

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 519.7, 004.4

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

_____ Олег КЛЕСОВ

«__» _____ 20__ р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»

зі спеціальності 111 «Математика»

**на тему: «Корисність властивості декомпозиції дискретних вейвлетів в
роботі з масивами фінансових даних»**

Виконав:

студент VI курсу, групи ОМ-21мн
Слупчук Євгеній Віталійович _____

Науковий керівник:

старший викладач,
кандидат фізико - математичних наук
Юрчук Василь Миколайович _____

Рецензент:

член-кореспондент НАН України,
доктор фізико - математичних наук, професор
Рущицький Ярема Ярославович _____

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних
посилань.

Студент (-ка) _____

Київ – 2024 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Олег КЛЕСОВ

«__» _____ 20__ р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Слупчуку Євгенію Віталійовичу

1. Тема дисертації «Корисність властивості декомпозиції дискретних вейвлетів в роботі з масивами фінансових даних», науковий керівник дисертації Юрчук Василь Миколайович, ст.викл., к.ф.-м.н., затверджені наказом по університету від «01» квітня 2024 р. №1523-с
2. Термін подання студентом дисертації 11 червня 2024 року
3. Об'єкт дослідження: процес виділення інформативних складових із складних фінансових даних
4. Предмет дослідження: методи та алгоритми для застосування дискретного вейвлет перетворення для фінансових даних.
5. Перелік завдань, які потрібно розробити:
 1. Запропонувати та обґрунтувати використання дискретне вейвлет перетворення до фінансових даних.
 2. Прокоментувати корисність вейвлет перетворення даних та можливі реалізації на більш складніших вейвлетах.
6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: 45 слайдів.
7. Дата видачі завдання 05 лютого 2024 року

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Ознайомлення з літературою	06.02.2024 – 20.02.2024	Виконано
2	Ознайомлення з методами та алгоритмами вейвлет перетворень у роботі з фінансовими даними	21.02.2024 – 03.03.2024	Виконано
3	Пошук програмного забезпечення для реалізації поставленого завдання	04.03.2024 – 17.03.2024	Виконано
4	Реалізація вейвлет перетворень на мові програмування R, підготовка графіків	18.03.2024 – 07.04.2024	Виконано
5	Підведення підсумків виконаних завдань	07.04.2024 – 26.04.2024	Виконано
6	Оформлення дипломної роботи	26.04.2024 – 02.06.2024	Виконано

Студент

Євгеній СЛУПЧУК

Науковий керівник

Василь ЮРЧУК

Реферат

Магістерська дисертація: 51 сторінка, 29 першоджерел, 45 слайдів презентації. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаної літератури.

Вейвлет-аналіз є гнучким і не вимагає строгих припущень щодо процесу генерування даних: він за своєю сутністю, має здатність представляти дуже складні дані без необхідності знати їхню функціональну форму. Це дуже корисно для фінансів, оскільки процес, що лежить в основі набору даних, не завжди точно відомий.

У роботі розглянуто застосування вейвлет-аналізу для фінансових та даних. Було застосовано дискретне вейвлет-перетворення для двох реальних фінансових рядів та впроваджено техніку з апробацією комп'ютерної статистичної програми "R". Також розглянуто питання вибору вейвлета з міркувань розуміння простоти механізмів та практичної реалізації.

Показано та проаналізовано на прикладах статистичного кореляційного аналізу, динамічного кореляційного аналізу, прогнозування фінансових часових рядів та спільного руху між фінансовими змінними з використанням підходу Wavelet Coherence ефективність вейвлет обробки. Проведений числовий та графічний аналіз до і після вейвлет перетворення фінансових даних, що відображено у відповідних таблицях та графіках.

Практична цінність результатів полягає у застосуванні для визначення розривів або зміни режиму фінансово часових рядів. Також можна застосовувати для прогнозування фінансових часових рядів у короткочасній перспективі для моделей, які не потребують серйозних припущень.

Ключові слова: вейвлет, дискретне вейвлет перетворення, метод Хаара, статичний кореляційний аналіз, прогнозування, модель *ARIMA*.

Abstract

Master's thesis: 51 pages, 29 primary sources, 45 presentation slides. The work consists of an introduction, two chapters, conclusions and a list of used literature.

Wavelet analysis is flexible and does not require rigid assumptions about the data generation process: it inherently has the ability to represent very complex data without needing to know its functional form. This is very useful for finance, since the process underlying the data set is not always precisely known.

The dissertation deals with the application of wavelet analysis for financial and data. A discrete wavelet transform was applied to two real financial series and the technique was implemented with the approbation of the computer statistical program "R". Also important is the question of choosing a wavelet with a measurement of understanding the simplicity of the mechanisms and practical implementation.

The effectiveness of wavelet processing is shown and analyzed using the examples of statistical correlation analysis, dynamic correlation analysis, forecasting of financial time series and co-movement between financial changes using the Wavelet Coherence approach. Conducted numerical and graphical analysis before and after the wavelet transformation of financial data, which is reflected in the corresponding tables and graphs.

The practical value of the results exists in the combination to identify discontinuities or regime changes in financial time series. Can also be added to forecast financial time series in the short term for models that do not require heavy assumptions.

Keywords: wavelet, discrete wavelet transform, Haar method, static correlation analysis, forecasting, *ARIMA* model.

Зміст

Вступ	7
Розділ 1. Необхідні дані щодо дискретних вейвлет перетворень	
1.1 Аналіз із різною роздільною здатністю (<i>MRA</i>), масштабування та вейвлет-функції.....	10
1.2 Вейвлет Хаара.....	19
1.3 Дискретне вейвлет перетворення в загальному вигляді (<i>DWT</i>).....	26
1.4 Дискретне вейвлет-перетворення максимального перекриття (<i>MODWT</i>)	27
1.5 Методика побудови моделі <i>ARIMA</i> для прогнозування часових рядів.....	28
Розділ 2. Впровадження та практична реалізація техніки вейвлет перетворення. Апробація комп'ютерних програм	
2.1 Вибір Вейвлета.....	34
2.2 Реалізація.....	36
Розділ 3. Застосування у фінансах.....	31
3.1 Статичний кореляційний аналіз між фінансовими змінними.....	38
3.2 Прогнозування фінансових часових рядів.....	43
Висновки.....	48
Список використаної літератури.....	49

Вступ

Вейвлет-аналіз — потужний інструмент для стиснення, обробки та аналізу даних. Його можна застосовувати для отримання корисної інформації з багатьох типів даних, включаючи зображення та аудіосигнали у фізиці, хімії та біології, а також високочастотні часові ряди в економіці та фінансах.

Найперша робота, пов'язана з вейвлет-аналізом, належить Альфреду Хаару на початку ХХ століття. Він винайшов ортогональну систему функцій, яка сьогодні відома як найпростіший базис сімейства вейвлетів і названий на його честь, тобто вейвлетом Хаара. З часу появи роботи Хаара було зроблено багато інших важливих внесків у галузі вейвлет-аналізу. Деякі з них — відкриття неперервного вейвлет-перетворення (*CWT*) у 1975 році Цвейгом з подальшим більш детальним формулюванням Гоупілоуда, Гросмана і Морлета у 1982 році; побудова ортогональних вейвлетів з компактним носієм Дюбеші в 1988 році; запровадження фреймворку з різною роздільною здатністю Маллатом у 1989 році; частотно-часову інтерпретацію неперервних вейвлет-перетворень Делпратом в 1991 році та багато інших.[29]

Вейвлет-аналіз в фінансах. З інтенсивним розвитком технологій останнім часом, застосування вейвлет-аналізу досягло широкого розмаху для низки галузей, зокрема економіки та фінансів, які є головним інтересом цієї магістерської роботи. Останні кілька десятиліть - ера великих даних, особливо для сфери фінансів, оскільки багато фінансових показників, таких як ціни на акції, тепер можна визначати з дуже високою частотою - на хвилинній або навіть секундній основі. Набори фінансових даних стають величезними, а також мають великий обсяг високої варіативності і складності. Більш, ніж будь-коли, ця зростаюча складність вимагає інструментів обробки даних. Науковці і експерти в галузі прагнуть до математичних застосувань, які можуть допомогти їм зрозуміти всю інформацію представлену в даних, і використовувати цю інформацію, щоб

покращити своє розуміння фінансових систем або просто зробити раціональні рішення.

З розвитком інструментів аналізу даних деякі традиційні інструменти, такі як аналіз часових рядів, який розташовується на часовій області, і спектральний аналіз, який розташовується на частотній області, переоцінюються через їх обмеження. Перше обмеження полягає в тому, що ці традиційні методи зазвичай вимагають дуже сильного припущення, що дані базуються на якомусь базовому процесі. Зокрема, дані мають бути стаціонарними (тобто їх середнє значення та дисперсія повинні не змінюватись з часом і не слідувати жодним трендам). Однак, це навряд чи вірно для багатьох економічних і фінансових часових рядів. Зазвичай з дисперсії або волатильності цих рядів випливають складні тенденції, а також моделі, такі як структурні розриви, кластеризації та моделі довгої пам'яті. Іншим обмеженням спектрального аналізу є те, що частотний розклад має сенс лише тоді, коли ринкова активність стабільна протягом усього періоду. Це може бути не так, наприклад, ринкова активність може бути особливо високою протягом кількох місяців у році та відносно низькою протягом інших.[28]

На відміну від традиційних методів, вейвлет-аналіз, який нещодавно був адаптований до економіки та фінансів, має кілька переваг, які допомагають обійти обмеження розглянуті вище, і надають більше корисної інформації, на відміну від традиційних методів.



Рис 1. Приклад фінансових даних – доходність фондового ринку Apple.

У цій роботі фокус було зосереджено на трьох основних перевагах вейвлет-аналізу.

Вейвлет-аналіз є гнучким і не вимагає серйозних припущень щодо процесу генерування даних: за своєю суттю, вейвлет-аналіз має можливість представляти дуже складні дані без необхідності знати їхню функціональну форму. Це корисна перевага для економіки та фінансів, оскільки процес, що лежить в основі набору даних, не завжди точно відомий. Як обговорювалося вище, багато економічних і фінансових часових рядів не є стаціонарними, що робить традиційні методи неефективними для їх вирішення. Однак вейвлет-аналіз долає цю проблему, оскільки не вимагає припущення стаціонарності даних.

Вейвлет-аналіз надає інформацію як у часовій, так і в частотних областях: на відміну від аналізу часових рядів і спектрального аналізу, які надають інформацію лише про часову та частотну області відповідно, вейвлет-аналіз здатний розкласти вихідний часовий ряд по відношенню до часової та частотної областей одночасно. Це має вирішальне значення для економіки та фінансів, оскільки багато з цих змінних можуть працювати та взаємодіяти по-різному відповідно до різних часових масштабів. Наприклад, дві ціни акцій можуть поводитися дуже подібним чином у довгостроковій перспективі, але значно відрізнятись в короткостроковій. Таким чином,

вейвлет-аналіз в цьому плані переважає, оскільки він може розкласти економічні та фінансові часові ряди на кілька часових масштабів, і дослідники можуть вивчати зв'язки цих рядів на кожному масштабі.

Вейвлет-аналіз оснащений можливістю знаходити розриви в даних: Вейвлет-аналіз також має здатність точно локалізувати розриви в системі. Це потенційно може допомогти експертам і вченим у галузі економіки та фінансів для визначення точних моментів зміни режиму часу, відображених у фактичних ринкових даних. Вони також можуть локалізувати ізольовані удари динамічної системи.

В даній роботі ми використовуємо приклад для демонстрації фактичних застосувань вейвлет-аналізу.

РОЗДІЛ 1. НЕОБХІДНІ ДАНІ, ЩОДО ДИСКРЕТНИХ ВЕЙВЛЕТ ПЕРЕТВОРЕНЬ

1.1 Аналіз із різною роздільною здатністю (MRA), масштабування та вейвлет-функції

Здатність розрізнення (resolution) є поняттям може найбільш характерним для вейвлет-аналізу. В ідеї багатомасштабного розрізнення визначну роль відіграє так звана масштабна функція (scaling function), оскільки саме за її допомогою організовується вейвлет-аналіз функції і означається вейвлет-хвилька.

Нехай задана певна базова (масштабна) функція $\varphi(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Утворимо операцією трансляції множину масштабних функцій за такою схемою

$$\varphi_k(x) = \varphi(x - k), k \in \mathbb{Z}.$$

Позначимо замкнений підпростір $V_0 \subset L^2(\mathbb{R})$, який є лінійною оболонкою для множини функцій

$$V_0 = \overline{\text{span}\{\varphi_k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}}$$

Цей підпростір і сімейство йому подібних організується в аналізі функцій, основанийому на здатності розрізнення, за допомогою такої фундаментальної для цього аналізу теореми.

Теорема. Нехай задана функція $\varphi(x)$, така що

- $\{\varphi_k(x) = \varphi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ є послідовність Ріса в $L^2(\mathbb{R})$;
- $\varphi(x/2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(x - k)$ або $\varphi(x) = \sum_k h_k \varphi(2x - k)$ і цей ряд збіжний в розумінні середнього квадратичного;
- Перетворення Фур'є $\hat{\varphi}(\omega)$ є неперервним в нулі і не рівний нулеві у ньому, тоді підпростори $V_j = \text{span}\{\varphi(2^j x - k) = \varphi_{j,k}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ утворюють базу для аналізу, основанийого на багатомасштабній здатності розрізнення.

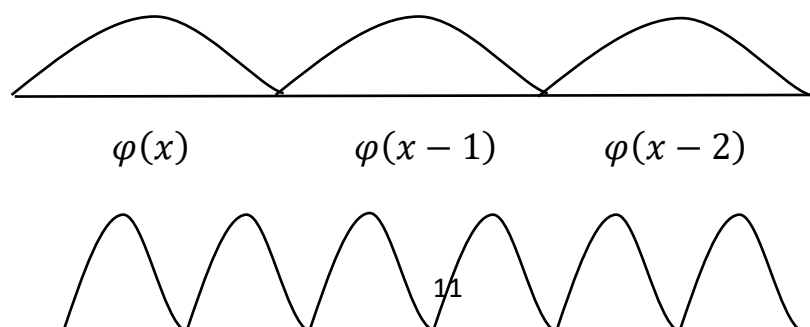
Зауваження. З означення підпростору V_j випливає, що якщо функція $f(x) \in V_j$, то вона може бути представлена так:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \varphi(2^j x - k).$$

Зокрема з $f(x) \in V_0$ випливає, що $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{0,k} \varphi(x - k)$.

Зауваження. Масштабну функцію вибирають у вигляді «гулі» чи «прищика» з шириною w і центрованого навколо нуля. Тоді кожна $\varphi_{m,n}$, побудована на масштабній функції $\varphi(x)$, є теж «прищиком» з шириною $2^{-m}w$ і центрованим навколо $x = 2^{-m}n$.

Функції $\varphi_{m,n}$, утворені трансляцією при фіксованому масштабі, є ортонормальними $\langle \varphi_{m,n}, \varphi_{m,n}^* \rangle = \delta_{nn}$.



$$\sqrt{2}\varphi(2x)$$

Рис.2 Масштабна функція

Означення. Основу аналізу багатомасштабного розрізнення (multiresolution analysis – MRA) складає послідовність вкладених замкнених підпросторів

$$\dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$$

з такими властивостями:

- зростаюча вверх повнота (V1)

$$\overline{\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} V_k} = L^2(\mathbb{R});$$

- зростаюча вниз повнота (V2)

$$\overline{\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} V_k} = \{0\};$$

- інваріантність масштабів (V3)

$$f(x) \in V_k \Leftrightarrow f(2^{-k}x) \in V_0,$$

$$\text{або } f(2^k x) \in V_k \Leftrightarrow f(x) \in V_0;$$

- інваріантність зміщення (V4)

$$f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x - m) \in V_0 \quad \forall m \in \mathbb{Z};$$

- існування ортонормованого базиса (V5)

існує така функція $\varphi(x) \in V_0$, що

$$\{\varphi_{0,m} = \varphi(x - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$$

є ортонормований базис для V_0 або

- існування базиса Ріса (V5*)

існує така функція $\varphi(x) \in V_0$, що

$$\{\varphi_{0,m} = \varphi(x - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$$

є базис Ріса для V_0 .

Означення. Ортогональною проекцією $P_j f$ функції $f \in L^2(\mathbb{R})$ на підпростір V_j називають

$$P_j f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}(x).$$

Зауваження MRA1. Головна доктрина аналізу, основанийого на багато масштабному розрізненні (MRA), полягає в наступному: як тільки виконуються всі умови написаного зверху означення, тоді існує ортонормований хвильовий базис $\{\Psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ в просторі $L^2(\mathbb{R})$

$$\Psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j x - k),$$

такий, що для всіх функцій $f \in L^2(\mathbb{R})$ ортогональні проекції функції $P_{j+1} f, P_j f$ на два сусідні підпростори V_{j+1}, V_j зв'язані між собою формулою

$$P_{j+1} f = P_j f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

Зауваження MRA2. З означення ортогональної проекції випливає, що вона не дорівнює самій функції. З умови (V1) випливає, що

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} P_m f(x) = f(x).$$

Зауваження MRA3. Всі підпростори V_j є масштабованими версіями центрального підпростору V_0 . В цьому і полягає багатомасштабність аналізу.

Зауваження MRA4. Функція $\varphi(x)$ з умови (V5) є масштабною функцією аналізу, основанийого на багатомасштабній здатності розрізнення (MRA).

Зауваження MRA5. З умов (V3)-(V5) випливає, що якщо функції $\{\varphi_{0,m} = \varphi(x - m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ утворюють ортонормований базис для V_0 , то система функцій

$$\{\varphi_{m,k} = 2^{m/2} \varphi(2^m x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

утворює ортонормований базис в підпросторі V_{-m} .

Тому і пишуть $V_j = \overline{\text{span}\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}}$. Це також означає, що якщо функція $f(x) \in V_j$, то вона може бути представлена так:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k).$$

Зокрема, це стосується і самої масштабної функції.

Якщо $\varphi(x) \in V_0$, де лінійна оболонка простору побудована на основі цієї функції, то вона міститься в V_1 , де лінійна оболонка побудована на функціях наступного масштабу $\varphi(2x)$ і справедлива формула

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sqrt{2} \varphi(2x - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi_{1,k}(x).$$

Коефіцієнти знаходяться зі скалярного добутку

$$h_k = \langle \varphi_0, \varphi_{1,k} \rangle.$$

Через перетворені за Фур'є величини отримуємо

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-ik\omega/2} \hat{\varphi}(\omega/2)$$

або

$$\hat{\varphi}(\omega) = m_0(\omega/2) \hat{\varphi}(\omega/2), \quad m_0(\omega/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-ik\omega/2}.$$

- **Зв'язок масштабних і вейвлетних коефіцієнтів.**

Означення. Означимо простір W_j як ортогональне доповнення простору V_j в просторі V_{j-1} . Це записується так: $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$ і означає, що всі елементи $\{\varphi_{j,k}(x)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ простору V_j є ортогональними до всіх елементів $\{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ простору W_j (до хвильок розрізнення j)

$$\langle \varphi_{j,k}(x), \psi_{j,k}(x) \rangle = \int_A \varphi_{j,k}(x) \psi_{j,k}(x) dx = 0.$$

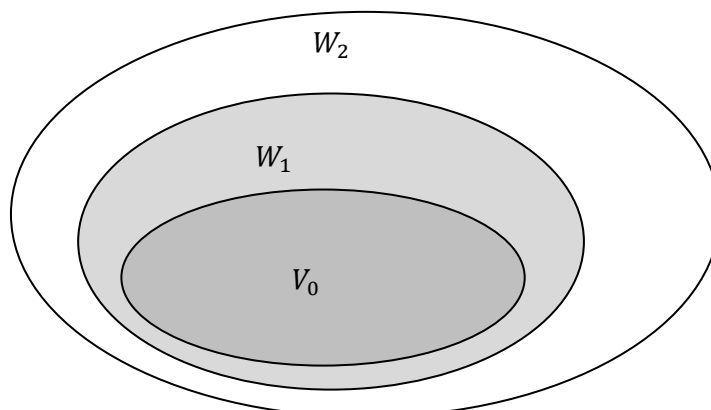


Рис.3 Схематичне зображення просторів W_j

Деякі властивості просторів W_j

W1. Простори W_j ортогональні між собою

$$W_j \perp W_m \quad j \neq m,$$

так що справедливе представлення

$$V_j = V_j \oplus \bigoplus_{k=0}^{j-1} W_{j-k},$$

$$V_1 = V_0 \oplus W_0,$$

$$V_2 = V_1 \oplus W_1 = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1,$$

$$V_3 = V_2 \oplus W_2 = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2,$$

і, врешті,

$$L^2 = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots$$

для високого рівня розрізнення

$$L^2 = V_7 \oplus W_7 \oplus W_8 \oplus W_9 \oplus \dots$$

І для низького рівня розрізнення

$$L^2 = V_{-7} \oplus W_{-7} \oplus W_{-6} \oplus W_{-5} \oplus \dots$$

W2. Тоді справедлива декомпозиція простору $L^2(\mathbb{R})$ через взаємно ортогональні підпростори $L^2(\mathbb{R}) \oplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$.

Теорема про зв'язок масштабних і хвилькових коефіцієнтів.

Якщо

- масштабні коефіцієнти задовольняють умови існування (тобто виконується слабка умова $\sum_k h_k = \sqrt{2}$ або більш сильна умова $\sum_k h_{2k} = \sum_k h_{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ і масштабна функція або має скінченний носій, або достатньо швидко згасає) і масштабні функції ортогональні $\int \varphi(x)\varphi(x-k)dx = \delta_{0k}$;
- хвилька означена через масштабну функцію згідно з формулою

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sqrt{2} \varphi(2x - k)$$

і додатково

- трансляція цієї хвильки $\psi(x-k)$ утворює систему хвильок, яка є лінійною оболонкою для підпростору

$$W_0 = \text{span}_{k \in \mathbb{Z}} \{\psi(x-k)\};$$

- $V_1 = V_0 \oplus W_0$, тобто хвильки є ортогональними до масштабних функцій

$$\langle \varphi(x-k), \psi(x-m) \rangle = 0,$$

тоді коефіцієнти h_k, \hat{h}_k задовольняють умову

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \hat{h}_{k-2n} = 0.$$

Наступна теорема доповнює характеристику хвилькових коефіцієнтів.

Теорема. Якщо масштабні коефіцієнти h_k задовольняють умову лінійності

$\sum_k h_k = \sqrt{2}$ і квадратичну умову $\sum_k h_k h_{n-2k} = \delta_{0k}$, тоді вейвлетні

коефіцієнти \hat{h}_k задовольняють умову $\sum_k \hat{h}_k = 0$ і вейвлет (хвилька)

задовольняє умову $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$.

На закінчення питання про масштабні та вейвлетні коефіцієнти спробуємо зібрати в один список загальні властивості цих коефіцієнтів і відповідних їм функцій.

- Незалежні від умови ортогональності загальні властивості масштабних функцій.

Властивість М1. Базисна система масштабних функцій є ортонормованою і сама базова масштабна функція теж нормована $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$.

Властивість М2. Базова масштабна функція $\varphi(x)$ може не тільки бути представлена через множину масштабних функцій наступного масштабу

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sqrt{2} \varphi(2x - k),$$

але і через множину масштабних функцій будь-якого іншого масштабу

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h^{(j)}_k 2^{j/2} \varphi(2^j x - k).$$

Тут $h^{(1)}_k = h_k$ і $h^{(j+1)}_k = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h^{(j)}_n h^{(j)}_{n-2k}$.

Властивість М3. Справедлива формула для суми діадно дискретизованих масштабних функцій

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{m}{2^j}\right) = 2^j.$$

Властивість М4. Попередня властивість для нульового індекса $j = 0$ дає так звану *властивість розділення одиниці*

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi(m) = 1.$$

Властивість М5. Якщо масштабна функція є неперервною, то справедлива більш загальна властивість розділення одиниці

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi(x - m) = 1.$$

Залежні від умови ортогональності загальні властивості масштабних та вейвлетних функцій.

Властивість ΔМ1.

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x)]^2 dx.$$

Властивість ΔМ2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0.$$

Звичайно материнський вейвлет є нормованим $\int_{-\infty}^{\infty} [\psi(x)]^2 dx = 1$.

Властивість ΔМ3. Не тільки вейвлети, утворені трансляцією при заданому рівні масштабу, є ортогональними. Ортогональними є також вейвлети різних масштабів.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(2^{j/2} \psi(2^j x - k) \right) \left(2^{i/2} \psi(2^i x - m) \right) dx = \delta_{km} \delta_{ij} \quad \forall i, j, k, m.$$

Властивість ΔМ4. Вейвлети і масштабні функції різних масштабів і різних трансляцій теж є ортогональними

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(2^{j/2} \psi(2^j x - k) \right) \left(2^{i/2} \psi(2^i x - m) \right) dx = 0 \quad \forall i, j, k, m.$$

Властивість ΔМ5. Справедлива теорема Парсеваля

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx.$$

Властивість ΔМ6. Якщо масштабні функції утворюють ортонормований базис або тісну рамку, то масштабні коефіцієнти можуть бути обчислені за формулою

$$h_k = \langle \varphi(x), \varphi_{1,k}(x) \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \varphi(2x - k) dx.$$

Властивість ΔМ7. Якщо масштабні функції утворюють ортонормований базис або тісну рамку, то масштабні коефіцієнти можуть бути обчислені за формулою

$$h_k = \langle \psi(x), \varphi_{1,k}(x) \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \varphi(2x - k) dx.$$

Коли відомий материнський вейвлет, то на його основі будується система вейвлетів за таким алгоритмом

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k).$$

Отже, ми записали явний алгоритм знаходження вейвлетів (хвильок) за відомою (вибраною на початку аналізу) масштабною функцією.

Приклад 1. Масштабна функція є трикутною функцією (сплайном першого порядку, лінійним В-сплайном). Тоді

$$\psi^\Delta(x) = \Delta(2x) - \frac{1}{2}\Delta(2x - 1) - \frac{1}{2}\Delta(2x + 1)$$

тобто коефіцієнти дорівнюють

$$\hat{h}_0 = -h_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \hat{h}_1 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \hat{h}_2 = -h_0 = -\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\varphi(2x) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{2}\varphi(2x - 1) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{2}\varphi(2x + 1).$$

1.2 Вейвлет Хаара

Розглянемо вектор довжиною $N = 2^n, n \in \mathbb{N}$, $X = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_8]^T$ Перетворення Хаара для цього сигналу можна реалізувати так

$$\underbrace{(x_1, x_2)}_{S_1}; \underbrace{(x_3, x_4)}_{S_2}; \underbrace{(x_5, x_6)}_{S_3}; \underbrace{(x_7, x_8)}_{S_4}$$

кожну пару значень ми розкладемо по базисним векторам

$$\varphi = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \psi = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

або матриця перетворення матиме вигляд

$$A = \begin{vmatrix} \varphi \\ \psi \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \quad (2)$$

Візьмем перші два значення (x_1, x_2) (вони розуміються як вектор S_1) і отримаємо наступні коефіцієнти розкладу

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= (\varphi, S_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \\
 d_{11} &= (\psi, S_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

З іншої точки зору (графічного інтерпретування) коефіцієнт c_{11} означає середнє значення двох (x_1, x_2) , а коефіцієнт d_{11} це різниця між середнім значенням і значеннями (x_1, x_2) .

Перетворення (3) можна записати у векторно-матричному вигляді

$$\begin{vmatrix} c_{11} \\ d_{11} \end{vmatrix} = A \cdot S_1
 \tag{4}$$

Аналогічно обчислюємо всі інші коефіцієнти для всіх пар значень. Тоді будемо мати

$$\begin{vmatrix} c_{11} \\ d_{11} \end{vmatrix} = A \cdot S_1, \quad \begin{vmatrix} c_{12} \\ d_{12} \end{vmatrix} = A \cdot S_2, \quad \begin{vmatrix} c_{13} \\ d_{13} \end{vmatrix} = A \cdot S_3, \quad \begin{vmatrix} c_{14} \\ d_{14} \end{vmatrix} = A \cdot S_4$$

Взагалі все це перетворення можна представити наступним чином

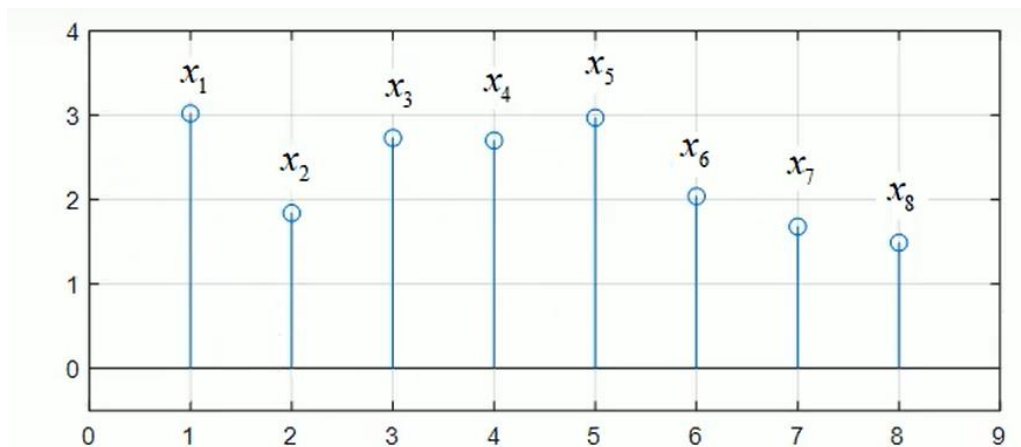


Рис.4. Зображення перетворення (4)

Рахуємо відповідні коефіцієнти для кожної пари значень

$$c_{11}, d_{11}, c_{12}, d_{12}, c_{13}, d_{13}, c_{14}, d_{14}$$

Об'єднуємо ті коефіцієнти, що представляють середнє значення відповідних пар значень. Ці об'єднані значення представляють більш грубу версію початкового сигналу

$$c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}$$

Далі знову зробимо аналогічне перетворення як на першому кроці для цих коефіцієнтів

$$\begin{vmatrix} c_{21} \\ d_{21} \end{vmatrix} = A \cdot \begin{vmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_{22} \\ d_{22} \end{vmatrix} = A \cdot \begin{vmatrix} c_{13} \\ c_{14} \end{vmatrix},$$

Отримаємо наступні коефіцієнти

$$c_{21}, d_{21}, c_{22}, d_{22}$$

Знову виберемо і об'єднаємо коефіцієнти c :

$$c_{21}, c_{22}$$

Виконуємо аналогічне перетворення $\begin{vmatrix} c_{31} \\ d_{31} \end{vmatrix} = A \cdot \begin{vmatrix} c_{21} \\ c_{22} \end{vmatrix},$

Отримаємо c_{31}, d_{31}

Якщо далі записати ці коефіцієнти $[d_{21}, d_{22}, d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14}]$ то результатом розкладу початкового сигналу X по вейвлет перетворенню Хаара буде така послідовність розкладу

$$c_{31}, d_{31}, d_{21}, d_{22}, d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14} \quad (5)$$

Тобто коефіцієнти (5) повністю описують сигнал базису вейвлет перетворення Хаара.

На практиці ці коефіцієнти позначають (для візуалізації) так

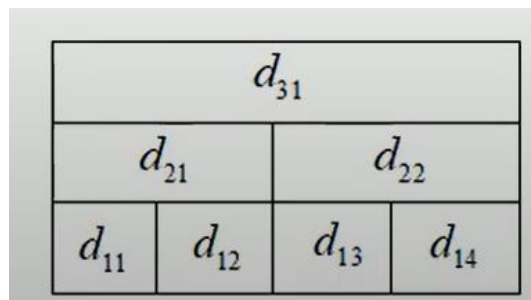


Рис.5 Схематичне зображення коефіцієнтів

де d_{31} коефіцієнт найбільшого масштабу

d_{21}, d_{22} коефіцієнти меншого масштабу

$d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14}$ коефіцієнти найменшого масштабу

Всі отримані коефіцієнти можна обчислити безпосередньо через початковий вектор X

Так, як $c_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{21} + c_{22})$ тоді

$$\begin{cases} c_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{11} + c_{12}) \\ c_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{13} + c_{14}) \end{cases} \Rightarrow c_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{11} + c_{12} + c_{13} + c_{14})$$

Далі, якщо розписувати коефіцієнти $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}$ то отримаємо

$$c_{31} = \frac{1}{\sqrt{8}}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8) \quad (6)$$

Перший базисний вектор позначимо через $\varphi_{0,0}$, тоді будемо мати

$$\varphi_{0,0} = \left[\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{8}} \right]^T = \frac{1}{\sqrt{8}} [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]^T \quad (7)$$

Це і є перший базисний вектор вейвлет перетворення Хаара.

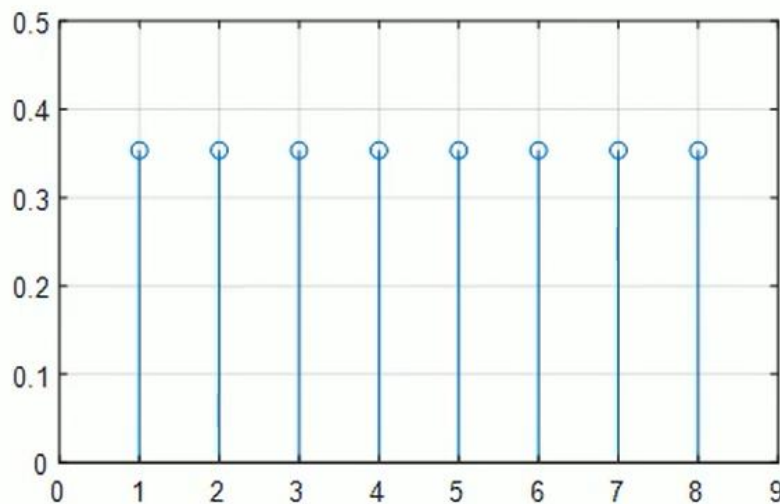


Рис.б. Графічне представлення першого базисного вектора вейвлет перетворення Хаара

Якщо продовжувати перетворення аналогічним чином для базисного вектора відповідного коефіцієнта d_{31} то отримаємо його наступний вигляд

$$\psi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{8}}[1,1,1,1,-1,-1,-1,-1]^T \quad (8)$$

що має графічний вигляд як на *Рис.7*

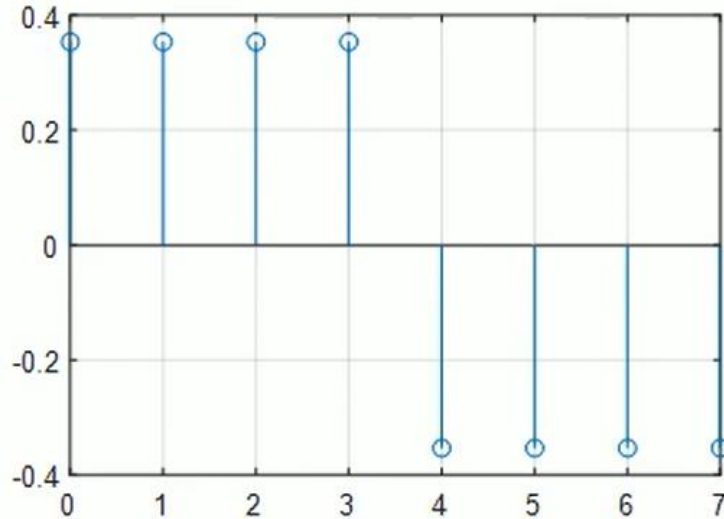


Рис.7. Перетворення для базисного вектора згідно (8)

Наступні два базисних вектора для обчислення коефіцієнтів d_{21} , d_{22} матимуть відповідно вигляд:

для d_{21} і відповідно графічний вигляд на *Рис.5*

$$\psi_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{4}}[1,1,-1,-1,0,0,0,0]^T \quad (9)$$

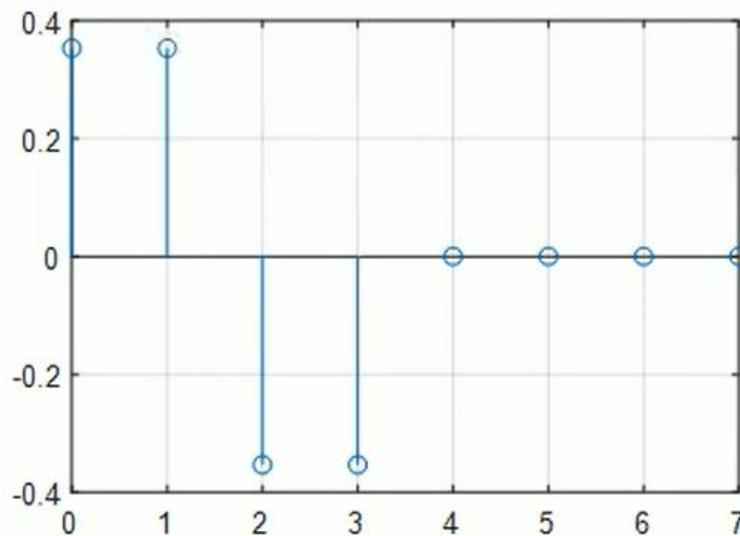


Рис.8. Перетворення для базисного вектора згідно (9)

для d_{22} і відповідно графічний вигляд Рис.9

$$\psi_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{4}} [0, 0, 0, 0, 1, 1, -1, -1]^T \quad (10)$$

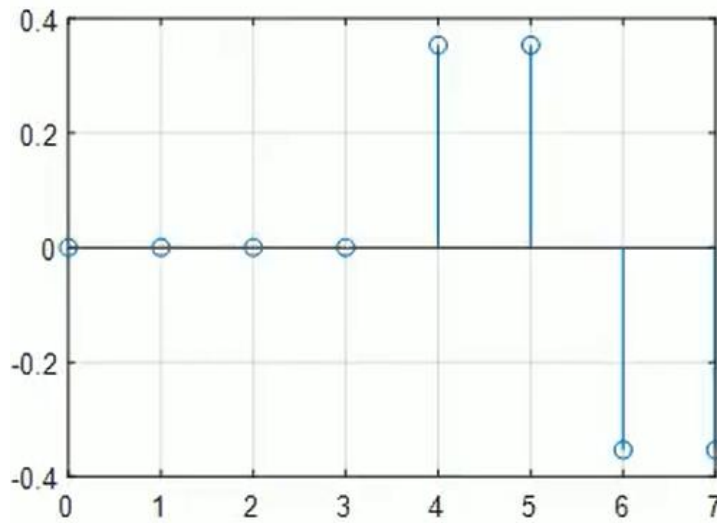


Рис.9. Перетворення для базисного вектора згідно (10)

Причому вектори $\psi_{1,0}$, $\psi_{1,1}$ можна обчислити через наступну числову послідовність

$$\psi_0[k] = \begin{cases} \psi_{0,0}[k], & 0 \leq k \leq N \\ 0, & \text{інаше} \end{cases} \quad (\text{де } N = 8 \text{ довжина вектора}) \quad (11)$$

Тоді вектори $\psi_{1,0}$, $\psi_{1,1}$ приймуть через (11) наступний вигляд

$$\begin{aligned} \psi_{1,0}[k] &= \sqrt{2} \cdot \psi_0[2k - N \cdot 0] \\ \psi_{1,1}[k] &= \sqrt{2} \cdot \psi_0[2k - N \cdot 1] \end{aligned} \quad \text{де } k = 0, 1, 2, \dots, 7 \quad (12)$$

Останні чотири вектора $d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14}$ отримуються аналогічно і мають вигляд

$$\begin{aligned} \psi_{2,0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T, \quad \psi_{2,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} [0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0]^T, \\ \psi_{2,1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0]^T, \quad \psi_{2,3} = \frac{1}{\sqrt{2}} [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1]^T \end{aligned} \quad (13)$$

І також можуть бути обчислені на основі (11) наступним чином

$$\psi_{2,n}[k] = \sqrt{2^2} \cdot \psi_0[2^2 k - N \cdot n] \quad \text{де } k = 0, 1, 2, \dots, 7; \quad \text{де } n = 0, 1, 2, 3 \quad (14)$$

Отже, всі базисні вектори вейвлет перетворення Хаара, крім першого, можна отримати з (11). Тому ця числова послідовність отримала назву материнського вейвлету

ψ_0 - материнський вейвлет

Аналогічно можна отримати для функції ϕ_0

$$\phi_{j,n}[k] = \sqrt{2^j} \phi_0[2^j \cdot k - N \cdot n] \quad (15)$$

Числові функції (15) дозволяють обчислювати всі коефіцієнти c_{ij} і ця функція має назву масштабної функції.

ϕ_0 - масштабна функція

Кінцеве представлення перетворення сигналу по вейвлету Хаара описується набором наступних базисних ортогональних векторів в матриці A , де кожен рядок матриці відповідає відповідному коефіцієнту (перший рядок відповідає коефіцієнту c_{31} ітд...)

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{8} & 1/\sqrt{8} & 1/\sqrt{8} & 1/\sqrt{8} & 1/\sqrt{8} & 1/\sqrt{8} & 1/\sqrt{8} & 1/\sqrt{8} \\ 1/\sqrt{8} & 1/\sqrt{8} & 1/\sqrt{8} & 1/\sqrt{8} & -1/\sqrt{8} & -1/\sqrt{8} & -1/\sqrt{8} & -1/\sqrt{8} \\ 1/\sqrt{4} & 1/\sqrt{4} & -1/\sqrt{4} & -1/\sqrt{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{4} & 1/\sqrt{4} & -1/\sqrt{4} & -1/\sqrt{4} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Так відбувається перетворення сигналу по ортогональному вейвлету Хаара.

1.3 Дискретне вейвлет перетворення в загальному вигляді (DWT)

Припустимо, що ми маємо функції масштабування та вейвлет-функції, які задовольняють наступне співвідношення (уточнення)

$$\phi(2^{j-1}x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{jk} \phi(2^j x - k) \text{ і } \psi(2^{j-1}x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{jk} \psi(2^j x - k)$$

Нехай v_n вихідні дані. У випадку, коли функції масштабування та вейвлет-функції є ортогональними, тоді низька частота або коефіцієнти апроксимації можуть бути знайдені за допомогою

$$u_{jn} = 2^{j-1} \sum_{k=0}^{N-1} v_k \langle \phi(2^j x - k), \phi(2^j x - n) \rangle = 2^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} v_k c_{jk}$$

і високочастотні або детальні коефіцієнти можна знайти за допомогою

$$w_{jn} = 2^{j-1} \sum_{k=0}^{N-1} v_k \langle \psi(2^j x - k), \psi(2^j x - n) \rangle = 2^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} v_k d_{jk}$$

Основна перевага *DWT* полягає в тому, що він успадковує ті самі переваги, що і неперервне вейвлет перетворення але використовує обмежену кількість перекладених і розширених версії оригінального вейвлета. Тому набагато простіше розрахувати всі коефіцієнти, а особливо при ортогональних масштабуючих та вейвлет функціях.

Однак він має 3 основні недоліки:

- *DWT* вимагає, щоб кількість точок даних становила 2^n
- *DWT* не є змінно-інваріантним
- може бути зміщення піку або впадини початкового ряду, зробивши коефіцієнти апроксимації неузгодженими з вихідними даними.

Щоб подолати ці недоліки, у наступному пункті обговорюється одна конкретна модифікація *DWT*, яка не має перераховані вище недоліки.

1.4 Дискретне вейвлет-перетворення максимального перекриття (MODWT)

Щоб реалізувати *MODWT*, фільтри c_{jk} і d_{jk} повинні бути перемасштабовані наступним чином

$$c_{jk} = c_{jk} / \sqrt{2} \text{ і } d_{jk} = d_{jk} / \sqrt{2}$$

Потім можна розрахувати апроксимаційні коефіцієнти та коефіцієнти деталізації

$$u_{jn} = 2^{-1} \sum_{l=0}^{L_j} v_{n-l} c_{jk} \text{ mod } N \text{ та } w_{jn} = 2^{-1} \sum_{l=0}^{L_j-1} v_{n-l} d_{jk} \text{ mod } N$$

де N — довжина часового ряду, а L_j — ширина фільтрів:

$L_j = (2^j - 1)(L - 1) + 1$, де L — ширина $j = 1$ базового фільтра.

За винятком того факту, що *MODWT* не є ортонормованим, як *DWT*, і тому є надлишковим, він має кілька бажаних характеристик, які підходять для аналізу даних фінансових часових рядів.

- на відміну від *DWT*, його можна застосувати до часового ряду довільної довжини n (тобто n не обов'язково має бути 2^j)
- на відміну від *DWT*, він не змінюється відносно зсуву.
- його апроксимаційні та детальні коефіцієнти зміщуються разом із вихідними даними (тобто вони мають однакові піки та впадини як вихідні дані).

1.5 Методика побудови моделі ARIMA для прогнозування часових рядів

Широке коло соціально-економічних, технічних та фізичних процесів часто представляється у вигляді набору послідовних значень деякого показника Y_1, Y_2, \dots, Y_n , зафіксованих в рівновіддалені один від одного моменти часу. Подібний набір значень $Y_t, t = 1, 2, \dots, n$ є часовим рядом, який є дискретним часовим процесом. Залежно від властивостей розрізняють стаціонарні та нестаціонарні часові ряди різних порядків. Так, стаціонарність другого порядку (слабка стаціонарність чи стаціонарність у широкому сенсі) спостерігається, якщо моменти першого та другого порядку (математичне очікування, дисперсія та автоковаріація) інваріантні по відношенню до зсуву часового аргументу.

При обробці інформації про поведінку фінансових часових рядів необхідно враховувати, що методи аналізу нестаціонарних випадкових процесів

суттєво відрізняються від прийомів роботи зі стаціонарними випадковими часовими рядами. Однак у рамках системи фондового ринку існує безліч прийомів, що описують його динаміку, які мають так звану однорідну нестаціонарність і можуть бути описані за допомогою підходів, що застосовуються до стаціонарних рядів. До таких методів відноситься застосування лінійної стохастичної моделі авторегресії і проінтегрованого ковзного середнього (*AutoRegressive Integrated Moving Average, ARIMA*). Для побудови моделі *ARIMA* достатньо використати інформацію, що міститься в даних часового ряду, який аналізується.

Розглянемо складові моделі:

- **Авторегресійна модель.** Авторегресійна модель порядку p має вигляд

$$Y_t = \varphi_0 + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \dots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (1)$$

де Y_t – рівень часового ряду в момент часу t (залежна змінна);

$Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-p}$ – рівень часового ряду в моменти часу $t-1, t-2, \dots, t-p$, відповідно (незалежні змінні);

$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ – коефіцієнти, які оцінюються;

ε_t – випадкове відхилення, яке описує вплив змінних, не врахованих у моделі (1).

Коефіцієнт φ_0 визначає постійний рівень ряду та пов'язаний з математичним очікуванням μ відношенням

$$\varphi_0 = \mu(1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \dots)$$

- **Моделі з ковзним середнім.** Модель з ковзним середнім порядком q задається рівнянням

$$Y_t = \varepsilon_t - \omega_1 \varepsilon_{t-1} - \omega_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \omega_q \varepsilon_{t-q}, \quad (2)$$

де Y_t – рівень ряду в момент часу t ;

ε_{t-i} – значення залишків i часових періодів назад (незалежні змінні);

$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_q$ – коефіцієнти, які оцінюються.

Моделі ковзного середнього *MA* дають прогноз значень функції Y_t на основі лінійної комбінації обмеженого числа q залишків, в той час як авторегресійні моделі *AR* дають прогноз значення Y_t на основі лінійної функції апроксимації обмеженого числа p минулих значень Y_t .

Використання поняття ковзного середнього в даному випадку означає, що відхилення залежної змінної від свого середнього, тобто величина $Y_t - \mu$, є лінійною комбінацією поточних та минулих значень вектора випадкових збурень.

- **Моделі з авторегресією та ковзним середнім.** Авторегресійну модель і модель з ковзним середнім можна скомбінувати. При описі такої комбінації використовується позначення *ARMA* (p, q), де p – порядок авторегресійної частини моделі, q – порядок частини ковзного середнього. Модель *ARMA* (p, q) має загальний вигляд:

$$Y_t = \varphi_0 + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \dots + \varphi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \omega_1 \varepsilon_{t-1} - \omega_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \omega_q \varepsilon_{t-q} \quad (3)$$

Дана модель дозволяє складати прогноз, що залежить як від поточного та минулого значень залежної змінної, так і від поточних та минулих значень величини випадкового збурення.

- **Моделі типу *ARIMA* та методологія Бокса-Дженкінса.** Бокс і Дженкінс запропонували виділити клас нестационарних рядів, які взяттям послідовних різниць можна привести до стаціонарного типу *ARMA*. Якщо ряд після взяття d послідовних різниць зводиться до стаціонарного, то прогнозування його рівнів можна застосувати комбіновану модель авторегресії і ковзного середнього, позначену як *ARIMA*(p, d, q). Скорочення *I* у цій аббревіатурі означає «інтегрований».

Методологія Бокса-Дженкінса підбору *ARIMA*-моделі для конкретного ряду спостережень складається з чотирьох етапів:

- ідентифікація моделі – процес вибору моделі, найкраще відповідної аналізованого реальному процесу;

- Оцінювання моделі - використання регресійних методів для отримання оцінок параметрів, включених в модель;
- Тестування моделі - перевірка основних передумов використання регресійного аналізу, перевірка адекватності моделі з використанням тестів на нормальність залишків (тест Жарка-Бера), на автокореляцію залишків (тест Дарбіна-Уотсона), на сталість дисперсій випадкових залишків (критерії Кохрана та Голдфалда-Квандта), на якість специфікації моделі (F -тест);
- Використання моделі для прогнозування.

Поговоримо про ідентифікацію моделі. У першу чергу необхідно з'ясувати, чи володіє досліджуваний ряд властивістю стаціонарності. Оцінка стаціонарності вихідного часового ряду здійснюється з використанням формальних тестів, наприклад, за допомогою розширеного критерію Діккі-Фуллера. Крім цього, при ідентифікації змішаної моделі проводиться аналіз корелограм ряду, для чого будується графік вибіркової автокореляційної функції (ACF). Корелограма стаціонарного часового ряду швидко зменшується зі зростанням порядку k поза кількома перших значень. Якщо графік зменшується досить повільно, є підстави вважати ряд нестаціонарним; якщо ж не зменшується, то досліджуваний ряд виразно не стаціонарний.

Реальні процеси можуть не мати властивість стаціонарності, проте за допомогою нескладних процедур часто можна привести ряд спостережень до стаціонарного процесу. До таких перетворень можна віднести:

- взяття кінцевих різниць виду

$$X_t = \Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1},$$

де X_t – перша різниця,

$$Z_t = \Delta X_t = X_t - X_{t-1} = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2} = \Delta^2 Y_t,$$

(Z_t – друга різниця)

- логарифмування ланцюжкових індексів виду

$$X_t = \ln(Y_t/Y_{t-1}) = \ln(Y_t - Y_{t-1});$$

- розрахунок темпів приросту виду

$$X_t = (Y_t - Y_{t-1})/Y_{t-1} = (Y_t/Y_{t-1}) - 1;$$

- логарифмування ряду виду

$$X_t = \ln Y_t;$$

- розрахунок темпів росту виду:

$$X_t = (Y_t/Y_{t-1}) i m\delta.$$

При виборі процедури перетворення стаціонарного ряду необхідно спиратись на графік часового ряду X_t . Коректний вибір повинен забезпечити приблизне виконання умови $X_t = f(Y_t) \approx const$.

Послідовність значень вихідного ряду $Y_t \in ARIMA(p, d, q)$ моделлю, якщо послідовність значень проінтегрованого ряду $\Delta^d Y = (\Delta^d Y_t)$ утворює $ARMA(p, q)$ – модель [3].

РОЗДІЛ 2. ВПРОВАДЖЕННЯ ТА ПРАКТИЧНА РЕАЛІЗАЦІЯ ТЕХНІКИ ВЕЙВЛЕТ ПЕРЕТВОРЕННЯ. АПРОБАЦІЯ КОМП'ЮТЕРНИХ ПРОГРАМ

У цьому розділі ми обговоримо декілька застосувань вейвлет-аналізу в економіці та фінансах. У кожній із програм ми спочатку повторимо переваги вейвлет-аналізу та пов'яжимо їх із конкретним фінансовим використанням. Потім пояснимо реалізацію і наведемо приклади для ілюстрації процесів. Більшість застосувань вейвлет-аналізу в економіці та фінансах походить від його здатності надавати інформацію як у часовій, так і в частотній областях. Це має вирішальне значення для економіки та фінансів, оскільки багато з цих змінних працюють і взаємодіють по-різному, відповідно до різних часових масштабів. Таким чином, вейвлет-аналіз може діяти як інструмент для декомпозиції даних в сигнали різних часових масштабів, перш ніж ми зможемо застосувати економетричні методи для їх аналізу. В даному розділі представлено кілька випадків, коли вейвлет-перетворення можна застосувати до фінансових часових рядів як попереднє перетворення.

- **Статичний кореляційний аналіз між фінансовими чи економічними змінними.**

У фінансах є багато випадків, коли нам потрібно оцінити кореляцію між двома змінними. Наприклад, корисно знати співвідношення між окремими акціями, щоб визначити диверсифікацію інвестицій. Згідно з теорією фінансів, інвестори можуть підвищити свою прибутковість і зменшити ризик шляхом диверсифікації в різні акції з низьким рівнем кореляції. З іншого боку, акції з високою кореляцією не додають великої вартості портфелю. У результаті інвестори часто хочуть знати співвідношення між акціями, які їх цікавлять, щоб вони могли створити оптимальний портфель.

Що стосується цієї проблеми, статистика надає інвесторам простий спосіб знайти кореляцію між двома змінними, яка називається *коефіцієнтом добутку Пірсона*. Цей коефіцієнт кореляції визначається відношенням коваріації двох змінних X , Y і добутком їх стандартного відхилення

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Хоча цей коефіцієнт дуже легко зрозуміти та обчислити, залишається одна проблема, оскільки кореляція бере до уваги врахування всієї інформації, представленої в цінах акцій, включаючи основні сигнали та шуми. Це може бути певним недоліком, оскільки інвестори можуть захотіти більше зосередитися на довгостроковій кореляції та ігнорувати короткострокові шуми. Однак, вейвлет-перетворення дозволяють нам виділити основні сигнали або коефіцієнти апроксимації з вихідних даних. Тому використання вейвлет-перетворення як попереднього перетворення перед фактичним виконанням кореляційного аналізу гарантує, що розрахована кореляція не враховує всі шуми, які можуть відображати небажану інформацію.

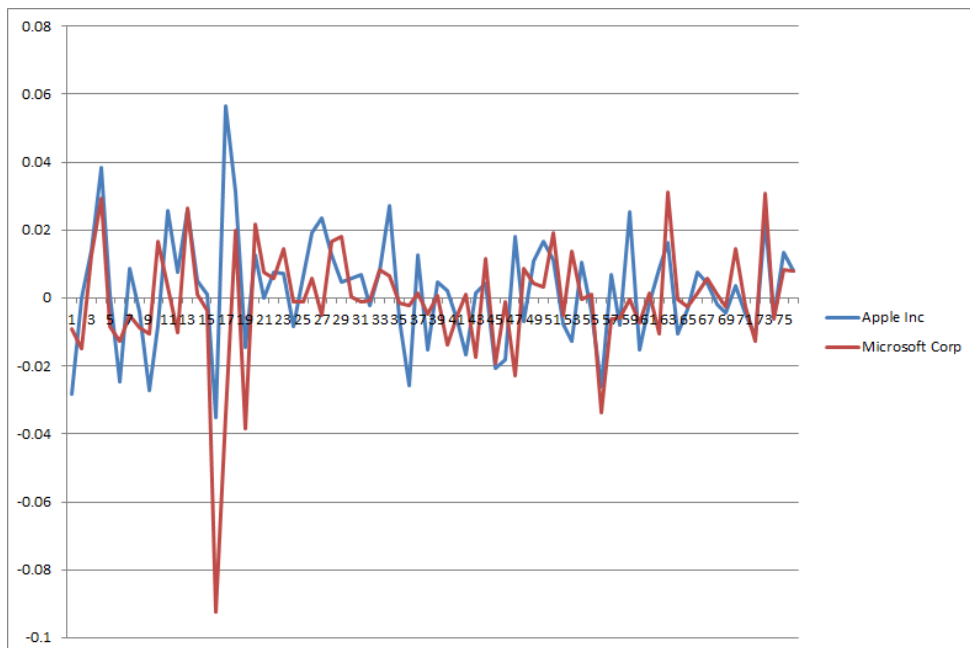


Рис. 11. Графік кореляції між прибутковістю двох акцій

<i>Серії</i>	<i>Коефіцієнт кореляції</i>
Вихідні дані	0.438944
Коефіцієнти апроксимації	0.492594

Таблиця 1. Співвідношення прибутковості акцій Apple Inc і Microsoft Corp з 2 січня 2015 року по 20 квітня 2015 року

З цього результату ми бачимо, що, використовуючи підхід вейвлет-перетворення, ми знаходимо вищу кореляцію між двома доходами акцій порівняно зі звичайним підходом. Це можна пояснити тим, що шуми у вихідному часовому ряді можуть знизити фактичну довгострокову кореляцію між двома доходами акцій.

2.1 Вибір вейвлета

Окрім типів вейвлет-перетворення, які відповідають фінансовим часовим рядам, наступне питання, яке слід розглянути вибір масштабування та вейвлет-функцій. Звісно, вибір масштабування та вейвлет-функції не є

таким унікальним. Існує багато вейвлетів, таких як вейвлет Хаара, вейвлет Дюбеші, вейвлет Шерле, вейвлет Шеннона, вейвлет Мейєра, сплайн-вейвлет Батла-Лемарі, сплайн-вейвлет Стрьомберга, мексиканський капелюшний вейвлет з різними характеристиками тощо. Дослідники в цій галузі припускають, що вейвлет Дюбеші може бути одним із найпопулярніших вейвлетів для аналізу фінансових даних.

Проте, оскільки потенційно можуть існувати різні типи даних і різні контексти, тоді вибір вейвлета залишається невизначений. Замість визначення одного чи кількох відповідних вейвлетів для фінансів, доцільно обговорити властивості вейвлетів, які слід враховувати при виборі відповідних вейвлетів. Перерахуємо деякі з найважливіших властивостей і критеріїв.

Симетрія: властивість симетрії важлива в тому сенсі, що симетрична функція масштабування та вейвлет узгоджені з вихідними даними (тобто немає зсуву фази) за рахунок коефіцієнтів апроксимації та деталізації. Однак, крім вейвлета Хаара, майже всі інші не симетричні. Щоб мати справу з асиметричними характеристиками, можна використовувати *MODWT*, щоб узгодити коефіцієнти з даними.

Ортогональність: властивість ортогональності також дуже важлива, оскільки ортогональність дає для вейвлетів та функцій масштабування певні переваги. Серед них найбільш бажаною перевагою ортогональності є те, що вона забезпечує швидкий і ефективний спосіб розкладення сигналів на коефіцієнти, а також відновлення сигналу за його коефіцієнтами. У результаті ця властивість може допомогти прискорити та здешевити обробку даних. Крім того, вейвлет-перетворення використовує ортогональну систему, яка зберігає дисперсію вихідного ряду.

Безсумнівно, не всі вейвлети є ортогональними. Приклад таких функцій масштабування можна побачити на *Рис 12*.

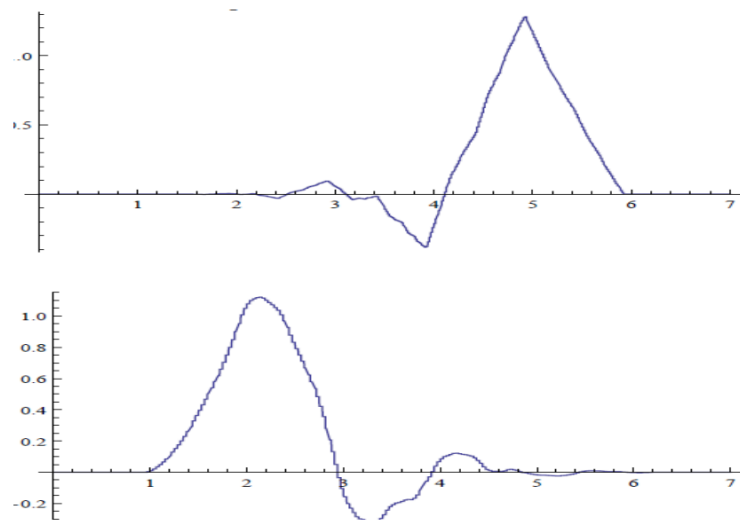


Рис 12. Приклади функцій ортогонального масштабування на основі B-сплайнів третього та четвертого порядку.

Гладкість: гладкість вейвлета визначається кількістю неперервних похідних. Залежно від характеру даних, з якими ми працюємо, ми можемо вибрати відповідний вейвлет з певним ступенем гладкості. Наприклад, з гладкими даними, як річна ціна акцій, ми можемо використовувати більш плавні вейвлет-функції, а з непересічними даними, такими як прибутковість акцій, ми можемо використовувати менш гладкий вейвлет такий як вейвлет Хаара і Дюбеші.

Важливим елементом для визначення є довжина вейвлет-фільтрів.

2.2 Реалізація

У цьому розділі ми наведемо приклад, щоб проілюструвати процес використання пакета R для виконання вейвлет аналізу. Процедура складається з трьох кроків: введення даних, імпорт даних і обробка даних за допомогою програмного пакету R- Studio.

Завантаження даних із загальнодоступних джерел: перш за все, було завантажено необхідні дані з публічних джерел. В даному випадку використано веб-сайт Yahoo finance як джерело ціни на акції Apple Inc. (AAPL) та Tesla Inc. (TSLA). Схема отримання даних:

- Перейти до *Yahoo finance*.

- Знайти Apple Inc та Tesla Inc за символом AAPL та TSLA відповідно.
- Перейти до цін, що відображають історію.
- Вибрати період і частоту (далі ми оберемо період з *17.04.2023р. до 16.04.2024р.*, щоденну ціну акцій)
- Натиснути *Отримати ціни.*
- Натиснути *Завантажити в електронну таблицю.*

Тепер ми повинні отримати ціну акцій Apple Inc та Tesla Inc. Далі потрібно форматувати дані у тип файлу *csv* для імпорту в R.

Імпорт даних в R та первинна обробка: Після отримання даних від Yahoo Finance потрібно завантажити дані в R.

1. Спочатку потрібно прочитати дані за допомогою команди `read.csv`, де вказати назву файлу (з розширенням `csv`) та шлях знаходження.
2. Позначивши (наприклад) через `x` прочитаний файл, можна форматувати його по кожному стовпчику для корегування класу даних.
3. Для перегляду результатів виділіть змінну `x` і натиснути `Ctrl + Enter`, для графічного аналізу фінансового ряду застосовують команду `Plot(x)`.

Обробка даних: наступним кроком буде використання наперед завантажених пакетів в середовищі R та застосування цих пакетів для аналізу, але до даних, які пройшли вейвлет перетворення. Звернемо увагу, що в кожному пакеті багато команд, які можна знайти в центрі документів за допомогою команди `help` (“*назва функції або пакету*”).

1. Застосовуємо до змінної `x` функцію `Modwt` з пакету `biwavelet` для дискретного вейвлет перетворення та отримуємо на кожному рівні відповідні значення.
2. Будуємо графіки для кожного рівня відповідних коефіцієнтів, де отримуємо значення відповідного масштабу за командою `plot.ts`.

3. Для обробки даних використовуємо відповідні пакети, наприклад: для відшукування кореляції функція – *cor*, для динамічного кореляційного аналізу пакет – *rmgarch*.

Прогнозування даних: У цій роботі буде прогнозовано дані після вейвлет-перетворення, яке використовує вейвлет Хаара. Алгоритм прогнозування оснований на моделі *ARIMA*

1. Для отримання прогнозованих даних, які оброблені за вейвлет перетворення використовуємо функцію *WaveletFittingarma* з пакету *WaveletArima*.
2. Для роботи *WaveletArima* потрібно підібрати параметри p, q, d для правильного отримання результату.

Отримані результат зводимо у таблиці і для кращого аналізу графічно реалізуємо за допомогою функції *Plot* та інших.

РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ В ФІНАНСАХ

У цьому розділі ми обговоримо декілька застосувань вейвлет-аналізу в фінансах. Кожне із перетворень враховує переваги вейвлет-аналізу, які розглянуті у *Розділі 1*. У кожному із застосувань було прокоментовано переваги вейвлет-аналізу та пов'язано їх із конкретним фінансовим значеннями. Потім пояснимо реалізацію і наведені приклади для ілюстрації процесів.

Більшість застосувань вейвлет-аналізу в економіці та фінансах походить від його здатності надавати інформацію як у часовій, так і в частотній областях. Це має вирішальне значення для економіки та фінансів, як і багато з цих змінних працюють і взаємодіють по-різному відповідно до різних часових масштабів. Таким чином, вейвлет-аналіз може діяти як інструмент для декомпозиції даних в сигналах різних часових масштабів,

перш ніж ми зможемо застосувати економетричні методи для їх аналізу. Дійсно, цей розділ представляє кілька випадків, коли вейвлет-перетворення можна застосувати до фінансових часових рядів як попереднє перетворення.

3.1 Статичний кореляційний аналіз між фінансовими змінними

Розглянемо спочатку ціни на акції які взяті із відкритих джерел для Tesla та Apple. Створимо таблиці даних цін на акції до вейвлет перетворення. Відповідні перетворення змінних у відповідні класи були відтворені за допомогою вбудованих в пакет R функції. Наступним кроком змодельюємо графіки зміни найбільших цін для відповідного періоду до вейвлет перетворення. Отримані графіки показують поведінку часового ряду, до вейвлет перетворення. Хоча можна сказати наперед що дані графіки забруднені шумом випадкових процесів. В *таблиці 2* наведені дані для акцій цін Apple (перші значення з періоду 17.04.2023р. до 16.04.2024р.), в *таблиці 3* наведені дані для акцій цін Tesla (перші значення з періоду 17.04.2023р. до 16.04.2024р.). На *рис. 13* графік зміни найбільшої ціни на акції Apple з періоду 17.04.2023 по 16.04.2024, а на *рис. 14* графік зміни найбільшої ціни на акції Apple з періоду 17.04.2023 по 16.04.2024.

	Date	Open	High	Low	Close	Adj.Close	Volume
1	2023-04-17	165.09	165.39	164.03	165.23	164.3527	41516200
2	2023-04-18	166.10	167.41	165.65	166.47	165.5862	49923000
3	2023-04-19	165.80	168.16	165.54	167.63	166.7400	47720200
4	2023-04-20	166.09	167.87	165.56	166.65	165.7652	52456400
5	2023-04-21	165.05	166.45	164.49	165.02	164.1439	58337300
6	2023-04-24	165.00	165.60	163.89	165.33	164.4522	41949600
7	2023-04-25	165.19	166.31	163.73	163.77	162.9005	48714100
8	2023-04-26	163.06	165.28	162.80	163.76	162.8905	45498800
9	2023-04-27	165.19	168.56	165.19	168.41	167.5159	64902300
10	2023-04-28	168.49	169.85	167.88	169.68	168.7791	55209200
11	2023-05-01	169.28	170.45	168.64	169.59	168.6896	52472900
12	2023-05-02	170.09	170.35	167.54	168.54	167.6452	48425700
13	2023-05-03	169.50	170.92	167.16	167.45	166.5609	65136000
14	2023-05-04	164.89	167.04	164.31	165.79	164.9098	81235400
15	2023-05-05	170.98	174.30	170.76	173.57	172.6485	113316400
16	2023-05-08	172.48	173.85	172.11	173.50	172.5788	55962800

Таблиця 2. Історія даних для акції Apple (перші значення з періоду 17.04.2023р. до 16.04.2024р.)

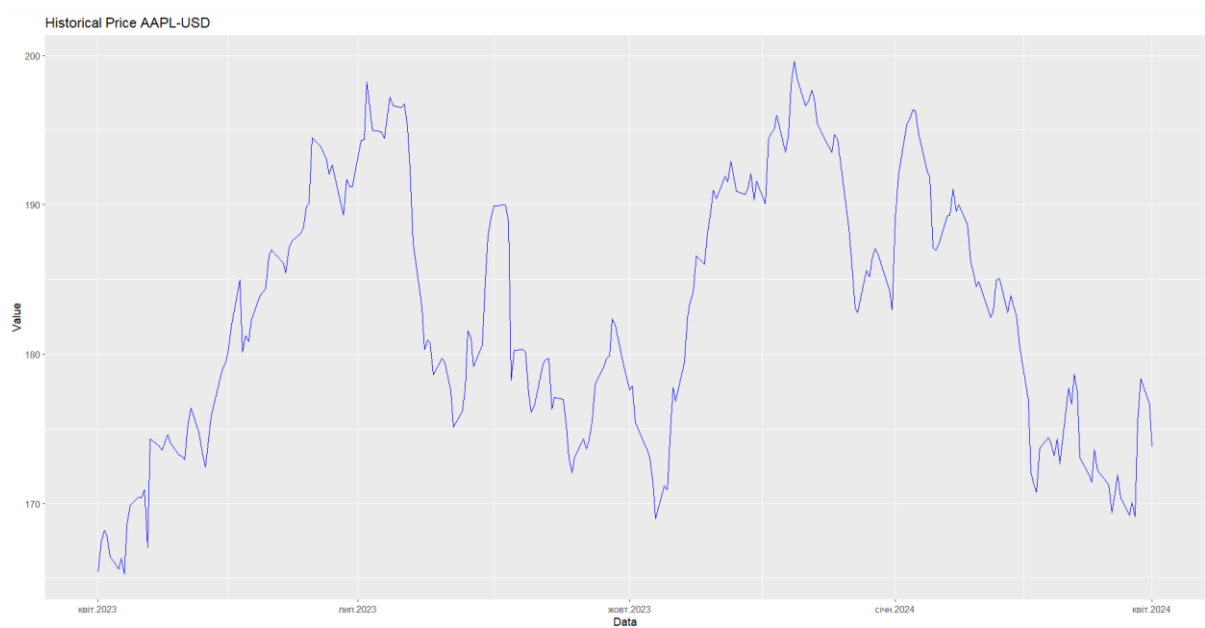


Рис.13 Графік зміни найбільшої ціни на акції Apple з періоду 17.04.2023 по 16.04.2024

	Date	Open	High	Low	Close	Adj.Close	Volume
1	2023-04-17	186.32	189.69	182.69	187.04	187.04	116662200
2	2023-04-18	187.15	187.69	183.58	184.31	184.31	92067000
3	2023-04-19	179.10	183.50	177.65	180.59	180.59	125732700
4	2023-04-20	166.17	169.70	160.56	162.99	162.99	210970800
5	2023-04-21	164.80	166.00	161.32	165.08	165.08	123539000
6	2023-04-24	164.65	165.65	158.61	162.55	162.55	140006600
7	2023-04-25	159.82	163.47	158.75	160.67	160.67	121999300
8	2023-04-26	160.29	160.67	153.14	153.75	153.75	153364100
9	2023-04-27	152.64	160.48	152.37	160.19	160.19	127015200
10	2023-04-28	160.90	165.00	157.32	164.31	164.31	122515800
11	2023-05-01	163.17	163.28	158.83	161.83	161.83	109015000
12	2023-05-02	161.88	165.49	158.93	160.31	160.31	128259700
13	2023-05-03	160.01	165.00	159.91	160.61	160.61	119728000
14	2023-05-04	162.71	162.95	159.65	161.20	161.20	95108500
15	2023-05-05	163.97	170.79	163.51	170.06	170.06	107440900
16	2023-05-08	173.72	173.80	169.19	171.79	171.79	112249400

Таблиця 3. Історія даних для акції Tesla (перші значення періоду 17.04.2023р. до 16.04.2024р.)

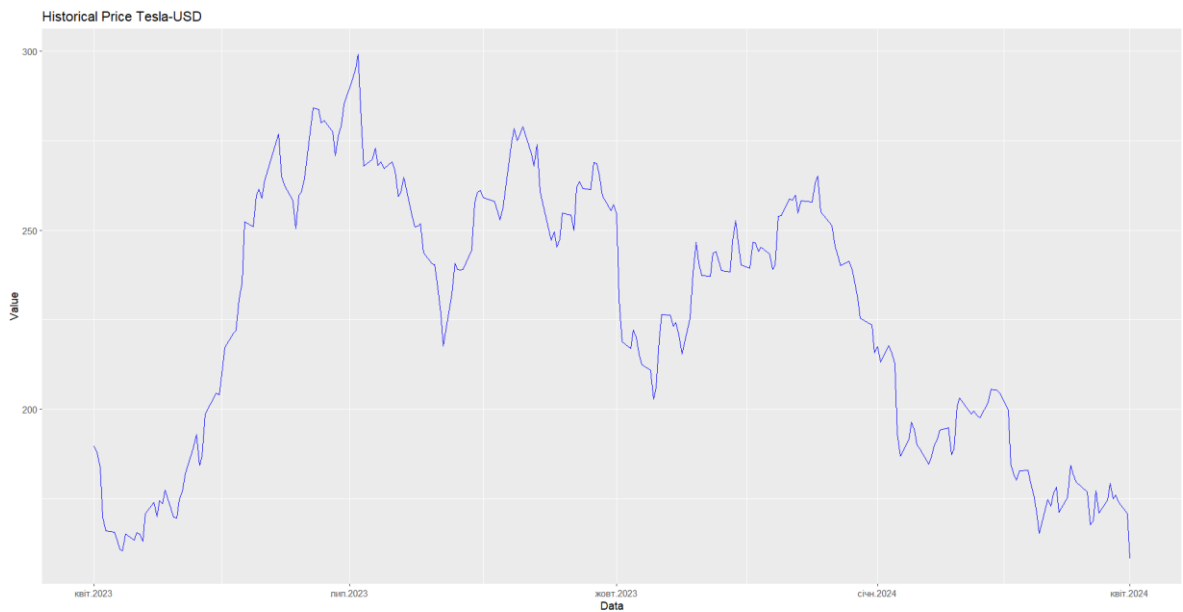


Рис.14 Графік зміни найбільшої ціни на акції Tesla з періоду 17.04.2023 по 16.04.2024

На останньому графіку *рис.15* зображено два часових ряди до вейвлет перетворення для змін цін на акції Apple та Tesla з періоду 17.04.2023 по 16.04.2024.

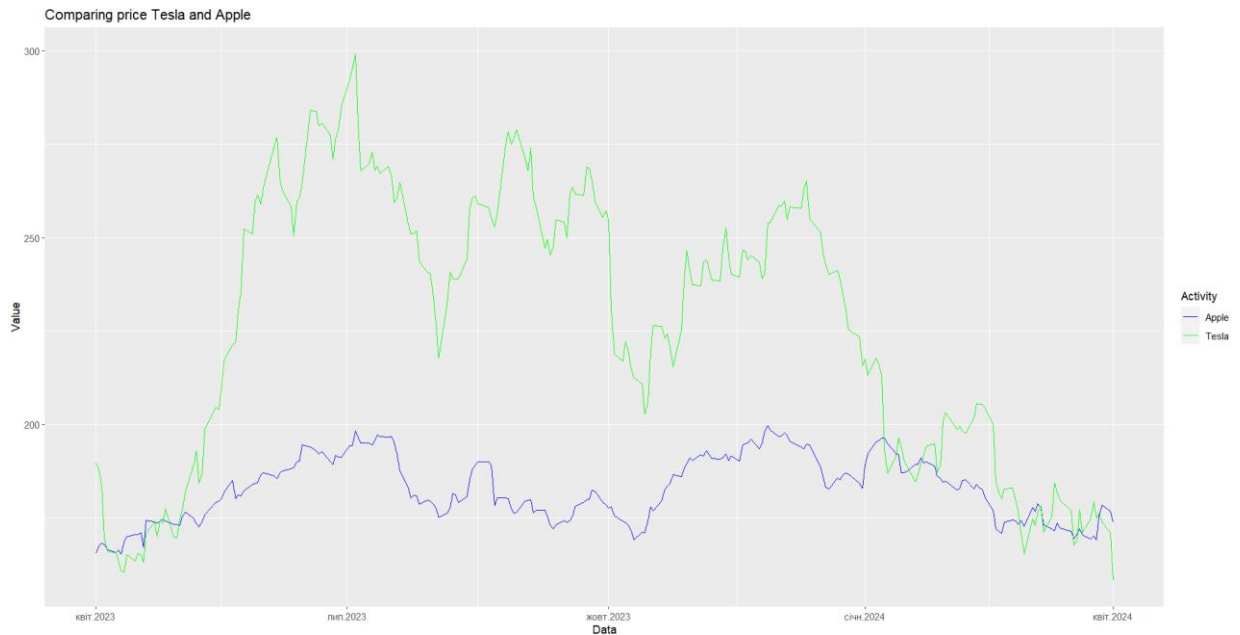


Рис.15 Графік зміни найбільшої ціни на акції Apple та Tesla з періоду 17.04.2023 по 16.04.2024

Рис.15 демонструє взаємо-поведінку двох часових рядів. З отриманого результату слідує, що два часових ряди мають свої тренди та обидва не стаціонарні. З цього слідує, що прогнозування рядів такого вигляду, є складним і потребує попередньої підготовки перед дослідженням. З *рис. 15* також можна передбачити, що кореляція між змінними різна, а отже природа походження даних також різноманітна.

Наступним кроком буде застосування вейвлет перетворення до обох часових рядів за Хааром для четвертого рівня. Змоделюємо ряд зміни цін на кожному рівні для найбільших цін. Проведем відповідні перетворення та побудуємо графіки зміни цін на кожному із рівнів.

На *Рис. 16* та *17* наведено графіки зміни найбільшої ціни на акції Apple та Tesla після вейвлет перетворення для четвертого рівня. Перших чотири графіка відповідають коефіцієнтам d_1, d_2, d_3, d_4 (відповідного масштабу) а останній графік відповідає останньому рівні, але низько частотним коефіцієнтам s_4 . Всі графіки отримані в період з 17.04.2023 по 16.04.2024.

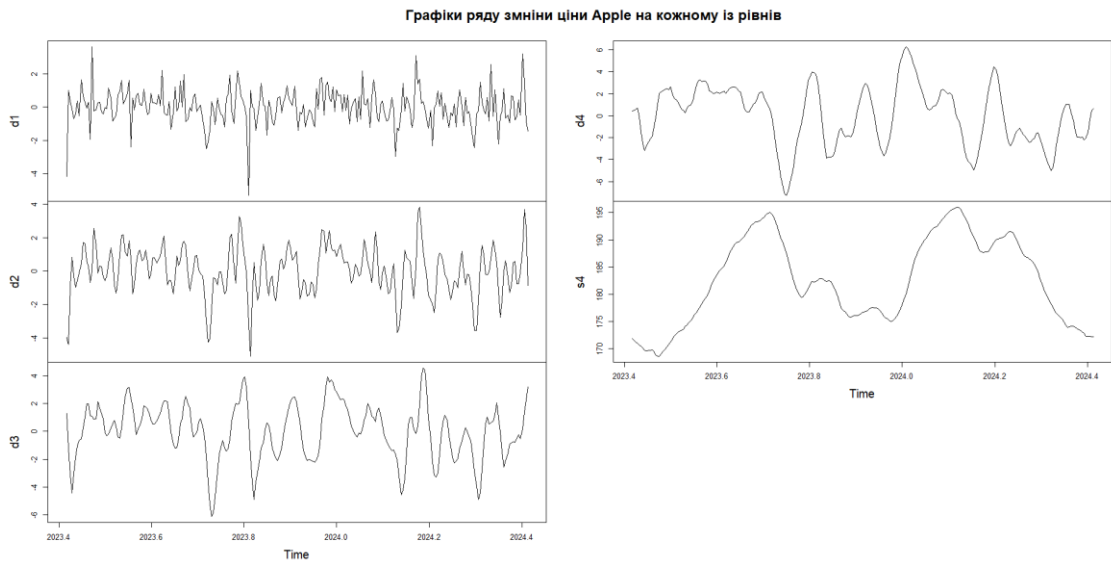


Рис.16 Графік зміни найбільшої ціни на акції Apple з періоду 17.04.2023 по 16.04.2024 після вейвлет перетворення для чотирьох рівнів

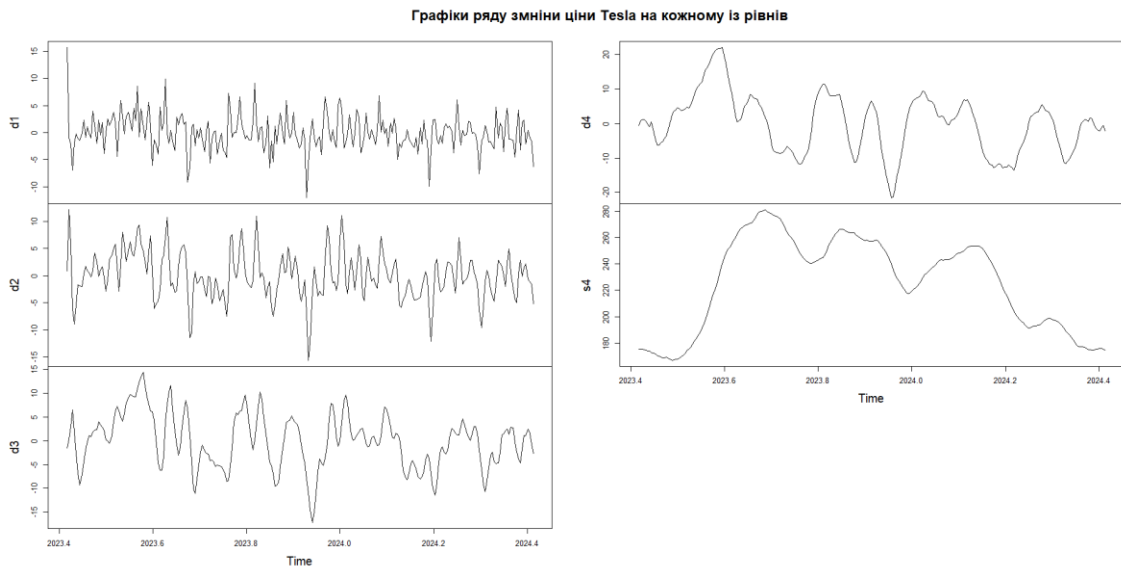


Рис.17 Графік зміни найбільшої ціни на акції Tesla з періоду 17.04.2023 по 16.04.2024 після вейвлет перетворення для чотирьох рівнів

Знайдемо кореляцію після вейвлет перетворення для початкових даних та даних які відповідають коефіцієнту s_4 (тобто дані вже очищенні від шумів).

1. Кореляція найбільших цін між акціями Tesla та Apple до перетворення отримаємо 0.6037409
2. Кореляція найбільших цін між акціями Tesla та Apple після вейвлет перетворення Хаара рівня 4 отримаємо 0.6368244

З отриманих результатів слідує, що після перетворення даних кореляція вища між відповідними змінними ніж кореляція до перетворення, що свідчить про те, що навіть найпростіший вейвлет Хаара має здатність згладжувати або чистити дані від випадкових шумів.

3.2 Прогнозування фінансових часових рядів

Після того як, було отримано дані для відповідних параметрів s_4 доцільно отримати підгонку та прогноз відповідних значень, а потім знову застосувати обернене вейвлетне перетворення. Для цього використаємо відому модель авторегресії-інтегрованого ковзного середнього - ARIMA.

Для коректної роботи моделі відповідно для кожного часового ряду підбирають параметри p, d, q моделі ARIMA, де p – кількість авторегресійних доданків, d – порядок диференціювання q – кількість доданків ковзного середнього.

При виборі параметрів p, d, q для кожного із числового ряду будувалися графіки автокореляційної функції ACF та приватної-автокореляційної функції PACF. Шляхом підбору параметрів було встановлено, що найвдаліші параметри для фінансових рядів річної ціни на акції Tesla $p = 1, d = 1, q = 1$ та Apple $p = 1, d = 1, q = 2$.

Для кожного фінансового ряду побудуємо три графіка. На першому графіку *Рис. 18, 21* отримані два числові ряди до вейвлет перетворення (синя лінія) та після вейвлет перетворення (зелена лінія), на другому графіку *Рис. 19, 22* отримані два ряди перший ряд (синя лінія) описує початкові дані, друга лінія це підігнана модель після вейвлет перетворення і на останньому графіку *Рис. 20, 23* отримані три лінії: перша (зелена) це початковий ряд, друга (синя) прогнозований ряд і третя (червона) це прогноз на майбутні 5 днів.

Наступні значення та графіки побудовані для ціни акцій Apple.



Рис.18 Порівняння ціни на акції Apple з періоду 17.04.2023 по 16.04.2024 до вейвлет перетворення і після перетворення

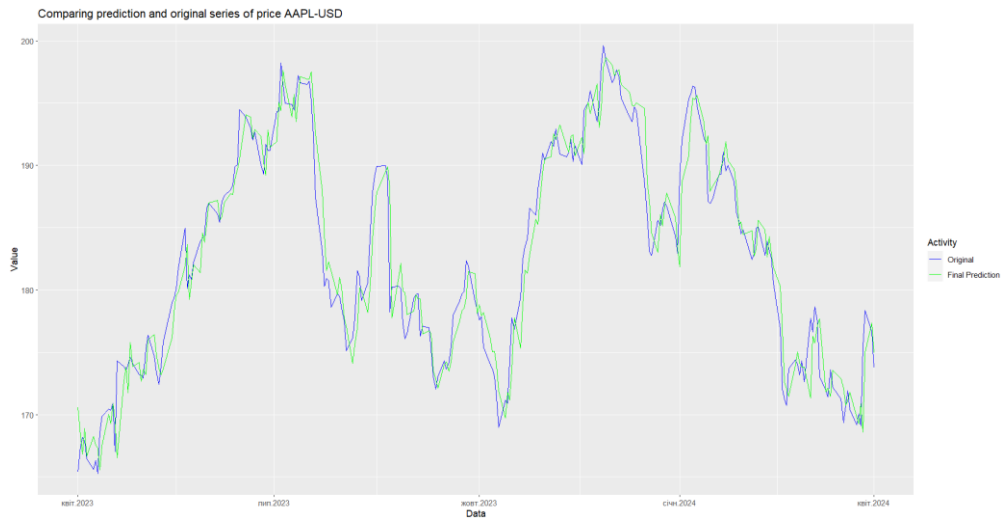


Рис.19 Порівняння ціни на акції Apple з періоду 17.04.2023 по 16.04.2024 до прогнозування і після прогнозування

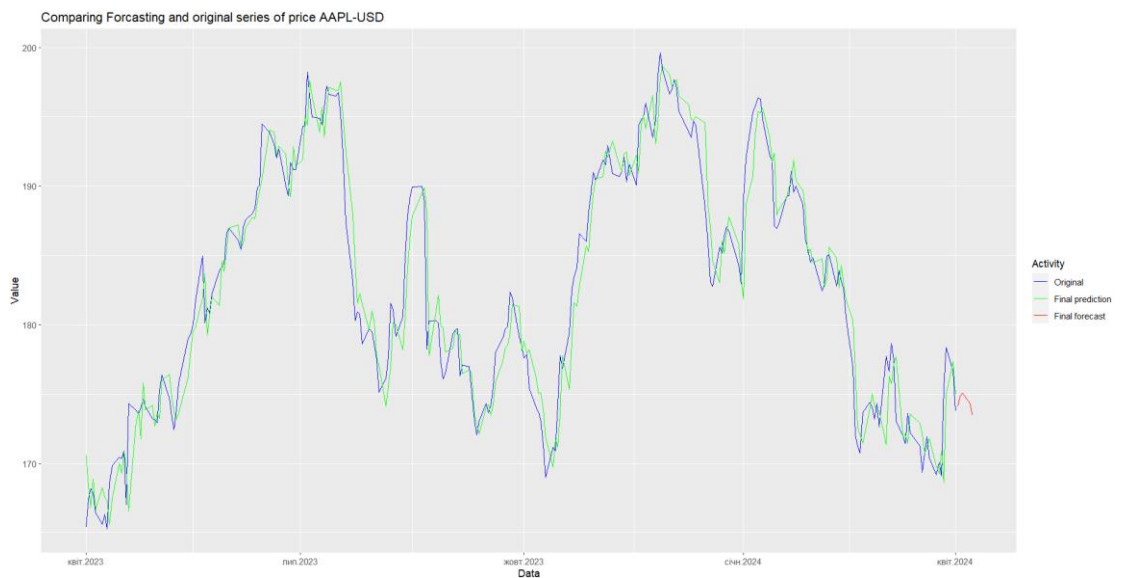


Рис.20 Прогнозована ціна акції Apple на п'ять днів

Значення та порівняння отриманих результатів:

1. На період "2024-04-17", "2024-04-18", "2024-04-19", "2024-04-22", "2024-04-23" отримали наступні значення ціни акцій:

174.0958 174.8452 175.0568 174.3308 173.4754

2. Значення середньої абсолютної різниці між прогнозованим значенням і вихідним значенням наступне:

0.92067

<i>Дата</i>	<i>Прогнозована ціна (USD)</i>	<i>Фактичні дані на сайті Yahoo Finance (USD)</i>
17.04.2024	174.0958	169.61
18.04.2024	174.8452	168.03
19.04.2024	175.0568	166.21
22.04.2024	174.3308	165.52
23.04.2024	173.4754	165.35

Табл. 4. Порівняння прогнозованої та фактичних цін акцій компанії Apple в період з 17.04.2024 по 23.04.2024

З отриманих графіків *Рис. 19, 20* слідує що отримані прогнозовані значення після перетворення та значення початкових даних до перетворення та прогнозу дуже схожі. Також для поточної моделі значення MAPE середньої абсолютної різниці між прогнозованим значенням і вихідним значенням становить 0.92067. Тобто значення MAPE - 0.92067 %, що менше 1 %. Отриманий результат MAPE свідчить, що модель *ARIMA (1; 1; 2)* добре підібрана, а початкові дані перед прогнозом були очищені.

Далі отримаємо значення та графіки для ціни акцій Tesla. Прогнозовані дані із застосування вейвлет перетворення та моделі $ARIMA(1; 1; 1)$, (аналогічно до попереднього випадку).



Рис.21 Порівняння ціни на акції Tesla з періоду 17.04.2023 по 16.04.2024 до вейвлет перетворення і після перетворення



Рис.22 Порівняння ціни на акції Tesla з періоду 17.04.2023 по 16.04.2024 до прогнозування і після прогнозування

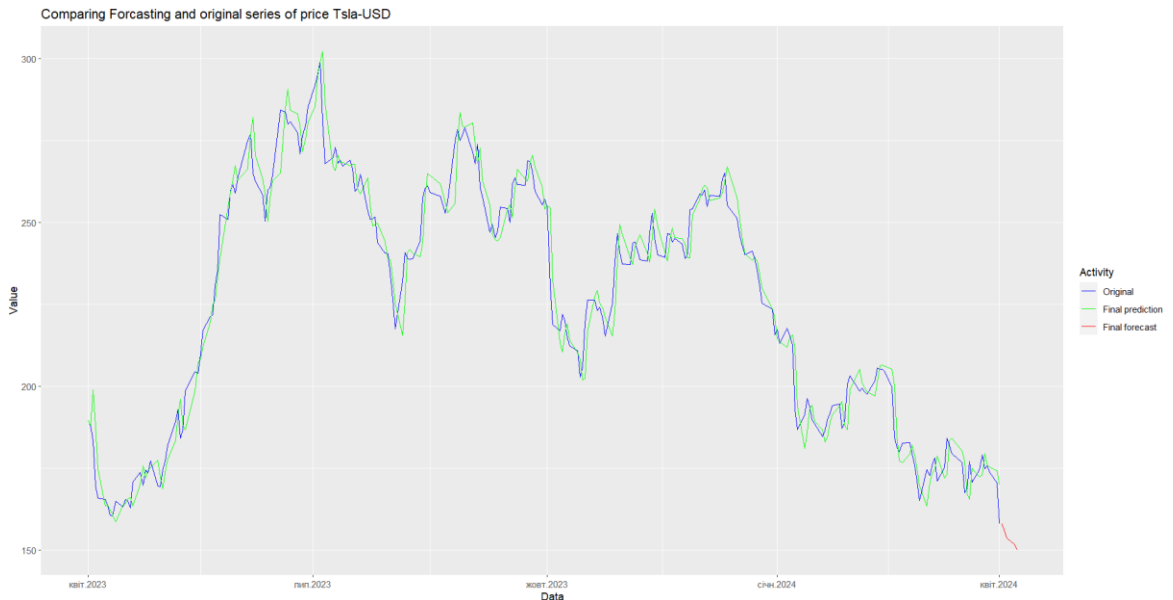


Рис.23 Прогнозована ціна акції Tesla на п'ять днів

Значення та порівняння отриманих результатів:

1. На період "2024-04-17", "2024-04-18", "2024-04-19", "2024-04-22", "2024-04-23" отримали наступні значення ціни акцій:

158.1834 155.9699 153.7390 151.8006 150.1317

2. Значення середньої абсолютної різниці між прогнозованим значенням і вихідним значенням наступне:

2.324279

<i>Дата</i>	<i>Прогнозована ціна (USD)</i>	<i>Фактичні дані на сайті Yahoo Finance (USD)</i>
17.04.2024	158.1834	157.64
18.04.2024	155.9699	151.25
19.04.2024	153.7390	148.97
22.04.2024	151.8006	140.56
23.04.2024	150.1317	143.33

Табл. 5. Порівняння прогнозованої та фактичних цін акцій компанії Tesla в період з 17.04.2024 по 23.04.2024

Отже, з отриманих графіків *Рис.21,22* слідує, що отримані прогнозовані значення після перетворення та значення початкових даних до перетворення та прогнозу дуже схожі. Також для поточної моделі значення *MARE* середньої абсолютної різниці між прогнозованим значенням і вихідним значенням складає всього 2.324279. Тобто значення *MARE* - 2.324279 %, що менше 3 %. Отриманий результат *MARE* свідчить, що модель добре підібрана і для цих початкових даних.

Так як вейвлет аналіз не потребує стаціонарності даних чи особливої обробки, в цій роботі дані перед прогнозом не були очищені від викидів чи випадкових значень, і не було проведено обробки, що привело б дані до стаціонарності.

В результаті проведеного дослідницького аналізу можна зробити висновок, що після простого перетворення у вигляді вейвлета Хаара четвертого рівня, значно спростилася процедура застосування моделі *ARIMA*, що призвело до високої і постійної точності між прогнозованим значенням та вихідними значеннями.

ВИСНОВКИ

1. Застосування вейвлет перетворення є гнучким до різного типу даних (навіть до складних типів даних, таких як фінансові).
2. Дані не потрібно перетворювати, очищати чи виконувати процедуру, яка призводить до стаціонарності перед прогнозуванням.
3. Вейвлет-перетворення виявляється ефективним інструментом для розкладання часових рядів на різні рівні частоти, для дослідження на кожному із рівнів.
4. Вейвлет-перетворення значно спростило процедуру підбору параметрів моделі *ARIMA*.

5. Після вейвлет перетворення *МАРЕ* середня абсолютна різниця між прогнозованими значенням і вихідним значеннями склала менше 3 % для кожного ряду.
6. Отриманий прогноз для кожної ціни акцій виявився близьким до спостережуваних.
7. Реалізована процедура застосування дискретного вейвлет-перетворення може бути узагальнена на більш складні типи вейвлетів для більш точного прогнозу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ababneh F. Wavelet Methods in Modeling Banking Sector. International Mathematical Forum. 2013; 8: 551-566.
2. Aggarwal SK. Price forecasting using MODWT and LSE based mixed model in Australian electricity market. International Journal of Energy Sector Management. 2008; 2: 521-546.
3. Alarcon-Aquino V. Anomaly Detection and Prediction in Communication Networks Using Wavelet Transforms. Imperial College London. University of London. 2003.
4. Alarcon-Aquino V and Bania JA. Anomaly Detection in Communication Networks Using Wavelets. IEE Proceedings –Communications. 2001; 148: 355-362.
5. Alarcon-Aquino V and Bania JA. Multi-Sensor Function System Using Wavelet Based Detection Algorithm Applied to Network Monitoring. Proceedings of London Communication Symposium. 2002; 361-361.
6. Alarcon-Aquino V and Bania JA. Multiresolution FIR Neural Network Based Learning Algorithm Applied to Network Traffic Prediction. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics Part C: Applications and Review. 2006; 36: 208-220.

7. Aldrich E. Alternative Estimators for Wavelet Variance. Master's thesis. Department of Statistics. University of Washington. Seattle. WA. 2005.
8. Alrumaih RM and Al-Fawzan MA. Time series forecasting using wavelet denoising an application to Saudi stocks index. *J King Saudi Univ.* 2002; 14: 221-234. *RRJSMS | Volume 1 | Issue 1 | June-July, 2015* 36
9. Appel u and Brandt AV. Adaptive Sequential Segmentation of Piecewise Stationary Time Series. *Information Sciences.* 1983; 29: 27-56.
10. Bakshi BR. Multiscale Analysis and Modeling Using Wavelets. *J Chemometrics.* 1999; 13: 415-434.
11. Basseville M and Nikiforov IV. Detection of Abrupt Changes: Theory and Application. Information and System Science Series. Englewood Cliffs. NJ: Prentice-Hall. 1993.
12. Bernardo JM and Smith AFM. Bayesian Theory. NY Wiley. 1994.
13. Bollerslev T. Modelling the Coherence in Short-run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model. *The Review of Economics and Statistics.* 1990; 72: 398–505.
14. Chiann C and Moretin PA. A Wavelet Analysis for Time Series. *Nonparametric Statistics.* 1998; 10: 1-46.
15. Contreras J, et al. ARIMA models to predict next-day electricity prices. *IEEE Transactions on Power Systems.* 2005; 18:1014-20.
16. Cornish CR, et al. The WMTSA wavelet toolkit for data analysis in the geosciences. *Eos Trans.* 2003.
17. Craigmile PF and Percival DB. Asymptotic Decorrelation of Between-Scale Wavelet Coefficients. *IEEE Transactions on Information Theory.* 2005; 51: 1039-1048.
18. Daubechies I. Ten Lectures on Wavelets. New York: SIAM. 1992.
19. Engle R. Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models. *J. Business and Economic Statistics.* 2002; 20: 339–350.

20. Garratt JR. The Atmospheric Boundary Layer. Cambridge: Cambridge University Press. 1992.
21. Gencay R, et al. An Introduction to Wavelets and Other Filtering Methods in Finance and Economics. Academic Press. New York. 2002.
22. Granger CWJ. Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-spectral Methods. *Econometrica*. 1969; 37: 424–438.
23. Grossman RL. An analysis of vertical velocity spectra obtained in the BOMEX fair-weather, trade-wind boundary layer. *Boundary-Layer Meteorol*. 1982; 23: 323-357.
24. Gustafsson F. The Marginalised Likelihood Ratio Test for Detecting Abrupt Changes. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 41 (1996); 66-78.
25. Hall JW. Adaptive selection of U.S. stocks with neural nets. in: G. J. Deboeck (Ed.; *Trading on the Edge: Neural, Genetic and Fuzzy Systems for Chaotic Financial Markets*). Wiley. New York. 1994.
26. He TX. Introduction to Wavelet Analysis. Teaching Notes. Illinois Wesleyan University. 2015.
27. Теорія вейвлетів з елементами фрактального аналізу. Геранін В.О., Писаренко Л.Д., Рущицький Я.Я. Київ. 2002.
28. Research and Reviews: Journal of Statistics and Mathematical Sciences. Wavelet Analysis and Applications in Economics and Finance. Tung Nguyen and Tian-Hiao He. Illinois Wesleyan University, Bloomington, USA. 2015.
29. Застосування вейвлетів в аналізі часових рядів (в рамках понять фінансової математики), магістерська дисертація. Машевська І.О, Київ, 2022.