НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ «КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 519.21

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
________Олег КЛЕСОВ,
«___»__________2024 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика» зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Про блукання у середовищі з випадковими перешкодами»

Виконав:
студент ІІ курсу, групи ОМ-21мн
Зелко Альона Олександрівна
____

Керівник:
Професор кафедри МАтаТЙ, доктор фіз.-мат. наук
Пилипенко Андрій Юрійович
____

Рецензент:
кандидат військових наук, старший дослідник, проф. кафедри ракетних військ і артилерії командно-штабного інституту застосування військ. НУОУ
Приміренко Володимир Миколайович
____

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент _________

Київ – 2024 року

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря

Сікорського» Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

________Олег КЛЕСОВ

«08»_лютого_2024 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію

студентці

Зелко Альоні Олександрівній

Тема дисертації «Про блукання у середовищі з випадковими перешкодами», науковий керівник дисертації Пилипенко Андрій Юрійович, професор кафедри МАтаТЙ, доктор фізико-математичних наук, затверджені наказом по університету від 01.04.2024 р. №1523-с

1. Термін подання студентом дисертації «14» червня 2024 року.

2. Об’єктом дослідження є задачі про блукання у середовищі з випадковими

перешкодами.

3. Предметом дослідження є методи розрахунку ймовірності успішного прольоту БПЛА через зону дії випадкових перешкод (ППО), побудовані на основі відповідних теоретико-імовірнісних моделей

4. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1). Ознайомитися з літературою та навести основні означення.

2). Навести класичні результати.

3). Дослідити вплив різних факторів на успішність місій дронів, включаючи ймовірність виявлення та ураження цих апаратів.

4). Навести приклади конкретних рівнянь, розв’язати їх, використовуючи отримані формули.

5. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: 16 слайдів.

6. Дата видачі завдання <u>05.02.</u>

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Огляд літератури	19.02.24-01.03.24	виконано
2.	Нотування основних результатів та тверджень	01.03.24-15.03.24	виконано
3.	Робота над теоретичним матеріалом	15.03.24-22.03.24	виконано
4.	Формулювання відомих теорем щодо блукання у середовищі з випадковими перешкодами	22.03.24-29.03.24	виконано
5.	Розв’язання практичної задачі номер 1 за допомогою функції ймовірності для розподілу Пуассона	01.04.24-12.04.24	виконано
6.	Розв’язання практичної задачі номер 2 за допомогою ЦГТ	15.04.24-23.04.24	виконано
7.	Розв’язання практичної задачі номер 3 за допомогою Ланцюгів Маркова	24.04.24-16.05.24	виконано

8.	Підготовка тез доповідей для конференції	17.05.24-22.05.24	виконано

9.	Наведення прикладів, що підтверджують отримані результати.	23.05.24-30.05.24	виконано
10.	Оформлення результатів	31.05.24-02.06.24	виконано

Студент Альона ЗЕЛКО

Науковий керівник Андрій ПИЛИПЕНКО

Реферат

Магістерська дисертація: 37 сторінки, 9 першоджерела, 16 слайдів презентації. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків та списку використаної літератури.

В дисертаційній роботі досліджуються завдання про блукання у середовищі з випадковими перешкодами. Основною метою дисертаційного дослідження є розробка та аналіз математичної моделі блукання безпілотних літальних апаратів (БПЛА) у середовищі з випадковими перешкодами, що описується за допомогою Пуассонового процесу. Зокрема, досліджується ймовірність досягнення дронами визначеної цілі при наявності випадково розташованих засобів протиповітряної оборони (ППО) та визначаються оптимальні параметри для підвищення ефективності місії БПЛА. Об'єктом дослідження є процес руху безпілотних літальних апаратів у середовищі з випадково розташованими засобами протиповітряної оборони. Предметом дослідження є методи розрахунку ймовірності успішного прольоту БПЛА через зону дії випадкових перешкод (ППО), побудовані на основі Пуассонового процесу та відповідних теоретико-імовірнісних моделей.

Перший розділ магістерської дисертації містить теоретичні відомості з математичного аналізу та теорії ймовірності, який здебільшого є основним апаратом дослідження, а саме розглянуто:

- Пуассоновий процес
- Пуассонова випадкова міра
- Центральна гранична теорема
- Біноміальний розподіл

- Гранична теорема Пуассона

Другий розділ містить основні результати дослідження. Було наведені практичні задачі, розв'язки яких, базуються на теоретичному матеріалі з першого розділу. Задачі пов'язані з обчисленням ймовірностей до заданої умови.

Ключові слова: Пуассонів процес, Пуассонова випадкова міра, Засоби ППО (Протиповітряна оборона), дрон, ймовірність побачити дрон, ймовірність збити дрон, випадкові перешкоди.

Abstract

Master's thesis: 37 pages, 9 primary sources, 16 presentation slides. The work consists of an introduction, two chapters, conclusions, and a list of references.

The dissertation explores the problem of wandering in an environment with random obstacles. The main goal of the dissertation research is to develop and analyze a mathematical model of the wandering of unmanned aerial vehicles (UAVs) in an environment with random obstacles described by a Poisson process. In particular, the probability of drones reaching a specified target in the presence of randomly located anti-aircraft defense systems (AAD) is investigated, and optimal parameters are determined to increase the efficiency of the UAV mission. The object of the study is the movement process of unmanned aerial vehicles in an environment with randomly located anti-aircraft defense systems. The subject of the research is methods for calculating the probability of successful passage of UAVs through the zone of action of random obstacles (AAD), based on the Poisson process and corresponding theoretical-probabilistic models.

The first chapter of the master's thesis contains theoretical information on mathematical analysis and probability theory, which is mostly the main apparatus of the research, namely:

• Poisson process

• Poisson random measure

• Central limit theorem

• Binomial distribution

• Poisson limit theorem

The second chapter contains the main results of the research. Practical problems are presented, the solutions of which are based on the theoretical material from the first chapter. The problems are related to calculating probabilities under a given condition.

Keywords: Poisson process, Poisson random measure, Anti-aircraft defense systems (AAD), drone, probability of sighting a drone, probability of shooting down a drone, random obstacles.

Зміст

Вступ

Враховуючи сучасну ситуацію в Україні, де триває війна, застосування безпілотних літальних апаратів (БПЛА) набуває ще більшої актуальності. Умови військових конфліктів у країні ставлять нові вимоги до технологій та тактики, і використання дронів може мати значний вплив на ефективність військових операцій. Проте, з урахуванням наявності засобів протиповітряної оборони (ППО) у зоні конфлікту, необхідно розробляти та вдосконалювати математичні моделі, які дозволять аналізувати ймовірність успішного виконання місій дронами і приймати стратегічні рішення на основі цих даних. Такий підхід може сприяти зниженню ризиків для військових та максимально оптимізувати використання безпілотних систем у реальних бойових умовах.

Серед цих перешкод, які виникають у межах їх застосування, особливе місце займають засоби протиповітряної оборони (ППО), які розташовані у середовищі випадковим чином. Ефективність ППО визначається не лише їхньою технічною досконалістю, але й здатністю бути розміщеними таким чином, щоб максимально ускладнити виконання місії дронами. У цьому контексті виникає необхідність розробки математичних моделей, які дозволяють аналізувати та прогнозувати ймовірність успішного виконання завдань дронами в умовах випадкових перешкод. Одним із підходів до побудови таких моделей є використання пуассонової точкової міри, яка дозволяє моделювати випадкове розташування засобів ППО та аналізувати ймовірність виявлення та ураження дронів.

Актуальність дослідження є те, що застосування БПЛА в сучасних військових конфліктах значно підвищує ефективність виконання завдань та знижує ризики для людських життів.

Пуассоновий процес є одним із найпоширеніших інструментів для моделювання випадкових подій у просторі. Він дозволяє описувати розташування об'єктів, які з'являються випадковим чином, та аналізувати їхній вплив на систему. Використання пуассонових процесів для моделювання розташування ППО дозволяє не лише прогнозувати ймовірність успішного прольоту дронів, але й розробляти стратегії для їхнього оптимального використання.

Основною метою даної роботи є розробка та аналіз математичної моделі руху БПЛА у середовищі з випадковими перешкодами, які описуються за допомогою пуассонової точкової міри. Для досягнення цієї мети необхідно вирішити наступні завдання:

- Розробити математичну модель процесу руху БПЛА у середовищі з випадковими перешкодами.
- Дослідити вплив параметрів моделі, таких як ймовірність виявлення, ймовірність ураження та інтенсивність пуассонового поля, на ймовірність успішного прольоту БПЛА.
- Визначити ймовірність досягнення дронами цілі з урахуванням різних сценаріїв розташування засобів ППО.
- Розробити методику розрахунку оптимальної кількості дронів для забезпечення високої ймовірності досягнення цілі хоча б одним дроном.
- Валідувати розроблену модель за допомогою комп'ютерного моделювання та порівняти результати з аналітичними розрахунками.

Наукова новизна роботи полягає у розробці нової математичної моделі, що описує процес руху БПЛА у середовищі з випадковими перешкодами. В роботі аналізуються впливи різних параметрів на ймовірність успішного виконання місії дронами та розробляються рекомендації щодо оптимального використання засобів ППО для забезпечення максимального захисту об'єктів.

Практичне значення роботи полягає у можливості використання розроблених моделей та методик для планування та оптимізації військових операцій із застосуванням БПЛА. Отримані результати можуть бути використані для підвищення ефективності місій дронів, зниження втрат та мінімізації ризиків при виконанні бойових завдань.

Для досягнення поставлених цілей використовуються методи теорії ймовірностей та математичної статистики, зокрема, пуассонова точкова міра, прорідження пуассонового розподілу, центральна гранична теорема, біноміальний розподіл та гранична теорема Пуассона. Крім того, застосовуються методи комп'ютерного моделювання для валідації теоретичних результатів та чисельного аналізу.

Робота складається з вступу, основної частини, що включає кілька розділів, висновків, списку використаних джерел. У вступі детально розкрито актуальність теми, мету та завдання дослідження та практичне значення роботи. Основна частина містить теоретичний аналіз, розробку математичної моделі, аналітичні та чисельні результати. У висновках підбиваються підсумки виконаного дослідження.

Розділ 1. Теоретичні відомості

1.1. Список позначень, що використовуються в дисертаційній роботі.

- $P(k;\lambda)$ — це ймовірність того, що відбудеться k успіхів,
- λ — середня кількість успіхів,
- k — кількість успіхів, які нас цікавлять,
- e — основа натурального логарифму (приблизно дорівнює 2.71828),
- $k!$ — факторіал числа k (добуток всіх цілих чисел від 1 до k).
- ЗВЧ – закон великих чисел.
- ЦГТ – Центральна Гранична теорема.

1.2. Основні закони розподілу дискретних величин.

Розглянемо найважливіші розподіли випадкових величин.

1. ***Біноміальний розподіл.***

Уявімо, що проводиться експеримент у однакових умовах, під час якого здійснюються n незалежних спостережень. У кожному спостереженні може відбутись подія А з ймовірністю p $(0 < p < 1)$ або подія $\bar{A}$ з ймовірністю $q = 1 - p$.

У кожній серії з p спостережень подія А може або не відбутись, або відбутись 1 раз, 2 рази, ..., n разів. Дискретна випадкова величина ξ — кількість випадків з'явлення події А при n незалежних спостереженнях може приймати значення 0, 1, 2, ..., n з ймовірностями, які обчислюються за формулою Бернуллі.

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

- ця дискретна випадкова величина відома як ***біноміально розподілена***. Вона може бути виражена як сума n незалежних випадкових величин з розподілом Бернуллі з параметрами p та q.

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$$

Кожна з випадкових величин у цій сумі приймає два значення: 1, якщо подія $\bar{A}$ відбулась і 0, якщо відбулась подія $\bar{A}$

$$P(\xi_i = 1) = p; \quad P(\xi_i = 0) = q$$

Математичне сподівання і дисперсію біноміально розподіленої випадкової величини можна знайти, використовуючи властивості математичного сподівання і дисперсії суми незалежних випадкових величин.

$$M\xi = M\,(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n\,) = M\xi_1 + M\xi_2 + \cdots + M\xi_n = np$$

$$D\xi = D(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n) = D\xi_1 + D\xi_2 + \cdots + D\xi_n = np$$

2. ***Розподіл Пуассона.***

Подібно до попереднього випадку, уявімо, що в однакових умовах проводиться рядок незалежних спостережень, під час кожного з яких може відбутись подія A з ймовірністю $p(0 < p < 1)$ або подія $\bar{A}$ з ймовірністю $q = 1 - p$.

Розглянемо ситуацію, коли p є досить малим, а n досить великим числом, при цьому добуток np залишається сталим і рівним λ. В такому випадку ймовірність того, що в цих умовах подія А відбудеться k разів, можна наблизити за допомогою формули Пуассона.

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{\lambda}, \ \ \lambda = np$$

Дискретна випадкова величина ξ, яка представляє кількість появ події А при n незалежних спостереженнях, і може приймати значення від 0 до n з ймовірностями, обчисленими за формулою Пуассона, називається розподіленою за ***законом Пуассона***. Числові характеристики розподілу Пуассона:

$$M\xi = \lambda; D\xi = \lambda$$

Закон розподілу Пуассона застосовується для опису ймовірностей виникнення рідкісних подій масового характеру. Його застосовують у задачах статистичного контролю якості, теорії надійності та теорії масового обслуговування.

Цей розподіл виникає природно з ***Граничної теореми Пуассона***, яка стверджує наступне:

Нехай ймовірність успіху $p(n)$ залежить від n таким чином, що $p(n) \ \to \ 0$, коли

n → ∞, але при $np(n) \to \lambda$, де $\lambda \ > \ 0$. Тоді для будь-якого $k \ = \ 0, 1, \ldots$ існуює границя:

$$P_n(k) \to \pi_k \quad n \to \infty \qquad (1)$$

де

$$\pi_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k = 0, 1, \ldots$$

(2)

Доведення цього доволі просте.

Оскільки згідно з припущенням $p(n) = \frac{\lambda}{n} + 0\left(\frac{1}{n}\right)$, для будь-якого фіксованого $k = 0, 1, \ldots$ і досить великих n

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\left[\frac{\lambda}{n} + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right]^k * \left[1 - \frac{\lambda}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n-k}$$

Але

$$n(n-1)\ldots(n-k+1)\left[\frac{\lambda}{n} + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right]^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}[\lambda + 0(1)]^{\mathrm{k}} \to \lambda^k,$$

$n \to \infty$ коли

$$\left[1 - \frac{\lambda}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n-k} \to e^{-\lambda} \quad , \ n \to \infty$$

що і доводить (1).

Теорема (про ймовірність успіху):

Нехай, p_i – ймовірність успіху в i-му випробуванні, причому $p_i \to 0,$ при $i \to \infty$ таким чином, що $\sum_{i-1}^{n} p_i \to \lambda$, при $n \to \infty$, де $\lambda > 0$/ Тоді для будь-якого $k = 0,1,2, \ldots$ виконується:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \frac{(\lambda^k e^{-\lambda})}{k!},$$

Де $X_n -$ кількість успіхіву перших n випробовуваннях

Ця теорема описує збіжність розподілу кількості успіхів у схемі випробувань Бернуллі до розподілу Пуассона за умов, що ймовірності успіху можуть бути різними, але зменшуються до нуля і їх сума збігається до сталої λ

1.3 Центральна гранична теорема.

Нехай $\{X_k\}$ — послідовність взаємно незалежних випадкових величин з однаковими розподілами. Припустимо, що $\mu = E(X_k)$ і $\sigma^2 = D(X_k)$ існують. Нехай $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Тоді для будь-якого фіксованого α, β $(\alpha < \beta)$.

$$P\left\{\alpha < \frac{S_n - n\mu}{\sigma n^{\frac{1}{2}}} < \beta\right\} \to \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

(1.3)

Тут Ф(x)— є функцією розподілу стандартного нормального розподілу, яка позначає ймовірність того, що випадкова величина, що має стандартний нормальний розподіл, буде менше за певне значення x. Важливо усвідомити, що сформульована вище теорема є лише дуже конкретним випадком значно більш загальної теореми,

яка в свою чергу тісно пов'язана з багатьма іншими граничними теоремами.

Зв'язок між випробуваннями Бернуллі та теорією випадкових величин стане зрозумілішим, якщо ми розглянемо залежність кількості успіхів S_n від кількості випробувань n. Під час кожного випробування S_n збільшується на 1 або на 0. Це твердження можна записати у вигляді:

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n. \qquad (1.1)$$

де випадкова величина X_k дорівнює 1 або 0 залежно від того, чи буде результатом k-го випробування успіх чи невдача.

Таким чином, S_n є сумою n взаємно незалежних випадкових величин, кожна з яких приймає значення 1 і 0 з ймовірностями p і q.

Закон великих чисел.

Нехай $\{X_k\}$ — послідовність взаємно незалежних випадкових величин з однаковими розподілами. Якщо математичне сподівання $\mu = E(X_k)$ існує, то для будь-якого $\varepsilon > 0$, коли $n \to \infty$

$$P\{\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\mu\right|>\varepsilon\}\to 0,n\to\infty$$

(1.2)

Відзначимо, що (1.3) набагато сильніше, ніж (1.2), оскільки (1.3) дає оцінку ймовірності того, що різниця $|\frac{1}{n}*S_n-\mu|$ більше, ніж $\sigma/n^{\frac{1}{2}}$. З іншого боку, закон великих чисел (1.2) вірний навіть якщо випадкові величини X_k не мають скінченної дисперсії, так що він застосовний до більш загального випадку, ніж центральна гранична теорема (1.3).

Розглянемо ці граничні теореми прикладом:

Розглянемо послідовність незалежних кидків симетричного кубика. Нехай X_k — кількість очок, які випали при k-м кидку. Тоді

$D(X_k) = (1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)/6-(3.5)^2 = 35/12,$ і S_n/n

є середнім числом очок, що випали в результаті n кидків.

Закон великих чисел стверджує, що у середньому значення великої кількості незалежних випадкових величин наближається до їхнього математичного сподівання, коли кількість спостережень стає дуже великою. Наприклад, при повторному киданні симетричного кубика багато разів, середнє значення кількості очок буде наближатися до 3.5.

Центральна гранична теорема стверджує, що розподіл суми великої кількості незалежних та однаково розподілених випадкових величин наближається до нормального розподілу зі своїм математичним сподіванням та дисперсією при достатньо великих значеннях кількості спостережень.

Отже, в даному контексті, Закон великих чисел гарантує, що середнє значення кількості очок, отриманих при киданні симетричного кубика, буде наближатися до 3.5 при збільшенні кількості кидків. З іншого боку, Центральна гранична теорема показує, що розподіл суми кількості очок буде наближатися до нормального розподілу зі своїм математичним сподіванням та дисперсією при достатньо великих значеннях n.

Також розглянемо приклад успіхів та невдач, один з таких прикладів - монета. При киданні монети є два можливих результати: "герб" (успіх) або "орел" (невдача). Нехай p - ймовірність отримати герб (успіх), тоді ймовірність отримати орла (невдача) буде 1-p.

Розглянемо випадок, коли ми кидаємо монету 100 разів і це повторюється дуже багато разів (наприклад, 1000 разів). Закон великих чисел передбачає, що середнє значення кількості гербів (успіхів) буде наближатися до ймовірності успіху p при збільшенні кількості випробувань.

Центральна гранична теорема показує, що розподіл кількості гербів у великій кількості випробувань буде наближатися до нормального розподілу з математичним сподіванням np (де n - кількість випробувань, p - ймовірність успіху) та дисперсією *np(1-p).*

Отже, застосування цих законів до монетного кидка показує, що при достатньо великій кількості кидків кількість гербів буде наближатися до p, а її розподіл буде наближатися до нормального з параметрами np та $np(1-p)$.

Теорема Муавра-Лапласа - є спеціальним випадком центральної граничної теореми і використовується для наближення біноміального розподілу до нормального розподілу. Ось її формулювання:

Нехай X - кількість успіхів у серії незалежних біноміальних випробувань з ймовірністю успіху p у кожному випробуванні. Тоді при достатньо великому n (кількості випробувань), функція масової ймовірності біноміального розподілу може бути наближено нормальним розподілом з параметрами $\mu = np$ та $\sigma^2 = np(1-p)$, тобто:

$$P(X = k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}} ,$$

де μ - середнє значення, σ - стандартне відхилення, а k - конкретне значення успіху.

1.4 Пуассонівські точкові міри в загальних просторах. Пуассонова випадкова міра.

1. Визначення та основні властивості

Простір стану S, в якому розміщені точки процесу Пуассона, зазвичай є евклідовим простором або, більш загально, многовимірним многовидом, який локально еквівалентний R^d. Теорія, однак, не використовує спеціальні властивості евклідового простору, а лише потребує розумної сім'ї підмножин, які можна використовувати як тестові набори для обчислення кількості випадкових точок. Тобто нам потрібні множини, для яких функція лічильника є чітко визначеною випадковою величиною.

$$N(A) = \#\{\Pi \cap A\}$$

Найприроднішим способом зробити це є припущення, що S є вимірним простором. Ми припускаємо, що певні підмножини S називаються вимірними, і що вимірні множини утворюють σ-поле у такому розумінні, що:

- порожня множина є вимірною
- доповнення вимірної множини є вимірним
- об'єднання будь-якої послідовності (включаючи скінченну або нескінченну) вимірних множин є також вимірним..

Ми також повинні забезпечити достатню кількість вимірних множин для розрізнення окремих точок. Це можна зробити, зробивши слабке припущення, що діагональ є вимірною в декартовому добутку S x S. Це автоматично означає, що кожна одиночна множина {x} в S є вимірною.

$$D = \{(x, y); x = y\}$$

Ми зробимо ці припущення без додаткових коментарів у всьому наступному.

Коли $S = R^d$, вимірні множини завжди приймаються як борелівські множини, тобто ті, що належать до найменшого σ-поля, що містить відкриті множини. Припущення про діагональ також виконується, оскільки D є замкненим у просторі добутку R^{2d}.

(i) Пуассонова випадкова міра на S потім є випадковою лічильною підмножиною n множини S, такою що:

(ii) (а) для будь-яких роздільних вимірних підмножин $A_1, A_2, \dots, A_n$ з S, випадкові величини змінні N(A_1), N(A_2), . . . , N(A_n) є незалежними та

(б) N(A) має розподіл Пуассона $\rho(\mu)$, де $\mu = \mu(A)$ лежить у

$$0 \leq \mu \leq \infty$$

Таким чином, якщо , $\mu(A)$ є скінченним, $\Pi \cap A$ з імовірністю 1 скінченним набором, порожнім, якщо

$\mu(A) = 0$. Якщо $\mu(A) = \infty$, $\Pi \cap A$ є лічильно нескінченним з імовірністю 1.

$$\mu(A) = \mathbb{E}\{N(A)\}$$

Якщо $A_1 A_2$,... не перетинаються та мають об'єднання A,

$$N(A) = \sum_{n=1}^{\infty} N(A_n)$$

і, беручи математичне сподівання,

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Отже, μ - це міра на S, яку ми називатимемо середньою мірою (немає стандартного терміну) процесу Пуассона.

Якщо ми знаємо середню міру, ми можемо записати, використовуючи (i) і (ii), всі спільні розподіли лічильників N(A) для різних множин A. Щоб це побачити, припустимо, що $A_1, A_2, \dots, A_n$ вимірні, але не обов'язково роздільні. Розглянемо всі множини у вигляді

$B = A_1^* \cap \dots \cap A_n^*$

де кожне A_j – це або A_j, або його доповнення. Їх 2^n, і вони є роздільними. Якщо їх перелічити як $B_1, B_2, \dots, B_{2^n}$, то

$$A_j = \bigcup_{i \in y j} B_j$$

де y_j – підмножина множини $\{1,2,\ldots,2^n\}$

$$N(A) = \sum_{j \in y j} N(B_j)$$

і $N(B_j)$ незалежні, з відомими розподілами Пуассона ρ $(\mu(B_j))$. З цього можна записати ймовірність будь-якої події, визначеної за випадковими величинами $N(A_1), N(A_2), \ldots, N(A_n)$.

Коли $S = \mathbb{R}^d$, середня міра в більшості цікавих випадків виражена через швидкість або інтенсивність. Це позитивна вимірна функція λ на S, у термінах якої μ задається інтегруванням λ за відносно d-вимірною мірою:

$$\mu(A) = \int_A \lambda(x) dx$$

(де dx означає $dx\_1 dx\_2 \ldots dx\_d$). Слово "швидкість" найчастіше використовується, коли d = 1 і S - це вісь часу, тоді як "інтенсивність" використовується, коли S має просторову інтерпретацію. Якщо λ є неперервною в точці x, то означає, що для малих сусідніх множин A навколо x,

$$\mu(A) \sim \lambda(x)|A|$$

де |A| позначає міру (довжину, якщо d = 1, площу, якщо d = 2, об'єм, якщо d = 3, і так далі) множини A. Таким чином, $\lambda(x)|A|$- це приблизна ймовірність падіння точки x в невеликий набір A, і вона більша в регіонах, де λ велика, ніж в тих, де λ мала.

У спеціальному випадку, коли λ є константою, так що

$$\lambda(A) = \lambda|A|$$

ми говоримо про рівномірний або однорідний процес Пуассона. Такий випадковий набір має стохастичні властивості, які не змінюються при зсуві або обертанні S, і єдиний процес Пуассона (скінчений на обмежених множинах) з цією властивістю.

Пуассонова випадкова міра є ключовим поняттям у теорії випадкових процесів, особливо в контексті випадкових процесів з рівномірним розподілом. Ця міра моделює випадкову кількість подій, що відбуваються протягом певного проміжку часу або простору, і має ряд властивостей, характерних для Пуассонового процесу, включаючи незалежність і стаціонарність прибуття подій.

Формально, Пуассонова випадкова міра на просторі S визначається так: нехай Φ - це випадкова функція, яка призначає невід'ємні цілі значення вимірним підмножинам S. Якщо $\Phi(A)$ представляє кількість подій, які сталися на множині A, то Φ є Пуассоновою випадковою мірою з інтенсивністю λ, якщо вона має наступні властивості:

1. Для будь-якої обмеженої множини A на ймовірність, що кількість подій в A дорівнює k, задається розподілом Пуассона з параметром $|\lambda|A|$, де $|A|$ - міра множини A.
2. Кількість подій в різних неперетинних множинах є незалежними випадковими величинами.
3. Для будь-якої системи підмножин $A_1, A_2, \ldots, A_n$, які не обов'язково є роздільними, кількість подій в їх об'єднанні задається як сума кількостей подій в окремих множинах.

Означення 1. Нехай $(S, \mathcal{B})$ −вимірний простір. Функція $\mathrm{N} = \mathrm{N}\,(\omega, B): \Omega \times \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ називається випадковою мірою, якщо виконуються наступні умови:

1) Для будь-якого $\omega \in \Omega$ функція $\mathcal{F} \ni B \to N(\omega, B)$ є мірою,
2) Для будь-якого $B \in \mathcal{B}$ функція $\Omega \ni \omega \to N(\omega, B)$ є вимірною.

Означення 2 Нехай $\nu - \sigma$ – скінченна міра на $\mathcal{B}$. Випадкова міра $\mathrm{N} = \mathrm{N}\,(\omega, B)$

називається пуассоновою випадковою мірою з інтенсивністю ν, якщо виконуються наступні умови:

1) Для будь-якого $\omega \in \Omega$ міра $N(\omega, .)$ зосереджена в не більше ніж зліченій кількості точок та $N\,(\omega, B) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$,
2) Для довільних $B_1, B_2, \in B, B_1 \cap B_2 = \emptyset$ випадкові величини $\mathrm{N(B_1)}$ та $\mathrm{N(B_2)}$ незалежні,
3) Для довільного $B \in B$ випадкова величина $N(B)$ має розподіл Пуассона $Pois\big(\nu(B)\big)$.

Теорема 1. Нехай $\zeta \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ та послідовність незалежних однаково розподілених випадкових елементів $\{\xi_n\}$, що приймають значення в S, незалежні.

Тоді $N \coloneqq \sum_{n=1}^{\zeta} \delta_{\xi_n}$ є пуассонівською випадковою мірою з інтенсивністю $\nu = \lambda P_{\xi}$.

Наслідок 1. Нехай $\nu - \sigma$-скінчена міра. Тоді існує пуассонівська випадкова міра з інтенсивністю ν.

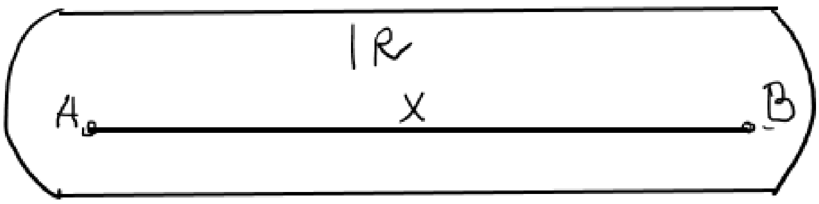
Розділ 2. Практичне застосування.

Задача №1. Спершу розглянемо таку умову: нехай, маємо ворожий об'єкт до якого летить n дронів. У ворогів знаходяться засоби ППО що розташовані випадковим чином в атомах пуассонової точкової міри, де щільність інтенсивності пуассонової міри відносно міри Лебега дорівнює $a.$ Знайдіть n, якщо дрони долетять до точки B, радуіс дії ППО = R. Маємо:

α - ймовірність побачити рій дронів

p – ймовірність збити дрон

n -- початкова кількість дронів



Відстань між стартом та кінцем = x

Нехай A – площа області дії ППО. $A = 2Rx + \pi R^2$.

Отже розподіл кількості ППО, яке може досягти дрони має розподіл $Pois$(A). За теоремою про прорідження пуассонового розподілу ймовірність того, що хоча б один дрон долетить до цілі дорівнює $P\ (Pois(A\alpha p)<n)$. Нашою задачею є знаходження такого n, щоб ця ймовірність була великою, наприклад більшою 0.95. Позначимо: $\lambda = A\alpha p$. Задача – знайти n таке, що

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(Pois(\lambda) = k) \geq 0{,}95$$

$$P(Pois(\lambda) = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Використаємо засоби Excel для того, щоб побачити як змінюється значення n, в залежності від λ. Візьмемо значення $\lambda = 5, 20, 50$.

	A	B	C
4		lamda	5
5			
6	n	P(Pois(λ)<n)	
7	0	0,006737947	
8	1	0,040427682	
9	2	0,124652019	
10	3	0,265025915	
11	4	0,440493285	
12	5	0,615960655	
13	6	0,762183463	
14	7	0,866628326	
15	8	0,931906365	
16	9	0,968171943	
17	10	0,986304731	
18	11	0,994546908	
19	12	0,997981148	
20	13	0,99930201	
21	14	0,999773746	
22	15	0,999930992	
23	16	0,999980131	
24	17	0,999994584	
25	18	0,999998598	
26	19	0,999999655	
27	20	0,999999919	

3			
4		lamda	20
5			
6	n	P(Pois(λ)<n)	
7	0	2,06115E-09	
8	1	4,32842E-08	
9	2	4,55515E-07	
0	3	3,20372E-06	
1	4	1,69447E-05	
2	5	7,19088E-05	
3	6	0,000255122	
4	7	0,00077859	
5	8	0,002087259	
6	9	0,004995412	
7	10	0,010811719	
8	11	0,021386822	
9	12	0,039011993	
0	13	0,066127641	
1	14	0,104864281	
2	15	0,156513135	
3	16	0,221074202	
4	17	0,297028398	
5	18	0,381421949	
6	19	0,470257267	
7	20	0,559092584	
8	21	0,643697648	
9	22	0,720611343	
0	23	0,787492817	
1	24	0,843227378	
2	25	0,887815027	
3	26	0,922113219	
4	27	0,947519287	
5	28	0,965666478	

	A	B	C
4		lamda	50
5			
6	n	P(Pois(λ)<n)	
7	0	1,9287E-22	
8	1	9,8366E-21	
9	2	2,5093E-19	
10	3	4,2692E-18	
11	4	5,4497E-17	
12	5	5,5678E-16	
13	6	4.7424E-15	
46	39	0,06365354	
47	40	0,08515317	
48	41	0,11137223	
49	42	0,1425854	
50	43	0,17887979	
51	44	0,2201234	
52	45	0,26594965	
53	46	0,31576078	
54	47	0,36875134	
55	48	0,42394985	
56	49	0,48027486	
57	50	0,53659986	
58	51	0,59182046	
59	52	0,64491718	
60	53	0,69500843	
61	54	0,74138922	
62	55	0,78355357	
63	56	0,82120031	
64	57	0,85422377	
65	58	0,88269227	
66	59	0,90681812	
67	60	0,92692299	
68	61	0,94340239	
69	62	0,95669224	
70	63	0,96723973	
71	64	0,97547996	
72			

Задача №2. В розв'язку попередньої задачі треба було знаходити функцію розподілу закону Пуассона та відповідний квантиль порядку 95% для якого немає явної аналітичної формули. Приблизне отримання відповіді можна отримати за допомогою Центральної Граничної теореми для розподілу Пуассона.

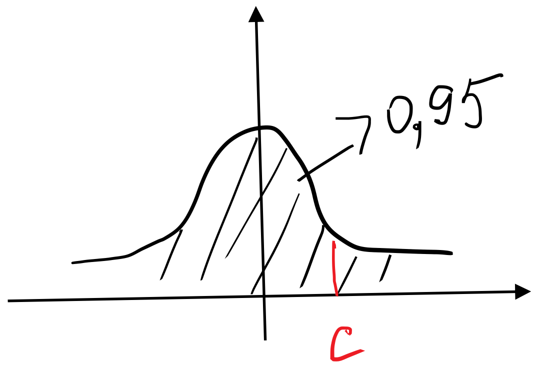
Нагадаємо її: $\frac{Pois(\lambda)-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \Rightarrow N(0,1),\ \lambda \longrightarrow +\infty$, де $N(0,1)$ – стандартний нормальний розподіл.

Отже $Pois(\lambda) \approx \lambda + \sqrt{\lambda}\ N(0,1) = N(\lambda, \lambda)$. Знайдемо n таке, що $P(Pois\lambda<n)>0{,}95$.

З формул написаних вище маємо:

$$P(Pois(\lambda) < n) = P(\frac{Pois(\lambda) - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < \frac{n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}) \approx P(N(0,1) < \frac{n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}) \approx 0{,}95$$

Зобразимо схематично стандартну Гаусову щільність.



Знайдемо константу C таку що $P(N(0,1) < \mathrm{C}) = 0{,}95$. З таблиць нормального розподілу отримуємо, що $C \approx 1{,}64$. Підставляємо її у вираз отриманий вище знаходимо рівняння для n:

$\frac{n-\lambda}{\sqrt{\lambda}} = 1{,}64 \Rightarrow n \approx \lambda + 1{,}64\sqrt{\lambda}$.

Якщо значення $\lambda \geq 5$, то Центральна Гранична теорема працює відмінно, див. таблицю нижче.

$\boldsymbol{\lambda}$	***n* обчислене явно за допомогою Excel**	$\boldsymbol{n \approx \lambda + 1{,}64\sqrt{\lambda}}$
5	9	8,667151
10	14	15,18614
15	22	21,35169
25	32	33,2
30	37	38,98265

Можемо зробити наступний висновок: число n необхідної кількості дронів отримане за допомогою ЦГТ майже не відрізняється від значення n отриманого за допомогою явних формул.

Обчислення значення n за допомогою ЦГТ:

lambda	√lamda	n
1	1	2,64
2	1,414214	4,31931
3	1,732051	5,840563
4	2	7,28
5	2,236068	8,667151
6	2,44949	10,01716
7	2,645751	11,33903
8	2,828427	12,63862
9	3	13,92
10	3,162278	15,18614
11	3,316625	16,43926
12	3,464102	17,68113
13	3,605551	18,9131
14	3,741657	20,13632
15	3,872983	21,35169
16	4	22,56
17	4,123106	23,76189
18	4,242641	24,95793
19	4,358899	26,14859
20	4,472136	27,3343
21	4,582576	28,51542
22	4,690416	29,69228
23	4,795832	30,86516
24	4,898979	32,03433
25	5	33,2
26	5,09902	34,36239
27	5,196152	35,52169

Задача №3. Необхідне число дронів, яке запезпечує ураження цілі знаходиться з умови:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \geq 0{,}95 \text{ або } \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \leq 0{,}05 .$$

Задачею даного підрозділу є дослідження порядку спадання хвоста ряду $\sum \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ при фіксованому λ в залежності від n. Тобто ми бажаємо вивчити поведінку

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \text{ при } n \to \infty?$$

ТЕОРЕМА 1.

Послідовність (r_n) еквівалентна послідовності $(\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!})$ при $n \to \infty$:

$$\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \sim \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} + \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda}}{(n+1)!} + \frac{\lambda^{n+2} e^{-\lambda}}{(n+2)!} + \cdots$$

Доведення.

Достатньо перевірити, що $\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}{\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}} \to 0,\ n \to \infty.$

Дійсно

$$\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}{\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-n} n!}{k!} = \frac{\lambda^1 n!}{(n+1)!} + \frac{\lambda^2 n!}{(n+2)!} + \frac{\lambda^3 n!}{(n+3)!} + \cdots$$

$$\leq \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda^2}{n^2} + \frac{\lambda^3}{n^3} + \cdots = \frac{\lambda}{n-\lambda}$$

Остання рівність – це сума геометричної прогресії. Оскільки $\frac{\lambda}{n-\lambda} \to 0$ при $n \to \infty$, ми отримуємо шукане твердження про еквівалентність n-го члену ряда та його хвоста.

Теорема доведена.

Розглянемо наступну таблицю, враховуючи, що $\boldsymbol{\lambda = 20}$.

N	$\sum \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$	***Хвіст ряду***	$\sum \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$***/Хвіст ряду***
5	*7,19E-05*	*0,999928*	*18193,39*
10	*0,010812*	*0,995005*	*93,53935*
15	*0,156513*	*0,895136*	*17,33118*
20	*0,559093*	*0,529743*	*5,9632*
25	*0,887815*	*0,156773*	*3,516055*

30	*0,986525*	*0,021818*	*2,614984*

Також розглянемо таблиці для менших значень $\boldsymbol{\lambda}$, таких як $\mathbf{1}, \mathbf{5},$ та $\mathbf{10}$.

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1}$$

N	$\sum \frac{\boldsymbol{\lambda^n e^{-\lambda}}}{\boldsymbol{n}!}$	***Хвіст ряду***	$\sum \frac{\boldsymbol{\lambda^n e^{-\lambda}}}{\boldsymbol{n}!}$***/Хвіст ряду***
1	0,735759	0,632121	1,718282
3	0,981012	0,080301	1,309691
5	0,999406	0,00366	1,193819

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{5}$$

N	$\sum \frac{\boldsymbol{\lambda^n e^{-\lambda}}}{\boldsymbol{n}!}$	***Хвіст ряду***	$\sum \frac{\boldsymbol{\lambda^n e^{-\lambda}}}{\boldsymbol{n}!}$***/Хвіст ряду***
3	0,265026	0,875348	6,235832
7	0,866628	0,237817	2,276958
15	0,999931	0,000226	1,755276

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{10}$$

N	$\sum \frac{\boldsymbol{\lambda^n e^{-\lambda}}}{\boldsymbol{n}!}$	***Хвіст ряду***	$\sum \frac{\boldsymbol{\lambda^n e^{-\lambda}}}{\boldsymbol{n}!}$***/Хвіст ряду***
5	0,067086	0,970747	25,65856
10	0,58304	0,54207	4,332748
15	0,95126	0,083458	2,403892

Можемо зробити висновок, що оцінка хвоста ряду за допомогою n-го члена гарно працює для маленьких λ або великих n.

Задача №4. Позначимо: $\xi = -\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$.

Дослідимо поведінку n в залежності від $\xi \longrightarrow 0$ при фіксованому λ.

Нагадаємо формулу Стірлінга:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n, \qquad n \to \infty.$$

Отже

$$\xi = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \sim \sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{\lambda e}{n}\right)^n e^{-\lambda}$$

Прологарифмуємо ліву та праву частини. При цьому еквівалентність зберігається

$$\frac{1}{2}\ln n + n\ln \lambda e - n\ln n \sim \lambda + ln\xi$$

Звідси

$$n\ln n \sim -\ln \xi$$

$$\ln n + \ln(\ln(n)) \sim \ln[-ln\xi], \xi \longrightarrow 0$$

$$\ln n\ \sim \ln[-ln\xi], \xi \longrightarrow 0$$

Підставимо в:

$$n\ln n \sim -\ln \xi$$

ТЕОРЕМА. $n \sim -\ln \xi / \ln[-ln\xi],\ \xi \longrightarrow 0.$

ось ми довели таку теорему.

Задача №5. Розглянемо ще одну задачу:

Маємо відому кількість ППО – n шт., яку рій дронів пролітає послідовно один за одним (вважаємо, що окремі ППО мають по 1 засобу ураження).

Припустимо, що кожне ППО виявляє кожен з дронів з ймовірністю p (незалежно від інших), α – ймовірність збити дрон, який виявлено. Задачею є розрахунок ймовірності, що хоча б один з дронів пролетить неушкодженим через усі засоби ППО.

Припустимо, що маємо напочатку і дронів., яка оминає одну ППО.

Тоді ймовірність того, що хоча б один дрон помітили дорівнює:

$$\left(1-(1-p)^{i}\right),$$

відповідно один дрон збито з ймовірністю:

$$r_i = 1-\left(1-(1-p)^{i}\right)\alpha,$$

Ймовірність того, що жоден дрон не збито:

$$q_i = 1 - r_i$$

Позначимо через $X_{(n)}$ -- кількість виживших дронів після прольоту через n систем ППО.

Тоді $X_{(n)}$ -- ланцюг «загибелі» Маркова. Якщо напочатку є N дронів, то шукана ймовірність дорівнює:

$$1\text{-}P\left(X_{(n)} = 0 \,\middle|\, \mathrm{X}_{(0)} = N\right) = ?$$

Для обчислення скористаємось теоретичним матеріалом з курсу «Ланцюгів Маркова»:

$$p_{ij}^{(n)} = P(\,X_{(n)} = j \mid \mathrm{X}_{(0)} = i)$$

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=j}^{i} p_{ik}^{(n)} p_{kj} = p_{i,j+1}^{(n)}\, q_{j+1} + p_{ij}^{(n)} r_j$$

Якщо ракети стріляють послідовно один за одним, то даний процес проходження кожної ракети - це Ланцюг Маркова і знаходимо його перехідні ймовірності.

Коли минається одна ракета, то кількість дронів відповідно може зменшитись на одиницю або залишається незмінною. Зменшується на одиницю у випадку, якщо ракету помітили і збили.

Ймовірність того, що її помітили у таблиці позначимо, як q_i і обчислимо за формулою:

$q_i = \left(1-(1-p)^{i}\right)\alpha.$

А у випадку, якщо кількість ракет залишиться незмінна позначимо r_i та обчислимо настпуним чином:

$$r_i = 1 - \left(1 - (1-p)^i\right)\alpha.$$

Якщо припустимо спочатку було m дронів і n ракет засобів ППО, то ймовірність того, що всі дрони будуть збиті, що означає, що Ланцюг Маркова при старті з точки m буде знаходитись в 0 через n кроків і саме це показано та підраховано в таблиця вище – ймовірність переходу за n кроків. Для обчислення використовуємо формулу для Ланцюгів Маркова:

$$P(X(k+1)=j) = \sum_i P(X(k)=i)P_{ij}$$

$$= P(X(k)=j)P_{jj} + P(X(k)=j+1)P_{j+1j}$$

Напишемо функції для обчислення $\boldsymbol{r_i}, \boldsymbol{q_i}$ за допомогою $\boldsymbol{Excel}$, для цього

візьмемо такі значення $\boldsymbol{p = 0,8}$;

$\boldsymbol{\alpha = 0,4}$; $\boldsymbol{n = 20}$ (кількість випущених ракет)

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
5	j	qi	ri	P_N,J (0)	P_N,J (1)	P_N,J (2)	P_N,J (3)	P_N,J (5)	P_N,J (6)	P_N,J (7)	P_N,J (8)	P_N,J (9)	P_N,J (10)	P_N,J (11)	P_N,J (12)	P_N,J (13)	P_N,J (14)	P_N,J (15)
6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,28E-05	0,000106	0,000474
7	1	0,32	0,68	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3,99E-05	0,000291	0,001151	0,003268
8	2	0,384	0,616	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000104	0,000687	0,002482	0,006472	0,013632
9	3	0,3968	0,6032	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000262	0,001571	0,005187	0,012457	0,024307	0,040864
10	4	0,39936	0,60064	0	0	0	0	0	0	0	0	0,000655	0,003538	0,010616	0,023358	0,042051	0,065609	0,091866
11	5	0,399872	0,600128	0	0	0	0	0	0	0	0,001638	0,007864	0,021233	0,042468	0,070075	0,100911	0,131189	0,157432
12	6	0,399974	0,600026	0	0	0	0	0	0	0,004096	0,017203	0,041288	0,074318	0,111478	0,147153	0,176584	0,196767	0,206607
13	7	0,399995	0,600005	0	0	0	0	0	0,01024	0,036864	0,077414	0,123863	0,167216	0,200659	0,220726	0,227032	0,221357	0,2066
14	8	0,399999	0,600001	0	0	0	0	0,0256	0,0768	0,13824	0,193536	0,232243	0,250823	0,250823	0,23649	0,212842	0,184463	0,154949
15	9	0,4	0,6	0	0	0	0,064	0,1536	0,2304	0,27648	0,290304	0,278692	0,250823	0,214991	0,177368	0,141894	0,110677	0,084517
16	10	0,4	0,6	0	0	0,16	0,288	0,3456	0,3456	0,31104	0,261274	0,209019	0,161243	0,120932	0,088684	0,063852	0,045277	0,031694
17	11	0,4	0,6	0	0,4	0,48	0,432	0,3456	0,2592	0,186624	0,130637	0,08958	0,060466	0,040311	0,026605	0,017414	0,011319	0,007314
18	12	0,4	0,6	1	0,6	0,36	0,216	0,1296	0,07776	0,046656	0,027994	0,016796	0,010078	0,006047	0,003628	0,002177	0,001306	0,000784
19	13	0,4	0,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	14	0,4	0,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	15	0,4	0,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	16	0,4	0,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	17	0,4	0,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	18	0,4	0,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	19	0,4	0,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	20	0,4	0,6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27																		
28																		
29						1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,999987	0,999894	0,999526

Для прикладу, як саме це працює, припустимо, що стартуємо з 12 і хочемо подивитись, що всі дрони збито і послідовно знаходимо всі проміжні розподіли за допомогою $Excel$ і бачимо, що така ймовірність дорівнює 0,000106, відповідно ймовірність того, що все-таки якийсь дрон доберется буде рівна 0,999894, що і показано у таблиці.

Висновок

У результаті моєї роботи про блукання у середовищі з випадковими перешкодами вдалося провести дослідження ймовірності досягнення ворожого об'єкту дроном у військових умовах. Враховуючи складність сучасних військових операцій, особливо у контексті війни, дослідження ефективності безпілотних літальних апаратів (БПЛА) має важливе значення для планування та успішного виконання завдань.

Мої дослідження підтверджують, що успішність місій дронів суттєво залежить від їхньої здатності долати ворожі перешкоди, зокрема системи протиповітряної оборони (ППО). Використання математичної моделі на основі Пуассонового процесу дозволяє прогнозувати ймовірність досягнення дронами цілей та розробляти оптимальні стратегії їхнього використання.

Отримані результати мають безпосереднє практичне застосування для підвищення ефективності військових операцій, зменшення ризиків для військових та забезпечення безпеки країни. Сподіваюсь, моя робота вносить внесок у підвищення обороноздатності України та розвиток військової технології.

Список використаних джерел:

1. Abhishek Phadke, F. Antonio Medrano. Towards Resilient UAV Swarms—A Breakdown of Resiliency Requirements in UAV Swarms [Електронний ресурс] // Drones. – 2022. – № 6 (11), 340. Режим доступу: https://www.mdpi.com/2504-446X/6/11/340 – 07.08.2023.
2. Durrett, R. Essentials of Stochastic Processes. – Springer, 2016. – With 15 Figures, 281 p.
3. Feller, W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. – Wiley, 1984. – 510 p.
4. Kingman, J. F. C. Poisson Processes. – Oxford University Press, 1992. – 112 p.
5. Prymirenko, V. M., Demianiuk, A. V., Pilipenko, A. Y., Vovchanskyi, M. V. Formation of a heterogeneous group of UAVs with an acceptable number of false and true drones (подано до друку).
6. Saulius Rudys, Andrius Laučys, Paulius Ragulis, Rimvydas Aleksiejūnas, Karolis Stankevičius, Martynas Kinka, Matas Razgūnas, Domantas Bručas, Dainius Udris, Raimondas Pomarnacki. Hostile UAV Detection and Neutralization Using a UAV System [Електронний ресурс] // Drones. – 2022. – № 6. Режим доступу: https://doi.org/10.3390/drones6090250 – 07.08.2023.
7. Shaan Shaikh, Wes Rumbaugh. The Air and Missile War in Nagorno-Karabakh: Lessons for the Future of Strike and Defence [Електронний ресурс] // CSIS. Режим доступу: https://www.csic.org/analysis/air-and-missile-war-nagorno-karabakh-lessons-future-strike-and-defence – 07.08.2023.
8. Shiryaev, A. N. Probability. – Springer, 2016. – 518 p.
9. J. Warrick. Use of weaponized drones by ISIS spurs terrorism fears [Електронний ресурс] // Washington Post. – 21 лютого 2017 р. Режим доступу: https://www.washingtonpost.com/world/national-security/use-of-

weaponized-drones-by-isis-spurs-terrorism-fears/2017/02/21/9d83d51e-f382-11e6-8d72-263470bf0401_story.html – 07.08.2023.