D_2(y)\right\} - P_{x_0}\left\{w(\tau)\in D_1(y)\right\}\right) > 0.$$

Таким чином,

$$\psi_2(x_0) > \psi_3(x_0).$$

Аналогічно доводиться, що якщо відстань від точки x_0 до сторони A_1A_2 більше відстані від точки x_0 до сторони A_1A_3, то

$$\psi_2(x_0) < \psi_3(x_0).$$

Таким чином, з того, що

$$\psi_2(x_0) = \psi_3(x_0), \quad \psi_2(y_0) = \psi_3(y_0),$$

випливає, що $x_0, y_0 \in A_1A_4$.

З цього випливає, що точки x_0 та y_0 лежать в точці перетину медіан трикутника $A_1A_2A_3$, а отже, співпадають. Це протирічить тому, що

$$\frac{1}{6} = \psi_4(x_0) \neq \psi_4(y_0) = \frac{1}{4}. \qquad \square$$

4. Дифузійний процес зі змінним фазовим простором

Розглянемо систему стохастичних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} d\xi_1(t) = a(\xi_1(t))dt + b(\xi_1(t))dw_1(t), \\ d\xi_2(t) = a(\xi_2(t))dt + b(\xi_2(t))dw_2(t), \end{cases}$$

де $w_1(t), w_2(t)$ – незалежні одновимірні вінерові процеси.

Нехай функції $a(x)$ та $b(x)$ задовольняють умову Ліпшиця за x, тобто

$$\exists L > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$|a(x_1) - a(x_2)| \le L|x_1 - x_2|, \quad |b(x_1) - b(x_2)| \le L|x_1 - x_2|.$$

Тоді для довільної точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ вказана система має єдиний сильний розв'язок $\xi_{(x_0, y_0)}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$ з початковою умовою $\xi(0) = (x_0, y_0)$, причому

$$\forall T \ge 0 \quad E \max_{t \in [0, T]} \left(\xi_1^2(t) + \xi_2^2(t)\right) < +\infty.$$

Нехай задана обмежена однозв'язна область Q в $\mathbb{R}^2$ з кусково-гладкою межею. На межі цієї області виберемо скінченну кількість точок $A_1, A_2, \dots, A_n$ (для зручності позначень будемо вважати, що $A_0 = A_n$), що розбивають межу області Q на n дуг.

Розглянемо також сильні розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь

$$d\xi_{x_k}^{(k)}(t) = a\left(\xi_{x_k}^{(k)}(t)\right)dt + b\left(\xi_{x_k}^{(k)}(t)\right)dw^{(k)}(t), \quad k = \overline{1, n},$$

з початковими умовами $\xi_{x_k}^{(k)}(0) = x_k$, де $w^{(k)}(t)$ – незалежні одновимірні вінерові процеси, причому процеси $w_1(t), w_2(t), w^{(1)}(t), w^{(2)}(t), \dots, w^{(n)}(t)$ незалежні в сукупності.

Позначимо

$$\overline{\xi}_{x_k}^{(k)}(t)=\begin{cases} h_k^{-1}\left(\xi_{h(x_k)}^{(k)}(t)\right), & t<\tau_k, \\ h_k^{-1}\left(\xi_{h(x_k)}^{(k)}(\tau_k)\right), & t\geq\tau_k, \end{cases}$$

де відображення h_k^{-1} є оберненим до відображення h_k, що ставить у відповідність кожній точці M дуги $A_{k-1}A_k$ довжину дуги $A_{k-1}M$, τ_k – момент першого виходу процесу $\xi_{h(x_k)}^{(k)}$ з інтервалу $\left(0,\left|A_{k-1}A_k\right|\right)$, тобто

$$\tau_k=\inf\left\{t\geq 0:\ \xi_{h(x_k)}^{(k)}(t)\in\left\{0,\left|A_{k-1}A_k\right|\right\}\right\}.$$

Будемо розглядати процес

$$X_{(x_0,\,y_0)}(t)=\mathbb{I}_{\{t<\tau\}}\cdot\xi_{(x_0,\,y_0)}(t)+\mathbb{I}_{\{t\geq\tau\}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\mathbb{I}_{\left\{\xi(\tau)\in A_{k-1}A_k\right\}}\cdot\overline{\xi}_{\xi(\tau)}^{(k)}(t-\tau),$$

де τ – момент першого виходу процесу $\xi_{(x_0,\,y_0)}$ на межу області $Q,$ тобто

$$\tau=\inf\left\{t\geq 0:\xi_{(x_0,\,y_0)}(t)\in\partial Q\right\}.$$

Нашою метою є узагальнити результати, одержані у роботі [3] для процесу Y, для процесу X .

Теорема.

Процес $X_{(x_0,\,y_0)}(t)$ є марківським.

Доведення:

Позначимо через $\hat{\xi}_{X(t)}$ розв’язок системи стохастичних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} d\hat{\xi}_1(s)=a\left(\hat{\xi}_1(s)\right)ds+b\left(\hat{\xi}_1(s)\right)d\hat{w}_1(s), \\ d\hat{\xi}_2(s)=a\left(\hat{\xi}_2(s)\right)dt+b\left(\hat{\xi}_2(s)\right)d\hat{w}_2(s), \\ \hat{\xi}_1(0)=\hat{\xi}_2(0)=X(t), \end{cases}$$

де $\hat{w}_1(t), \hat{w}_2(t)$ – незалежні одновимірні вінерові процеси, а

$$\tau_{X(t)}=\inf\left\{s\geq 0:\ \hat{\xi}_{X(t)}(s)\in\partial Q\right\}.$$

Тоді

$$\forall t \geq 0 \quad \forall s \geq t \quad \forall B \in \mathcal{B}\left(\overline{Q}\right)$$

$$P\left\{X(s) \in B \,\middle|\, X(r), r \leq t\right\} =$$

$$= P\left\{X(s) \in B \cap Q \,\middle|\, X(r), r \leq t\right\} + \sum_{k=1}^{n} P\left\{X(s) \in B \cap A_{k-1}A_k \,\middle|\, X(r), r \leq t\right\} =$$

$$= P\left\{s < \tau, \xi(s) \in B \cap Q \,\middle|\, X(r), r \leq t\right\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} P\left\{t < \tau \leq s,\, X(s) \in B \cap A_{k-1}A_k \,\middle|\, X(r), r \leq t\right\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} P\left\{\tau \leq t,\, X(s) \in B \cap A_{k-1}A_k \,\middle|\, X(r), r \leq t\right\} =$$

$$= P\left\{s < \tau, \xi(s) \in B \cap Q \,\middle|\, X(r), r \leq t\right\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} P\left\{t < \tau \leq s,\, X(s) \in B \cap A_{k-1}A_k \,\middle|\, X(r), r \leq t\right\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} P\left\{\tau \leq t,\, X(t) \in A_{k-1}A_k,\, \overline{\xi}^{(k)}_{X(t)}(s-t) \in B \,\middle|\, X(r), r \leq t\right\} =$$

$$= \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} P\left\{\tau_{X(t)} > s-t,\, \hat{\xi}_{X(t)}(t-s) \in B \cap Q \,\middle|\, X(r), r \leq t\right\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} \cdot$$

$$\cdot P\left\{\tau_{X(t)} \leq s-t,\, \hat{\xi}_{X(t)}\left(\tau_{X(t)}\right) \in A_{k-1}A_k,\; \overline{\xi}^{(k)}_{\hat{\xi}_{X(t)}\left(\tau_{X(t)}\right)}\left(s-t-\tau_{X(t)}\right) \in B \,\middle|\, X(r), r \leq t\right\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} P\left\{X(t) \in A_{k-1}A_k,\, \overline{\xi}^{(k)}_{X(t)}(s-t) \in B \,\middle|\, X(r), r \leq t\right\} =$$

$$= \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} P\left\{\tau_{X(t)} > s-t,\, \hat{\xi}_{X(t)}(t-s) \in B \cap Q \,\middle|\, X(t)\right\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} P\left\{\tau_{X(t)} \leq s-t,\, \hat{\xi}_{X(t)}\left(\tau_{X(t)}\right) \in A_{k-1}A_k,\; \overline{\xi}^{(k)}_{\hat{\xi}_{X(t)}\left(\tau_{X(t)}\right)}\left(s-t-\tau_{X(t)}\right) \in B \,\middle|\, X(t)\right\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} P\left\{X(t) \in A_{k-1}A_k,\, \overline{\xi}^{(k)}_{X(t)}(s-t) \in B \,\middle|\, X(t)\right\} =$$

$$= P\left\{s < \tau, \xi(s) \in B \cap Q \,\middle|\, X(t)\right\} + \sum_{k=1}^{n} P\left\{t < \tau \leq s,\, X(s) \in B \cap A_{k-1}A_k \,\middle|\, X(t)\right\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} P\left\{\tau \leq t,\, X(t) \in A_{k-1}A_k,\, \overline{\xi}^{(k)}_{X(t)}(s-t) \in B \,\middle|\, X(t)\right\} =$$

$$= P\left\{X(s) \in B \,\middle|\, X(t)\right\}. \qquad \square$$

Оскільки події $\{\tau_x > t\}$, $\{\xi_x(t) \in B\}$, $\left\{\overline{\xi}_x^{(k)}(t) \in B\right\} \in \mathcal{F}$, то функція

$$P(x, t, s, B) = P\left\{X(s) \in B \mid X(t) = x\right\} = \mathbb{I}_{\{\tau_x > t\}} P\left\{\tau_x > s - t, \xi_x(t - s) \in B \cap Q\right\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{\{\tau > t\}} P\left\{\tau_x \le s - t,\ \xi_x(\tau_x) \in A_{k-1}A_k,\ \overline{\xi}^{(k)}_{\xi_x(\tau_x)}(s - t - \tau_x) \in B\right\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{\left\{x \in A_{k-1}A_k\right\}} P\left\{\overline{\xi}_x^{(k)}(s - t) \in B\right\}, \quad 0 \le t \le s,\ B \in \mathcal{B}(\overline{Q}),$$

є вимірною, тобто процес X має регулярну ймовірність переходу. Звідси випливає, що

$$P\left\{X_x(t_1) \in B_1, \ldots, X_x(t_m) \in B_m\right\} = \int_{B_1} P(x, 0, t_1, dy_1) \ldots \int_{B_m} P(y_{m-1}, t_{m-1}, t_m, dy_m)$$

є вимірною функцією від x.

Нехай μ – ймовірнісна міра на Q. Покладемо тоді

$$P\left\{X_\mu(t_1) \in B_1, \ldots, X_\mu(t_m) \in B_m\right\} = \int_{Q} P\left\{X_x(t_1) \in B_1, \ldots, X_x(t_m) \in B_m\right\} d\mu(x).$$

Оскільки ці скінченновимірні розподіли узгоджені, то вони задають випадковий процес, який будемо позначати X_μ та будемо називати процесом X з початковим розподілом μ.

Дослідимо, чи існує початковий розподіл процесу X, при якому він зупиняється в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$ з довільними наперед заданими додатними ймовірностями.

Лема.

Нехай Q – обмежена однозв’язна область в $\mathbb{R}^2$ з неперервною межею такою, що

$$\forall a \in \partial Q \quad \forall h > 0 \quad P_x\{\tau > h\} \xrightarrow[x \in Q]{x \to a} 0,$$

функція υ неперервна на ∂Q, а функції $a(x)$ та $b(x)$ задовольняють умову Ліпшиця за x, тобто

$$\exists L>0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$\left|a(x_1)-a(x_2)\right| \le L\left|x_1-x_2\right|, \quad \left|b(x_1)-b(x_2)\right| \le L\left|x_1-x_2\right|,$$

причому

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad b(x) \ne 0,$$

а функція θ задається формулою

$$\forall x \in Q \quad \theta(x) = E_x \upsilon(\xi(\tau)).$$

Тоді

$$\forall c \in \partial Q \quad \lim_{\substack{x \to c \\ x \in Q}} \theta(x) = \upsilon(c).$$

Доведення:

Для доведення узагальнимо міркування, які наводились для доведення цього факту для вінерового процесу у [15].

Для довільної точки $c \in \partial Q$ та довільного $r>0$ позначимо

$$\Gamma_r = \left\{ y \in \partial Q : \ \rho(y,c) < 2r \right\}$$

та доведемо, що

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in Q}} P_x \left\{ \xi(\tau) \in \Gamma_r \right\} = 1.$$

Позначимо для $h>0$

$$z(h) = \max_{0 \le t \le h} \left\| \xi(t) - \xi(0) \right\|.$$

$$Ez^2(h) = E\left(\max_{0 \le t \le h} \left\| \xi(t) - \xi(0) \right\| \right)^2 = E \max_{0 \le t \le h} \left\| \xi(t) - \xi(0) \right\|^2 =$$

$$= E \max_{0 \le t \le h} \sum_{k=1}^{2} \left(\int_0^t a(\xi_k(s))ds + \int_0^t b(\xi_k(s))dw_k(s) \right)^2 \le$$

$$\le 2E \max_{0 \le t \le h} \sum_{k=1}^{2} \left(\left(\int_0^t a(\xi_k(s))ds \right)^2 + \left(\int_0^t b(\xi_k(s))dw_k(s) \right)^2 \right) \le$$

$$\le 2\sum_{k=1}^{2} \left(E \max_{0 \le t \le h} \left(\int_0^t a(\xi_k(s))ds \right)^2 + E \max_{0 \le t \le h} \left(\int_0^t b(\xi_k(s))dw_k(s) \right)^2 \right).$$

За нерівністю Коші-Буняковського

$$E\max_{0\le t\le h}\left(\int_0^t a\left(\xi_k(s)\right)ds\right)^2 \le E\max_{0\le t\le h}\left(\int_0^t ds\cdot\int_0^t a^2\left(\xi_k(s)\right)ds\right) = E\max_{0\le t\le h}\left(t\int_0^t a^2\left(\xi_k(s)\right)ds\right) =$$

$$= E\left(h\int_0^h a^2\left(\xi_k(s)\right)ds\right).$$

З умови Ліпшиця для функції $a(x)$ випливає, що

$$a^2\left(\xi_k(s)\right) \le \left(\left|a\left(\xi_k(s)\right)-a(0)\right|+\left|a(0)\right|\right)^2 \le 2\left(a\left(\xi_k(s)\right)-a(0)\right)^2+2a^2(0)\le$$

$$\le 2L^2\left|\xi_k(s)-0\right|^2+2a^2(0)=2L^2\xi^2(s)+2a^2(0).$$

Тому

$$E\max_{0\le t\le h}\left(\int_0^t a\left(\xi_k(s)\right)ds\right)^2 \le hE\int_0^h\left(2L^2\xi^2(s)+2a^2(0)\right)ds\le$$

$$\le h^2E\left(2L^2\max_{0\le s\le h}\xi^2(s)+2a^2(0)\right)=h^2\left(2L^2E\max_{0\le s\le h}\xi^2(s)+2a^2(0)\right)\xrightarrow[h\to 0]{}0,$$

оскільки за умов леми

$$E\max_{0\le s\le h}\xi^2(s)<+\infty.$$

За нерівністю Дуба при $p=2$

$$E\max_{0\le t\le h}\left(\int_0^t b\left(\xi_k(s)\right)dw_k(s)\right)^2 \le 4E\left(\int_0^h b\left(\xi_k(s)\right)dw_k(s)\right)^2 = 4E\int_0^h b^2\left(\xi_k(s)\right)d(s).$$

З умови Ліпшиця для функції $b(x)$ випливає, що

$$b^2\left(\xi_k(s)\right)\le 2L^2\xi^2(s)+2b^2(0).$$

Тому

$$E\max_{0\le t\le h}\left(\int_0^t b\left(\xi_k(s)\right)dw_k(s)\right)^2 \le 4E\int_0^h\left(2L^2\xi^2(s)+2b^2(0)\right)d(s)\le$$

$$\le 4hE\left(2L^2\max_{0\le s\le h}\xi^2(s)+2b^2(0)\right)=4h\left(2L^2E\max_{0\le s\le h}\xi^2(s)+2b^2(0)\right)\xrightarrow[h\to 0]{}0.$$

Таким чином,

$$Ez^2(h)\xrightarrow[h\to 0]{}0,$$

тобто $z(h)$ збігається до 0 у середньому квадратичному, звідки випливає і збіжність за ймовірністю, тобто

$$\forall r>0 \quad P\{|z(h)|\geq r\}\xrightarrow[h\to 0]{}0,$$

тобто

$$\forall r>0 \quad P\{z(h)<r\}\xrightarrow[h\to 0]{}1.$$

Для довільного $\varepsilon>0$ існує таке $h>0$, що

$$P\{z(h)<r\}>1-\varepsilon.$$

Оскільки за умовою леми

$$P_x\{\tau>h\}\xrightarrow[\substack{x\to a\\ x\in Q}]{}0,$$

то існує таке $\delta\in(0,r)$, що

$$\forall x\in\{y\in Q:\ \rho(y,a)<\delta\} \quad P_x\{\tau<h\}>1-\varepsilon.$$

Якщо $z(h)<r$ та $\tau<h$, то процес ξ за час h встигає вийти на межу області Q, відхилившись від стартової точки на відстань меншу, ніж r. Тому

$$\xi(\tau)\in\Gamma_r.$$

Звідси випливає, що

$$P\{\xi(\tau)\in\Gamma_r\}\geq P_x\{z(h)<r,\ \tau<h\}=1-P_x\left(\{z(h)\geq r\}\bigcup\{\tau\geq h\}\right)\geq$$
$$\geq 1-P_x\{z(h)\geq r\}-P_x\{\tau\geq h\}=P_x\{z(h)<r\}+P_x\{\tau<h\}-1>1-2\varepsilon.$$

Таким чином,

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x\in Q}}P_x\{\xi(\tau)\in\Gamma_r\}=1.$$

Для $x\in Q$ позначимо через μ_x розподіл $\xi(\tau)$ за умови, що $\xi(0)=x$, тобто

$$\forall A\in\mathcal{B}(\partial Q) \quad \mu_x(A)=P_x\{\xi(\tau)\in A\}.$$

Тоді

$$\theta(x)=E_x\upsilon(\xi(\tau))=\int_{\partial Q}\upsilon(y)d\mu_x(y).$$

Оскільки функція υ неперервна на $\partial Q,$ то для довільного $\varepsilon > 0$ та для довільної точки $c \in \partial Q$ існує таке число $r > 0,$ що

$$\forall y \in \Gamma_r \quad \left|\upsilon(y) - \upsilon(c)\right| < \varepsilon.$$

Тоді

$$\theta(x) - \upsilon(c) = \int_{\partial Q} \upsilon(y)\, d\mu_x(y) - \upsilon(c) \int_{\partial Q} d\mu_x(y) =$$

$$= \int_{\Gamma_r} \big(\upsilon(y) - \upsilon(c)\big)\, d\mu_x(y) + \int_{\partial Q \setminus \Gamma_r} \big(\upsilon(y) - \upsilon(c)\big)\, d\mu_x(y) \le$$

$$\le \varepsilon\, \mu_x(\Gamma_r) + 2 \max_{y \in \partial Q} \left|\upsilon(y)\right| \mu_x(\partial Q \setminus \Gamma_r) = \varepsilon\, \mu_x(\Gamma_r) + 2 \max_{y \in \partial Q} \left|\upsilon(y)\right| \big(1 - \mu_x(\Gamma_r)\big).$$

Як зазначалось вище, існує таке $\delta \in (0, r),$ що

$$\forall x \in \{ y \in Q:\ \rho(y, a) < \delta \} \quad \mu_x(\Gamma_r) > 1 - 2\varepsilon.$$

Для таких точок x

$$\theta(x) - \upsilon(c) < \varepsilon + 2 \max_{y \in \partial Q} \left|\upsilon(y)\right| \cdot 2\varepsilon = \left(1 + 4 \max_{y \in \partial Q} \left|\upsilon(y)\right|\right) \varepsilon,$$

тобто

$$\forall c \in \partial Q \quad \lim_{\substack{x \to c \\ x \in Q}} \theta(x) = \upsilon(c). \qquad \square$$

Зауваження.

Якщо функції $a(x)$ та $b(x)$ задовольняють умову Ліпшиця, Q – обмежена замкнена множина з границею ∂G та існує така функція $u \in C^2(G),$ що

$$\begin{cases} Lu(x) = -1, & x \in Q, \\ u(x) = 0, & x \in \partial Q, \end{cases}$$

де

$$Lu = \sum_{k=1}^{2} a(x_k) \frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2} b^2(x_k) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2},$$

то

$$\forall x \in Q \quad E_x \tau = u(x),$$

а з нерівності Чебишова випливає, що

$$\forall a \in \partial Q \quad \forall h > 0 \quad P_x\{\tau > h\} \leq \frac{E_x \tau}{h} = \frac{u(x)}{h} \xrightarrow[x \in Q]{x \to a} 0.$$

Теорема.

Нехай Q – обмежена однозв'язна область в $\mathbb{R}^2$ з неперервною межею такою, що

$$\forall a \in \partial Q \quad \forall h > 0 \quad P_x\{\tau > h\} \xrightarrow[x \in Q]{x \to a} 0,$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \partial Q,$ а функції $a(x)$ та $b(x)$ задовольняють умову Ліпшиця за x, причому

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad b(x) \neq 0.$$

Тоді існує початковий розподіл процесу X, при якому X зупиняється в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$ з довільними наперед заданими додатними ймовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$ такими, що $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$

Доведення:

Для $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ позначимо через $\theta_k(x)$ імовірність того, що процес $X_x(t)$ зупиниться в точці A_k. Будемо шукати шуканий розподіл у вигляді

$$\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_{x_k},$$

де $x_k \in Q,\ k = \overline{1, n}.$

Для того, щоб така міра μ задовольняла умови теореми, необхідно та достатньо, щоб

$$P\left\{X_\mu \text{ зупиняється в точці } A_j\right\} = p_j,\ \ j=\overline{1,n}, \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \int\limits_Q P\left\{X_x \text{ зупиняється в точці } A_j\right\} d\mu(x) = p_j,\ \ j=\overline{1,n}, \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} P\left\{X_{x_i} \text{ зупиняється в точці } A_j\right\} c_i = p_j,\ \ j=\overline{1,n}, \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \theta_j\left(x_i\right) c_i = p_j,\ \ j=\overline{1,n}.$$

Для довільної точки $x \in G$

$$\theta_k\left(x\right) = E_x \upsilon_k\left(\xi\left(\tau\right)\right),$$

де $\upsilon_k\left(y\right)$ – це ймовірність, що процес X_y, що стартує з точки $y \in \partial G$, зупиниться в точці A_k. Відомо, що

$$\upsilon_k\left(y\right) = \begin{cases} 0, & y \in A_{k-1}A_k \bigcup A_k A_{k+1}, \\ \dfrac{g\left(h_{k-1}\left(y\right)\right) - g\left(0\right)}{g\left(\left|A_{k-1}A_k\right|\right) - g\left(0\right)}, & y \in A_{k-1}A_k, \\ \dfrac{g\left(\left|A_k A_{k+1}\right|\right) - g\left(y\right)}{g\left(\left|A_k A_{k+1}\right|\right) - g\left(0\right)}, & y \in A_k A_{k+1}, \end{cases}$$

де функція $g\left(x\right)$ не є сталою, причому

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a\left(x\right) g'\left(x\right) + \frac{1}{2} b^2\left(x\right) g''\left(x\right) = 0,$$

тобто функцію $g\left(x\right)$ можна вибрати у вигляді

$$g\left(x\right) = \int\limits_0^x \exp\left\{-\int\limits_0^y \frac{2a\left(z\right)}{b^2\left(z\right)} dz\right\} dy.$$

З умови

$$\forall c \in \partial Q \quad \forall h > 0 \quad P_x\left\{\tau > h\right\} \xrightarrow[\substack{x \to c \\ x \in Q}]{} 0$$

та з неперервності υ_k на межі області Q за лемою випливає, що

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x\in Q}}\theta_k(x)=\upsilon_k(c),\quad k=\overline{1,n},$$

для всіх точок $c\in\partial Q.$

Розглянемо n послідовностей $\left\{x_i^{(k)}\right\}_{k=1}^{n},\ i=\overline{1,n},$ таких, що

$$x_i^{(k)}\in Q,\quad i=\overline{1,n},\quad k\in\mathbb{N},$$

$$\lim_{k\to\infty}x_i^{(k)}=A_i,\quad i=\overline{1,n}.$$

Тоді

$$\lim_{k\to\infty}\theta_j\left(x_i^{(k)}\right)=\upsilon_k\left(A_i\right)=\delta_{ij},\quad i=\overline{1,n}.$$

Визначник системи

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_{ij}c_i=p_j,\quad j=\overline{1,n},$$

дорівнює

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&1\end{vmatrix}=1.$$

Позначимо $\Delta^{(k)}$ визначник системи

$$\sum_{i=1}^{n}\theta_j\left(x_i^{(k)}\right)c_i^{(k)}=p_j,\quad j=\overline{1,n}.$$

Тоді

$$\lim_{k\to\infty}\Delta^{(k)}=\lim_{k\to\infty}\det\left(\theta_j\left(x_i^{(k)}\right)\right)_{i,\ j=1}^{n}=\det\lim_{k\to\infty}\left(\theta_j\left(x_i^{(k)}\right)\right)_{i,\ j=1}^{n}=\det\left(\delta_{ij}\right)_{i,\ j=1}^{n}=\Delta=1.$$

А отже, починаючи з деякого номера $K,$ система

$$\sum_{i=1}^{n}\theta_j\left(x_i^{(k)}\right)c_i^{(k)}=p_j,\quad j=\overline{1,n},$$

має єдиний розв’язок $\left(c_1^{(k)},c_2^{(k)},\dots,c_n^{(k)}\right)\in\mathbb{R}^n.$

За формулами Крамера

$$\lim_{k\to\infty} c_i^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\Delta_i^{(k)}}{\Delta^{(k)}} = \frac{\Delta_i}{\Delta} = p_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Оскільки всі ймовірності p_i додатні, то для достатньо великих номерів k всі числа $c_i^{(k)}$ також додатні. Їх сума дорівнює одиниці, оскільки

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(k)} \left(\sum_{j=1}^{n} \theta_j \left(x_i^{(k)} \right) \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \theta_j \left(x_i^{(k)} \right) c_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} p_j = 1.$$

Таким чином, для достатньо великих номерів k міра

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(k)} \delta_{x_i^{(k)}}$$

задовольняє всі умови теореми. □

Висновки

У магістерській дисертації були узагальнені та доповнені результати роботи [3].

Для вінерового процесу зі змінним фазовим простором, було досліджено існування початкової точки, стартуючи з якої, процес зупинявся б в точках в чотирьох точках A_1, A_2, A_3, A_4 на межі області з довільними наперед заданими додатними ймовірностями. Було наведено приклад, коли такої точки не існує.

Також був побудований дифузійний процес зі змінним фазовим простором. Для нього було доведено марківську властивість та теорему про існування початкового розподілу, при якому цей процес зупиняється в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на межі області з довільними наперед заданими додатними ймовірностями.

Список використаних джерел

1. Arratia R. A. Coalescing Brownian motions on the line. PhD thesis, The University of Wisconsin, Madison, Ann Arbor, MI. 1979. P. 134.
2. Дороговцев А. А., Мерозначные процессы и стохастические потоки. Киев: Институт математики НАН Украины. 2007. С. 290.
3. Malovichko T. V. Properties of a wiener process with coalescence. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2006. Vol. 58, no. 4. P. 551–572. URL: https://doi.org/10.1007/s11253-006-0084-7.
4. Dorogovtsev A. A., Gnegin A. V., Vovchanskii M. B. Iterated logarithm law for sizes of clusters in Arratia flow. *Theory of Stochastic Processes*. 2012. Vol. 18, no. 2. P. 1–7.
5. Dorogovtsev A. A., Vovchanskii M. B. Arratia flow with drift and Trotter formula for Brownian web. *Communications on Stochastic Analysis*. 2018. Vol. 12, no. 1. P. 89–108.
6. Dorogovtsev A. A., Vovchanskii M. B. On approximations of the point measures associated with the Brownian web by means of the fractional step method and the discretization of the initial interval. 2020. *Ukrainian Mathematical Journal*. Vol. 72, no. 9. P. 1179-1194.
7. Harris T. E. Coalescing and noncoalescing stochastic flows in R^1. *Stochastic Processes and their Applications*. 1984. Vol. 17, no. 2. P. 187–210. URL: https://doi.org/10.1016/0304-4149(84)90001-2.
8. Vovchanskii M. B. Convergence of solutions of SDEs to Harris flows. *Theory of Stochastic Processes*. 2018. Vol. 23, no. 2. P. 80–91.
9. Dorogovtsev A. A., Vovchanskii N. B. Representations of the finitedimensional point densities in Arratia flows with drift. 2020. *Theory of Stochastic Processes*. Vol. 25, no. 1. P. 25–36.

10. Berestycki N., Garban C., Sen A. Coalescing Brownian flows: A new approach. *The Annals of Probability*. 2015. Vol. 43, no. 6. P. 3177–3215. URL: https://doi.org/10.1214/14-aop957.
11. Newman C., Ravishankar K., Sun R. Convergence of Coalescing Nonsimple Random Walks to The Brownian Web. *Electronic Journal of Probability*. 2005. Vol. 10. P. 21–60. URL: https://doi.org/10.1214/ejp.v10-235.
12. Convergence Results and Sharp Estimates for the Voter Model Interfaces / S. Belhaouari et al. *Electronic Journal of Probability*. 2006. Vol. 11. P. 768–801. URL: https://doi.org/10.1214/ejp.v11-349.
13. Dorogovtsev A. A. Some remarks on a Wiener flow with coalescence. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2005. Vol. 57, no. 10. P. 1550–1558. URL: https://doi.org/10.1007/s11253-006-0013-9.
14. Dorogovtsev A. A. One Brownian stochastic flow. 2004. *Theory of Stochastic Processes*. Vol. 10(26), no. 3–4. P. 21–25.
15. Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А. Теоремы и задачи о процессах Маркова. Москва : Наука, 1967. 231 с.