

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

фізико-математичний факультет

кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 519.2, 368

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

_____ Олег КЛЕСОВ

«07» червня 2024 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Оцінювання страхових резервів за даними з викидами»

Виконала:

студентка II курсу магістратури, групи ОМ-21мн
Шундер Валентина Олександрівна

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, доцент
Василик Ольга Іванівна

Рецензент:

кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри теорії ймовірностей,
статистики та актуарної математики
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка
Яневич Тетяна Олександрівна

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних посилань.
Студентка _____

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
фізико-математичний факультет

кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Олег КЛЕСОВ

«05» лютого 2024 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Шундер Валентині Олександрівні

1. Тема дисертації «Оцінювання страхових резервів за даними з викидами», науковий керівник дисертації доктор фізико-математичних наук, доцент Василик Ольга Іванівна, затверджені наказом по університету від «01» квітня 2024 р. № 1523-с.

2. Термін подання студентом дисертації «11» червня 2024 року.

3. Об'єкт дослідження: методи оцінки страхових резервів

4. Предмет дослідження: аналіз найпоширеніших методів оцінювання загального резерву збитків, які виникли, але не заявлені, з точки зору чутливості до викидів в даних та пошук/розробка методик для модифікації цих методів.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1) ознайомлення з літературою, в якій описано найпоширеніші методи оцінювання загального резерву збитків, які виникли, але не заявлені; ознайомлення з нормативними документами, які регулюють діяльність страхових компаній;

2) відтворення найпоширеніших методів оцінювання загального резерву збитків, які виникли, але не заявлені для даних з викидом та без;

3) проведення детального аналізу кожного з методів, пошук слабких місць та порівняння отриманих результатів;

- 4) пошук/розробка методик для модифікації цих методів;
- 5) реалізація модифікованих методів для даних з викидом та без;
- 6) аналіз отриманих результатів.
6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: формули розрахунків, таблиці, рисунки.
7. Орієнтовний перелік публікацій:
- Shunder V., Vasylyk O. Outliers in Loss Reserving. Proceedings of the 6th Baltic-Nordic Conference on Survey Statistics, p.89. Helsinki, Finland, 2023. – ISBN 978-951-51-9425-1
 - Шундер В., Василик О. Оцінювання страхових резервів за даними з викидами. Матеріали Дев'ятнадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука, 11–12 жовтня 2023 року, Київ, КПІ ім. Ігоря Сікорського, с.154-155.
8. Дата видачі завдання «05» лютого 2024 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Опрацювання літератури з тематики магістерської дисертації.	05.02.2024 – 23.02.2024	виконано
2.	Відтворення найпоширеніших методів оцінювання загального резерву збитків, які виникли, але не заявлені на даних з викидом та без.	26.02.2024 – 22.03.2024	виконано
3.	Проведення детального аналізу кожного з методів, пошук слабких місць та порівняння отриманих результатів.	25.03.2024 – 05.04.2024	виконано
4.	Пошук/розробка методик для модифікації цих методів	08.04.2024 – 19.04.2024	виконано
5.	Відтворення методик для даних з викидом та без	22.04.2024 – 03.05.2024	виконано
6.	Аналіз отриманих результатів	06.05.2024 – 17.05.2024	виконано
7.	Оформлення магістерської дисертації	20.05.2024 – 07.06.2024	виконано

Студент

Валентина ШУНДЕР

Науковий керівник

Ольга ВАСИЛИК

Реферат

Магістерська дисертація: 43 сторінки, 12 першоджерел, 30 слайдів презентації.

Кожна страхова компанія повинна формувати технічні резерви, щоб мати змогу виконати свої майбутні зобов'язання, що виникають в результаті відшкодування збитків, які виникли, але не заявлені. Також, ведучи діяльність на території України, страховик зобов'язаний дотримуватись законів та нормативно правових актів, які регулюють діяльність страхового бізнесу. Регулятор стверджує, що страховик повинен здійснити найкращу оцінку резерву збитків, які виникли, але не заявлені [2]. В даній магістерській дисертації досліджуються найпоширеніші методи формування резерву збитків, які виникли, але не заявлені та проводиться детальний аналіз цих методів.

Мета та завдання роботи: застосування знань з теорії ймовірностей, математичної статистики, методів Монте-Карло, математичних аспектів загального страхування, для дослідження методів формування резервів, які виникли, але не заявлені для даних з викидом та без. Пошук та розробка методик, які забезпечують стійкість до викидів у даних. Самостійною частиною роботи є відтворення найпоширеніших методів для формування резервів збитків, які виникли, але не заявлені, проведення детального аналізу цих методів, пошук/розробка методик для модифікації цих методів. Реалізація модифікованих методів оцінювання резервів за даними з викидами та аналіз результатів.

Ключові слова: страхування; резерв збитків, які виникли, але не заявлені; метод ланцюгових сходів; метод Борнхюттера-Фергюсона; метод Кейп-Код; викид; робастний метод ланцюгових сходів; страхові виплати; метод бутстреп.

Abstract

Master's thesis contains 43 pages, 12 primary sources, 30 slides of presentation.

Any insurance company must form technical reserves to be able to fulfill liability for incurred claims arising from incurred but not reported losses. Additionally, while operating in Ukraine, an insurer is required to comply with the laws and regulatory legal acts that govern the insurance business. The regulator asserts that the insurer must make the best estimate of the incurred but not reported loss reserve [2]. This master's thesis examines the most common methods of forming incurred but not reported loss reserves and provides a detailed analysis of these methods.

Purpose and objectives of the work: applying knowledge of probability theory, mathematical statistics, Monte Carlo methods, mathematical aspects of general insurance, to study methods of forming incurred but not reported reserves for data with and without outliers. Search for and develop methodologies that ensure robustness to outliers in data. The independent part of the work includes the reproduction of the most common methods for forming incurred but not reported loss reserves, conducting a detailed analysis of these methods, and searching/developing methodologies to modify these methods. Implementation of modified methods for estimating reserves based on data with outliers and analysis of the results.

Keywords: insurance; incurred but not reported loss reserve; chain-ladder method; Bornhuetter-Ferguson method; Cape Cod method; outlier; robust chain-ladder method; insurance payments; bootstrap method.

Зміст

Вступ.....	7
1. Метод ланцюгових сходів.....	9
1.1 Огляд методу	9
1.2 Опис алгоритму методу	10
1.3 Огляд альтернативних методів	12
1.4 Переваги та недоліки	17
2. Приклади реалізації описаних методів.....	19
2.1 Метод ланцюгових сходів для даних без викидів	19
2.2 Метод ланцюгових сходів для даних з викидом.....	20
2.3 Метод Борнхюттера-Фергюсона для даних без викидів.....	21
2.4 Метод Борнхюттера-Фергюсона для даних з викидом	23
2.5 Метод Кейп-Код для даних без викидів	24
2.6 Метод Кейп-Код для даних з викидом	25
2.7 Аналіз одержаних результатів	26
3. Робастний метод ланцюгових сходів.....	28
4. Приклади реалізації робастного методу ланцюгових сходів	30
4.1 Робастний метод ланцюгових сходів для даних без викидів.	30
4.2 Робастний метод ланцюгових сходів для даних з викидом.....	30
4.3 Аналіз одержаних результатів	30
5. Відсутність страхових виплат	32
5.1 Причини відсутності страхових виплат та подальший аналіз.....	32
5.2 Алгоритм покращення прогнозування при відсутності виплат.....	33
5.3 Реалізація алгоритму покращення прогнозування при відсутності виплат	34
6. Комбінація методу бутстреп та методу ланцюгових сходів	35
6.1 Метод бутстреп з використанням залишків	35
6.2 Бутстреп – метод ланцюгових сходів з використанням локальних факторів розвитку.....	37
6.3 Приклади використання комбінації методу бутстреп та методу ланцюгових сходів для даних з викидами та без.....	38
6.4 Аналіз одержаних результатів	41
Висновки.....	42
Список використаної літератури.....	43

Вступ

Дана робота присвячена дослідженню методів оцінювання страхових резервів збитків, які виникли, але не заявлені, та розкриттю проблем, з якими зіштовхується актуарії під час здійснення актуарної діяльності у сфері страхування. Одною з проблем, які постають перед актуарієм, є викиди у даних щодо виплат. Оскільки більшість методів оцінки резервів збитків, які виникли, але не заявлені, базуються на відомостях про попередні періоди, викиди становлять виклик для особи, яка виконує відповідні розрахунки.

Закон України «Про страхування» містить наступні визначення [1]:

- актуарна діяльність у сфері страхування (перестраховування) - діяльність у сфері страхування щодо аналізу та оцінки ризиків та/або пов'язаних з ними фінансових зобов'язань, а також розроблення та оцінка методів управління фінансовими наслідками майбутніх випадкових подій з метою забезпечення реалізації актуарної функції страховика.
- страховий випадок - подія, передбачена договором страхування або законодавством, ризик виникнення якої застрахований, з настанням якої виникає обов'язок страховика здійснити страхову виплату страхувальнику або іншій особі, визначеній у договорі страхування або відповідно до законодавства.
- страхування - правовідносини щодо захисту страхових інтересів фізичних та юридичних осіб (страховий захист) при страхуванні ризиків, пов'язаних з життям, здоров'ям, працездатністю та пенсійним забезпеченням, з володінням, користуванням і розпорядженням майном, з відшкодуванням страхувальником заподіяної ним шкоди особі або її майну, а також шкоди, заподіяної юридичній особі, у разі настання страхових випадків, визначених договором страхування, за рахунок коштів фондів, що формуються шляхом сплати страхувальниками страхових премій (платежів, внесків), доходів від розміщення коштів таких фондів та інших доходів страховика, отриманих згідно із законодавством.

Але цей закон не дає визначення терміну «викид». Тож, сформулюємо дане визначення.

Викидом називають дані, які дуже сильно відхиляються від основної маси спостережень. Викиди вказують на те, що у вибірці є об'єкти, які не підпорядковуються загальним закономірностям, що є правильними для переважної більшості даних.

Вплив викидів при формуванні резервів збитків є дуже серйозною проблемою для кожного суб'єкта господарювання, що веде страхову діяльність. Страхова компанія повинна оцінити резерв якомога точніше, щоб мати змогу виконати свої майбутні зобов'язання, які виникають внаслідок збитків, які виникли, але не заявлені. Викиди у страхуванні, як правило, не є помилками в

даних, це – значні фінансові виплати, які є важливим компонентом ціноутворення.

Для страховика остаточна сума виплат за рік дії страхового покриття часто не є відомою наприкінці цього року. Це залежить від напряму діяльності в галузі страхування. Наприклад, у страхуванні відповідальності можна очікувати, що врегулювання претензій триватиме кілька років через довгі судові процедури або труднощі з визначенням розміру страхової виплати. Також причиною затримки може бути можливий проміжок часу між виникненням страхового випадку та проявом його наслідків.

Це призводить до необхідності застосування «run-off» трикутника для створення резервів збитків, які виникли, але не заявлені. Метою резервування збитків є оцінка резерву несплачених збитків. Під досліджуваними збитками розуміють ті, про які відомо, що вони існують, але остаточний розмір яких невідомий на момент, коли необхідно сформувати резерви. Їх також називають збитками, які виникли, але не заявлені (Incurred But Not Reported or IBNR).

Методи резервування збитків можуть бути застосовними до піврічних, квартальних або місячних даних, але більшість страхових компаній використовують квартальні дані.

Також, «Положення про порядок формування страховиками технічних резервів», затверджене Національним Банком України, стверджує що [2]:

Страховик зобов'язаний формувати і вести облік таких технічних резервів:

- 1) резерв премій відповідно до вимог розділу III цього Положення;
- 2) резерв збитків відповідно до вимог розділу IV цього Положення, який включає:

найкращу оцінку резерву заявлених, але не сплачених збитків з урахуванням вартості грошей у часі (далі – резерв заявлених, але не сплачених збитків);

найкращу оцінку резерву збитків, які виникли, але не заявлені з урахуванням вартості грошей у часі (далі – резерв збитків, які виникли, але не заявлені);

маржу ризику у резерві збитків.

Тобто, від актуарія вимагається виконати найкращу оцінку резерву збитків, які виникли, але не заявлені, що і буде метою цієї магістерської дисертації.

1. Метод ланцюгових сходів

1.1 Огляд методу

Метод ланцюгових сходів (Chain Ladder method) є одним із найпоширеніших методів актуарної оцінки страхових резервів. Його використовують для прогнозування майбутніх виплат за страховими випадками на основі минулих даних. Засади методу ланцюгових сходів можна простежити ще з XIX століття, коли актуарії та страхові фахівці почали систематично аналізувати історичні дані про страхові виплати для прогнозування майбутніх зобов'язань. У цей період відбувався початковий розвиток статистичних методів обробки страхових даних.

На початку та в середині 20-го століття страхова галузь зазнала значного зростання та удосконалення, що вимагало більш ефективних методів оцінки резервів страхових виплат. У 1920-1930-х роках метод ланцюгових сходів почав набувати більш формального вигляду. Він використовувався переважно страховиками, що спеціалізувалися на видах страхування, відмінних від страхування життя (страхування майна та страхування від нещасних випадків), для оцінки резервів, необхідних для покриття збитків, які виникли, але не заявлені (IBNR). Метод ланцюгових сходів здобув належне визнання в середині XX століття. Він отримав широке розповсюдження завдяки своїй простоті та ефективності в прогнозуванні майбутніх вимог на основі історичних даних. Формалізація методу передбачала розробку спеціальних методик для розрахунку коефіцієнтів розвитку та прогнозування майбутніх страхових виплат.

У другій половині XX століття метод ланцюгових сходів було вдосконалено та проаналізовано зі статистичної точки зору. Актуарії розробили більш строгі математичні моделі для його застосування. Статті та публікації актуаріїв і статистиків, таких як Р.Е. Бірд, Т. Пентікяйнен і Е. Песонен, сприяли створенню теоретичної основи методу [3]. В останні десятиліття метод ланцюгових сходів був включений в різні інструменти програмного забезпечення та актуарні моделі, що зробило його більш доступним і простим у застосуванні.

Загалом, історія методу ланцюгових сходів відображає його еволюцію від простої та ефективної техніки, розробленої першими страховиками, до широко прийнятого і теоретично обґрунтованого методу, що використовується в усьому світі в актуарній галузі.

Метод ланцюгових сходів залишається одним із найважливіших інструментів в арсеналі актуаріїв, забезпечуючи надійний та перевірений спосіб управління страховими резервами. Однак, потрібно пам'ятати, що метод ланцюгових сходів містить в собі ряд припущень:

- відсутні екстремальні чинники (наприклад зміни в законодавстві чи екстремальний рівень інфляції);

- розподіл кінцевого збитку для всіх років настання події однаковий;
- відсутні зміни у складі портфелів страхових контрактів;
- інтервали між моментами настання страхового випадку та його врегулювання містять незначні коливання відносно часу.

Викиди у даних розглядаються як екстремальні чинники та суттєво впливають на ефективність даного методу.

1.2 Опис алгоритму методу

Наведемо короткий опис алгоритму, який використовується для оцінювання резервів збитків, які виникли але не заявлені, методом ланцюгових сходів. Його детальний опис та обґрунтування можна знайти в [4].

При використанні методу ланцюгових сходів зручно зображати дані щодо позовів у формі трикутників. Такі трикутники називають трикутниками розвитку або «run-off» трикутниками .

Будемо називати:

- рік настання збитків (рік події) – це той рік, у якому відбулася страхова подія i у страховика виник ризик;
- період розвитку або запізнення – це кількість років до виплати.

Введемо позначення: нехай $S_{i,j}$, $i = \overline{1, n}$ сумарна виплата в j -ому періоді розвитку за страховими випадками, які відбулися в i -ому році настання збитків. Тоді за n років стають відомими значення $S_{i,j}$, для яких $i + j \leq n + 1$. Ці значення утворюють «run-off» трикутник.

Загальну форму «run-off» трикутника можна зобразити наступним чином:

Рік настання збитків	Рік розвитку							
	1	...	j	$n-1$	n
1	S_{11}	...	S_{1j}	$S_{1,n-1}$	$S_{1,n}$
...		
i	S_{i1}	...	S_{ij}	$S_{i,n-i+1}$		
...				
...					
...	$S_{n-j+1,j}$					
$n-1$	$S_{n-1,1}$							
n	$S_{n,1}$							

Рисунок 1

Величина $S_i = \sum_{j=1}^n S_{ij}$ є сумарним збитком i -го року настання збитків. На даний момент є відомою лише частина сумарного збитку $\sum_{j=1}^{n-i+1} S_{ij}$. Завдання, яке стоїть перед актуарієм, що робить розрахунок – оцінити невідому частину

$R_i = \sum_{j=n-i+2}^n S_{ij}$, де R_i – розмір необхідного резерву i -го року настання збитків, тобто, потрібно доповнити трикутник до прямокутника.

Позначимо $C_{ij}, 1 \leq i \leq n$ – сумарні (кумулятивні, накопичені) виплати (збитки), сплачені на кінець j -го року розвитку за страховими випадками, які відбулися в i -ому році настання збитків. Аналогічно до попереднього будується трикутник:

Рік настання збитків	Рік розвитку							
	1	...	j	$n-1$	n
1	C_{11}	...	C_{1j}	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$
...		
i	C_{i1}	...	C_{ij}	$C_{i,n-i+1}$		
...				
...					
...	$C_{n-j+1,j}$					
$n-1$	$C_{n-1,1}$							
n	$C_{n,1}$							

Рисунок 2

Зрозуміло, що $C_{ij} = \sum_{k=1}^j S_{ik}$, а $S_{ij} = C_{ij} - C_{i,j-1}$.

Тоді

$$R_i = \sum_{j=n-i+2}^n S_{ij} = \sum_{j=n-i+2}^n (C_{ij} - C_{i,j-1}) = C_{in} - C_{i,n-i+1}$$

Метод ланцюгових сходів базується на ряді припущень. Основне з них: розподіл кінцевого збитку для всіх років настання події однаковий.

Представимо сумарний збиток для i -го року $S_i = \sum_{j=1}^n S_{ij} = C_{in}$ у вигляді:

$$C_{in} = C_{i1} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} F_{ij},$$

де $F_{ij} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}}$ – коефіцієнт зростання (фактор розвитку) сумарних виплат від j -го року до $(j+1)$, який використовують для прогнозування майбутніх виплат.

Таке представлення можливе тільки тоді, коли $C_{ij} > 0$ для $\forall i, j$. В іншому випадку добуток треба починати з першого додатного C_{ij} .

Тоді припущення, що розподіл кінцевого збитку для всіх років настання події однаковий, можна трактувати як незалежність математичного сподівання F_{ij} від року настання збитків i . Тобто,

$$E(F_{ij}) = f_j,$$

для $\forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n - 1$, де f_j – це середній приріст збитків при переході від j -го до $(j + 1)$ року (фактор розвитку).

У методі ланцюгових сходів оцінки параметрів f_j визначаються наступним чином:

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij} F_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}},$$

для $\forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n - 1$.

Сумарний збиток оцінюється наступним чином:

$$\hat{C}_{in} = C_{i,n-i+1} \hat{f}_{n-i+1} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{n-1},$$

для $\forall 2 \leq i \leq n$.

А резерв:

$$\hat{R}_i = C_{i,n-i+1} (\hat{f}_{n-i+1} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{n-1} - 1).$$

Таким чином, прогноз ґрунтується лише на поточному рівні збитку $C_{i,n-i+1}$ року події i .

1.3 Огляд альтернативних методів

У результаті аналізу інформації, викладеної в попередньому підрозділі, може скластися хибне уявлення про те, що метод ланцюгових сходів є основним методом для розрахунку резервів збитків, які виникли, але не заявлені. Однак, існує багато інших методів, які є наслідком багаторічної актуарної практики в різних країнах світу, що ефективно вирішують дану задачу.

Нижче наведена інформація про деякі найбільш використовувані методи та їх короткий опис.

1. Метод Борнхюттера-Фергюсона (BF або Vornhuetter-Ferguson Method)

Цей метод поєднує інформацію про розвиток збитків з попередніми прогнозами збитків. Він передбачає, що частина резерву вже може бути оцінена за допомогою інших методів, а інша частина визначається на основі очікуваного розвитку.

2. Метод лінійного тренду (Linear Trend Method)

Цей метод використовує регресійний аналіз для прогнозування майбутніх збитків на основі історичних даних. Він передбачає, що є певний тренд, який можна екстраполювати в майбутнє.

3. Метод Пуассона (Poisson)

Цей метод застосовується для аналізу даних з рідкісними випадками збитків. Використовуючи розподіл Пуассона, актуарії моделюють кількість збитків і їх розмір, щоб оцінити резерв.

4. Мюнхенський ланцюговий метод (Munich Chain Ladder)

Це варіація методу ланцюгових сходів, яка враховує залежності між різними видами збитків та використовує більш складні статистичні моделі.

5. Метод індивідуального підходу (Case-by-Case Method)

Цей метод базується на індивідуальному аналізі кожного збитку. Актуарії розглядають кожен випадок окремо, оцінюючи ймовірність і розмір майбутніх вимог на основі детального аналізу.

6. Метод кумулятивних збитків (Loss Ratio Method)

Цей метод використовує відношення збитків до премій, щоб оцінити загальний резерв. Він особливо корисний для нових видів страхування або якщо історичних даних недостатньо для застосування інших методів.

7. Модель Макка (Mack Method)

Цей метод є статистично більш обґрунтованим і забезпечує оцінки резервів разом з їх довірчими інтервалами. Він заснований на припущеннях, що розвиток збитків є стохастичним процесом.

8. Метод Кейп-Код (Cape Code)

Метод Кейп-Код - це комбінація методів Борнхюттера-Фергюсона та методу кумулятивних збитків. Цей метод припускає, що коефіцієнт збитковості є стабільним у часі, і застосовує вагові коефіцієнти вірогідності до історичних даних про збитковість для прогнозування майбутніх збитків.

Ці методи можуть використовуватися окремо або в комбінації, щоб надати більш точну і надійну оцінку IBNR. Вибір методу залежить від специфіки даних і потреб компанії.

Проте, кожна країна має свої особливості та методики регулювання страхових компаній та актуарної діяльності. В Україні наглядову та регуляторну діяльність за комерційними банками та небанківськими фінансовими установами, в тому числі і страховими компаніями, виконує Національний Банк України (НБУ). Одним із регуляторних документів є «Положення про визначення методики формування страхових резервів та вимог до методики розрахунку викупної суми», та в пункті 45 цього положення є перелік методів, які використовуються на страховому ринку України. [2]

45. До актуарних методів розрахунку резерву збитків, які виникли, але не заявлені, належать:

- 1) ланцюговий метод (Chain Ladder);
- 2) метод Борнхюттера-Фергюсона (Bornhuetter-Ferguson);
- 3) метод Кейп-Код (Cape Code);
- 4) Мюнхенський ланцюговий метод (Munich Chain Ladder);
- 5) модифікація вищезазначених актуарних методів.

Модифікацією актуарного методу є розрахунок резерву збитків, які виникли, але не заявлені, одним з методів, зазначених у підпунктах 1 – 4 пункту 45 глави 7 розділу II цього Положення, з урахуванням впливу інфляції, факторів розвитку збитків (тренду), зміни коефіцієнтів збитковості;

- б) лінійна комбінація актуарних методів, зазначених у підпунктах 1 – 4 пункту 45 глави 7 розділу II цього Положення.

Вище ми вже розглянули метод ланцюгових сходів. Давайте детальніше розглянемо метод Борнхюттера-Фергюсона та метод Кейп-Код, які є основними методами на страховому ринку України.

Метод Борнхюттера-Фергюсона

Метод Борнхюттера-Фергюсона – один з методів оцінки резерву збитків, які виникли, але не заявлені (IBRN). Його назва походить від комбінації прізвищ його творців, які представили його в 1972 році [5].

Найкраще цей метод підходить для оцінки резервів, коли частота позовів є низькою, а величина збитків є значною. Даний метод базується на методології прогнозування трикутників розвитку та оцінці коефіцієнта рівня збитковості.

Коефіцієнт рівня збитковості – це відношення величини заявлених позовів до величини отриманих премій. Коефіцієнти рівня збитковості зазвичай стабільні для кожного року розвитку, за умови відсутності екстремальних змін у розмірах премій, або катастрофи. Актуарій може використовувати не тільки внутрішню статистику компанії для визначення коефіцієнту рівня збитковості, а також статистикою ринку для однорідних видів страхування чи базуючись на припущеннях, зроблених під час визначення страхового тарифу.

Метод Борнхюттера-Фергюсона базується на припущеннях:

- наростаючі виплати за страховими вимогами, для кожного року настання збитків, зростатимуть ідентично;
- незалежно від розвитку позовів будь-якого періоду настання страхової події до поточного моменту часу, структура розвитку в майбутніх періодах буде ґрунтуватись на отриманому досвіді з інших років настання страхових подій;

- загальний рівень збитковості для будь-якого періоду настання страхового випадку буде більш релевантним показником майбутніх позовів у порівнянні з значеннями минулого розвитку.
- премії, отримані за минулі періоди, адекватно відображають очікувані збитки для цих періодів.

Розглянемо алгоритм даного методу [4]:

- 1) Потрібно визначити коефіцієнт рівня збитковості λ .
- 2) За допомогою коефіцієнту рівня збитковості λ , знайти початкові оцінки величини остаточних збитків BUL_i (benchmark ultimate loss) для кожного періоду i настання збитків за наступною формулою:

$$BUL_i = \lambda P_i,$$

де P_i – зароблена премія для i -го періоду настання збитків.

- 3) Також потрібно знайти коефіцієнти прогнозу f_i за даними в трикутнику розвитку. В більшості випадків f_i – це фактори розвитку, які розраховуються з використанням методу ланцюгових сходів. Визначивши $p(l)$ – фактори розвитку для прогнозу одного кроку від l до $l+1$ періоду розвитку, покладаємо

$$f_i = \prod_{l=i}^n p(l).$$

- 4) Розрахувати ефективні оцінки збитків для кожного періоду розвитку i за формулою:

$$RUL_i = \frac{BUL_i}{f_i}.$$

- 5) Знайти оцінки розвитку майбутніх виплат для i – го періоду настання збитків, як різниці між відповідними початковими та оновленими оцінками сумарних остаточних збитків. Величина резерву для кожного періоду настання збитків розраховується за наступною формулою:

$$R_i = BUL_i - RUL_i = BUL_i \left(1 - \frac{1}{f_i}\right) = \lambda P_i \left(1 - \frac{1}{f_i}\right).$$

Метод Кейп-Код

Метод Кейп-Код — це один з методів оцінки резерву збитків, які виникли, але не заявлені (IBNR). Назва методу походить від регіону Кейп-Код у США, де він був вперше розроблений [6].

Метод Кейп-Код базується на використанні трикутників розвитку збитків і застосуванні зважених середніх для прогнозування майбутніх збитків, враховуючи як минулі тенденції, так і очікувані зміни. Розробники цього методу також намагались дати прозорішу інтерпретацію факторів розвитку f_i та лагових коефіцієнтів L_i .

Метод Кейп-Код включає в себе наступні припущення:

- коефіцієнт збитковості є стабільним і незначно змінюється з року в рік.
- історичні дані використовуються для обчислення зважених середніх, які допомагають прогнозувати майбутні збитки. Вага кожного періоду залежить від кількості та якості даних.
- розподіл ризиків і збитків у минулому є репрезентативним для майбутніх періодів.
- премії, отримані за минулі періоди, адекватно відображають очікувані збитки для цих періодів.

Розглянемо алгоритм даного методу [6]:

- 1) Необхідно розрахувати фактори розвитку p_i методом ланцюгових сходів.
- 2) Розрахувати коефіцієнти розвитку для методу Кейп-Код. При цьому покладаємо $f_n = 1$, а $f_{i-1} = f_i \cdot p_i$.
- 3) Розрахувати лагові коефіцієнти L_i , що визначається як обернена величина до факторів розвитку

$$L_i = \frac{1}{f_i}$$

Лаговий коефіцієнт демонструє яка частина всіх збитків, що виникли в i -му році, відома на кінець j -го року розвитку. Тому припускаємо, що саме така частина зароблених премій вже використана для покриття збитків які виникли, та застосовуємо цю інформацію для прогнозування резерву. Тому має сенс порівняти вже відому (в j -му році розвитку) величину відшкодованих збитків з відповідним рівнем використаних премій і зробити це для кожного року настання збитків. Метод Кейп-Код базується на припущенні про адекватність премії, тож відношення відомих збитків до використаної премії має приблизно дорівнювати одиниці. Проте, на практиці таке не трапляється, тому виникла ідея вводити в алгоритм процедуру прогнозу коригуючих коефіцієнтів.

- 4) Оцінюємо коригуючі коефіцієнти для кожного року настання збитків за формулою:

$$\widehat{K}_i = \frac{\sum_{l \in S_i} C(l,l)}{\sum_{l \in S_i} L_l P_l},$$

де P_l – зароблені премії, $C(l, l)$ – діагональні елементи в «run-off» трикутнику, а множину S_i можна обрати різним чином. Два крайні випадки при виборі S_i :

- S_i – множина всіх років настання збитків;
- S_i складається тільки з одного року i .

- 5) Знайти оцінки розвитку майбутніх виплат для i -го періоду настання збитків за формулою:

$$R_i = \widehat{K}_i P_i - L_i \widehat{K}_i P_i = (1 - L_i) \widehat{K}_i P_i$$

Зауважимо, що у випадку $S_i = \{i\}$, коефіцієнт $\widehat{K}_i = \frac{C(i,i)}{L_i P_i}$, а оцінка резерву $R_i = \frac{1-L_i}{L_i} C(i,i) = (f_i - 1)C(i,i)$, що дорівнює величині резерву, розрахованого методом ланцюгових сходів.

1.4 Переваги та недоліки

В попередньому пункті було детально розглянуто три найбільш популярних методи для оцінки резерву збитків, які виникли, але не заявлені (IBRN). Таким чином проведемо аналіз викладеної вище інформації та сформуємо порівняльну характеристику цих трьох методів у вигляді таблиці.

Метод	Переваги	Недоліки
Метод ланцюгових сходів	<ul style="list-style-type: none"> • Доступний та легкозрозумілий. • Підходить для опрацювання великих обсягів даних. • Ефективний при наявності стабільних історичних даних. 	<ul style="list-style-type: none"> • Чутливий до викидів у даних та екстремальних змін. • Вимагає тривалих спостережень історичних даних. • Припускає, що майбутні тенденції будуть аналогічними спостережуваним історичним даним.
Метод Борнхюттера-Фергюсона	<ul style="list-style-type: none"> • Є поєднанням історичних даних та очікуваних коефіцієнтів рівня збитковості. • Стабільним у випадку нестачі даних. • Менш чутливий до викидів та екстремальних змін. 	<ul style="list-style-type: none"> • Вимагає попередніх оцінок коефіцієнтів рівня збитковості. • Складніший у реалізації. • Втрачає свою точність, якщо очікування значно відрізняються від реальної ситуації на ринку. • Вимагає інформації про зароблені премії.
Метод Кейп-Код	<ul style="list-style-type: none"> • Є комбінацією історичних даних та очікувань. • Застосовує зважені середні для прогнозування. 	<ul style="list-style-type: none"> • Вимагає попередніх оцінок коригуючих коефіцієнтів. • Складніший у реалізації. • Вимагає інформації про зароблені премії.

	<ul style="list-style-type: none"> • Гнучкий та надійний при нестачі даних. 	<ul style="list-style-type: none"> • Чутливий до викидів у даних та екстремальних змін.
--	--	--

Всі три методи вимагають оцінок факторів розвитку, тобто, при наявності викидів у даних, кожен з цих методів втрачає свою точність через екстремальне збільшення цього коефіцієнту. Всі подальші розрахунки та методи покращення оцінок будуть проводитись, для ілюстрації, за допомогою методу ланцюгових сходів. Проте, методи, що покращують оцінку факторів розвитку для методу ланцюгових сходів, також покращують і інші методи, які є загальноновживаними серед актуаріїв у всьому світі.

2. Приклади реалізації описаних методів

Метою цього розділу є ілюстрація того:

- яким чином працюють три найрозповсюдженіших методи для оцінки резервів збитків, які виникли, але не заявлені;
- як дані з викидом впливають на результат оцінки.

2.1 Метод ланцюгових сходів для даних без викидів

Показаний тут «gun-off» трикутник побудований на основі даних про страхові виплати за три роки, зроблених на щоквартальній основі. Тобто, кожне значення $S_{i,j}$ – це сума виплат за страховим випадком, який стався в i – му кварталі і був виплачений, відповідно, в j – му кварталі.

		Період розвитку											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Період настання збитків	1	23 464	21 348	14 906	26 978	14 084	4 961	1 462	11 976	13 315	1 818	1 838	1 824
	2	23 979	8 562	22 316	20 076	18 569	11 052	13 888	5 723	14 899	2 827	0	
	3	21 026	11 616	16 859	22 430	9 133	3 122	16 073	6 107	7 125	1 293		
	4	14 490	20 216	20 945	11 594	15 432	3 828	7 545	12 569	10 248			
	5	26 046	16 120	22 762	16 196	21 652	6 734	15 505	12 248				
	6	21 258	15 444	16 346	9 053	17 637	11 174	7 711					
	7	32 974	20 191	19 043	12 424	12 232	6 029						
	8	14 337	14 478	20 832	20 354	16 016							
	9	15 009	12 029	11 695	18 423								
	10	14 968	13 962	17 481									
	11	12 015	14 263										
	12	15 444											

Рисунок 3

Наступним кроком формуємо трикутник кумулятивних виплат, який будемо використовувати для подальших розрахунків.

		Період розвитку											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Період настання збитків	1	23 464	44 812	59 718	86 696	100 780	105 741	107 203	119 179	132 494	134 312	136 150	137 974
	2	23 979	32 541	54 857	74 933	93 502	104 554	118 442	124 165	139 064	141 891	141 891	
	3	21 026	32 642	49 501	71 931	81 064	84 186	100 259	106 366	113 491	114 784		
	4	14 490	34 706	55 651	67 245	82 677	86 505	94 050	106 619	116 867			
	5	26 046	42 166	64 928	81 124	102 776	109 510	125 015	137 263				
	6	21 258	36 702	53 048	62 101	79 738	90 912	98 623					
	7	32 974	53 165	72 208	84 632	96 864	102 893						
	8	14 337	28 815	49 647	70 001	86 017							
	9	15 009	27 038	38 733	57 156								
	10	14 968	28 930	46 411									
	11	12 015	26 278										
	12	15 444											

Рисунок 4

Використовуючи описаний вище алгоритм методу ланцюгових сходів, отримуємо фактори розвитку та оцінку резерву:

Фактори розвитку										
f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_10	f_11
1,76619	1,50671	1,31614	1,20839	1,07358	1,10695	1,08922	1,09990	1,01542	1,00665	1,01340

Рисунок 5

Загальна оцінка резерву R_1 класичним методом ланцюгових сходів	385 301
--	----------------

Рисунок 6

2.2 Метод ланцюгових сходів для даних з викидом

Цей приклад ілюструє, яким чином буде працювати метод ланцюгових сходів у випадку даних з викидом.

	Період розвитку												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Період настання збитків	1	23 464	21 348	14 906	26 978	14 084	4 961	1 462 000	11 976	13 315	1 818	1 838	1 824
	2	23 979	8 562	22 316	20 076	18 569	11 052	13 888	5 723	14 899	2 827	0	
	3	21 026	11 616	16 859	22 430	9 133	3 122	16 073	6 107	7 125	1 293		
	4	14 490	20 216	20 945	11 594	15 432	3 828	7 545	12 569	10 248			
	5	26 046	16 120	22 762	16 196	21 652	6 734	15 505	12 248				
	6	21 258	15 444	16 346	9 053	17 637	11 174	7 711					
	7	32 974	20 191	19 043	12 424	12 232	6 029						
	8	14 337	14 478	20 832	20 354	16 016							
	9	15 009	12 029	11 695	18 423								
	10	14 968	13 962	17 481									
	11	12 015	14 263										
	12	15 444											

Рисунок 7

Тепер ми отримали «run-off» трикутник з викидом. Як ви могли помітити, ми збільшили виплату $S_{1,7}$ в 10^3 разів.

Наступним кроком формуємо трикутник кумулятивних виплат, який будемо використовувати для подальших розрахунків.

		Період розвитку											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Період настання збитків	1	23 464	44 812	59 718	86 696	100 780	105 741	1 567 741	1 579 717	1 593 032	1 594 850	1 596 688	1 598 512
	2	23 979	32 541	54 857	74 933	93 502	104 554	118 442	124 165	139 064	141 891	141 891	
	3	21 026	32 642	49 501	71 931	81 064	84 186	100 259	106 366	113 491	114 784		
	4	14 490	34 706	55 651	67 245	82 677	86 505	94 050	106 619	116 867			
	5	26 046	42 166	64 928	81 124	102 776	109 510	125 015	137 263				
	6	21 258	36 702	53 048	62 101	79 738	90 912	98 623					
	7	32 974	53 165	72 208	84 632	96 864	102 893						
	8	14 337	28 815	49 647	70 001	86 017							
	9	15 009	27 038	38 733	57 156								
	10	14 968	28 930	46 411									
	11	12 015	26 278										
	12	15 444											

Рисунок 8

Вже на цьому етапі помітно вплив викиду. Кожне значення $C_{i,j}$ «після» викиду збільшилося на величину цього викиду.

Ми повторили описаний вище алгоритм та отримали наступні результати:

Фактори розвитку										
f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_10	f_11
1,76619	1,50671	1,31614	1,20839	1,07358	3,61902	1,02424	1,02378	1,00322	1,00106	1,00114

Рисунок 9

Загальна оцінка резерву R_2 класичним методом ланцюгових сходів	1 532 124
---	-----------

Рисунок 10

2.3 Метод Борнхюттера-Фергюсона для даних без викидів

Використаємо дані, наведені на Рисунку 3, для ілюстрації цього методу.

Перш за все необхідно визначити коефіцієнт рівня збитковості λ . Це можна зробити використовуючи різні джерела інформації:

- історичні дані за даним видом страхування;
- припущення, що використовувались при визначенні страхового тарифу;
- статистичні дані ринку для цього виду страхування.

Часто коефіцієнт рівня збитковості визначають саме на основі історичних даних, використовуючи інформацію про зароблені премії та наступну формулу:

$$\lambda = \frac{C_{1,n}}{P_1},$$

де $C_{1,n}$ – кумулятивні (накопичені) збитки в першому періоді настання збитків;

P_1 – зароблена премія в першому періоді настання збитків.

Нижченаведена таблиця містить дані про зароблені премії:

Період	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Зароблена премія	71981	84812	63634	65780	88071	63971	58517	70644	55119	58663	59658	70857

Рисунок 11

Виконаємо розрахунок коефіцієнта збитковості за вищенаведеною формулою:

Коефіцієнт збитковості	1,9168
-------------------------------	---------------

Рисунок 12

Також необхідно знайти коефіцієнти прогнозу f_i за даними в «run-off» трикутнику. Виконаємо розрахунок f_i , як факторів розвитку за допомогою методу ланцюгових сходів.

Наступними кроками є знаходження початкових оцінок величини остаточних збитків BUL_i та покрокова оцінка резервів:

Період	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Зароблена премія	71981	84812	63634	65780	88071	63971	58517	70644	55119	58663	59658	70857
BUL_i	137974	162567	121974	126087	168814	122620	112166	135411	105653	112445	114352	135818
R_i	0	2149	2408	4366	20648	23813	30516	43596	46369	64506	81995	114059

Рисунок 13

Виконаємо останній крок алгоритму та отримаємо загальну оцінку резерву:

Загальна оцінка резерву R методом Борнхюттера-Фергюсона	434426
--	---------------

Рисунок 14

Як бачимо, оцінка загального резерву методом Борнхюттера-Фергюсона є вищою в порівнянні з оцінкою, отриманою методом ланцюгових сходів. Це можна обґрунтувати особливістю методів, але краще провести детальнішу аналітику. Нагадаємо, що для ілюстрації використовуються дані про страхові виплати та зароблені премії за три роки. Як ми можемо помітити, значення зароблених премій впродовж одного року коливаються, що при використанні даних тільки за один період може викривити значення коефіцієнта рівня збитковості λ . Такі коливання трапляються доволі часто та не вважаються особливостями бізнесу або екстремальними умовами. Якщо коливання є більш суттєвими (наприклад: через сезонність бізнесу), доцільніше не використовувати

підхід на основі історичних даних, та розглянути інші варіанти для обрахунку коефіцієнту рівня збитковості.

Проаналізувавши отримані результати, пропонуємо наступне вирішення цієї проблеми. Використаємо для оцінки коефіцієнта рівня збитковості дані за один рік (тобто за чотири періоди настання збитків), та для покращення точності використаємо медіану, тобто отримаємо наступну формулу:

$$\lambda^* = \text{median} \left\{ \frac{C_{i,j}}{P_i} \mid i = \overline{1,4}; j = n + 1 - i \right\},$$

Використавши запропоновану вище формулу отримуємо наступні результати:

Коефіцієнт збитковості	1,79021666
-------------------------------	-------------------

Рисунок 15

Період	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Зароблена премія	71981	84812	63634	65780	88071	63971	58517	70644	55119	58663	59658	70857
BUL_j	137974	151831	113919	117761	157666	114522	104759	126469	98676	105019	106800	126849
R_j	0	2007	2249	4078	19284	22241	28501	40717	43307	60246	76580	106527

Рисунок 16

Загальна оцінка резерву R методом Борнхюттера-Фергюсона	405737
--	---------------

Рисунок 17

Отже, проведене коригування коефіцієнту рівня збитковості покращило загальну оцінку резерву методом Борнхюттера-Фергюсона.

2.4 Метод Борнхюттера-Фергюсона для даних з викидом

Відтворимо алгоритм для методу Борнхюттера-Фергюсона для даних, що зображені на Рисунок 7. Також, використаємо коефіцієнт рівня збитковості λ та λ^* , щоб оцінити їх вплив на даний метод.

Одержані результати при використанні коефіцієнта рівня збитковості λ :

Коефіцієнт збитковості	22,2072924
-------------------------------	-------------------

Рисунок 18

Період	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Зароблена премія	71981	84812	63634	65780	88071	63971	58517	70644	55119	58663	59658	70857
BUL_i	1598512	1883439	1413148	1460800	1955814	1420622	1299512	1568818	1224052	1302743	1324835	1573539
R_i	0	2149	3105	7884	55743	73158	958925	1185830	976762	1102773	1189866	1482774

Рисунок 19

Загальна оцінка резерву R методом Борнхюттера-Фергюсона	7 038 971
--	------------------

Рисунок 20

Одержані результати при використанні коефіцієнта рівня збитковості λ^* :

Коефіцієнт збитковості	1,79021666
-------------------------------	-------------------

Рисунок 21

Період	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Зароблена премія	71981	84812	63634	65780	88071	63971	58517	70644	55119	58663	59658	70857
BUL_i	1598512	151831	113919	117761	157666	114522	104759	126469	98676	105019	106800	126849
R_i	0	173	250	636	4494	5898	77303	95594	78741	88899	95920	119532

Рисунок 22

Загальна оцінка резерву R методом Борнхюттера-Фергюсона	567 439
--	----------------

Рисунок 23

2.5 Метод Кейп-Код для даних без викидів

Використаємо дані зображені на Рисунку 3 та дані про зароблені премії зображені на Рисунку 11.

Першим кроком є розрахунок факторів розвитку p_i методом ланцюгових сходів. Після цього розраховуємо коефіцієнти розвитку f_i для методу Кейп-Код, використовуючи вищеописаний алгоритм. Також, розраховуємо лагові коефіцієнти L_i .

Наступним кроком є оцінка коригуючих коефіцієнтів. Як зазначалось вище, множину S_i можна обирати різним чином, та було наведено два крайні випадки при такому виборі. Розглянемо детальніше ці випадки.

Нехай S_i складається тільки з одного року i , тоді ми отримуємо наступні результати:

Період	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	1,0000	1,0134	1,0201	1,0359	1,1394	1,2410	1,3737	1,4748	1,7822	2,3456	3,5341	6,2419
L_i	1,0000	0,9868	0,9803	0,9654	0,8777	0,8058	0,7279	0,6780	0,5611	0,4263	0,2830	0,1602
$L_i * P_i$	71981	83691	62378	63502	77299	51547	42597	47900	30928	25010	16881	11352
K_i	1,9168	1,6954	1,8401	1,8404	1,7757	1,9132	2,4155	1,7958	1,8480	1,8557	1,5567	1,3605
$1-L_i$	0,0000	0,0132	0,0197	0,0346	0,1223	0,1942	0,2721	0,3220	0,4389	0,5737	0,7170	0,8398

Рисунок 24

Для оцінки резервів ми можемо використати спрощену формулу:

$$R_i = (f_i - 1)C(i, i).$$

Загальна оцінка резерву R методом Кейп Код	385 301
---	----------------

Рисунок 25

Таким чином, базуючись на реальних даних, ми перевірили твердження про те, що у випадку $S_i = \{i\}$, оцінка резерву, розрахованого методом ланцюгових сходів, дорівнює оцінці резерву, обчисленого методом Кейп-Код.

Розглянемо кардинально інший випадок. Нехай S_i – множина всіх періодів настання збитків, тоді ми отримуємо наступні результати:

Період	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	1,0000	1,0134	1,0201	1,0359	1,1394	1,2410	1,3737	1,4748	1,7822	2,3456	3,5341	6,2419
L_i	1,0000	0,9868	0,9803	0,9654	0,8777	0,8058	0,7279	0,6780	0,5611	0,4263	0,2830	0,1602
$L_i * P_i$	71981	83691	62378	63502	77299	51547	42597	47900	30928	25010	16881	11352
K_i	1,8487	1,8487	1,8487	1,8487	1,8487	1,8487	1,8487	1,8487	1,8487	1,8487	1,8487	1,8487
$1-L_i$	0,0000	0,0132	0,0197	0,0346	0,1223	0,1942	0,2721	0,3220	0,4389	0,5737	0,7170	0,8398

Рисунок 26

Загальна оцінка резерву R методом Кейп Код	418 987
---	----------------

Рисунок 27

2.6 Метод Кейп-Код для даних з викидом

Використаємо дані, зображені на Рисунку 7, та дані про зароблені премії, зображені на Рисунку 11. Відтворимо описаний вище алгоритм методу Кейп-Код.

Розглянемо випадок для S_i – множина всіх періодів настання збитків.

Нижче наведено одержані результати.

Період	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_i	1,0000	1,0011	1,0022	1,0054	1,0293	1,0543	3,8155	4,0963	4,9499	6,5147	9,8158	17,3366
L_i	1,0000	0,9989	0,9978	0,9946	0,9715	0,9485	0,2621	0,2441	0,2020	0,1535	0,1019	0,0577
$L_i * P_i$	71981	84715	63495	65425	85561	60677	15337	17246	11136	9005	6078	4087
K_i	5,1383	5,1383	5,1383	5,1383	5,1383	5,1383	5,1383	5,1383	5,1383	5,1383	5,1383	5,1383
$1-L_i$	0,0000	0,0011	0,0022	0,0054	0,0285	0,0515	0,7379	0,7559	0,7980	0,8465	0,8981	0,9423

Рисунок 28

Загальна оцінка резерву R методом Кейп Код	1 628 676
---	------------------

Рисунок 29

2.7 Аналіз одержаних результатів

Суттєвим припущенням, яке було використане для ілюстрацій кожного з методів є те, що для кожного методу, фактори розвитку визначаються за допомогою класичного методу ланцюгових сходів.

Метод ланцюгових сходів

Давайте порівняємо результати одержані методом ланцюгових сходів для даних з викидом (Рисунок 10) та без (Рисунок 6). Виконаємо це порівняння двома найпростішими методами: методом віднімання та методом ділення.

Результат отриманий методом віднімання:

$$R_2 - R_1 = 1\,532\,124,05 - 385\,301,35 = 1\,146\,822,7$$

Результат отриманий методом ділення:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{1\,532\,124,05}{385\,301,35} = 3,98.$$

Ви, напевно, запитуєте себе, чому один викид збільшує оцінку резерву у 4 рази. Це відбувається тому, що для класичного методу ланцюгових сходів визначення факторів розвитку базується на кумулятивних даних $C_{i,j}$, а отже, викид у першому стовпчику вплине на всі фактори розвитку. Примітно, що значення в лівому нижньому куті прогнозується значно вищим, тоді як всі інші вимоги оцінюються як надто низькі. Отже, один викид може повністю змінити підхід до резервування для страхової компанії, яка використовує класичний метод ланцюгових сходів.

Метод Борнхюттера-Фергюсона

Оцінка загального резерву збитків, які виникли, але не заявлені, методом Борнхюттера-Фергюсона виявилась найбільш стійкою до викиду в даних, за умови, що коефіцієнт рівня збитковості оцінений правильно та відповідає

ситуації, яка спостерігається на ринку. Тобто, можна вважати цей метод надійним оскільки він не викривлює оцінку та не ігнорує викид.

Водночас цей метод є складним для реалізації, тому що він базується на коефіцієнті рівня збитковості. Не завжди є можливість отримати достовірні дані про зароблені премії або статистичні дані з ринку, що відповідають саме цьому виду страхування. Також, особливістю цього методу є припущення про адекватність премій, тобто для новостворених страхових продуктів цей метод не буде найкращим рішенням.

Метод Кейп-Код

Отримані результати методом Кейп-Код аналогічні до результатів оцінки методом ланцюгових сходів, цей метод теж чутливий до викидів у даних. Причиною цього є визначення факторів розвитку.

Можемо зробити висновок, що при удосконаленні підходу до розрахунку факторів розвитку всі три вищеописані методи оцінки резервів збитків, які виникли, але не заявлені, стануть більш надійними та стійкими, щодо викидів у даних.

3. Робастний метод ланцюгових сходів

У цьому розділі представлено робастний метод ланцюгових сходів. Метою цього методу не є заміна класичного методу ланцюгових сходів запропонованою робастною версією, але, безумовно, буде дуже корисно застосувати обидва методи (класичний і робастний) до даних і порівняти загальні оцінки резервів. Якщо ці оцінки приблизно однакові, то вважається, що загальна оцінка резерву розрахована вірно, але якщо обидві версії дають різні результати, рекомендується уважніше придивитися до даних.

Перш за все потрібно визначити те, чому класичний метод ланцюгових сходів є настільки залежним від викидів у даних. Визначення факторів розвитку базується на кумулятивних даних $C_{i,j}$, а отже, викид у першому стовпчику вплине на всі фактори розвитку. З іншого боку, при роботі з приростом даних $S_{i,j}$, викид може вплинути щонайбільше на два фактори розвитку.

Альтернативне бачення факторів розвитку у даному методі передбачає, що замість того, щоб ділити суму одного стовпчика на суму попереднього стовпчика, ми могли б також розглянути співвідношення стовпчиків для кожного рядка:

$$\left\{ \frac{S_{i,j}}{S_{i,j-1}} \mid i = \overline{1, n - j + 1}; j = \overline{1, n - 1} \right\}.$$

Обчислюючи середнє значення показників у тих самих стовпчиках, ми можемо припустити, що отримаємо приблизно ті ж самі фактори розвитку, що й для класичного методу ланцюгових сходів. Гампель та ін. у 1986 році проілюстрували, що середнє значення як статистичний інструмент є дуже чутливим до викидів у даних [7]. При вивченні рівняння для факторів розвитку ці фактори можна розглядати як зважене середнє значення, що пояснює залежність класичного методу ланцюгових сходів від викидів у даних. Для вирішення цієї проблеми, необхідно замінити середнє значення більш надійною оцінкою.

У робастній статистиці цю проблему було вирішено шляхом заміни середнього значення на медіану, яка є більш робастною оцінкою. Медіана одновимірного набору даних визначається як середнє значення впорядкованих спостережень. На відміну від середнього значення, медіана не є залежною від викидів у даних.

Робастний метод ланцюгових сходів пропонує використовувати медіану (у поєднанні з приростами), що призводить до наступного альтернативного визначення факторів розвитку [8]:

$$f_j = \text{median} \left\{ \frac{S_{ij}}{S_{i,j-1}}, i = \overline{1, n - j + 1}; j = \overline{1, n - 1} \right\}$$

Варто зазначити, що цей метод доцільно використовувати у випадку викиду в даних, який знаходиться у верхній частині «gun-off» трикутника. У випадку викиду, що знаходиться у нижній частині трикутника розвитку, фактори розвитку f_1 та f_2 будуть мати вплив на всі прогнозовані значення у рядках n та $n - 1$ відповідно, що значно викривить оцінку резерву для цих періодів.

Подальша оцінка загального резерву збитку відбувається наступним чином.

Очікувані збитки оцінюються за формулою:

$$\hat{S}_{in} = S_{i,n-i+1} \hat{f}_{n-i+1} \cdot \dots \cdot \hat{f}_{n-1},$$

для $\forall 2 \leq i \leq n$.

А резерв у цьому випадку буде розраховуватися як сума всіх очікуваних майбутніх платежів:

$$\hat{R} = \sum_{j=n-i+2}^n S_{i,j}.$$

4. Приклади реалізації робастного методу ланцюгових сходів

Метою цього розділу є ілюстрація того:

- яким чином працює робастний метод ланцюгових сходів;
- як дані з викидом впливають на результат оцінки резервів при використанні робастного методу ланцюгових сходів.

4.1 Робастний метод ланцюгових сходів для даних без викидів.

Використаємо дані, зображені на Рисунку 3.

Застосовуючи описаний вище алгоритм робастного методу ланцюгових сходів, отримуємо фактори розвитку та оцінку резерву:

Фактори розвитку										
f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_10	f_11
0,8014525	1,1552	0,8996236	0,954741	0,352244	1,6138	0,78994	1,13925	0,18147	0,5055	0,992383

Рисунок 30

Загальна оцінка резерву R_3 робастним методом ланцюгових сходів	369 778
--	----------------

Рисунок 31

4.2 Робастний метод ланцюгових сходів для даних з викидом

Використаємо дані, зображені на Рисунку 7.

Ми повторили описаний вище алгоритм та отримали наступні результати:

Фактори розвитку										
f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_10	f_11
0,8014525	1,1552	0,8996236	0,954741	0,352244	2,13675	0,41208	1,13925	0,18147	0,5055	0,992383

Рисунок 32

Загальна оцінка резерву R_4 робастним методом ланцюгових сходів	346 617
--	----------------

Рисунок 33

4.3 Аналіз одержаних результатів

Давайте порівняємо результати, одержані класичним та робастним методом ланцюгових сходів, для даних з викидом та без.

Спершу порівняємо результати для даних без викиду (Рисунок 6 та Рисунок 31).

Як ви можете помітити, оцінки загального резерву відрізняються для цих методів. Давайте проаналізуємо чому це відбулося. Якщо уважніше поглянути

на Рисунок 3 то можна помітити, що $S_{2,11} = 0$. Оскільки класичний метод ланцюгових сходів базується на кумулятивних виплатах, то при покроковій оцінці резерву, резерв для другого періоду настання збитків $R_2 \neq 0$, проте для робастного методу ланцюгових сходів, що базується на даних про виплати, $R_2 = 0$. Це і пояснює різницю в оцінках загального резерву цими двома методами.

Також отриманий результат наводить нас на інші міркування. Якщо діагональні значення в «gun-off» трикутнику $S_{i,n-i+1} = 0$, то при використанні робастного методу ланцюгових сходів можна отримати менш точну оцінку.

Ті ж міркування доцільно використовувати для аналізу загальної оцінки резерву для даних з викидом (Рисунок 10 та Рисунок 33).

Отримана оцінка резерву робастним методом ланцюгових сходів є найнижчою серед усіх оцінок. Це дуже неочікуваний результат, оскільки викид повинен збільшувати зобов'язання. Ми не можемо назвати жодну з цих оцінок правильною. В обох випадках точність прогнозу була знижена через певні фактори. У випадку оцінки класичним методом ланцюгових сходів, викид є причиною неточного оцінювання. Для робастного методу ланцюгових сходів причиною похибки є відсутність виплат у одному з періодів.

5. Відсутність страхових виплат

5.1 Причини відсутності страхових виплат та подальший аналіз

Однією з найбільш поширених причин є сезонність бізнесу страхової компанії. Це явище, при якому певні види бізнесу або діяльності мають чітко виражені періоди активності протягом року.

Причини сезонності бізнесу:

- Кліматичні умови.
Наприклад, лижні курорти мають пік активності взимку, що може призвести до збільшення кількості страхових вимог у цей період через травми.
- Свята та відпустки.
Збільшення кількості вимог для страхування подорожей та страхування автотранспорту часто спостерігається протягом зимових та літніх канікул, в цей період збільшується кількість подорожуючих.
- Сільськогосподарські цикли.
Сільськогосподарські підприємства мають цикли, пов'язані з посівом і збором урожаю, що може впливати на кількість страхових вимог, пов'язаних з технікою та врожайністю.
- Будівництво та ремонт (будівельний сезон).
Активність у будівництві зазвичай збільшується в теплі пори року, що може призводити до збільшення страхових випадків, пов'язаних з будівельною технікою та травмами на робочому місці.
- Комерційна діяльність.
Сезонні розпродажі, такі як «Чорна п'ятниця», можуть спричинити збільшення кількості страхових випадків, пов'язаних з крадіжками або пошкодженням товарів.

Також наведемо приклади сезонності в різних галузях.

Автомобільне страхування: збільшення кількості ДТП взимку через складні погодні умови.

Медичне страхування: збільшення кількості звернень до лікарів під час сезонних епідемій грипу та застуди.

Аграрне страхування: підвищення ризиків, пов'язаних з погодними умовами, під час посіву та збору урожаю.

Врахування сезонності бізнесу дозволяє страховим компаніям точніше прогнозувати та управляти ризиками, що підвищує їхню ефективність та стабільність.

Хоч і сезонність бізнесу є основним чинником також є і інші причини:

- Випадкові коливання.
Відсутність вимог може бути просто випадковим коливанням. У малих обсягах страхового бізнесу це може бути звичайним явищем.
- Адміністративні причини.
Вимоги можуть подаватися із затримкою через бюрократичні або адміністративні причини.
- Природні або техногенні фактори.
Зміни кліматичних умов можуть впливати на частоту і характер збитків.
- Соціальні фактори.
Страхувальники можуть уникати подання страхових вимог, якщо суми збитків невеликі.

Враховання наведених вище факторів допоможе страховій компанії краще зрозуміти причини коливань у поданні вимог і відповідно налаштувати свою стратегію та процеси обробки заявок.

Навіть, якщо причиною відсутності вимог є випадкові коливання, доцільніше буде враховувати це при оцінці резервів. Відсутність виплат в одному із періодів не означає, що така тенденція зберігатиметься і в майбутніх періодах. З іншого боку, якщо відсутність виплат пов'язана з сезонністю бізнесу страхової компанії, то ефективніше буде «прийняти» цю відсутність виплат, та врахувати це при прогнозуванні.

5.2 Алгоритм покращення прогнозування при відсутності виплат

В цьому підпункті будуть розглянуті методи, які покращують оцінку загального резерву збитків, які виникли, але не заявлені. Перш за все, потрібно проаналізувати чи потрібно використовувати таке коригування. Якщо таке коригування є необхідним, його можна виконати двома способами:

- Використовувати середнє значення.
- Використовувати медіану.

Якщо дані про страхові вимоги є однорідними (відсутня яскраво виражена сезонність), використаємо підхід на основі середнього значення. Для $S_{i,j} = 0$ покладаємо:

$$\hat{S}_{i,j} = \text{average}\{S_{i,j}, i = \overline{1, n - j + 1}; j = \text{const}\}$$

Тобто ми шукаємо середнє значення всіх виплат для j – того періоду розвитку.

У випадку неоднорідності даних, використаємо підхід на основі медіани. Для $S_{i,j} = 0$ покладаємо:

$$\hat{S}_{i,j} = \text{median}\{S_{i,j}, i = \overline{1, n - j + 1}; j = \text{const}\}$$

Тобто ми шукаємо медіану для всіх виплат для j – того періоду розвитку.

Також можлива ситуація, коли таке коригування потрібно проводити для кінцевих періодів розвитку ($n, n - 1, n - 2$). Для даних періодів доцільніше використовувати наступні формули:

$$\hat{S}_{i,j} = \text{average}\{S_{i,j}, S_{i,j-1}, i = \overline{1, n-j+1}; j = \text{const}\}$$

$$\hat{S}_{i,j} = \text{median}\{S_{i,j}, S_{i,j-1}, i = \overline{1, n-j+1}; j = \text{const}\}$$

5.3 Реалізація алгоритму покращення прогнозування при відсутності виплат

Для ілюстрації алгоритму використаємо дані з викидом та без, зображені на Рисунок 3 та Рисунок 7 відповідно. Оскільки дані про виплати $S_{2,11} = 0$ (тобто $j = n - 1$), будемо використовувати для коригування дані з поточного та попереднього стовпця.

Підхід з використанням середнього значення.

Загальна оцінка резерву R_3 робастним методом ланцюгових сходів	379 816
Загальна оцінка резерву R_4 робастним методом ланцюгових сходів	354 875

Рисунок 34

Підхід з використанням медіани.

Загальна оцінка резерву R_3 робастним методом ланцюгових сходів	381 513
Загальна оцінка резерву R_4 робастним методом ланцюгових сходів	356 270

Рисунок 35

Припущення про те, що слід скоригувати дані про виплату R_2 , виявилися вірними. Як ми бачимо, відсутність виплат саме на діагоналі трикутника розвитку негативно впливає на оцінку загального резерву збитків, які виникли, але не заявлені, тому вважаємо, що проведене коригування дало бажаний результат.

6. Комбінація методу бутстреп та методу ланцюгових сходів

Даний розділ присвячений комбінації двох методів: методу ланцюгових сходів та методу бутстреп. Розглянемо дві можливі комбінації цих методів [9]:

- метод бутстреп з використанням залишків;
- бутстреп – метод ланцюгових сходів з використанням локальних факторів розвитку.

Метод бутстреп використовується для моделювання та аналізу даних. Вперше цей метод був запропонований Б. Ефроном в 1979 р. [10]. Термін «бутстреп (bootstrap)» походить від виразу «To pull oneself over a fence by one's bootstraps.», що дослівно означає «Витягнути себе через огорожу за власні шнурки». Цей вислів досить точно характеризує даний метод.

Ідея цього методу полягає в тому, щоб за допомогою однієї наявної вибірки створювати безліч нових вибірок шляхом «витягування» нових вибірок з емпіричного розподілу. Тобто, для вибірки яка містить n членів $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ обирають кількість послідовних ітерацій B , та на кожному кроці за допомогою генератора випадкових чисел (обчислювальний або фізичний пристрій, спроектований для генерації послідовності номерів чи символів, які не відповідають будь-якому шаблону, тобто є випадковими) рівномірно розподілених на $\{1, \dots, n\}$ «витягується» довільний елемент, який «повернеться» у вихідну вибірку (тобто цей же елемент може бути «витягнутим» знову). Наприклад, для $n = 5$ одна з нових вибірок може виглядати таким чином: x_1, x_5, x_3, x_1 , тобто нова вибірка може складатись з повторів елементів вхідної вибірки, при цьому не включаючи в себе всі елементи початкової вибірки.

Перевагою цього методу є те, що його можна використовувати для набору даних малого обсягу. Переважно трикутники розвитку не містять в собі великої кількості даних, тому метод бутстреп чудово «доповнює» метод ланцюгових сходів.

6.1 Метод бутстреп з використанням залишків

Розглянемо детальніше запропонований алгоритм:

- 1) Спершу необхідно сформувати «gun-off» трикутник (Рисунок 1) та трикутник кумулятивних виплат (Рисунок 2).
- 2) Наступним кроком є розрахунок факторів розвитку f_j методом ланцюгових сходів та доповнення трикутника кумулятивних виплат до чотирикутника за рахунок прогнозованих даних.

Рік настання збитків	Рік розвитку					
	1	...	$n - i$...	$n - 1$	n
1	$C_{1,1}$	$C_{1,n-1}$	$C_{1,n}$
...		
i	$C_{i,1}$...	$C_{i,n-i}$...	$\hat{C}_{i,n-1}$	$\hat{C}_{i,n}$
...			
$n - 1$	$C_{n-1,1}$				$\hat{C}_{n-1,n-1}$	$\hat{C}_{n-1,n}$
n	$\hat{C}_{n,1}$	$\hat{C}_{n,n-1}$	$\hat{C}_{n,n}$

Рисунок 36

3) Використовуємо діагональ кумулятивного трикутника та формулу

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,n+1-i} \cdot \prod_{k=n+1-i}^{n-1} f_k$$

для оцінки спостережуваних значень виплат у зворотному напрямку. Після цього ми отримуємо трикутник оцінених і спостережуваних платежів, який ми введемо в алгоритм бутстреп.

Рік настання збитків	Рік розвитку					
	1	...	$n - i$...	$n - 1$	n
1	$\hat{C}_{1,1}$	$C_{1,n-1}$	$\hat{C}_{1,n}$
...		
i	$\hat{C}_{i,1}$...	$\hat{C}_{i,n-i}$...	$\hat{C}_{i,n-1}$	$\hat{C}_{i,n}$
...			
$n - 1$	$\hat{C}_{n-1,1}$				$\hat{C}_{n-1,n-1}$	$\hat{C}_{n-1,n}$
n	$\hat{C}_{n,1}$	$\hat{C}_{n,n-1}$	$\hat{C}_{n,n}$

Рисунок 37

4) Обчислюємо незміщені залишки Пірсона за допомогою однієї з формул:

$$r_{i,j} = \frac{S_{i,j} - \hat{S}_{i,j}}{\sqrt{\hat{S}_{i,j}}},$$

де $i + j \leq n$. Або, використовуючи властивість $C_{i,j} = \sum_{k=1}^j S_{i,k}$, отримуємо інше представлення формули:

$$r_{i,j} = \frac{(C_{i,j} - C_{i,j-1}) - (\hat{C}_{i,j} - \hat{C}_{i,j-1})}{\sqrt{\hat{C}_{i,j} - \hat{C}_{i,j-1}}},$$

де $i \leq n$.

5) Наступним кроком є реалізація алгоритму бутстреп, де для кожного b , $1 \leq b \leq B$ (B – загальна кількість циклів бутстреп) виконуються наступні кроки:

1. Використовуючи випадкову вибірку із заміщенням з набору залишків з верхнього трикутника без діагональних елементів $\{r_{i,j}\}$, ми створюємо новий верхній трикутник залишків у кожному циклі бутстреп $\{^{(b)}r_{i,j}^*\}$.
2. Новий некумулятивний верхній трикутник обчислюється за допомогою формули для обчислення залишків $r_{i,j} = \frac{S_{i,j} - \hat{S}_{i,j}}{\sqrt{\hat{S}_{i,j}}}$, як

$$S_{i,j}^{(b)} = {}^{(b)}r_{i,j}^* \sqrt{\hat{S}_{i,j}} + \hat{S}_{i,j}.$$

3. Некумулятивний верхній трикутник нових «спостережуваних» виплат потім використовується як вхідні дані для класичного методу ланцюгових сходів, щоб в подальшому отримати вектор резервів ${}^{(b)}R$.

6.2 Бутстреп – метод ланцюгових сходів з використанням локальних факторів розвитку

Розглянемо алгоритм даного методу:

- 1) Цей метод ґрунтується на використанні локальних факторів розвитку, які визначаються за наступною формулою:

$$\lambda_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}.$$

При цьому перший стовпчик у трикутнику кумулятивних платежів дорівнює першому стовпчику в трикутнику некумулятивних платежів $C_{i,1} = S_{i,1}$. Схематично кумулятивний трикутник можна зобразити наступним чином:

Рік настання збитків	Рік розвитку						
	1	2	...	$n-i$...	$n-1$	n
1	$C_{1,1}$	$\lambda_{1,1}$...	$\lambda_{1,n-i}$...	$\lambda_{1,n-1}$	$\lambda_{1,n}$
2	$C_{2,1}$	$\lambda_{2,1}$...	$\lambda_{1,n-i}$		$\lambda_{1,n-1}$	
...		
i	$C_{i,1}$	$\lambda_{i,1}$...	$\lambda_{i,n-i}$			
...				
$n-1$	$C_{n-1,1}$	$\lambda_{n-1,1}$					
n	$C_{n,1}$						

- 2) Для обчислення стовпця резервів необхідно заповнити також і нижню частину таблиці. Для цього будемо використовувати метод бутстреп. Як початкову вибірку ми будемо використовувати значення локальних факторів розвитку $\lambda_{i,j}$. Далі за допомогою методу бутстреп генеруємо нові вибірки. Елементи цих вибірок позначаємо $\hat{\lambda}_{i,j}$, та проводимо обчислення оцінки резерву за формулою:

$$R_i = C_{i,1} \cdot \prod_{k=1}^{n+1-i} \lambda_{i,k} \cdot \prod_{k=2}^n \hat{\lambda}_{i,k}.$$

Рік настання збитків	Рік розвитку							R
	1	2	...	n - i	...	n - 1	n	
1	$C_{1,1}$	$\lambda_{1,1}$...	$\lambda_{1,n-i}$...	$\lambda_{1,n-1}$	$\lambda_{1,n}$	R_1
2	$C_{2,1}$	$\lambda_{2,1}$...	$\lambda_{2,n-i}$...	$\lambda_{2,n-1}$	$\lambda_{2,n}$	R_2
...
i	$C_{i,1}$	$\lambda_{i,1}$...	$\lambda_{i,n-i}$...	$\hat{\lambda}_{i,n-1}$	$\hat{\lambda}_{i,n}$	R_2
...
n - 1	$C_{n-1,1}$	$\hat{\lambda}_{n-1,1}$...	$\hat{\lambda}_{n,n-i}$...	$\hat{\lambda}_{n-1,n-1}$	$\hat{\lambda}_{n-1,n}$	R_{n-1}
n	$C_{n,1}$	$\hat{\lambda}_{n-1,1}$...	$\hat{\lambda}_{n,n-i}$...	$\hat{\lambda}_{n,n-1}$	$\hat{\lambda}_{n,n}$	R_n

Рисунок 39

Знову ж таки, ми отримуємо В векторів резервів ${}^{(b)}R$.

6.3 Приклади використання комбінації методу бутстреп та методу ланцюгових сходів для даних з викидами та без.

Оскільки метод бутстреп вимагає великої кількості ітерацій, доцільніше буде скористатись мовою програмування R. Також, описані вище методи базуються на використанні кумулятивних даних, тому використаємо відповідні кумулятивні трикутники розвитку (Рисунок 4 та Рисунок 8).

Метод бутстреп з використанням залишків

Для виконання описаного алгоритму в R існує відповідна функція `BootChainLadder`, яку ми і використаємо.

Одержані результати для даних без викидів:

```

                Totals
Latest:         1,081,601
Mean Ultimate: 1,470,026
Mean IBNR:      388,425
IBNR.S.E        55,328
Total IBNR 75%: 423,460
Total IBNR 95%: 487,154
> |

```

Рисунок 40

Одержані результати для даних з викидом:

```

                Totals
Latest:         2,542,139
Mean Ultimate: 4,492,825
Mean IBNR:      1,950,686
IBNR.S.E        736,943
Total IBNR 75%: 2,368,538
Total IBNR 95%: 3,277,481
> |

```

Рисунок 41

Бутстреп – метод ланцюгових сходів з використанням локальних факторів розвитку

Відтворимо алгоритм описаний вище:

1) Визначимо локальні фактори розвитку:

```

# розрахунок локальних факторів
n <- ncol(triangle)

LocFacts <- matrix(1, nrow = nrow(triangle), ncol = ncol(triangle))

for (i in 1:n) { for (j in 1:(n-1)) {
  LocFacts[i,j] <- triangle[i,j+1]/triangle[i,j]
}}
|

```

Рисунок 42

Також, створюємо кумулятивний трикутник у відповідності до Рисунку 38:

```

> print(triangle1)
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10]
[1,] 23464 85582.82 79582.24 125861.49 117151.98 110946.21 108685.2 132492.9 147296.6 136154.9
[2,] 23979 44160.17 92476.89 102356.21 116672.55 116912.35 134174.8 130164.5 155750.8 144775.5
[3,] 21026 50675.36 75067.37 104524.53 91356.61 87428.24 119400.7 112845.0 121093.3 116091.7
[4,] 14490 83126.74 89236.26 81254.43 101650.48 90510.24 102253.1 120867.7 128100.0 NA
[5,] 26046 68262.75 99977.36 101360.02 130206.92 116685.22 142715.3 150711.0 NA NA
[6,] 21258 63366.11 76674.03 72698.96 102384.00 103651.86 106988.0 NA NA NA
[7,] 32974 85719.57 98071.95 99193.65 110863.91 109297.26 NA NA NA NA
[8,] 14337 57913.39 85539.64 98699.62 105697.41 NA NA NA NA NA
[9,] 15009 48707.67 55486.55 84341.73 NA NA NA NA NA NA
[10,] 14968 55915.61 74454.92 NA NA NA NA NA NA NA
[11,] 12015 57472.60 NA NA NA NA NA NA NA NA NA
[12,] 15444 NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA

      [,11] [,12]
[1,] 138013.2 139822.4
[2,] 141891.0 NA
[3,] NA NA
[4,] NA NA
[5,] NA NA
[6,] NA NA
[7,] NA NA
[8,] NA NA
[9,] NA NA
[10,] NA NA
[11,] NA NA
[12,] NA NA

```

Рисунок 43

- 2) Наступним кроком необхідно використати метод бутстреп та змоделювати $\hat{\lambda}_{i,j}$.

```

# Бутстреп алгоритм
set.seed(123) # Для відтворюваності результатів
B <- 1000 # Кількість бутстреп-циклів
boot_reserves <- numeric(B)

for (b in 1:B) {
  # Вибірка залишків з заміщенням
  sampled_Facts <- Loc[sample(1:length(Loc), 144, replace = TRUE)]
  print(sampled_Facts)
  Mat <- matrix(sampled_Facts,n,n)
  print(Mat)
}

```

Рисунок 44

Виконаємо розрахунок нових «спостережуваних» виплат:

```

# Розрахунок нових "спостережуваних" виплат
fulltriangle <- triangle1
for (i in n:2) { for (j in (n+2-i):n) {
  fulltriangle[i, j] <- fulltriangle[i,j-1] * Mat[i,j]
}}
print(fulltriangle)

```

Рисунок 45

Оцінка загального резерву збитків для даних без викидів:


```
> print(paste("Середнє значення резервів:", mean_reserves))
[1] "Середнє значення резервів: 336600.667716149"
```

Рисунок 46

Оцінка загального резерву збитків для даних з викидом:

```
> print(paste("Середнє значення резервів:", mean_reserves))
[1] "Середнє значення резервів: 1050241.82787015"
```

Рисунок 47

6.4 Аналіз одержаних результатів

Отже, можна зробити висновок про те, що метод бутстреп з використанням залишків дає прийнятну оцінку загального резерву збитків, які виникли, але не заявлені за умови, що дані не містять викидів. Цей метод базується на обчисленні залишків за формулою $r_{i,j} = \frac{S_{i,j} - \hat{S}_{i,j}}{\sqrt{\hat{S}_{i,j}}}$. Квадратний корінь у знаменнику

означає, що метод бутстреп не може бути використаний, коли оцінені прирости дорівнюють нулю або менше (це означає, що коефіцієнти розвитку мають бути більшими за одиницю). Для даних з викидом, під час реалізації методу, помітно, що більшість залишків є від'ємними, що суттєво впливає на метод.

Бутстреп – метод ланцюгових сходів з використанням локальних факторів розвитку теж дає прийнятну оцінку загального резерву збитків, які виникли, але не заявлені за умови, що дані не містять викидів. Під час оцінки локальних факторів розвитку викид впливає тільки на один з факторів:

```
> print(LocFacts)
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9]
[1,] 1.909819 1.332634 1.451757 1.162453 1.049226 14.826236 1.007639 1.008429 1.001141
[2,] 1.357062 1.685781 1.365970 1.247808 1.118201 1.132831 1.048319 1.119994 1.020329
[3,] 1.552459 1.516482 1.453122 1.126969 1.038513 1.190922 1.060912 1.066986 1.011393
[4,] 2.395169 1.603498 1.208334 1.229489 1.046301 1.087220 1.133642 1.096118 NA
[5,] 1.618905 1.539819 1.249446 1.266900 1.065521 1.141585 1.097972 NA NA
[6,] 1.726503 1.445371 1.170657 1.284005 1.140134 1.084818 NA NA NA
[7,] 1.612331 1.358187 1.172058 1.144532 1.062242 NA NA NA NA
[8,] 2.009835 1.722957 1.409974 1.228797 NA NA NA NA NA
[9,] 1.801452 1.432539 1.475641 NA NA NA NA NA NA
[10,] 1.932790 1.604252 NA NA NA NA NA NA NA NA
[11,] 2.187099 NA NA NA NA NA NA NA NA NA
[12,] NA NA NA NA NA NA NA NA NA NA
```

Рисунок 48

але в подальшому є частиною вхідних даних для методу бутстреп. Тобто, під час генерацій цей локальний фактор розвитку може міститись у нових вибірках, що є суттєвою проблемою даного методу.

Висновки

В магістерській дисертації для оцінювання страхових резервів за даними з викидами розглянуто три найпоширеніші методи для оцінювання резерву збитків, які виникли, але не заявлені. Виконано розрахунок оцінки загального резерву збитків кожним з методів для даних без викидів та з викидом. Проведено ретельний аналіз кожного методу та знайдені його «слабкі місця». Використовуючи результати аналізу, було запропоновано модифікації методів з метою покращення оцінок резервів збитків, які виникли, але не заявлені.

Також, для робастного методу ланцюгових сходів, в результаті реалізації алгоритму та детального аналізу, знайдено «слабкі місця». Для алгоритму цього методу недоліком є відсутність виплат у одному з періодів. Тому, було детальніше розглянуто причини відсутності страхових виплат. Після цього, проаналізовано та запропоновано алгоритм покращення прогнозування при відсутності виплат для робастного методу ланцюгових сходів.

В даній роботі, розглянуто два методи, які є комбінацією методу бутстреп та методу ланцюгових сходів. Виконано розрахунок оцінки загального резерву збитків кожним з методів для даних без викидів та з викидом. Проведено ретельний аналіз кожного методу та знайдені його «слабкі місця».

Отже, кожний з розглянутих методів та їх модифікацій має свої переваги та недоліки. Таким чином, перш ніж прийняти рішення, який метод оцінювання збитків, які виникли, але не заявлені, варто застосувати, необхідно проаналізувати ситуацію на ринку страхування, вхідні та історичні дані, оскільки, саме ці фактори суттєво впливають на результат оцінювання.

Список використаної літератури

- [1] Про страхування: Закон України поточна редакція від 19.04.2024.
ULR: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1909-20#Text>
- [2] Положення про визначення методики формування страхових резервів та вимог до методики розрахунку викупної суми: Постанова Правління Національного банку України № 185 від 25.12.2023.
ULR: https://bank.gov.ua/admin_uploads/article/proekt_2022-09-28.pdf
- [3] Beard R.E., Pentikäinen, T., Pesonen, E. Risk Theory: The Stochastic Basis of Insurance, 1984.
- [4] В.П. Зубченко, Р.Є. Ямненко. Статистичні методи у ризиковому страхуванні. Навчальний посібник. - КНУ імені Тараса Шевченка. - 2023.
- [5] Bornhuetter, R. L., and R. E. Ferguson, “The Actuary and IBNR,” Proceedings of the Casualty Actuarial Society 59, 1972, pp. 181—195.
- [6] Зінченко Н.М. Математичні методи в теорії ризику. - К.: ВПЦ «Київський університет», 2008. - 224 с.
- [7] HAMPEL, F. R., E. M. RONCHETTI, P. J. ROUSSEEUW, AND W. A. STAHEL. 1986. Robust Statistics: The Approach Based on Influence Functions. New York: Wiley.
- [8] Verdonck, T., Wouwe, M., Dhaene, J. (2009). A Robustification of the Chain-Ladder Method. North American Actuarial Journal, 13 (2).
- [9] Barlak J., Bakon M., Rovnak M., Mokrisova M. (2022) Heat Equation as a Tool for Outliers Mitigation in Run-Off Triangles for Valuing the Technical Provisions in Non-Life Insurance Business. Risks, 10(9):171.
- [10] Efron B. Bootstrep methods. Another look at the Jackknife // The Annals of Statistics. 1979. Vol. 7. № 1. P. 1 – 26.
- [11] EFRON, B., AND R. J. TIBSHIRANI. 1993. An Introduction to the Bootstrap. London: Chapman and Hall.
- [12] MARONNA, R., D. MARTIN, AND V. YOHAJ. 2006. Robust Statistics—Theory and Methods. New York: Wiley.