НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико - математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК ___519.6;517______

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

__________ Клесов О.І.

«09» червня 2024 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-науковою програмою

« Страхова та фінансова математика»

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему:

«Класифікація наближених методів обчислення»

Виконав:
студент VI курсу, групи ОМ-21 мн
Сліпчук Євгеній Геннадійович ___________

Керівник:
кандидат фізико-математичних наук,
доцент
Крошко Наталія Віталіївна ___________

Рецензент:
Начальник Навчального відділу
Інституту спеціального зв'язку та захисту інформації
Кандидат технічних наук
Яровий Олександр Володимирович ___________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент ______________

Київ – 2024 року

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ «КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико - математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма « Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

__________Клесов О. І.

«___»_____________2024р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Сліпчук Євгеній Геннадійович

1. Тема дисертації «Класифікація наближених методів обчислення», науковий керівник дисертації Крошко Наталія Віталіївна, кандидат фізико-математичних наук, доцент, затверджені наказом по університету від «01»квітня 2024 року №1523-с.

2. Термін подання студентом дисертації 11 червня 2024 року.

3. Об’єкт дослідження: чисельні методи розв’язання умовних та бузумовних задач оптимізації, зокрема, метод вектора спаду розв’язання цілочислових задач математичного програмування.

4. Предмет дослідження:виявлення недоліку в виборі радіусу околу точки для подальшої ітерації, та знаходження методу його усунення.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1) Ознайомитися з літературою та дослідити основні означення та поняття.

2) Виконати класифікацію основних чисельних методів розв’язання умовних та безумовних задач оптимізації.

3) Знайти приклад, розв’язок якого призводить до неправильного результату при довільному виборі радіусу околу точки.

4) Знайти метод, який дозволить усунути недолік, проілюстрований знайденим прикладом.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: 4слайди.

7. Дата видачі завдання 21 лютого 2024року.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомитися з літературою та дослідити основні означення та поняття	05.02.24-14.03.24	Виконано
2.	Провести класифікацію основних чисельних методів розв’язання умовних та безумовних задач оптимізації	14.03.24-28.03.24	Виконано
3.	Ґрунтовно вивчити метод вектора спаду та відшукати необхідний приклад	28.03.24-23.05.24	Виконано
4.	Проаналізувати результати та зробити висновки	23.05.24-01.06.24	Виконано
5.	Оформити магістерську дисертацію	01.06.24-10.06.24	Виконано

Студент Сліпчук Євгеній Геннадійович

Науковий керівник Крошко Наталія Віталіївна

Реферат

Магістерська дисертація містить 39 сторінок, 4слайди ілюстративного матеріалу.

Об'єктом даної роботи є чисельні методи розв'язання умовних та бузумовних задач оптимізації, зокрема, метод вектора спаду розв'язання цілочислових задач математичного програмування

Метою роботи є знайти метод, який дозволить усунути неправильний розв'язок задачі, отриманий при довільному виборі радіусу околу точки.

Ключові слова: *чисельні методи розв'язання оптимізаційних задач, класифікація чисельних методів, вектор спаду*.

Abstract

The master's thesis contains 39 pages and 4 slides of illustrative material.

The object of this thesis is numerical methods for solving conditional and conditional optimisation problems, in particular, the method of the descent vector for solving integer programming problems.

The aim of the thesis is to find a method that will eliminate the incorrect solution of the problem obtained by arbitrarily choosing the radius of the point neighbourhood.

Key words: *numerical methods for solving optimisation problems, classification of numerical methods, descent vector*.

ЗМІСТ

Вступ

Методи оптимізації широко застосовуються в різноманітних галузях, таких, наприклад, як економіка, техніка, математика.

Обчислювальні методи розв'язання екстремальних задач останніми роками розвивалися досить інтенсивно. Розробка нових чисельних методів оптимізації та дослідження, теоретичне обґрунтування існуючих методів має важливу роль в різноманітних проблемах прикладного характеру.

Розробка та дослідження наближених методів є перспективним напрямком при розв'язанні задач оптимізації. Ці алгоритми широко застосовуються на практиці, оскільки точні методи вимагають значних затрат часу, тоді як пошук наближеного розв'язку значно скорочує час знаходження оптимального рішення задачі. Одним із таких методів є метод вектора спаду — ітераційний метод направленого перебору, що належить до градієнтних методів. Цей метод розроблено та багаторазово апробовано в Інституті кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України під керівництвом академіка Сергієнка І. В.

Мета магістерської дисертації полягає в ознайомленні з існуючими чисельними методами, проведенні їх класифікації, а також в детальному аналізі методу вектора спаду.

В першому розділі магістерської дисертації наведено основні теоретичні відомості, необхідні для подальших досліджень.

Другий розділ присвячений огляду найвідоміших чисельних методів розв'язання задач оптимізації.

Третій розділ присвячений безпосередньо методу вектора спаду, його аналізу. Крім того, наведено приклад, який ілюструє, що вибір радіусу околу для подальшої ітерації може суттєво вплинути на правильність отриманого результату. А також показано, що при суттєвому збільшенні цього радіусу, можна отримати правильний розв'язок задачі.

Результатом даної магістерської роботи є вдосконалення методу вектора спаду, що дозволить в майбутньому уникнути помилок при використанні цього методу для розв’язання практичних задач лінійного та нелінійного цілочислового програмування.

Розділ 1. Теоретичні відомості

Розглянемо загальну постановку завдання пошуку умовного екстремуму зі змішаними обмеженнями.

Нехай $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ — двічі неперервно диференційована цільова функція, а $g_j(x) = 0,\ j = 1, \dots, m; g(x) \le 0, j = m + 1, \dots, p$ — двічі неперервно диференційовані функції обмежень, що визначають множину допустимих рішень X.

Потрібно знайти локальний мінімум цільової функції на множині X, тобто таку точку $x^* \in X$, що $f(x^*) = \min_{x \in X} f(x)$,

де $X = \left\{ x \middle| \begin{smallmatrix} g_j(x)=0, & j=1,\dots,m; & m<n \\ g_j(x)\le 0, & j=1,\dots,p & \end{smallmatrix} \right\}$.

Застосування необхідних і достатніх умов умовного екстремуму є ефективним для вирішення обмеженої кількості прикладів, у яких співвідношення, що випливають із цих умов, мають аналітичне рішення. Більшість практичних завдань вирішуються за допомогою чисельних методів, які поділяються на дві групи:

1.Методи, що використовують перетворення завдання умовної оптимізації на послідовність завдань безумовної оптимізації шляхом введення на розгляд допоміжних функцій, так звані методи послідовної безумовної мінімізації.

2. Методи безпосереднього вирішення завдання умовної оптимізації, застосовані на русі з однієї допустимої точки, де виконані всі обмеження, до іншої допустимої точки з найкращим значенням цільової функції. Ці методи називають методами можливих напрямків.

Основна ідея методів першої групи полягає в тому, щоб апроксимувати вихідне завдання умовної оптимізації деякою допоміжною задачею, розв’язання якої є менш складним, ніж вирішення початкової. Звичайно, що обмежившись одним допоміжним завданням, можна отримати, лише наближений розв’язок. Якщо ж використовувати послідовність завдань, у певному сенсі «схожих» до вихідної, то точне шукане рішення, в більшості випадків виявиться межею відповідної послідовності наближених рішень. Ідея перетворення задачі з обмеженнями в належним чином побудовану послідовність задач без обмежень є привабливою головним чином у зв'язку з наявністю ефективних та надійних методів безумовної мінімізації.

На перший погляд здається дивним, що пропонується вирішувати нескінченну послідовність завдань оптимізації, замість однієї. Справа в тому, що на практиці для отримання рішення вихідного завдання з необхідною точністю буває досить вирішити кінцеве (відносно невелике) число допоміжних завдань.

При цьому немає необхідності вирішувати їх точно, а інформацію, отриману в результаті вирішення чергового допоміжного завдання, зазвичай вдається ефективно використовувати для вирішення наступного.

У межах єдиної методології можна назвати кілька підходів до розв'язання завдання.

Перший підхід називається *методом штрафів* (*зовнішніх штрафів*). У цьому методі до цільової функції додається функція, що інтерпретується як штраф за порушення кожного з обмежень. Метод генерує послідовність точок, що сходиться до вирішення вихідного завдання.

Другий підхід називається *методом бар'єрів* (*внутрішніх штрафів*). Тут до цільової функції вихідної задачі додається доданок, що не дозволяє точкам, що генеруються, виходити за межі допустимої області.

Третій підхід пов'язаний з додаванням штрафної функції не до цільової функції, а до її функції Лагранжа. В результаті виникає *модифікована функція Лагранжа*, а методи, що використовують цю функцію, називаються методами множників.

Четвертий підхід базується на запровадженні так званих *точних штрафних функцій*, що дозволяють обмежитись розв'язком лише одного завдання безумовної мінімізації.

Методи безпосереднього розв'язання задачі умовної мінімізації, що утворюють другу групу, пов'язані зі знаходженням межі x^* послідовності $\{x^k\}$ допустимих точок, при $k \to \infty$, таких, що $f(x^{k+1}) < f(x^k),\ k = 0, 1, \ldots$.

Послідовність $\{x^k\}$ будується за правилом

$$x^{k+1} = x^k + \delta x^k,\ \ k = 0, 1, \ldots$$

де вектор δx^k визначається залежно від застосовуваного методу.

До описаної групи методів відносяться *метод проекції градієнта* та *метод можливих напрямів Зойтендейка*.

У методі Зойтендейка на кожній ітерації будується можливий напрямок спуску і потім проводиться оптимізація вздовж цього напрямку.

Визначення 1. Ненульовий вектор d називається *можливим напрямом* у точці $x \in X$, якщо існує таке $\delta > 0$, що $x + td \in X$ для всіх $t \in (0, \delta)$.

Визначення 2. Вектор d називається *можливим напрямом спуску* в точці $x \in X$, якщо існує таке $\delta > 0$, що $f(x + td) < f(x)$ та $x + td \in X$ для всіх $t \in (0, \delta)$.

Розділ 2. Класифікація чисельних методів розв'язання оптимізаційних задач

Розглянемо окремий випадок завдання пошуку умовного мінімуму:

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x),$$

$$X = \{x | Ax \leq b, \quad Cx = e\}, \qquad (1)$$

де A – матриця розмірів $(m \times n)$, C- матриця розмірів $(l \times n)$, b вектор розмірів $(m \times 1)$, e - вектор розмірів $(l \times 1)$.

Твердження 1. (про можливий напрямок спуску у разі лінійних обмежень).

Нехай x - *допустима точка завдання (1)*. Припустимо, що

$A_1 x = b_1, \ A_2 x < b_2,$ де $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = A, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b.$ Тоді ненульовий вектор d є можливим напрямом у точці х тоді і тільки тоді, якщо $A_1 d \leq 0, \ Cd = 0.$

Якщо, крім того, $\nabla f(x)^T d < 0$, то d є можливим напрямом спуску.

Природний підхід до побудови можливого спрямування попуску, як випливає із твердження 1, полягає в мінімізації $\nabla f(x)^T d$ за умови $\mathrm{A}_1 d \leq 0, Cd = 0$. Однак якщо існує вектор d^* , такий, що $\nabla f(x)^T d^* < 0, \mathrm{A}_1 d^* \leq 0, Cd^* = 0$, то мінімальне значення цільової функції у сформульованій задачі дорівнює $-\infty$, оскільки будь-який вектор λd^*, де λ - будь-яке велике число, задовольняє всім обмеженням.

Таким чином, у завдання має бути включена умова, яка б обмежувала вектор d. Тому для знаходження можливого напрямку спуску потрібно вирішити задачу

$$\nabla f(x)^T d \to min,$$

$$A_1 d \leq 0, Cd = 0,$$

$$|d_i| \leq 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Розглянемо завдання умовної мінімізації при обмеженнях типу нерівностей

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x),$$

$$X = \{\, x \mid g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m\}.$$

Твердження 2. (про можливий напрямок спуску у разі нелінійних обмежень).

Нехай x - *допустима точка*, а J_a- множина індексів активних у цій точці обмежень, тобто $J_a = \{\, j \mid g_j(x) = 0\}$.

Припустимо, що функції $f(x);\ g_j(x),\ j \in J_a$, диференційовані в x,

а функції $g_j(x),\ \ j \in J_a$, безперервні в цій точці. Якщо $\nabla f(x)^T d < 0$ та

$\nabla g_j(x)^T d < 0$ при $j \in J_a$, то вектор d є можливим напрямом спуску.

Часним випадком завдання пошуку умовного екстремуму є *завдання лінійного програмування*, в якому цільова функція та обмеження лінійні за x. Ця особливість завдання відображається в специфіці методів, що застосовуються для її вирішення. Область допустимих рішень є опуклим багатогранником, що має кінцеве число вершин. Процедура пошуку рішення полягає у переході від однієї вершини до іншої, так щоб значення функції покращувалося. Процедура пошуку завершується у випадку, коли з поточної вершини буде неможливим перехід, пов'язаний з покращенням функції.

У багатьох практичних завданнях лінійного програмування потрібно, щоб змінні, що використовуються в них, були цілими. Такі завдання називаються *завданнями цілочисельного лінійного програмування*.

1.Метод штрафів

Нехай $f(x) = f(x, \dots, x)$ — двічі неперервно диференційована цільова функція, а $g(x) = 0,\ j = 1, \dots, m; g(x) \leq 0, j = m + 1, \dots\ , p$ — двічі неперервно диференційовані функції обмежень, що визначають множину допустимих рішень X.

Потрібно знайти локальний мінімум цільової функції на множині X, тобто таку точку $x^* \in X$, що

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x),$$

де $X = \left\{ x \middle| \begin{matrix} g_j(x)=0, & j=1,\dots,m; & m<n \\ g_j(x) \leq 0, & j=1,\dots,p & \end{matrix} \right\}$.

Стратегія пошуку

Ідея методу полягає у зведенні завдання на умовний мінімум до вирішення послідовності задач пошуку безумовного мінімуму *допоміжної функції*:

$$F(x,\ r^k) = \ f(x) + \ P(x,\ r^k) \rightarrow \ \min_{x \in R^n},$$

де $P(x,\ r^k)$ - *штрафна функція*, $\ r^k \geq 0$ - *параметр штрафу*, задає мий на кожній k-й ітерації. Це пов'язано з можливістю застосування ефективних та надійних методів пошуку безумовного екстремуму, викладених у другій частині.

Штрафні функції конструюються, виходячи з умов:

$$P(x,\ r^k) = \begin{cases} 0, & \text{при виконанні обмежень,} \\ > 0, & \text{при невиконанні обмежень,} \end{cases}$$

При чому у разі невиконання обмежень та $r^k \to \infty$, $k \to \infty$, то і $P(x,\, r^k) \to \infty$.

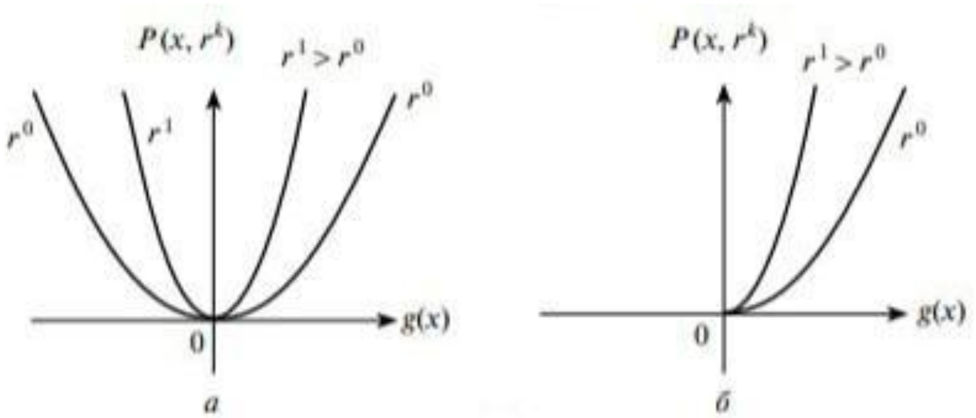
Чим більше величина r^k, тим більше значення штрафної функції при невиконанні обмежень. Як правило, для обмежених типу рівностей використовується квадратичний штраф (мал. 1 , a), а для обмежень типу нерівностей - квадрат зрізки (мал. $1, b$):

$$P(x,\, r^k) = \frac{r^k}{2}\left\{\sum_{j=1}^{m} [g_j(x)]^2 + \sum_{j=m+1}^{p} [g_j^+(x)]^2\right\},$$

де $g_j^+(x)$ - зрізання функції:

$$g_j^+(x) = max\{0, g_j(x)\} = \begin{cases} g_j(x), & g_j(x) > 0, \\ 0, & g_j(x) \le 0, \end{cases}$$

(мал. 1):



Початкова точка пошуку задається зазвичай поза множини допустимих рішень X. На кожній k-й ітерації шукається точка $x^*(\, r^k)$ мінімуму допоміжної функції $F(x,\, r^k)$ при заданому параметрі r^k за допомогою одного з методів безумовної мінімізації. Отримана точка $x^*(\, r^k)$ використовується як початкова на наступній ітерації, яка виконується при зростаючому значенні параметра штрафу. При необмеженому зростанні r^k послідовність точок $x^*(\, r^k)$ прагне точки умовного мінімуму x^*.

Примітка 1.

1. Оскільки збіжність методу забезпечується при $r^k \to \infty$, то виникає питання про те, чи не можна отримати рішення вихідної задачі в результаті одноразового пошуку безумовного мінімуму допоміжної функції з параметром r^k, що дорівнює великому числу, наприклад 10^{20} Однак така заміна послідовного вирішення допоміжних завдань не є можливою, оскільки зі зростанням r^k функція $F(x, r^k)$ набуває яскраво вираженої структури "яру". Тому швидкість збіжності будь-якого методу безумовної мінімізації до рішення $x^*(r^k)$ різко падає, через що процес його визначення закінчується, як правило, значно раніше, ніж буде досягнуто заданої точності, і, отже, отриманий результат не дає можливості судити про шукане рішення x^*.

2. Точки $x^*(r^k)$ в алгоритмі - це точки локального мінімуму функції $F(x, r^k)$. Однак функція $F(x, r^k)$ може бути необмеженою знизу та процедури методів безумовної мінімізації можуть розходитися. Ці обставини необхідно враховувати під час програмної реалізації.

3. У методах штрафних функцій є тісний зв'язок між значеннями параметрів штрафу та множниками Лагранжа для регулярної точки мінімуму:

$$\lambda_j(r^k) = r^k g_j[\, x^*(r^k)], \qquad j = 1, \dots, m;$$

$$\lambda_j(r^k) = r^k g_j^+[\, x^*(r^k)], \qquad j \in J_a;$$

$$\lim_{r^k \to \infty} \lambda_j(r^k) = \lambda_j^*, \qquad\qquad j = 1, \dots, m; \;\; j \in J_a$$

4. Зазвичай вибирається $r^0 = 0{,}01;\ 0{,}1;\ 1,$ а $C \in [4, 10]$. Іноді починають з $r^0 = 0$, тобто із завдання пошуку безумовного мінімуму.

5. При вирішенні завдань процедура розрахунків завершується при деякому кінцевому значенні параметра штрафу r^k. При цьому наближене рішення, як правило, не лежить у множині допустимих рішень, тобто обмеження

завдання не виконуються. Це є одним із недоліків методу. Зі зростанням параметра штрафу r^k точки, що генеруються алгоритмом, наближаються до вирішення вихідного завдання ззовні множини допустимих рішень. Тому обговорюваний метод іноді називають *методом зовнішніх штрафів*.

6. На практиці для отримання рішення вихідного завдання з необхідною точністю досить буває вирішити граничну (відносно невелику) кількість допоміжних завдань. При цьому немає необхідності вирішувати їх точно, а інформацію, отриману в результаті вирішення чергової допоміжної задачі, зазвичай, вдається ефектно використовувати для вирішення наступної.

2.Метод бар'єрних функцій

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ — двічі неперервно диференційована цільова функція, а $g_j(x) \le 0,\ j = 1, \ldots, m$ — двічі неперервно диференційовані функції обмежень, що визначають безліч допустимих розв’язків X.

Потрібно знайти локальний мінімум цільової функції на множині X, тобто таку точку $x^* \in X$, що

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x),$$

де $X = \{\, x \mid g_j(x)\ \le 0,\ j = 1, \ldots, m\}$.

СТРАТЕГІЯ ПОШУКУ

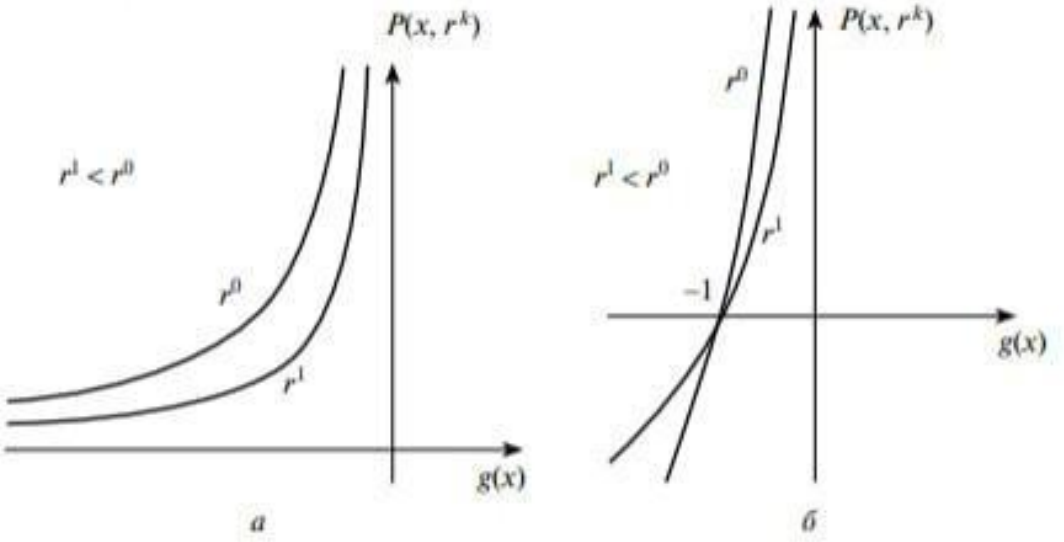
Ідея методу полягає у зведенні задачі на умовний мінімум до вирішення послідовності задач пошуку безумовного мінімуму *допоміжної функції* $F(x,\, r^k) =\ f(x) +\ P(x,\, r^k)$, де $P(x,\, r^k)$ - *штрафна функція*, $r^k \ge 0$ - *параметр штрафу*.

Як правило, використовуються:

а) обернена штрафна функція $P(x,\ r^k) = -\ r^k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(x)}$ (мал. 2., a)

б) логарифмічна штрафна функція$P(x,\ r^k) = -\ r^k \sum_{j=1}^{m} \ln\,[-\ g_j(x)]$ (мал. 2., a)

(мал. 2.):



Обидві штрафні функції визначені і безперервні всередині множини X, тобто на множині $\{\ x \mid g_j(x) < 0,\ j = 1, \ldots, m\}$, і прагнуть нескінченності при наближенні до кордону множини зсередини. Тому вони називаються *бар'єрними функціями*. При $r^k > 0$ штрафна функція, що задається зворотною функцією, є додатною. Логарифмічна штрафна функція додатна при

$-1\ <\ g(x)\ <\ 0$ і від'ємна $g(x) < -1$, тобто внутрішнім точкам області надається перевага перед граничними точками.

Початкова точка задається тільки всередині множини X. На кожній k-ї ітерації шукається точка $x^*(\ r^k)$ мінімуму допоміжної функції $F(x,\ r^k)$ при заданому параметрі r^k за допомогою одного з методів безумовної мінімізації. Отримана точка $x^*(\ r^k)$ використовується як початкова на наступній ітерації, що виконується при зменшуваному значення параметра штрафу. При $r^k \to +0$, послідовність точок $x^*(\ r^k)$ прагне точці умовного мінімуму x^*. Бар'єрні функції як би перешкоджають виходу з множини X, а якщо розв'язання задачі лежить на границі, то процедура методу призводить до руху зсередини до границі.

Зауважимо, що згідно з описаною процедурою точки $x^*(r^k)$ лежать усередині множини допустимих рішень для кожного r^k. Цим пояснюється те, що метод бар'єрних функцій іноді називається *методом внутрішніх штрафів*.

Збіжність

Твердження 3. Нехай функції $f(x)$; $g_j(x), j = 1,\ldots,m$, опуклі та скінченні, безліч X^* розв'язків задачі пошуку умовного мінімуму не порожні та обмежені, існує точка x^0 є X така, що $g_j(x^0) < 0,\ j = 1,\ldots,m$. Тоді у методі бар'єрних функцій $X_k^* = Arg\ min\ F(x,\ r^k) \neq \emptyset$, функції $F(x,\ r^k)$ опуклі, послідовність $\{x(r^k)\}_{k=0}^{\infty}$, породжена алгоритмом, обмежена, і всі її граничні точки належать X^*, причому $f\left(x^*(r^k)\right) \geq f(x^*), x^* \in X^*$.

Примітка 2.

1. Зазвичай вибирається $r^0 = 1, 10, 100$, а параметр $C = 10;\ 12;\ 16$.

2. При $r^k \to +0$ забезпечується збіжність, однак із зменшенням r^k функція $F(x,\ r^k)$ стає все більш «яружним. Тому вважати r^k до малим числом відразу недоцільно.

3. Зворотну штрафну функцію було запропоновано Керролом (C. W. Carrol), а логарифмічну Фрішем (K. R. Frisch).

4. Оскільки в більшості методів пошуку безумовного екстремуму використовуються дискретні кроки, то поблизу границі крок може привести до точки поза допустимою областю. Якщо в алгоритмі відсутня перевірка на приналежність точки множині $\{x \mid g_j(x) < 0,\ j = 1,\ldots,m\}$, це може призвести до помилкового успіху, тобто зменшення допоміжної функції у точці, де вона теоретично не визначена. Тому на кроці 3 алгоритму потрібна явна перевірка

того, що точка не залишила допустиму область. Процедура пошуку зазвичай завершується при деякому малому r^k, відмінному від нуля. Однак наближене рішення належить множині допустимих рішень. Це одна з переваг методу бар'єрних функцій.

5. У ході вирішення завдання методом штрафних функцій знаходиться вектор множників Лагранжа:

$$\lambda_j(r^k) = \frac{r^k}{g_j^2\ (x^*(r^k))}, \qquad j = 1, \dots, m, -\text{для оберненої штрафної функції}$$

$$\lambda_j(r^k) = -\frac{r^k}{g_j\ (x^*(r^k))}, j = 1, \dots, m, -\text{ для логарифмічної штрафної функції;}$$

$$\lambda_j^* = \lim_{r^k \to +0} \lambda_j(r^k).$$

3.МЕТОДИ МОЖЛИВИХ НАПРЯМКІВ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Знайти мінімум диференційованої функції $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ при обмеженнях $g_j(x) = 0,\ j = 1, \dots, m$, тобто таку точку $x^* \in X$, що

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x)$$

$$X = \{\, x \mid g_j(x) = 0,\ \ j = 1, \dots, m;\ \ m < n \,\}, \qquad (3)$$

Де функція $g_j(x) = 0,\ \ j = 1, \dots, m$, є диференційованою функціями x.

СТРАТЕГІЯ ПОШУКУ

Стратегія пошуку розв'язання задачі (3) методом проекції градієнта, або методом Розена (J. B. Rosen) полягає в побудові послідовності точок $\{x^k\}$, що обчислюються за правилом

$$x^{k+1} = x^k + \delta x^k,\ \ k = 0, 1, \dots$$

де δx^k - вектор, що обчислюється для кожного значення k. Приріст δx^k визначається з умови проекції вектора що $-t^k \nabla f\ (x^k), k = 0, 1, ...$, на апроксимуючу площину, що задається рівнянням

$$A_k \delta x = \tau_k,$$

яка апроксимує у точці x^k, $k = 0, 1, \ldots$, поверхню, що задається рівняннями $g_j(x) = 0,\ \ j = 1, \ldots, m$. A_k - матриця розмірів $(m \times n)$ виду

$$A_k = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x^4},$$

а τ_k – вектор-стовпчик, $\tau_k = -(g_1(x^k), \ldots, g_m(x^k))^T$.

Вектор δx^k визначається за такою формулою

$$\delta x^k = \delta_1 x^k + \delta_2 x^k$$

Розмір $\delta_1 x^k$ називається *градієнтною складовою збільшення*:

$$\delta_1 x^k = -t_k[E - A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} A_k] \nabla f\ (x^k) = -t_k \Delta x^k.$$

яка має наступну властивість: у лінійному наближенні вона не змінює вектор нев'язки умови зв'язку. Це означає, що під дією градієнтної складової точка x^k рухається паралельно або по площині $A_k \delta_x = \tau_k$.

Величина $\delta_2 x^k$ називається компенсаційною складовою збільшення:

$\delta_2 x^k = A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} \tau_k$. Ця складова має властивість: у лінійному наближенні вона компенсує вектор нев'язки умов зв'язку на величину τ_k. Під дією компенсаційної складової $\delta_2 x^k$ здійснюється проекція точки x^k на площину $A_k \delta_x = \tau_k$

Величина кроку t_k може вибиратися як з умови зменшення f(x)

при переході з точки x^kв точку $x^k - t_k[E - A_k^T(A_k A_k^T)^{-1} A_k]\nabla f\ (x^k)$, так і з умови

$$\varphi(t_k) = f(x^k - t^k[E - A_k^T(A_k A_k^T)^{-1} A_k]\nabla f\ (x^k)) \to \min_{t_k} \qquad (4)$$

Завдання (4) може вирішуватися або з використанням необхідних і достатніх умов мінімуму: $\varphi'(t_k^*) = 0,\ \varphi''(t_k^*) > 0$, що застосовуються безпосередньо до функції $\varphi(t_k)$ або до апроксимуючих її поліномам, або із використанням чисельних методів.

Розрахунок закінчується у точці x^k, у якій $\|\Delta x^k\| \leq \varepsilon,\ \|\delta_2 x^k\| \leq \varepsilon$, де ε - задане число. В отриманій точці x^k потрібна обов'язкова перевірка виконання достатніх умов мінімуму функції у завдання (3). Точна рівність

$\delta_1 x^k = -t_k[E - A_k^T(A_k A_k^T)^{-1} A_k]\nabla f\ (x^k) = 0$ свідчить про точне виконання необхідних умов екстремуму, при цьому вектор множників Лагранжа визначається за формулою:

$$\lambda^k = -\,(A_k A_k^T)^{-1} A_k \nabla f\ (x^k). \qquad (5)$$

Знання наближення λ^k до вектора λ^*, який визначається формулою (5), дозволить здійснити перевірку достатніх умов у точці x^k.

Примітка 3.

Якщо задачі (3) обмеження лінійні, тобто мають вигляд

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ \ i = 1, \dots, m,$$

то матриця A_k постійна. Це означає, що через властивість компенсаційної складової $\delta_2 x^k$ вона обчислюється єдиний раз у точці x^0. При цьому початкова точка потрапляє до області допустимих рішень за одну ітерацію. Подальший процес побудови послідовності $\{x^k\}$ пов'язаний із обчисленням складової $\delta_1 x^k$.

Примітка 4.

Якщо обмеження завдання лінійні, то при $k \geq 1$ на кроці 3 переходимо до кроку 8. На кроці 10 слід покласти $\|\delta_2 x^k\| = 0$

Збіжність

Оскільки проекція вектора $-t_k \nabla f\ (x^k)$ здійснюється для кожного значення k на множині $Q = \{\, x \mid A_k(x - x^k) = \tau_k, \quad x \in R^n\}$, то алгоритм методу проекції градієнта сходиться для опуклих, диференційованих на R^n функцій $f(\text{x})$, градієнт яких задовольняє умові Ліпшиця.

Твердження 4. Нехай $f(\text{x})$ опукла, що диференціюється на R^n функція, градієнт якої задовольняє на множині Q при умові Ліпшиця з константою L. Нехай множина Q — опукла і замкнена, множина розв'язків задачі

$X^* = \ Arg \min\limits_{x \in Q} f(x)$ не порожня, а $0 < t_k < \frac{2}{L}$. Тоді $x^k \to x^* \in X^*$ і, якщо $f\ (\text{x})$ сильно опукла, $x^k \to x^*$ зі швидкістю геометричної прогресії.

4. Метод проекції градієнта у задачах з обмеженнями типу нерівностей

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Знайти мінімум диференційованої функції $f(x)\ =\ f(x_1, \ldots, x_n.)$ при

обмеженнях $g_j\ (x)\ \leq\ 0, j\ =\ 1, \ldots, m$, тобто таку точку $x^* \in X$, що

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x)$$

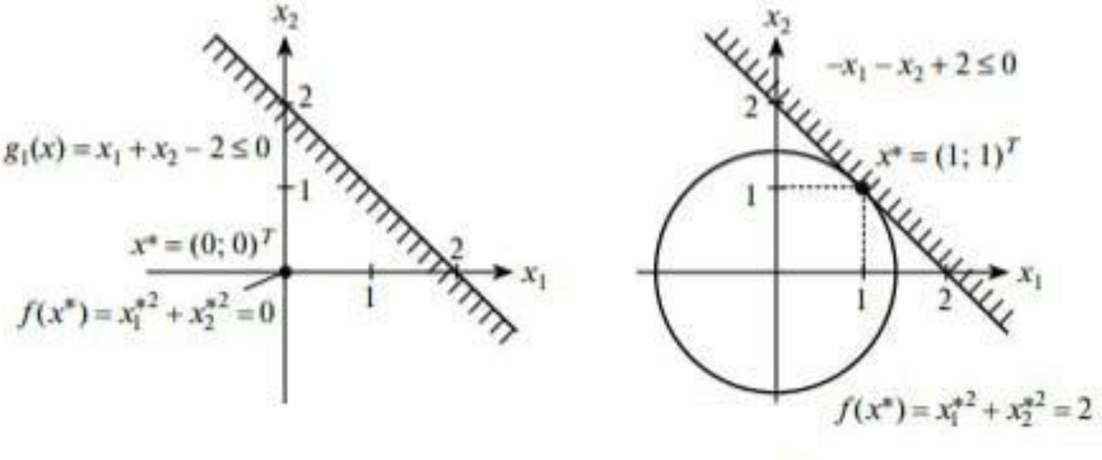
$$X = \{\, x \mid g_j(x) \le 0, \ \ j = 1, \dots, m\}, \qquad (6)$$

де функції $g_j(x), \quad j = 1, \dots, m,$ є диференційованими функціями x.

СТРАТЕГІЯ ПОШУКУ

Стратегія пошуку розв'язання задачі (6) враховує той факт, що розв’язок x^* може лежати як усередині, так і на межі множини допустимих розв'язків

(мал. 3., a, b).



а *б*

Для визначення наближення рішення x^* будується послідовність

точок $\{x^k\}$: $x^{k+1} = x^k + \delta x^k, k = 0, 1, \dots$, де збільшення δx^k визначається в кожній точці x^k залежно від того, де ведеться пошук - всередині чи на межі множини допустимих розв’язків.

Розв'язання задачі починається з обходу границі допустимої області. Обхід меж множини допустимих розв’язків пов'язаний з виявленням активних у точці x^k обмежень $g_A = (g_1, \dots, g_p)^T$, апроксимацією їх площини

$$A_k \delta x = \tau_k, \qquad (7)$$

де $A_k = [\frac{\partial g_j}{\partial x_i}]_{x=x^k}]$ - матриця розмірів

$(p \times n), p \leq n,\ \tau_k = -g_A(x^k)$, та проекцією на неї вектора $-t_k \nabla f\ (x^k)$. Для виявлення нерівностей, активних у точці x^k, визначається похибка визначення активних обмежень $\varepsilon_1 \leq 0$. Активними вважаються обмеження, для яких

$\varepsilon_1 \leq g_j(x) \leq 0$. Кількість p обмежень, активних у точці x^k, не повинна перевищувати n - розмірності вектора x.

Пошук обмежень, активних у точці x^k, розглядається як самостійне завдання, яке може бути вирішене шляхом послідовних наближень. Задається точках x^k і обчислюється $g_j(x),\ \ \mathrm{j} = 1, \dots, \mathrm{m}$. Якщо $g_j(x) < \varepsilon_1$, то вибираються будь-які p обмежень з найменшими по абсолютної величини нев'язками $\mathrm{p}_j^k = g_j(x^k)$, у точці x^k будується матриця A_k, обчислюється τ_k і знаходиться точка

$$x^{k+1} = x^k + A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} \tau_k \qquad (8)$$

потім знову обчислюються нев'язки вибраних p обмежень. Наближення за формулою (8) здійснюється доти, доки не буде знайдена точка x^k, у якій

$\varepsilon_1 \leq g_j(x) \leq 0$. Проекція вектора $-t_k \nabla f\ (x^k)$ у точці x^k, у якій активні p обмежень, визначається точкою

$$x^{k+1} = x^k - t_k [E - A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} A_k] \nabla f\ (x^k)$$

де збільшення $\delta x^k = -t_k [E - A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} A_k] \nabla f\ (x^k)$ здійснює

рух по площині $A_k \delta x^k = \tau_k$ в напрямку спадання $f(\mathrm{x})$. Величина t_k

вибирається так: $t_k = \min[\mathrm{t}_k^* \geq 0, t_{k\,\max} \geq 0]$, де t_k^* є крок, при якому

$$f(x^k - \mathrm{t}_k^*\, [E - A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} A_k] \nabla f\ (x^k) =$$

$$= \min_{t_k} f(x^k - t_k [E - A_k^T (A_k A_k^T)^{-1} A_k] \nabla f\ (x^k)),$$

а $t_{k\,\max}$ – найменший крок, при якому

$$g_j(x^k - t_{k\,\max}\,[E - A_k^T(A_kA_k^T)^{-1}A_k]\nabla f\,(x^k)) \le 0$$

для всіх обмежень, які не були активними у точці x^k. Вочевидь,

нев'язка обмежень у точці x^{k+1} змінюється, і тому обчисленню точки x^{k+2} має передувати процедура вибору активних обмежень, описана вище.

Процедура обчислення точок послідовності $\{x^k\}$ забезпечує послідовний рух уздовж межі допустимої області. При виконанні нерівності

$\|\Delta x^k\| = \|-[E - A_k^T(A_kA_k^T)^{-1}A_k]\nabla f\,(x^k)\| \le \varepsilon_2$, де ε_2 - задане досить мале додатнє число, що обчислюється наближенням λ^k. вектора множників Лагранжа λ^*:

$$\lambda^k = -A_k^T(A_kA_k^T)^{-1}A_k\nabla f\,(x^k)$$

Якщо $\lambda^k \ \ge\ 0$, то в точці x^k виконані необхідні умови мінімума та в ній повинні бути перевірені достатні умови. Якщо серед множників λ_j^k є від'ємними, то це означає, що x^k не є наближенням точки x^*, оскільки в ній не виконані необхідні умови мінімуму цільової функції $f(x)$ при обмеженнях

$g_j(x),\quad j = 1, \dots, m$. Однак вибір кроку t_k дозволяє говорити про те, що значення f(x) не може бути зменшено при заданому складі активних обмежень і, отже, процес мінімізації f(x) слід продовжити, зменшивши їх число: до пасивних переводять з обмежень, якому відповідає найбільший по абсолютному значенню від'ємних множників λ_j^k. Така процедура пошуку дозволяє знайти розв'язок, що лежить як на межі, так і всередині множини допустимих розв'язків.

5. Метод Зойтендейка

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Знайти мінімум двічі безперервно диференційованої функції f(x) за умови, що вектор $x \in R^n$ задовольняє обмеження $g_j(x), \quad j = 1, \dots, m$, в яких функції $g_j(x), \quad j = 1, \dots, m$, є також двічі безперервно диференційовані функції x, тобто таку точку $x^* \in$ X, що

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x)$$

$$X = \{ x \mid g_j(x) \leq 0, \ j = 1, \dots, m\}, \qquad (9)$$

СТРАТЕГІЯ ПОШУКУ

Стратегія розв'язання задачі (9) методом Зойтендейка

(G. Zou-tendijk) полягає у побудові послідовності допустимих точок $\{x^k\}$, таких, що виконується умова $f(x^{k+1}) < f(x^k), \ k = 0, 1, \dots$.

Правило побудови точок послідовності $\{x^k\}$:

$$x^{k+1} = x^k + \bar{t}_k d^k, \qquad \mathrm{k} = 0, 1, \dots,$$

де точка x^k допустима і така, що

$$-\varepsilon_k < g_j(x^k) \leq 0, \quad j \in J_a, \qquad (10)$$

J_a - безліч індексів j активних обмежень, для яких виконано умову

(10); величина кроку $\bar{t}_k \geq 0$ знаходиться в результаті розв'язання задачі одновимірної мінімізації:

$$f(x^k + t_k d^k) \to \min \qquad (11),$$

$$g_j(x^k + t_k d^k) \leq 0, j = 1, \dots, m. \qquad (12),$$

Завдання (11), (12) можуть бути вирішені з використанням алгоритму застосування необхідних та достатніх умов умовного мінімуму. Інакше величину $\bar{t}_k$ слід вибирати із співвідношення

$$\bar{t}_k = \min\{t_k^* \geq 0, t_k^{**} \geq 0\},$$

де величина t_k^* визначається з умови $f(x^k + t_k^* d^k) = \min_{t_k \geq 0} f(x^k + t_k d^k)$, а величина $t_k^{**} = \min\{t_k^j\}$, t_k^j відповідає умовам $g_j(x^k + t_k d^k) = 0, \quad t_k \geq 0$

Напрямок спуску d^k задовольняє системі нерівностей

$$\nabla f(x^k)^T d^k < 0, \tag{13}$$

$$\nabla g_j(x^k)^T d^k < 0, \quad j \in J_a. \tag{14}$$

Можливий напрямок спуску d^k, що задовольняє умовам (13),(14), визначається з розв’язання задачі лінійного програмування

$$z \to min,$$

$$\nabla f(x^k)^T d^k \leq z, \tag{15}$$

$$\nabla g_j(x^k)^T d^k \leq z, \quad j \in J_a,$$

$$\left| d_i^k \right| \leq 1, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Якщо розв'язок z^* задачі (15) менший за $-\varepsilon_k$, то для пошуку нового можливого напрямку спуску d^{k+1} вважають $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$. Якщо ж $z^* \geq -\varepsilon_k$ то розрахунок слід закінчити, тому що в точці x^k з точністю до ε_k виконуються необхідні умови мінімуму в задачі (9), або продовжити, щоб досягти більш високої точності, поклавши $\varepsilon_{k+1} = q\varepsilon_k$, де $0 < q < 1$.

Примітка 5.

1. Якщо завдання (9) не є завданням опуклого програмування, у якому всі функції $f(x)$; $g_j(x), j = 1, \ldots, m$, опуклі, то алгоритм Зойтендейка збігається до точки x^*, яка задовольняє з точністю ε_k до необхідних умов мінімуму функції багатьох змінних при обмеженнях типу нерівностей. Отже, у точці x^* мають бути перевірені достатні умови мінімуму.

2. Якщо задача (9) - задача опуклого програмування та її множина допустимих розв'язків X $= \{ x \mid x \in R^n,\ g_j(x) \leq 0,\ j = 1, \ldots, m\}$ має внутрішні точки, то знайдена за алгоритмом Зойтендейка точка x^* є розв'язком задачі (9).

3. Швидкість збіжності алгоритму Зойтендейка оцінюється як низька.

Розділ 3. Аналіз та вдосконалення методу вектора спаду

3.1. Метод вектора спаду розв'язання цілочислових задач лінійного та нелінійного програмування.

Розглянемо лінійну задачу цілочислового програмування виду:

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to min$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \begin{Bmatrix} = \\ \le \\ \ge \end{Bmatrix} b_j, \quad j = 1,2,\dots,m, \right. \qquad (16)$$

$x_i \ge a,$ цілі, $i = 1,2,\dots,m.$

Перш ніж описувати алгоритм методу, введемо деякі необхідні поняття.

Нехай М - деякий дискретний точковий простір. $\Omega \subset M$ - множина допустимих планів задачі (16). Введемо метрику в простір М, тобто функцію $\rho(X, Y)$, що визначає відстань між довільними точками цього простору X та Y.

Функцію $\rho(X, Y)$ можна визначати по-різному.

Зокрема, у прямокутній декартовій системі координат це може бути довжина вектора $\overrightarrow{XY}$, тобто

$\rho(X, Y) = \left|\overrightarrow{XY}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2},$ де $X = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y = (y_1, y_2, \dots, y_n).$

Нехай $X' \in M$. Якщо взяти деяке число $r > 0$, то множину всіх точок M, для яких виконується нерівність $\rho(X', Y) \le r$ називатимемо закритим околом $M(X', r)$ точки X' радіуса r. Нехай тепер $X' \in \Omega$, а $M(X', r)$ містить інші допустимі плани задачі (16).

Визначимо функцію $\Delta(X,Y)$ у такий спосіб: $\Delta(X,Y)=z(Y)-z(X)$. Назвемо ***вектором спаду*** $\vec{V}$ функції $z(X)$ у деякому околі $M(X',r)$ довільної точки $X'\in\Omega$ такий вектор, компонентами якого є величини $\Delta(X',X_i)$, де $X_i, i=\overline{1,k}$ - допустимі плани задачі (16), що належать околу $M(X',r)$. При $\Delta(X',X_i)\geq 0$ для всіх точок $X_i\in M(X',r)$, виконуватимуться нерівності: $\Delta(X',X_i)=z(X_i)-z(X')\geq 0$. Остання нерівність означає, що точка X' є точкою локального мінімуму функції z відносно околу $M(X',r)$, тобто:

$$z(X')=\min_{X_i\in M(X',r)\cap\Omega} z(X_i).$$

Якщо ж деякі компоненти вектора спаду будуть від'ємними, то це означає, що X' не є точкою мінімуму в зазначеному околі, оскільки в деяких точках цього околу функція z набуває менших значень. Причому та точка X'', для якої різниця $\Delta(X',X'')=z(X'')-z(X')<0$ буде найменшою, визначає напрям найшвидшого спаду (зменшення) цільової функції $z(X)$.

Цей факт і лежить в основі обчислювальної схеми методу вектора спаду. Процес пошуку розв'язку є послідовним перебором точок, що зменшують значення цільової функції.

Як правило, на кожному кроці алгоритму (тобто для кожного нового околу) не потрібно обчислювати всі компоненти вектора спаду, а лише частину з них, що дає істотний виграш в обсязі і тривалості обчислень.

Наведемо один з можливих алгоритмів реалізації методу вектора спаду.

1. Вибрати початкову точку X_0 і радіус околу R так, щоб точка X_0 була допустимим планом відповідної задачі цілочислового програмування, а окіл був таким, що містить також інші допустимі плани задачі.

2. Визначаються компоненти вектора спаду у вибраному околі. Якщо всі його компоненти невід'ємні, то точку локального мінімуму знайдено (тобто задача розв'язана і оптимальним цілочисловим планом є ($X^*=X_0$).

3. Якщо не всі компоненти вектора спаду невід'ємні, то вибираємо компоненту $\Delta\,(X_0, \tilde{X})$, яка має найменше значення і визначає точку $\tilde{X}$, що зменшує значення цільової функції і є центром нового околу.

4. Повертаємось до пункту 2. Процес продовжуємо, поки для деякого $\widetilde{X_k}$ всі компоненти відповідного вектора спаду не будуть невід'ємними

3.2. Приклад, що ілюструє отримання помилкового розв’язку задачі

Знайти розв’язок цілочислової ЗЛП

$$z = -3x_1 - 2x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 24 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 26 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, \text{цілі}, i = 1, 2$$

використавши метод спаду.

Розв’язок.

Виберемо $X_0 = (0; 0)$ і R =1,5. В окіл $M(X_0, R)$ потрапляють точки $X_1^1 = (0; 1)$,

$X_2^1 = (1; 0)$, $X_3^1 = (1; 1)$. Всі ці точки є допустимими планами, тому визначаємо три компоненти вектора спаду:

$$\Delta(X_0, X_1^1) = z(X_1^1) - z(X_0) = -2$$

$$\Delta(X_0, X_2^1) = z(X_2^1) - z(X_0) = -3$$

$$\Delta(X_0, X_3^1) = z(X_3^1) - z(X_0) = -5$$

Найменше значення -5, тому за центр нового околу вибираємо точку $X_3^1 = (1; 1)$. Далі розглядаємо точки $X_1^2 = (0; 2)$, $X_2^2 = (1; 2)$, $X_3^2 = (2; 2)$, $X_4^2 = (2; 1)$, $X_5^2 = (2; 0)$.

Всі ці точки є допустимими планами, тому визначаємо п’ять компонент вектора спаду:

$$\Delta(X_3^1, X_1^2) = z(X_1^2) - z(X_3^1) = 1$$

$$\Delta(X_3^1, X_2^2) = z(X_2^2) - z(X_3^1) = -2$$

$$\Delta(X_3^1 , X_3^2) = z(X_3^2) - z(X_3^1) = -5$$

$$\Delta(X_3^1 , X_4^2) = z(X_4^2) - z(X_3^1) = -3$$

$$\Delta(X_3^1 , X_5^2) = z(X_5^2) - z(X_3^1) = -1$$

$$\vec{V} = (1;\ -2;\ -5;\ -3;\ 1)$$

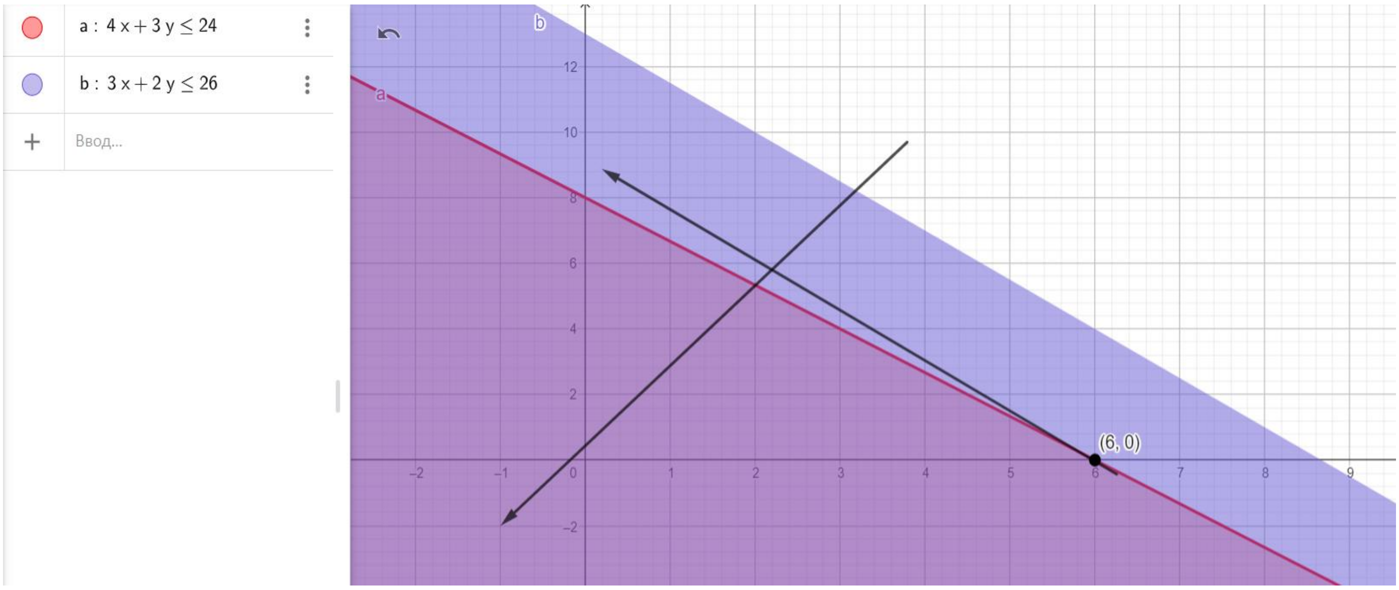
Обираємо точку $X_3^2 = (2;2)$. На наступному кроці $X_1^3 = (1;3)$, $X_2^3 = (2;3)$, $X_3^3 = (3;3)$, $X_4^3 = (3;2)$, $X_5^3 = (3;1)$; вектор спаду $\vec{V} = (1;\ -2;\ -5;\ -3;\ -1)$ і центр наступного околу $X_3^3 = (3;3)$.

Тепер $X_1^4 = (2;4)$, $X_2^4 = (3;4)$, $X_3^4 = (4;4)$, $X_4^4 = (4;3)$, $X_5^4 = (4;2)$.

Оскільки $4\cdot 4 + 3\cdot 3 > 24$, та $4\cdot 4 + 3\cdot 4 > 24$, то точки $X_4^4 = (4;3)$, $X_3^4 = (4;4)$, не є допустимими планами і далі їх не розглядаємо.

Вектор спаду має три компоненти$\vec{V} = (-1;\ -2;1)$ і центр наступного околу $X_2^4 = (3;4)$. До $M(X_2^4 , R)$ потрапляють точки $X_1^5 = (4;5)$, $X_2^5 = (3;5)$, $X_3^5 = (2;5)$. Точки $X_1^5 = (4;5)$, $X_2^5 = (3;5)$ не є допустимими планами, отже, $\vec{V} = (1)$ і оскільки всі компоненти вектора спаду невід'ємні, то точку $X_3^5 = (2;5)$ можна вважати розв'язком задачі. При цьому значення цільової функції $z_{min}(2;5) = -3\cdot 2 - 2\cdot 5 = -16$.

Але ж, розв'язавши задачу графічним методом,



можна побачити, що розв'язком є точка $(6; 0)$,

$$z_{min}(6; 0) = -3 \cdot 6 - 2 \cdot 0 = -18$$

Висновок:

реалізація даного алгоритму методом вектора спаду привела до неправильного результату.

3.3. Вирішення проблеми шляхом збільшення радіусу околу

Щоб виправити ситуацію, пропонується в пункті 2, алгоритму внести таке корегування:

2. Визначаються компоненти вектора спаду у вибраному околі. Якщо всі його компоненти невід'ємні, то повернувшись до центру попереднього околу і збільшуємо радіус околу R так, щоб в нього входили інші точки з області допустимих значень. Побудувати новий вектор спаду, і якщо він не матиме від'ємних компонентів, то точку локального мінімуму знайдено (тобто задача розв'язана і оптимальним цілочисловим планом є $(X^* = X_0)$.

Повернемося до розглянутого прикладу.

Для точки $X_3^3 = (3;3)$ і $R = 3$ в окіл $M\,(X_3^3\,, R)$, крім вже розглянутих, потрапляють точки $X_6^4 = (4;1)$, $X_7^4 = (5;1)$, $X_8^4 = (5;2), X_9^4 = (5;3), X_{10}^4 = (5;4), X_{11}^4 = (5;5), X_{12}^4 = (1;5), X_{13}^4 = (1;4)$.

З них точки $X_8^4 = (5;2), X_9^4 = (5;3), X_{10}^4 = (5;4), X_{11}^4 = (5;5)$ не є допустимими планами.

Для четвертого кроку ми маємо вектор спаду, що складається з сімох компонентів $\vec{V} = (-1;\ -2;\ 1;\ 1;\ -2;\ 2;\ 2)$ для точок $X_1^4 = (2;4)$, $X_2^4 = (3;4)$, $X_5^4 = (4;2), X_6^4 = (4;1)$, $X_7^4 = (5;1), X_{12}^4 = (1;5), X_{13}^4 = (1;4)$ відповідно.

За результатами обчислень, найменші від'ємні компоненти вектора спаду мають дві точки $X_2^4 = (3;4)$, та $X_7^4 = (5;1)$. $X_2^4 = (3;4)$ вже була центром досліджуваного околу, тому необхідно дослідити окіл $M\,(\,X_7^4\,, R)$, де $R = 1{,}5$.

Маємо точки $X_1^6 = (4;0)$, $X_2^6 = (5;0)$, $X_3^6 = (6;0)$, $X_4^6 = (6;1)$, $X_5^6 = (6;2)$. Точки, $X_4^6 = (6;1)$, $X_5^6 = (6;2)$ не є допустимими планами, отже, $\vec{V} = (3;2;-1)$, і центр наступного околу $X_3^6 = (6;0)$. Для $M\,(X_3^6\,, R)$, де $R = 1{,}5$ маємо точки

$X_1^7 = (7;0), X_2^7 = (7;1), X_3^7 = (6;1)$.

Всі ці точки не є допустимими планами, отже, брати окіл з більшим радіусом не має сенсу.

Значення цільової функції $z_{min}(6;0) = -3 \cdot 6 - 2 \cdot 0 = -18$ в точці $X_3^6 = (6;0)$ менше, ніж в точці $X_3^5 = (2;5)$, тому розв’язком даної задачі буде саме точка $X^* = (6;0)$.

Відповідь: $z_{min}(6;0) = -18$

Висновки

Завданням дисертаційного дослідження було вивчення основних чисельних методів розв'язання оптимізаційних задач. Проведення їх аналізу та класифікації. А також детальне вивчення та вдосконалення методу вектора спаду для розв'язання цілочислових нелінійних та лінійних задач математичного програмування.

Наведено приклад, який ілюструє, що спонтанний вибір радіусу околу, а саме так цей вибір проводиться в алгоритмі методу вектора спаду, приводить до помилкового результату.

В даній роботі пропонується вдосконалення методу вектора спаду, яке дозволяє вирішити дану проблему.

Отже, можна стверджувати, що мета дисертаційного дослідження була осягнута.

Список використаної літератури

1. Сергиенко И. В. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования / И. В. Сергиенко, В. П. Шило. – К. : Наукова думка, 2003. – 264 с.

2. Сергиенко И. В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации / И. В. Сергиенко. – К. : Наукова. думка, 1988. – 471 с.

3. Сергиенко И. В. О существовании решений в задачах векторной оптимизации / И. В. Сергиенко, Т. Т. Лебедева, Н. В. Семенова // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – № 6. – С. 39–46.

4. Катренко А. В. Дослідження операцій. Підручник. – Львів: «Магнолія Плюс», 2006. – 549 с.

5. Кутковецький В. Я. Дослідження операцій. Навчальний посібник. – Миколаїв: Вид-во МДГУ ім. П. Могили, 2003. – 260 с.

6. Лавров Є. А., Перхун Л. П., Шендрик В. В. та ін. Математичні методи дослідження операцій. Підручник. – Суми : Сумський державний університет, 2017. – 212 с.

7. Крошко Н.В. Проблема вибору радіуса околу в методі вектора спаду. Znanstvena misel journal. 2023. №80.С.93-95.