НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК _519.2

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

________ О.І. Клесов

«___»____________20__ р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-професійною програмою «Страхова та фінансова математика»

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Моделювання вартості похідних фінансових інструментів з використанням методів числової інтеграції та симуляцій Монте-Карло у Wolfram Mathematica»

Виконав:
студент II курсу магістратури, групи ОМ-31 мп
Бугера Андрій Юрійович ___________

Керівник:
кандидат фізико-математичних наук, доцент
Буценко Юрій Павлович ___________

Рецензент:
Доцент кафедри теорії ймовірностей
КНУ ім. Т.Г. Шевченка, кандидат фіз.-мат. наук
Борисенко Олександр Данилович ___________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент _____________

Київ – 2024 року

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-професійна програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_______ О.І. Клесов

«04»_вересня 2024р._

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту

Бугері Андрію Юрійовичу

1. Тема дисертації «Моделювання вартості похідних фінансових інструментів з використанням методів числової інтеграції та симуляцій Монте-Карло у Wolfram Mathematica», науковий керівник дисертації Кандидат фізико-математичних наук, доцент Буценко Юрій Павлович, затверджені наказом по університету від «06» листопада 2024 р. №4981-с

2. Термін подання студентом дисертації «14» грудня 2024 р.

3. Об'єкт дослідження є фінансові деривативи, включаючи опціони, ф'ючерси та свопи, а також їхня оцінка з використанням чисельних методів інтеграції та імітаційного моделювання методом Монте-Карло. Особлива увага приділяється їх реалізації та аналізу із застосуванням середовища Wolfram Mathematica.

4. Предметом дослідження є численні методи інтеграції імітаційного моделювання (зокрема, метод Монте-Карло), їх застосування для моделювання вартості фінансових деривативів, а також алгоритми оптимізації розрахунків для підвищення точності та швидкості обчислень.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

5.1. Розробити чисельні алгоритми з метою оцінки вартості фінансових деривативів.

5.2. Реалізувати методи моделювання вартості деривативів, включаючи:

- Використання моделі Блека-Шоулза для опціонів,
- Застосування симуляції Монте-Карло для стохастичних процесів.

5.3. Виконати аналіз точності та помилок вибраних чисельних методів, включаючи порівняння аналітичних та чисельних рішень.

5.4. Здійснити візуалізацію результатів моделювання для різних сценаріїв ринкових умов.

5.5. Провести порівняльний аналіз ефективності методів моделювання та розрахунку вартості деривативів.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу:

Зображення змодельованих траєкторій вінерівського процесу, реалізація моделювання у Wolfram Mathematica методу Монте-Карло та Блека-Шоульза, різні застосування для моделювання чисельних методів у Wolfram Mathematica.

7. Дата видачі завдання «04» вересня 2024 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Постановка, формулювання та обговорення головної задачі магістерської дисертації	03.09.2024-16.09.2024	виконано
2	Аналіз літератури та публікацій	17.09.2024-30.09.2024	виконано
3	Аналіз існуючих результатів у галузі чисельних методів у фінансовій математиці	01.10.2024-15.10.2024	виконано
4	Формулювання завдань дослідження та адаптація чисельних методів програмна реалізація та тестування методів у Wolfram Mathematica	16.10.2024-02.11.2024	виконано
5	Моделювання реальних фінансових інструментів	03.11.2024-18.11.2024	виконано
6	Аналіз похибок та порівняння методів	19.11.2024-25.11.2024	виконано

7	Аналіз проробленої роботи, підбиття підсумків та написання висновків	26.11.2024-29.11.2024	виконано
8	Оформлення магістерської дисертації	30.11.2024-12.12.2024	виконано

Студент Андрій БУГЕРА

Науковий керівник Юрій БУЦЕНКО

Реферат

Магістерська містить 70 сторінку, 14 слайдів презентації, 17 першоджерел.

Об'єктом даної магістерської роботи є чисельні методи моделювання вартості фінансових деривативів, включаючи опціони, ф'ючерси та свопи з використанням середовища програмування Wolfram Mathematica.

Метою роботи є розробка, реалізація та дослідження чисельних методів, таких як метод Монте-Карло та чисельне інтегрування для моделювання вартості фінансових інструментів.

В рамках дослідження було вивчено основні підходи до чисельного інтегрування, включаючи їх застосування у завданнях фінансової математики. Були реалізовані моделі для оцінки вартості опціонів та свопів, засновані на методі Блека-Шоулза та стохастичних процесах, включаючи вінерівський процес. Проведено аналіз точності методів, а також порівняльний аналіз тимчасової ефективності обчислень.

Особливу увагу приділено практичному застосуванню методів у реальних сценаріях: використано ринкові дані для моделювання та аналізу поведінки деривативів. Для демонстрації були побудовані графіки розподілів, розраховано очікувані значення та оцінено ризики у різних ринкових умовах.

Ключові слова: фінансова математика, чисельне інтегрування, метод Монте-Карло, модель Блека-Шоулза, стохастичний процес, вінерівський процес, фінансові деривативи, Wolfram Mathematica.

ABSTRACT

The master's thesis contains 70 pages, 14 presentation slides, 17 and primary sources.

The object of this master's thesis is numerical methods for modeling the value of financial derivatives, including options, futures and swaps, using the Wolfram Mathematica programming environment.

The aim of the work is to develop, implement and study numerical methods such as Monte Carlo and numerical integration for modeling the value of financial instruments.

As part of the research, the main approaches to numerical integration were studied, including their application in financial mathematics problems. Models for estimating the value of options and swaps based on the Black-Scholes method and stochastic processes, including the Wiener process, were implemented. The accuracy of the methods is analyzed, as well as a comparative analysis of the time efficiency of computations.

Particular attention is paid to the practical application of the methods in real-world scenarios: market data is used to model and analyze the behavior of derivatives. For demonstration purposes, distribution graphs were plotted, expected values were calculated, and risks were assessed under different market conditions.

Keywords: financial mathematics, numerical integration, Monte Carlo method, Black-Scholes model, stochastic process, Wiener process, financial derivatives, Wolfram Mathematica.

Зміст

Вступ

1.1 Актуальність теми

У сучасному фінансовому середовищі деривативи, такі як опціони, ф’ючерси та свопи, відіграють ключову роль у забезпеченні ліквідності, управлінні ризиками та оптимізації фінансових портфелів. Тому правильна оцінка цих інструментів є надзвичайно важливою для фінансових установ, інвесторів та трейдерів. Однак класичні аналітичні методи, такі як модель Блека-Шоулза, мають обмеження через їхні спрощені припущення щодо динаміки ринку, волатильності активів та інших факторів.

Використання чисельних методів, таких як чисельне інтегрування та моделювання методом Монте-Карло, відкриває нові можливості для моделювання вартості складних похідних там, де аналітичне розв’язання неможливе або ускладнене. Система Wolfram Mathematica, як потужне середовище для чисельного моделювання та візуалізації, дозволяє ефективно реалізувати ці методи, забезпечуючи більш точні результати та гнучкі рішення для реальних ринкових умов. Актуальність дослідження полягає в розробці та застосуванні цих методів для оцінки вартості деривативів, що сприятиме кращому управлінню ризиками та прийняттю рішень у фінансовому секторі.

1.2 Мета та завдання дослідження

Метою дослідження є розробка та реалізація чисельних методів моделювання вартості деривативів з використанням чисельного інтегрування та імітаційного моделювання методом Монте-Карло в середовищі Wolfram Mathematica. Метою є підвищення точності та ефективності оцінки вартості складних фінансових деривативів, таких як опціони, шляхом застосування нових підходів та аналізу їх точності порівняно з класичними аналітичними методами.

- Провести огляд основних моделей для оцінки вартості похідних фінансових інструментів, зокрема моделі Блека-Шоулза та інших відомих підходів.

- Вивчити чисельні методи, які використовуються для моделювання вартості деривативів: чисельна інтеграція (метод трапецій, метод Сімпсона) та метод Монте-Карло.
- Розробити та реалізувати алгоритми чисельної інтеграції та симуляцій Монте-Карло у Wolfram Mathematica для моделювання вартості деривативів.
- Провести аналіз точності і швидкодії методів чисельної інтеграції та Монте-Карло на прикладі оцінки різних типів фінансових опціонів.
- Дослідити приклад застосування моделей для реальних ринкових даних, зокрема для оцінки похідних інструментів, які торгуються на сучасних фінансових ринках.
- Порівняти результати чисельних методів з аналітичними рішеннями для простих моделей похідних інструментів та оцінити похибки.

1.3 Огляд методів моделювання вартості похідних інструментів

1. Аналітичні моделі

Класичні аналітичні моделі надають точні формули для оцінки певних типів деривативів. Найвідомішою з таких моделей є модель Блека-Шоулза, яка широко використовується для оцінки європейських опціонів. Ця модель базується на припущеннях про геометричний броунівський рух ціни базового активу, що дозволяє отримати аналітичний розв’язок у вигляді замкненої формули. Однак ця модель має обмеження, пов’язані зі спрощеними припущеннями, зокрема, постійною волатильністю та відсутністю дивідендів.

2. Методи чисельної інтеграції

Чисельне інтегрування використовується для обчислення інтегралів, які не мають аналітичного розв’язку або занадто складні для обчислення. Основними методами, які можна застосувати до фінансових моделей, є наступні:

- Метод трапецій: апроксимує функцію лінійними відрізками і використовується для обчислення інтегралів, що виникають при оцінці опціонів.
- Метод Сімпсона: більш точний метод чисельного інтегрування, який використовує параболічну апроксимацію для більш точного обчислення інтегралів.

3. Методи Монте-Карло

Методи Монте-Карло – це стохастичні методи оцінки вартості деривативів шляхом моделювання великої кількості випадкових траєкторій руху ціни базового активу. Метод Монте-Карло особливо корисний для моделювання вартості складних деривативів, таких як бар'єрні опціони або азійські опціони. Суть методу полягає в тому, що ціна опціону розраховується як середнє значення вартості опціону для великої кількості сценаріїв розвитку ціни активу.

4. Метод скінченних різниць

Цей метод використовується для чисельного розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних, які описують динаміку деривативів. Він дозволяє дискредитувати безперервні зміни вартості активу та деривативу, особливо в контексті складних фінансових моделей, таких як американські опціони, що дозволяють дострокове виконання.

2. Теоретичні основи похідних фінансових інструментів

2.1. Поняття та класифікація похідних фінансових інструментів

Похідні фінансові інструменти (або деривативи) – це фінансові контракти, вартість яких ґрунтується на зміні ціни базового активу. Базовим активом може бути акція, облігація, валюта, товар (наприклад, нафта чи золото) або ринковий індекс. Деривативи використовуються для хеджування ризиків, спекуляцій та арбітражу, надаючи учасникам ринку можливість заробляти на зміні цін без необхідності володіння самим активом.

Ключова особливість похідних інструментів - їхня висока чутливість до змін базового активу, що робить їх потужним інструментом як для управління ризиками, так і для реалізації спекулятивних стратегій.

2.1.1. Опціон

Опціон – це угода, що надає покупцеві опціону право (але не зобов'язання) на купівлю або продаж базових фінансових інструментів за фіксованою ціною протягом деякого періоду або на визначену заздалегідь дату в майбутньому в обмін на опціонну премію. Предметом опціонної угоди можуть бути різні фінансові інструменти: валюта, акції, індекси, цінні папери, кредити, ф'ючерсні контракти тощо. У перекладі «опціон» (від англ. Option) означає вибір. Саме можливість вибору і є основною характеристикою опціонів. Опціони належать до похідних фінансових інструментів, оскільки їхня вартість залежить від вартості базового активу. Вони широко застосовуються у фінансах для управління ризиками й інвестицій, а теорія оцінки вартості опціонів є однією з найбільш успішних у фінансовій сфері.

Базовий актив – це певний цінний біржовий товар, який поставляється за певними контрактами або вартість якого є основою для розрахунку вартості похідних цінних паперів. Базовим активом може бути все, що має вартість: матеріальні товари (нафта, дорогоцінні метали та каміння тощо), акції, фондові індекси або ф'ючерси, що лежать в основі ф'ючерсних контрактів, валюта.

Ціна опціону (або премія) – це сума, яку покупець опціону сплачує продавцю при укладанні опціонного контракту. Опціон також може бути проданий власником на фондовій біржі за певною ринковою вартістю. Опціон є похідним цінним папером, оскільки його вартість залежить від вартості базового активу.

Оскільки опціон дає власнику право, але не зобов'язання, купити або продати базовий актив, він буде реалізований лише тоді, коли це буде вигідно для власника, тобто якщо прибуток перевищить премію, сплачену за опціон. Завдяки цій особливості опціонів - обмеженим втратам і потенційно необмеженому прибутку - вони набули широкої популярності як фінансовий інструмент.

Існує два основних типи опціонів: колл і пут. Терміни «опціон колл» (Call option) означають право купівлі, а «опціон пут» (Put option) – право продажу базового активу, відповідно. Опціон колл дає своєму власнику право купити певну кількість базового активу за заздалегідь фіксованою ціною виконання або ціною купівлі. Опціон пут дає його власникові право продати певну кількість базового активу за фіксованою ціною продажу.

Особа, яка продає або виписує опціон, називається продавцем або стороною, що виписує. Щоб придбати опціон, майбутній власник сплачує премію продавцю. При виконанні опціону «колл» його власник сплачує продавцю, скажімо, ціну виконання в обмін на акцію, і опціон припиняє своє існування. При виконанні опціону «пут» його власник отримує від продавця ціну виконання в обмін на акцію, і опціон також припиняє своє існування. Але опціон може бути виконаний раніше запланованої дати виконання, і таке виконання називається достроковим. Крім того, опціон можна продати в будь-який зручний момент до закінчення терміну його дії.

Види опціонів

Американські та Європейські опціони відрізняються лише способом виконання. Американський опціон можна виконати в будь-який момент до закінчення його терміну дії, тоді як Європейський – лише в момент його закінчення. Американський опціон коштує, за звичай, не менше, а в деяких випадкахдорожче, ніж в такому самому вигляді Європейський, якраз через ширші можливості виконання.

Варто зазначити, що незважаючи на широке використання американських та європейських опціонів, останнім часом вони не повністю задовольняють усі потреби учасників біржових торгів. Саме тому почали з'являтися гібридні опціони. До таких гібридів належать:

1. *Бермудський опціон* – являє собою гібрид американського і європейського опціону, який може бути виконаний у кілька визначених дат протягом терміну дії контракту. На відміну від європейського опціону, який може бути виконаний тільки в одну дату, і американського, який можна виконати в будь-який момент, бермудський опціон обмежує кількість дат виконання, що робить його гнучкішим, ніж європейський, але менш гнучким, ніж американський.
2. *Середньоатлантичний опціон* (також відомий як «mid-Atlantic option») – це варіант, за якого можливість виконання опціону обмежена кількома визначеними датами, але з додатковими умовами, які можуть бути орієнтовані на середній період часу між двома важливими подіями (наприклад, між квартальними звітами компанії).
3. *Квазіамериканський опціон* – це ще одна форма гібридного опціону, який, як і американський, дає змогу виконати контракт у будь-який час до закінчення терміну, але з деякими додатковими умовами, такими як необхідність виконання додаткової умови для виконання права на виконання (наприклад, певні рівні цін або інші критерії).

Особливості розрахунку вартості опціонів полягають у наступному- вартість опціону залежить від кількох чинників:

- ціна базового активу – що вища ціна базового активу стосовно ціни виконання опціону (для call-опціону), то вища його вартість;

- ціна виконання – що ближча ціна виконання опціону до ринкової ціни базового активу, то вища ймовірність його використання;
- волатильність базового активу – вища волатильність означає, що ймовірність того, що ціна активу зміниться у вигідний бік, вища, що збільшує вартість опціону;
- час до закінчення терміну дії – чим більше часу до закінчення опціону, тим вища ймовірність того, що ціна базового активу досягне рівня, вигідного для власника опціону.

Основні стратегії та принципи управління

Одним з основних застосувань опціонів є хеджування, тобто зниження фінансових ризиків. Опціони дозволяють інвесторам і компаніям захищати себе від несприятливих змін цін на базові активи. Наприклад, компанія, що займається імпортом товарів, може використовувати опціони для захисту від коливань валютних курсів. Якщо компанія очікує, що вартість валюти, в якій вона здійснює розрахункові операції, може змінитися в несприятливий бік, вона може придбати валютні опціони, щоб зафіксувати ціну на певний термін.

Опціони також активно використовуються для спекуляцій на фінансових ринках. Інвестори, які очікують значних змін у ціні базового активу, можуть використовувати опціони для отримання прибутку. Опціони надають можливість за рахунок порівняно невеликої початкової премії отримати можливість на значний дохід, що робить їх привабливим інструментом для спекулятивних операцій.

Опціони надають можливість застосування левериджу, що означає використання позикових коштів для збільшення потенційного прибутку. Леверидж у контексті опціонів досягається за рахунок того, що купівля опціону потребує набагато менших витрат порівняно з купівлею самого базового активу. Це дає змогу інвесторам управляти великими сумами, використовуючи відносно невеликі початкові вкладення. У випадку з опціонами, леверидж також пов'язаний з тим, що ціна опціону (премія) може бути значно нижчою, ніж вартість базового активу, але сам прибуток від руху активу може бути значно вищим.

Опціони використовуються також для арбітражних стратегій, які дають змогу отримувати прибуток за рахунок відмінностей у цінах на один і той самий актив на різних ринках. Механізм арбітражу з використанням опціонів часто використовують у поєднанні з ф'ючерсними контрактами, створюючи так званий опціонний арбітраж, коли різницю в цінах між опціонами і ф'ючерсами використовують для отримання прибутку. Однак із розвитком технологій та алгоритмічних торгів такі можливості стають дедалі рідкіснішими, оскільки вони швидко усуваються торговими системами.

2.1.2. Ф'ючерси

Ф'ючерси є одним із найпоширеніших типів похідних фінансових інструментів і активно використовуються як для хеджування ризиків, так і для спекуляцій. Ці контракти можуть бути укладені на різні активи, включно з товарними товарами (нафта, золото, сільськогосподарська продукція тощо), фінансовими інструментами (акції, індекси, валюти тощо) та іншими видами активів.

Ф'ючерс – це стандартизований контракт, що укладається на біржі, у рамках якого сторони зобов'язуються купити або продати певний фінансовий актив або товар за заздалегідь встановленою ціною в майбутньому, на обумовлену дату. На відміну від опціонів, де покупець має право, але не обов'язок виконати угоду, ф'ючерсні контракти вимагають обов'язкового виконання умов контракту на дату виконання.

Основна мета ф'ючерсних контрактів полягає в наданні можливості учасникам ринку зафіксувати ціну на активи або хеджувати ризики, пов'язані зі зміною їхньої вартості.

Ф'ючерсний контракт включає кілька ключових елементів:

1. *Базовий актив* – це товар або фінансовий інструмент, з яким пов'язаний ф'ючерсний контракт. Базовим активом може бути не тільки сировинний

товар, як-от нафта, золото або сільськогосподарська продукція, а й фінансові активи, такі як валюти, облігації, фондові індекси або акції.

2. *Ціна виконання (поставка)* – це ціна, за якою буде здійснено купівлю або продаж базового активу на момент виконання контракту. Цю ціну встановлюють під час укладення контракту.
3. *Дата виконання* – це дата, на яку сторони контракту зобов'язуються виконати свої зобов'язання. На відміну від опціонів, де покупець вирішує, коли виконати контракт, у випадку з ф'ючерсами це обов'язкова дата виконання.
4. *Розмір контракту* – це кількість одиниць базового активу, які підлягають поставці або розрахунку.
5. *Маржа*: ф'ючерсні контракти вимагають наявності маржі – суми, що депонується на рахунку трейдера і слугує як забезпечення для виконання контракту. Маржа може бути як початковою (під час укладення контракту), так і такою, що підтримує (для підтримки позиції).
6. *Постачання або розрахунок*: у момент виконання контракту сторони можуть або провести реальне постачання базового активу, або здійснити грошовий розрахунок за контрактом. Для більшості фінансових ф'ючерсів, таких як ф'ючерси на індекси, не відбувається реальне постачання активу, а проводиться розрахунок за різницею між ринковою ціною на момент виконання контракту і ціною виконання.

Види ф'ючерсів

Ф'ючерсні контракти можна класифікувати за низкою ознак, включно з типом базового активу, терміном виконання і способом виконання. Основні види ф'ючерсних контрактів включають:

1. Товарні ф'ючерси, які являють собою контракти, пов'язані з поста-чанням фізичних товарів. Ці контракти часто використовуються для хеджування ризиків, пов'язаних зі зміною цін на товари, а також для спекуляцій.
2. Фінансові ф'ючерси включають контракти на фінансові інструменти, такі як валюти, індекси, облігації та інші активи. Ці ф'ючерси часто

використовуються для хеджування валютних і процентних ризиків, а також для спекуляцій на зміні вартості фінансових активів.

3. Кредитні ф'ючерси, такі як ф'ючерси на кредитні дефолтні свопи (CDS), дозволяють інвесторам спекулювати на ризиках дефолту за борговими зобов'язаннями. Ці контракти широко використовуються у фінансових ринках для хеджування ризиків, пов'язаних із кредитною якістю позичальників.
4. Індексні ф'ючерси дозволяють інвесторам спекулювати на русі фондових індексів, таких як S&P 500 або NASDAQ-100. Ці контракти стали популярними серед хедж-фондів та інституційних інвесторів, оскільки вони дають змогу легко й ефективно позиціонуватися на ринках без потреби купівлі окремих акцій.

Застосування ф'ючерсів

Ф'ючерсні контракти широко використовуються для хеджування та спекуляцій. Розглянемо кілька прикладів їх застосування.

Хеджування – це використання ф'ючерсних контрактів для захисту від невизначеності у зміні цін на активи. Також компанії, що працюють у міжнародній торгівлі, можуть використовувати ф'ючерси на валюту для хеджування ризиків зміни валютних курсів, які можуть вплинути на вартість їхніх доходів і витрат.

Ф'ючерсні контракти широко використовуються для спекуляцій на русі цін базових активів. Спекулянти, укладаючи ф'ючерсні контракти, намагаються заробити на змінах ринкових цін. Такі дії можливі завдяки наявності кредитного плеча: трейдери можуть укладати контракти на значно більші обсяги, ніж їхній початковий капітал.

Ризики, пов'язані з ф'ючерсами

Ф'ючерсні контракти, як і будь-які інші фінансові інструменти, несуть певні ризики. Одним з основних ризиків є маржовий ризик. Оскільки ф'ючерсні контракти вимагають наявності маржі, існує ризик, що ціна базового активу може змінитися в несприятливий бік, що призведе до додаткових вимог до маржі. Якщо трейдер не в змозі надати необхідну маржу, його позиція може бути ліквідована.

Іншим важливим ризиком є ринковий ризик, який полягає в можливості значних змін ринкових цін на активи. Через високу ліквідність ф'ючерсні контракти схильні до різких коливань цін, що може призвести до значних збитків для спекулянтів.

Також існує кредитний ризик, пов'язаний з можливістю того, що одна зі сторін контракту не зможе виконати свої зобов'язання.

2.1.3. Свопи

На відміну від ф'ючерсів і опціонів, свопи є більш гнучкими інструментами і можуть бути налаштовані відповідно до потреб сторін договору. Вони широко використовуються як для хеджування ризиків, так і для спекуляцій.

Своп (від англ. swap – обмін) – це договір між двома сторонами, за яким вони зобов'язуються обмінюватися грошовими потоками (або іншими активами) протягом певного часу, на основі заздалегідь узгоджених умов. Вони є похідними фінансовими інструментами, оскільки їхня вартість і грошові потоки залежать від змін вартості базових активів, таких як процентні ставки, валютні курси або ціни на товари. Свопи не мають на увазі фізичну поставку активів, а тільки обмін грошовими потоками, заснованими на певних умовах.

Види свопів

1. Процентні свопи є одними з найпоширеніших типів свопів. У рамках цієї угоди одна сторона зобов'язується виплачувати іншій стороні відсоткові платежі за фіксованою ставкою, а натомість отримує відсоткові виплати за плаваючою ставкою. Процентні свопи можуть бути використані для хеджування ризиків, пов'язаних зі зміною процентних ставок, а також для спекуляцій на русі ставок.

Процентні свопи можна поділити на два основні типи:

- *Фіксований на плаваючий своп*: одна сторона виплачує фіксований відсоток, а інша – плаваючий, який зазвичай прив'язаний до будь-якого базового індикатора (наприклад, LIBOR або EURIBOR).

- *Плаваючий на плаваючий своп*: обидві сторони виплачують плаваючі відсотки, прив'язані до різних індикаторів (наприклад, одна сторона платить за ставкою LIBOR, а інша – за ставкою EURIBOR).

2. Валютні свопи включають у себе обмін процентними платежами, номінованими в різних валютах. На відміну від відсоткових свопів, де йдеться лише про відсотки, валютні свопи передбачають обмін як основного боргу, так і відсоткових платежів за ним. Ці інструменти можуть бути використані для хеджування валютних ризиків або для залучення капіталу в іноземній валюті.

Валютний своп зазвичай включає два етапи: перший – це обмін первісними сумами (основними боргами) в різних валютах на початковій даті, і другий – це періодичні обміни відсотковими виплатами, а також зворотний обмін основної суми наприкінці строку свопу.

3. Товарні свопи включають в себе обмін грошовими потоками, заснованими на цінах товарних активів, таких як нафта, золото, сільськогосподарські товари та інші сировинні товари. Товарні свопи можуть бути використані для хеджування цінових ризиків, пов'язаних зі зміною вартості цих товарів, або для спекуляції на зміні цін на товари.

4. Свопи на кредитні дефолтні ризики (Credit Default Swaps, CDS) дають змогу одній стороні застрахувати себе від ризику дефолту за борговими зобов'язаннями. У рамках CDS одна сторона (покупець) платить іншій стороні (продавцю) регулярні премії, а в разі дефолту за борговим зобов'язанням продавець свопу зобов'язується виплатити покупцеві заздалегідь обумовлену суму.

CDS стали популярним інструментом на фінансових ринках після світової фінансової кризи 2008 року. Вони використовуються для хеджування ризиків дефолту як корпораціями, так і банками, а також можуть бути використані для спекуляцій на кредитних ризиках.

Застосування свопів

Свопи використовують у різних сферах фінансових ринків, і їхні можливості застосування різноманітні.

Свопи є важливим інструментом для хеджування різних видів ризиків. Наприклад, компанії, які мають заборгованість із плаваючими відсотковими ставками, можуть використовувати відсоткові свопи для захисту від зростання ставок. За допомогою валютних свопів компанії, що працюють на міжнародних ринках, можуть хеджувати валютні ризики, пов'язані з коливаннями обмінних курсів.

Свопи також є популярним інструментом для спекуляцій на зміну ринкових умов, таких як процентні ставки, валютні курси та ціни на товари. Інвестори можуть використовувати свопи для отримання прибутку від зміни умов на ринку, не маючи фізичного активу.

Ризики, пов'язані зі свопами

Незважаючи на свою гнучкість і широке використання, свопи несуть певні ризики, пов'язані з виконанням умов контракту.

Контрагентський ризик (або кредитний ризик) є одним з основних ризиків, пов'язаних зі свопами. Він виникає через те, що одна зі сторін може не виконати свої зобов'язання за контрактом. Наприклад, якщо одна сторона свопу стикається з фінансовими труднощами або дефолтом, вона не зможе виконати свої зобов'язання, що може призвести до збитків для іншої сторони.

Ринковий ризик полягає в можливості змін ринкових умов, таких як відсоткові ставки або валютні курси, що можуть призвести до збитків для сторін, які уклали свопи. Наприклад, якщо відсоткові ставки несподівано зростуть, сторона, що виплачує плаваючий відсоток, може зіткнутися зі збитками.

2.2. Основні моделі оцінки вартості

2.2.1. Модель Блека-Шоулза

Модель Блека-Шоулза є однією з найвідоміших та фундаментальних моделей для оцінки вартості опціонів та інших похідних фінансових інструментів. Запропонована в 1973 економістами Фішером Блеком, Майроном Шоулзом і Робертом Мертоном. Модель стала революційною у своїй галузі, оскільки запропонувала кількісну основу для розрахунку вартості опціонів на акції , що значно підвищило ефективність хеджування та торгівлі.

Ця модель використовується для оцінки європейських call- та put-опціонів, які можна виконати лише в момент закінчення терміну дії, і незважаючи на певні обмеження, залишається базовим інструментом сучасної теорії фінансових деривативів, зокрема для активів, пов'язаних з акціями, індексами, валютами та процентними ставками.

В моделі Блека-Шоулза ключовими є наступні припущення:

1. Вартість активу змінюється згідно з законом:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$$

де S_t – ціна акції у момент t,

S_0 – початкова ціна акції,

μ – параметр тренду ціни,

σ – волатильність,

W_t – броунівський рух.

2. Опціон є європейського типу, тобто виконаний може бути лише у момент експірації.
3. Є можливість інвестування за безризиковою ставкою r, яка є незмінною та відомою заздалегідь
4. Відсутня можливість арбітражу, тобто ринок є ефективним.
5. Відсутні трансакційні витрати, тобто комісій за проведення операцій.
6. Дивідендні виплати не сплачуються за час дії опціонного контракту.

Формула Блека-Шоулза

Модель Блека-Шоулза описує ціну європейського колл-опціону як функцію кількох факторів, включаючи поточну ціну базового активу, ціну виконання опціону, час, що залишився до закінчення, безризикову процентну ставку і волатильність. Очікувана вартість опціону залежить від цих факторів і модель виражається через наступне рівняння:

$$C = S_0 N(d_1) - XN(d_2)e^{-rT}$$

де:

C – поточна ціна call-опціону,

S_0 – поточна ціна базового активу,

X – ціна виконання опціону,

r – без ризикова процентна ставка,

T – час до закінчення опціону (в роках),

$N(d)$ – функція нормального розподілу,

d_1, d_2 – параметри, що визначаються наступним чином:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}.$$

У цьому випадку σ (волатильність) – це міра невизначеності, пов'язана з можливими змінами цін базового активу. Чим вища волатильність, тим вища вартість опціону, оскільки існує більша ймовірність, що ціна активу зміниться у сприятливий бік.

Обмеженість та недоліки моделі Блека-Шоулза

Незважаючи на свою популярність та успіх, модель Блека-Шоулза має кілька обмежень:

1. Припущення про постійну волатильність. Насправді волатильність змінюється згодом, що робить це припущення не зовсім точним реальних ринків.
2. Відсутність обліку дивідендів. Модель Блека-Шоулза у первинному її вигляді не враховує виплати дивідендів за акціями, що обмежує її застосування до акцій, які виплачують дивіденди. Однак існує розширена версія моделі, яка враховує дивіденди.

3. Неідеальні ринки. У моделі передбачається відсутність транзакційних витрат і наявність досконалої ліквідності, що у реальних умовах який завжди так. На ринках завжди є витрати, такі як комісії, спреди та ризики ліквідності.
4. Виключно європейський опціон. Модель Блека-Шоулза розроблена для оцінки європейських опціонів, які можна виконувати лише у момент закінчення. Для американських опціонів, які можуть бути виконані будь-якої миті до терміну закінчення, потрібне використання інших моделей.

2.2.2. Біноміальна модель

Біноміальна модель є альтернативою моделі Блека-Шоулза для оцінки вартості опціонів. Розроблена 1979 року Джоном Коксом, Стівеном Россом і Марком Рубінштейном, ця модель запропонувала більш гнучкий підхід до оцінки як європейських, так і американських опціонів. На відміну від моделі Блека-Шоулза, яка ґрунтується на аналітичних рівняннях, біноміальна модель використовує метод чисельного моделювання. Це робить її придатною для оцінки опціонів зі складнішими умовами виконання, такими як американські опціони, які можуть бути виконані в будь-який момент до закінчення терміну.

Основні принципи біноміальної моделі

Біноміальна модель заснована на уявленні про рух ціни базового активу як послідовності «вгору» або «вниз» у кожному часовому інтервалі. Ця модель передбачає, що:

1. *Ціна активу змінюється дискретно:* у кожному часовому кроці ціна базового активу може або зрости, або впасти на певну величину.
2. *Ринки є ефективними*: модель передбачає відсутність арбітражу, що означає, що всі можливості без ризикового прибутку вже усунуто.
3. *Імовірності зміни ціни відомі:* використовується об'єктивний розподіл імовірностей для руху ціни вгору або вниз.

Ціна опціону визначається через зворотне обчислення: модель розраховує значення опціону в кожному вузлі дерева цін, починаючи з вузлів закінчення терміну і рухаючись до початку, де визначається початкова вартість опціону.

Побудова біномного дерева

Процес оцінки вартості опціону з використанням біномної моделі включає такі дії:

1. Поділ часу до закінчення кроки

Спочатку визначається загальний час до закінчення опціону (T) і поділяється на n рівних часових кроків. Тривалість одного кроку дорівнює:

$$\Delta t = \frac{T}{n}$$

2. Визначення параметрів руху ціни

Ціна базового активу може збільшитися на коефіцієнт u, або зменшитися на коефіцієнт d. Вони знаходяться по формулі:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = \frac{1}{u}$$

де σ – волатильність базового активу.

Імовірність зміни ціни «вгору» (p) розраховується з урахуванням без ризикової процентної ставки (r):

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

Імовірність зміни ціни «вниз» дорівнює $q = 1 - p$

3. Побудова дерева цін

На основі вищевказаних параметрів будується біноміальне дерево цін, де кожен вузол відповідає певній ціні базового активу на момент часу. Наприклад, якщо поточна ціна базового активу S_0, то після одного тимчасового кроку можливі ціни будуть S_0u (крок в гору) або S_0d (крок у вниз).

4. Обчислення вартості опціону у вузлах дерева

На кожному вузлі дерева обчислюється вартість опціону, починаючи з кінцевих вузлів (у момент закінчення опціону):

- Для європейського опціону вартість кінцевих вузлах залежить тільки від внутрішньої вартості опціону:

$$C = \max(S - X, 0)\ , \text{для } call - \text{опціона}$$

$$P = \max(X - S, 0), \text{для } \ put - \text{опціона}$$

де $S -$ ціна базового активу у вузлі, $X -$ ціна виконання опціону.

- Потім вартість опціону розраховується для попередніх вузлів з урахуванням ймовірностей руху ціни вгору і вниз:

$$C = e^{-r\Delta t}[pC_u + (1-p)C_d]$$

де C_u іC_d – вартості опціону у вузлах "вгору" і "вниз" на наступному кроці.

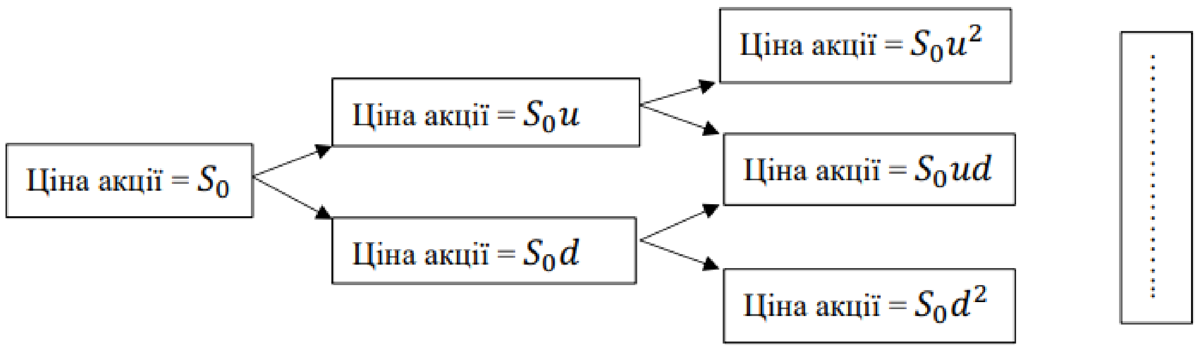
Для американського опціону, який може бути виконаний у будь-який момент часу, вартість опціону в кожному вузлі визначається як максимум із внутрішньої вартості та розрахованої теоретичної вартості:

$$C = \max\left(\text{внутрішня вартість}, e^{-r\Delta t}[pC_u + (1-p)C_d]\right)$$

5. Підсумкова вартість

Ітеративні обчислення продовжуються до початкового вузла дерева, де визначається початкова вартість опціону.

Графік, який показує біноміальну модель зміни вартості акції на випадок декількох кроків



Переваги біномної моделі

- *Гнучкість:* біноміальна модель може використовуватись для оцінки як європейських, так і американських опціонів, а також складних похідних інструментів із нестандартними умовами.
- *Простота реалізації:* модель легко програмується та масштабується на довільну кількість кроків.
- *Чисельна стабільність*: навіть за складних умов руху ціни модель залишається стабільною.

Обмеження біномної моделі

- *Висока обчислювальна складність:* при збільшенні кількості кроків модель стає точнішою, але це потребує значних обчислювальних ресурсів.
- *Припущення про дискретний рух ціни:* реальні ринки працюють безперервно, що робить біномну модель лише наближенням.
- *Постійні параметри:* як і модель Блека-Шоулза, біномна модель передбачає постійні відсоткові ставки та волатильність, що не завжди відповідає реальним умовам.

2.3 Особливості похідних інструментів, для яких потрібні чисельні методи

Похідні фінансові інструменти (деривативи) займають ключове місце у сучасній фінансовій системі, пропонуючи учасникам ринку кошти для хеджування, спекуляції та управління ризиками. Однак оцінка вартості складних похідних інструментів вимагає застосування чисельних методів, особливо якщо стандартні аналітичні моделі, такі як Блека-Шоулза, не можуть врахувати всіх характеристик інструменту чи ринкових умов.

Чому аналітичні методи недостатні? Бо аналітичні моделі оцінки похідних інструментів, такі як модель Блека-Шоулза або біномна модель мають ряд обмежень:

1. Стандартні припущення. Аналітичні моделі припускають такі спрощення, як:
   - Стала волатильність базового активу.

- Постійна безризикова процентна ставка.
- Відсутність дивідендів чи їх фіксована величина.

2. Відсутність гнучкості. Багато реальних похідних інструментів мають складні умови, такі, як бар'єрні опції, опціони з азіатським розрахунком або гібридні деривативи. Ці інструменти неможливо оцінити за допомогою стандартних формул.
3. Складна структура. Деякі похідні інструменти залежать від кількох базових активів або складних фінансових індексів, що робить аналітичне рішення практично неможливим.
4. Неадекватність для американських опціонів -для американських опціонів, які можуть бути виконані будь-коли до закінчення, аналітичні рішення відсутні.

Ці обмеження наголошують на необхідності застосування чисельних методів, які забезпечують точні оцінки в умовах більш складної динаміки.

Приклади складних опціонів, які важко описати аналітичними формулами.

1. *Бар'єрні опціони (Barrier options)*

Бар'єрні опціони мають додаткову умову, яка активує або анулює опціон при досягненні ціни базового активу певного рівня (бар'єру). Приклади:

- Knock-in опціон. Активується, коли ціна сягає бар'єру.
- Knock-out опціон. Анулюється, коли ціна сягає бар'єру.

Оцінка таких опціонів вимагає врахування ймовірності перетину бар'єру, що неможливо описати простою аналітичною формулою.

2. *Азіатські опціони (Asian options)*

Азіатські опціони залежать від середньої вартості базового активу за певний період. Це знижує вплив короткочасної волатильності, але ускладнює оцінку вартості:

- Arithmetic average. Середнє арифметичне значення ціни.
- Geometric average. Середнє геометричне значення ціни.

Аналітичне рішення існує тільки для геометричного середнього, тоді як для арифметичного середнього використовуються чисельні методи, такі як Монте-Карло.

3. *Гібридні опціони (Exotic options)*

Гібридні опціони включають риси декількох типів деривативів або складні умови виконання. Приклади:

- Бермудський опціон. Виконується в заздалегідь певні дати, а не будь-якої миті, як американський.
- Середньоатлантичний опціон. Гібрид американського та європейського опціону з обмеженнями за датами виконання.
- Квазіамериканський опціон. Схожий на американський, але може бути реалізований тільки при виконанні додаткових умов.

Через гнучкість таких інструментів для них аналітичні рішення недоступні, і їхня оцінка вимагає застосування біномних дерев або методу Монте-Карло.

3. Чисельні методи в фінансовій математиці

Чисельні методи є ключовим інструментом у фінансовій математиці, дозволяючи вирішувати складні задачі, які не мають аналітичних розв’язків або потребують значного спрощення. Завдяки чисельному інтегруванню, методам Монте-Карло та апроксимації, можна моделювати багатовимірні та нелінійні фінансові системи. Такі підходи широко застосовуються в задачах оцінки похідних фінансових інструментів, управління ризиками та оптимізації, забезпечуючи ефективність і точність у складних обчисленнях.

У реальних умовах аналітичні рішення можуть бути або невідомі, або непрактичні через їхню складність. Приклади таких завдань:

- *Оцінка вартості деривативів:* наприклад, опціони з умовами виконання, що залежать від часу, або складні бар'єрні опціони вимагають урахування великої кількості змінних.
- *Моделювання випадкових процесів:* фінансові ринки схильні до випадкових рухів, їх поведінка описується стохастичними процесами, аналітичне описання яких виявляється важким.
- *Багатовимірні розрахунки:* кореляційні зв’язки між активами у портфелях або розрахунки багатовимірних інтегралів потребують обробки даних високої розмірності.

Чисельні методи дозволяють подолати ці складності, забезпечуючи результати потрібної точності за прийнятний час. Розглянемо основні підходи чисельних методів.

- *Чисельне інтегрування:* використовується для наближеного обчислення або ж оцінки інтегралів, що виникають при розрахунках вартості похідних інструментів, дисконтованих грошових потоків та інших завдань.
- *Метод Монте-Карло:* універсальний інструмент для моделювання випадкових процесів та вирішення задач з високою розмірністю. Цей метод

широко застосовується для оцінки вартості опціонів, аналізу ризиків та портфельної оптимізації.

- *Методи апроксимації:* допомагають працювати зі складними функціями, які важко описати аналітично, наприклад, при моделюванні волатильності або процентних ставок. Зокрема, кубічні сплайни дозволяють точно побудувати криву доходності для аналізу облігацій.

З розвитком комп'ютерних технологій чисельні методи стають дедалі потужнішим інструментом для вирішення фінансових задач. Сучасні обчислювальні потужності дозволяють моделювати складні системи та отримувати результати за лічені секунди. Це робить чисельні методи незамінними в реальному часі для аналізу ризиків, торгівлі та оптимізації стратегій.

Чисельні підходи надають гнучкість і адаптивність, що особливо важливо в умовах фінансових ринків, що швидко змінюються, у той час як аналітичні методи залишаються фундаментом фінансової математики, чисельні методи є мостом між теорією і практикою, дозволяючи адаптуватися до реальних викликів і використовувати можливості сучасного світу.

3.1. Чисельне інтегрування

Чисельне інтегрування – це метод обчислення значень складних інтегралів, який використовується, коли аналітичне рішення або неможливе, або вкрай складе. У фінансовій математиці такі ситуації зустрічаються досить часто, особливо під час роботи з нелінійними функціями, складними розподілами ймовірностей чи багатовимірними задачами. Чисельні методи дозволяють ефективно оцінювати складні інтеграли, забезпечуючи необхідну точність та контроль за обчислювальним процесом.

Нехай розглядається обчислення визначеного інтегралу:

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

У випадках, коли функція $f(x)$ має складний вигляд або не виражається в елементарних функціях, чисельна інтеграція дозволяє замінити точне аналітичне обчислення наближеним. Основна ідея полягає у розбитті інтервалу $[a, b]$ на підінтервали та обчисленні суми значень функції у цих підінтервалах з використанням різних підходів до оцінки.

Існують різні методи чисельного інтегрування, кожен з яких має свої переваги та сфери застосування. Розглянемо найпростіші з них:

3.1.1.Метод трапецій

Метод трапецій – один із найпростіших і широко використовуваних методів чисельного інтегрування. Він оснований на наближеному представленні функції $f(x)$ у вигляді лінійної функції на кожному підінтервалі розбиття.

Формула для знаходження інтеграла на проміжку $[a, b]$:

$$I \approx \frac{b-a}{2} * [f(a) + f(b)]$$

Для більш точнішого обчислення треба розбити інтервал інтегрування $[a, b]$ на n підінтервалів, тобто $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b]$, та застосувати формулу, яка наведена вище:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{2} * [f(x_i) + f(x_{i-1})]$$

де $x_0 = a$, а $x_n = b$, $f(x_i), f(x_{i-1})$ значення на кінцях відрізка.

Метод трапецій простий у реалізації і дає прийнятну точність за досить малого розміру підінтервалів. Метод має точність $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Також він ефективний для функцій які мають вигляд близький до лінійних. Проте має низьку точність, для якої треба ще більше розбивати заданий інтервал. Метод трапецій можна використовувати для наближеної оцінки ціни облігації з фіксованими платежами, де $f(x)$ представляє дисконтований грошовий потік.

3.1.2. Метод Сімпсона

Метод Сімпсона використовує квадратичну апроксимацію функції на кожному підінтервалі. Цей метод забезпечує більш високу точність порівняно з методом трапецій, особливо для функцій із плавною поведінкою. Метод має точність $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$. Суть метода – це наближення графіка функції на відрізку параболою.

Формулою Сімпсона називається інтеграл від многочлена другого порядку на відрізку $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx = \frac{b-a}{6} * \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

де $f(a), f(b)$ значення на кінцях відрізка, а $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ в його середині.

Метод Сімпсона часто використовують для оцінки вартості опціонів, де функція, що описує виплати, має плавний характер. Він точніший за метод трапецій та найкраще підходить для функцій, близьких до квадратичних. Натомість потребує парного числа інтервалів розбиття та ускладнюється при інтегруванні функцій, що містять розриви або гострі піки. Метод Сімпсона може бути використаний для розрахунку вартості опціонів з нелінійною виплатою, наприклад азіатських опціонів, де середня вартість базового активу розраховується за часовими інтервалами.

3.1.3. Метод Гауса

Метод Гауса (або квадратури Гауса) називається заснований на використанні спеціальних точок (вузлів) та ваги для обчислення інтегралів. На відміну від методів трапецій та Сімпсона, які використовують рівномірні розбиття, метод Гауса оптимізує розташування вузлів, щоб досягти високої точності. Сама формула виглядає наступним чином:

$$\int_a^b w(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

де w_i – вага, а x_i – вузол, який залежить від обраного степеня.

Для знаходження вузлів та ваг квадратури використовують ортогональні поліноми на заданому інтервалі інтегрування. Метод Гауса має високу точність для невеликої кількості вузлів та ефективний для гладких функцій. Натомість присутня складність обчислення вузлів і ваги для функцій, відмінних від поліноміальних та найменша універсальність для функцій з розривами або гострими піками. Цей метод підходить для оцінки вартості складних похідних, таких, як свопи з урахуванням часової вартості грошей.

Отже, можна сказати, що точність залежить від обраного метода, характеристики інтегрованої функції, числа інтервалів та вузлів, а саме:

- Метод трапецій підходить для попередніх оцінок чи завдань, де лінійна апроксимація є прийнятною.
- Метод Сімпсона забезпечує баланс між точністю та часом затраченим на розв’язок.
- Метод Гауса є кращим для завдань, що вимагають високої точності, особливо при гладких функціях.

У фінансовій математиці точність чисельного інтегрування має вирішальне значення, оскільки навіть невеликі помилки можуть призводити до значних відхилень в оцінці вартості активів або ризиків.

3.2. Метод Монте-Карло

Метод Монте-Карло ґрунтується на багаторазовому повторному виконанні випадкових експериментів для отримання статистичних оцінок бажаних величин. Його назва походить від відомого казіно в Монако, підкреслюючи ключову роль випадковості у цьому підході.

Основна ідея методу: якщо певна задача пов’язана з математичними виразами, залежними від випадкових змінних, то її розв’язок може бути оцінений за допомогою великої кількості симуляцій цих змінних. Середнє значення результатів цих симуляцій наближає справжній розв’язок.

Його основа полягає у використанні випадкових чисел для імітації випадкових процесів та оцінки інтегралів або ймовірностей. Цей метод широко застосовується у фінансовій математиці для оцінки опціонів, аналізу ризиків, моделювання цінних паперів і розв’язання задач, пов'язаних зі стохастичними процесами.

3.2.1 Генерація випадкових чисел

Генерація випадкових чисел є фундаментальною складовою методу Монте-Карло. Ці числа служать основою для моделювання випадкових змінних, необхідних у задачах, що вирішуються цим методом.

1. Визначення випадкових чисел

Випадкові числа – це послідовність значень, які мають рівномірний розподіл на заданому інтервалі, зазвичай $[0,1]$, і не мають передбачуваного шаблону.

2. Вимоги до випадкових чисел

- Рівномірний розподіл: значення повинні мати однакову ймовірність появи на заданому інтервалі.
- Незалежність: значення не повинні корелювати одне з одним.

3. Генерація чисел на комп'ютері

Комп’ютери генерують не справжні випадкові числа, а псевдовипадкові, тобто такі, що мають властивості випадковості, але створені за детермінованими алгоритмами.

Основні методи генерації:

- Лінійний конгруентний метод:

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \bmod m$$

де a, c, m– параметри алгоритму, а X_0 – початкове значення.

- Генератори на основі алгоритму Mersenne Twister (Вихор Мерсенна), що забезпечують високу якість випадкових чисел.

4. Проблеми генерації:

- обмежена довжина послідовності: псевдовипадкові числа через певний час починають повторюватися;
- залежність від початкового значення- неправильний вибір початкового значення може призвести до низької якості чисел.

Псевдовипадкові та квазівипадкові послідовності

Псевдовипадкові послідовності – це впорядковані чисельні послідовності, які імітують властивості справжніх випадкових чисел. Вони генеруються за допомогою алгоритмів і широко застосовуються у методі Монте-Карло завдяки своїй швидкості й ефективності. Із переваг можна назвати: швидкість генерації, можливо відтворення результатів та контроль за статистичними властивостями послідовності, натомість із недоліків можна виділити: випадки періодичності, залежність від початкового значення та потенційно нерівномірне: покриття простору у високих розмірностях.

Квазівипадкові послідовності – це впорядковані послідовності чисел, які покривають багатовимірний простір більш рівномірно, ніж псевдовипадкові числа. Вони не є справжніми випадковими числами, але мають властивість низької дискретності, що робить їх корисними для задач високої розмірності, таких як чисельна інтеграція та моделювання.

1. Властивості квазівипадкових послідовностей:

- *низька дисперсія:* вони забезпечують рівномірне заповнення простору, що зменшує статистичну похибку у методі Монте-Карло;
- *детермінованість* – це послідовності, які можна точно відтворити.

2. Типи квазівипадкових послідовностей:

- *послідовності Соболя:* оптимальні для задач із невеликою кількістю вимірів;
- *послідовності Халтона:* широко застосовуються у багатовимірних задачах;
- *послідовності Фібоначчі:* використовуються в специфічних фінансових моделях.

Псевдовипадкові числа краще підходять для задач, де важлива імітація справжньої випадковості, наприклад, у моделюванні стохастичних процесів. Натомість квазівипадкові числа забезпечують більшу ефективність у задачах багатовимірних інтегралів, оскільки зменшують кількість симуляцій, покращуючи покриття простору.

3.2.2. Інтегральний метод Монте-Карло

Інтегральний метод Монте-Карло використовується для обчислення визначених інтегралів складних функцій, які важко або неможливо вирішити аналітично. Він базується на наближенні інтеграла за допомогою середнього значення функції, обчисленого для вибірки випадкових точок.

Формула інтегрального методу Монте-Карло:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{N} * \sum_{i=1}^{N} f(x_i),$$

де N – кількість випадкових точок, x_i – випадкові значення на інтервалі $[a, b]$.

3.3. Моделювання випадкових процесів

Випадкові процеси – це математичні моделі, що описують зміну величин, схильних до випадкових впливів у часі. Вони відіграють важливу роль у фінансовій математиці, оскільки використовуються для моделювання цін акцій, процентних ставок, валютних курсів та інших фінансових величин.

3.3.1 Вінерівський процес

Вінерівським процесом називається випадковий процес $\xi(t)$ з неперервним часом, який задовольняє умовам:

1. $\xi(t)$ – процес з незалежними приростами.
2. $\xi(t)$ – стаціонарний у вузькому розумінні (для $\forall\ t_1 < t_2, \xi(t_2) - \xi(t_1)$ і $\xi(t_2 + s) - \xi(t_1 + s)$ однаково розподілені).
3. $\xi(0, \omega) = 0, \omega \in \Omega$.
4. При $\Delta t \to 0$

   $$M\xi(\Delta t) = a\Delta t + o(\Delta t),\ M\xi^2(\Delta t) = b\Delta t + o(\Delta t),$$

   $$M|\xi(\Delta t)|^2 = o(\Delta t), -\infty < a < \infty, 0 < b < \infty.$$

5. Траєкторії $\xi(t)$ неперервні функції. Якщо $\xi(t)$ – вінерівський процес, то його одновимірний закон розподілу задається щільністю

$$p(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi bt}} e^{-\frac{(x-at)^2}{2bt}}$$

Рівняння Іто

Теорема:

Нехай функція $f(t, x)$ є неперервно диференційовною по t, двічі неперервно диференційовною по змінній x. Припустимо, що:

$$dX(t) = a\big(X(t)\big)dt + b\big(X(t)d\omega(t)\big), t \in [0; T].$$

Тоді

$$df\big(t, X(t)\big) = f_t'\big(t, X(t)\big)dt + f_x'\big(t, X(t)\big)dX(t) + f_{xx}''(t, X(t))b^2(t)dt$$

Застосування рівняння Іто дозволяє знаходити розподіл ціни активу та використовувати його для оцінки фінансових інструментів, таких як опціони та ф'ючерси. Це рівняння лежить в основі методу Монте-Карло, який використовується для чисельного моделювання випадкових процесів.

3.3.2. Методи апроксимації

У фінансовій математиці апроксимація відіграє важливу роль, оскільки дозволяє уявити складні функції або дані у більш зручній та компактній формі. Методи апроксимації широко використовуються для моделювання фінансових процесів, обчислення значень похідних інструментів та побудови прогнозів.

Основи типи задач інтерполяції та апроксимації

Інтерполяція – це метод знаходження значення функції у проміжній точці на основі значень у відомих вузлах. Вона використовується, коли необхідно відновити поведінку функції у невідомих точках.

Апроксимація – це спосіб наближення складної функції більш простою функцією з метою спрощення обчислень або аналізу. На відміну від інтерполяції, апроксимуюча функція має точно проходити через задані точки, але мінімізує помилки між реальними і наближеними значеннями.

Лінійна інтерполяція

Лінійна інтерполяція – це простий і швидкий метод, який передбачає, що між відомими точками функція змінюється лінійно.

Формула лінійної інтерполяції:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

де x_0 та x_1 – відомі точки, а $f(x_0)$ та $f(x_1)$ – значення функції у цих точках.

Приклад:

Знайти наближене значення функції $f(x)$ в точці $x = -1.3$, якщо відома наступна таблиця її значень:

x_i	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5
$f(x_i)$	-0.7	0	0.7	1	0.7	0	-0.7

Таблиця фіксованих значень функції

Скориставшись формулою, спочатку визначимо між якими значеннями ми будемо шукати значення функції. В нашому випадку між $x_0 = -1.5$ та $x_1 = -1$. Далі, підставляємо у формулу:

$$f(x) = -0.7 + \frac{0 - (-0.7)}{-1 - (-1.5)}\big(x - (-1.5)\big) = 1.4x + 1.4$$

а в точці $f(-1.3) = -0.42$.

Поліноміальна інтерполяція

Поліноміальна інтерполяція будує поліном степені n який проходить через $n + 1$ заданих точок. Цей метод використовується для опису складніших залежностей, ніж лінійна інтерполяція.

Загальна форма полінома:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

де $a_j, i = \overline{0, n}$ – постійні коефіцієнти.

Метод Ньютона

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$+ C_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

де коефіцієнти C_i знаходяться з рівнянь:

$$P_n(x_i) = y_i, i = 0,1,2, \dots, n$$

які дозволяють записати систему

$$\begin{cases} C_0 = y_0 \\ C_0 + C_1(x - x_0) = y_1 \\ C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1) = y_2 \\ \dots \\ C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + C_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) = y_n \end{cases}$$

Це система рівнянь з трикутною матрицею.

Метод Лагранжа:

Інтерполяція за Лагранжем вживається в загальному випадку для довільно розташованих вузлів.

Поліном Лагранжа задається як:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)$$

де $L_i(x)$ – базисний поліном, який знаходиться за формулою:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Сплайн – інтерполяція

Інтерполяція за допомогою полінома Лагранжа або Ньютона на всьому відрізку з великою кількістю вузлів часто дає неточні результати через значне накопичення похибок під час обчислень. До того ж, через розбіжність методу інтерполяції збільшення кількості вузлів не завжди покращує точність. Щоб зменшити похибки, відрізок ділять на менші частини, і на кожному з них функцію $f(x)$ наближають багаточленом невеликого ступеня.

Сплайн-функцією або сплайном називають кусково-поліноміальну функцію, що визначена на відрізку і має на цьому відрізку деяке число неперервних похідних.

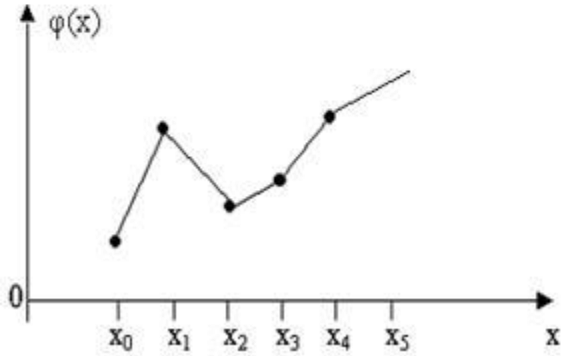
Кусочно-лінійною функцією (лінійним сплайном) називається функція:

$$f(x) = \begin{cases} a_1x + b_1, & x \in [x_0, x_1] \\ a_2x + b_2, & x \in [x_1, x_2] \\ & \dots \\ a_nx + b_n, & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Для знаходження n пар її коефіцієнтів маємо систему з $2n$ лінійних рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1x_0 + b_1 = y_0 \\ a_1x_1 + b_1 = y_1 \end{cases} \\ \begin{cases} a_2x_1 + b_2 = y_1 \\ a_2x_2 + b_2 = y_2 \end{cases} \\ \quad\quad \dots \\ \begin{cases} a_nx_{n-1} + b_n = y_{n-1} \\ a_nx_n + b_n = y_n \end{cases} \end{array}\right.$$

Графік кусково-лінійної функції має вигляд:



Кусковоно-квадратичною функцією (квадратичним сплайном) називається функція:

$$f(x) = \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1, & x \in [x_0, x_2] \\ a_2x^2 + b_2x + c_2, & x \in [x_2, x_4] \\ \quad\quad \dots & \\ a_nx^2 + b_nx + c_n, & x \in [x_{2n-2}, x_{2n}] \end{cases}$$

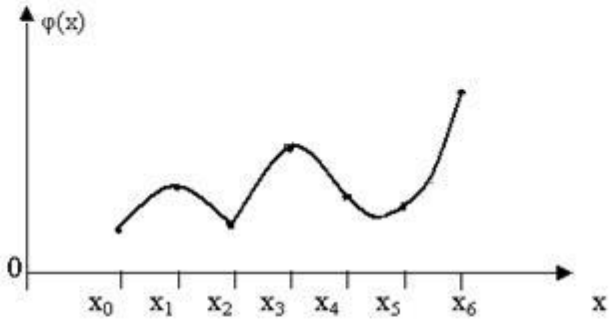
Для пошуку невідомих коефіцієнтів $a_k, b_k, c_k,$, формується система рівнянь на основі критерію інтерполяції $f(x_i), i = \overline{0, n}$. Ця система складається з n систем:

$$\begin{cases} a_kx_{2k-2}^2 + b_kx_{2k-2} + c_k = y_{2k-2} \\ a_kx_{2k-1}^2 + b_kx_{2k-1} + c_k = y_{2k-1} \\ a_kx_{2k}^2 + b_kx_{2k} + c_k = y_{2k} \end{cases}$$

Наприклад, при $k = 1$:

$$\begin{cases} a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1 = y_0 \\ a_1x_1^2 + b_1x_1 + c_1 = y_1 \\ a_1x_2^2 + b_1x_2 + c_1 = y_2 \end{cases}$$

Графічно ця функція має вигляд


φ(x)
0
x0
x1
x2
x3
x4
x5
x6
x

4. Реалізація методів чисельної інтеграції у Wolfram Mathematica

4.1. Інструменти Wolfram для числових обчислень та симуляцій.

Wolfram Mathematica – це універсальна платформа, яка активно використовується у наукових дослідженнях, інженерії та фінансовій математиці завдяки своїй здатності вирішувати завдання будь-якої складності. З моменту своєї появи в 1988 році Mathematica стала потужним інструментом, який поєднує символічні обчислення, чисельні методи і візуалізацію даних. Особливу цінність вона представляє для фінансової математики, де аналіз великих обсягів даних, моделювання випадкових процесів та використання чисельних методів є основою досліджень.

Однією з ключових причин популярності Mathematica є її гнучкість у роботі з чисельними методами. Вона пропонує повний спектр інструментів для аналізу, починаючи з базових арифметичних операцій до складних моделей.

- *Символьні обчислення:* Mathematica дозволяє аналітично вирішувати рівняння, знаходити похідні, інтеграли і спрощувати вирази, що є основою розробки теоретичних моделей.
- *Чисельні обчислення:* Програма включає широкий набір функцій для вирішення рівнянь, оптимізації та роботи з матрицями. Наприклад, NIntegrate використовується для чисельного інтегрування, а $NSolve$ – для розв'язання рівнянь.
- *Підтримка високої точності:* Mathematica дозволяє задавати точність обчислень, що є особливо важливим при аналізі фінансових даних, де навіть невеликі відхилення можуть призводити до значних змін у результатах.
- *Паралельні обчислення:* Можливість виконання завдань на кількох ядрах процесора прискорює обробку даних, що є особливо корисним для моделювання складних систем.

У контексті фінансів Mathematica надає спеціалізовані функції для аналізу ринків, моделювання часових рядів та роботи з ймовірнісними процесами:

- $FinancialData$: Дозволяє завантажувати та аналізувати історичні дані про ціни акцій, валют та інших фінансових інструментів.
- $TimeSeriesModelFit$: Використовується для створення моделей часових рядів та їх прогнозування, що важливо для аналізу волатильності або трендів.
- $RandomFunction$: Генерація випадкових процесів, включаючи броунівський рух, що необхідно для моделювання цін акцій та опціонів.

Ці інструменти роблять Mathematica потужним засобом для роботи з фінансовими моделями, починаючи з базового аналізу даних і закінчуючи складним стохастичним моделюванням.

4.1.1. Приклад – інтеграція щільності логістичного розподілу

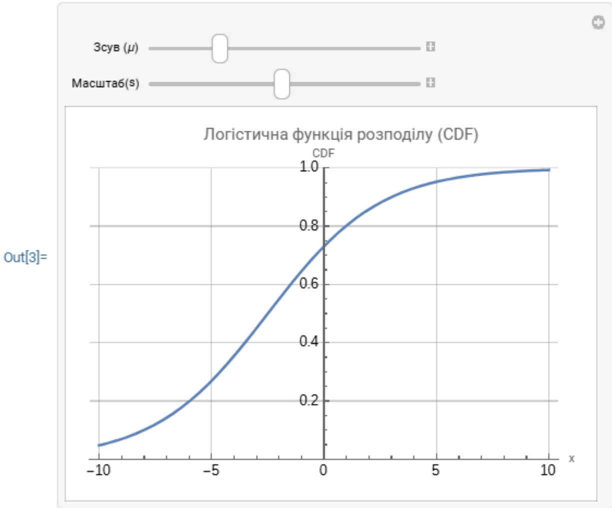
Функція щільності логістичного розподілу визначається за формулою:

$$f(x;\mu,s)=\frac{e^{-(x-\mu)/s}}{s(1+e^{-(x-\mu)/s})^2}$$

де:

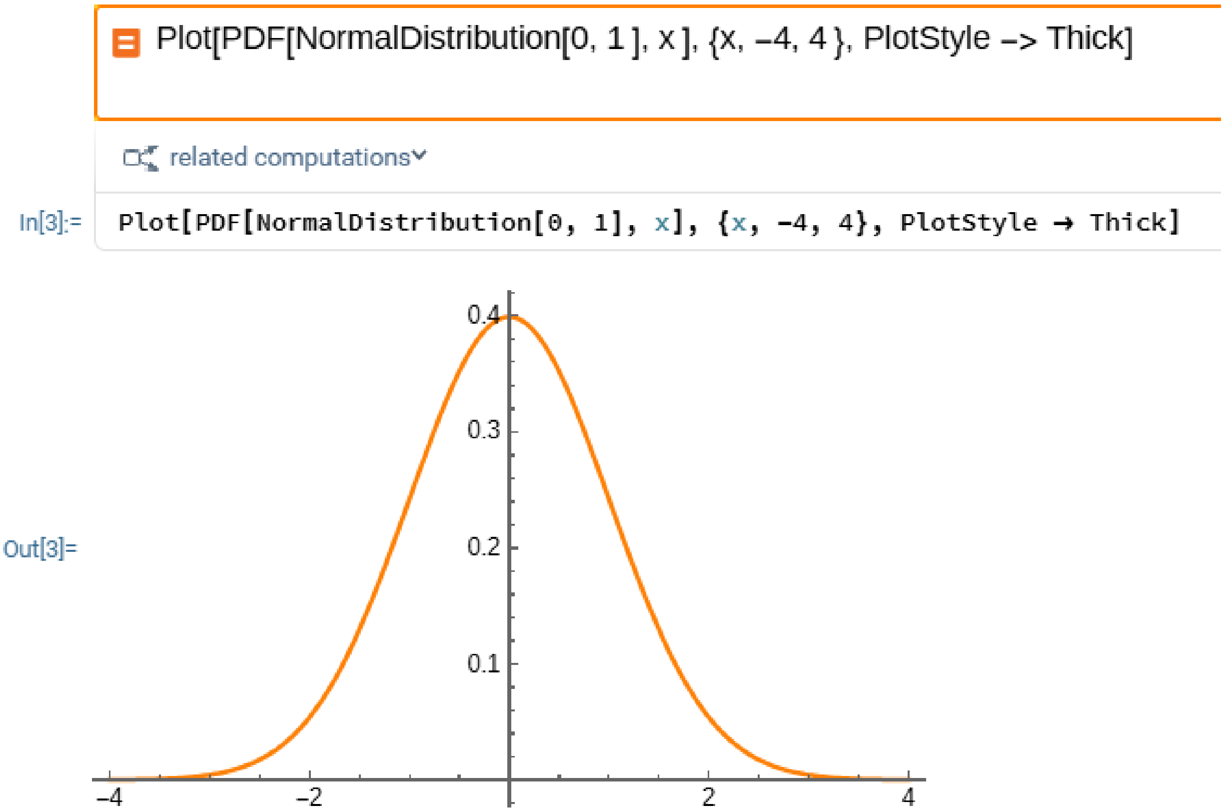
- μ – параметр зсуву,
- $s>0$ – параметр масштабування.

```
In[1]:= (* Визначення логістичної функції густини *)
        logisticPDF[x_, μ_, s_] := Exp[-(x - μ) / s] / (s (1 + Exp[-(x - μ) / s]) ^2)

In[2]:= (* Чисельне інтегрування для знаходження CDF *)
        logisticCDF[x_, μ_, s_] := NIntegrate[logisticPDF[t, μ, s], {t, -Infinity, x}]

In[3]:= (* Побудова графіка CDF для різних значень μ та s *)
        Manipulate[
         Plot[
          logisticCDF[x, μ, s], {x, -10, 10},
          PlotRange → {0, 1},
          AxesLabel → {"x", "CDF"},
          PlotLabel →
          "Логістична функція розподілу (CDF)",
          GridLines → Automatic
          ],
         {{μ, 0, "Зсув (μ)"}, -5, 5, 0.5},
         {{s, 1, "Масштаб(s)"}, 0.1, 5, 0.1}
        ]
```



4.1.2. Приклад побудови графіка щільності ймовірності

Plot[PDF[NormalDistribution[0, 1], x], {x, −4, 4}, PlotStyle −> Thick]



4.2. Основи чисельного інтегрування в Mathematica

Функція NIntegrate використовується для обчислення наближених значень певних інтегралів. Вона застосовує різні алгоритми, які автоматично підлаштовуються під особливості функції та область інтегрування. Загальний синтаксис:

$$NIntegrate[f[x],\{x,a,b\}]$$

де $f[x]$ – інтегральна функція, а a, b – межі інтеграла.

Наприклад, підрахуємо інтеграл:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)dx$$

Реалізація в програмі:

```
NIntegrate[Sin[x ], {x, 0, Pi }]
In[5]:= Integrate[Sin[x], {x, 0, Pi}]

Out[5]= 2
```

Методи, що використовуються в NIntegrate

Функція NIntegrate включає декілька алгоритмів, кожен із яких підходить для певних типів завдань.

1. *Метод трапецій* ("$Trapezoidal$")

Метод трапецій ґрунтується на розбитті області інтегрування на невеликі сегменти, де функція наближається прямими лініями. Це простий і швидкий алгоритм, який підходить для гладких функцій.

```
NIntegrate[Exp[−x^2 ], {x, −Infinity, Infinity }, Method –> "Trapezoidal "]
In[7]:= NIntegrate[Exp[-x^2], {x, -Infinity, Infinity}, Method → "Trapezoidal"]

Out[7]= 1.77245
```

2. *Метод Сімпсона* ("$SimpsonRule$")

Метод Сімпсона використовує параболи для наближення функції на кожному інтервалі. Він точніший, ніж метод трапецій, особливо для гладких функцій.

$$NIntegrate[Sin[x^2],\{x,0,Pi\},Method -> "SimpsonRule"]$$

3. *Метод Гауса* ("$GaussKronrodRule$")

Метод Гауса ґрунтується на використанні ортогональних поліномів для точної оцінки інтегралів. Цей метод є ефективним для функцій з гострими піками або розривами.

```
NIntegrate[1 /( 1 + x^2 ), {x, –10, 10 }, Method –> "GaussKronrodRule "]
In[19]:= NIntegrate[1/(1 + x^2), {x, -10, 10}, Method → "GaussKronrodRule"]
Out[19]= 2.94226
```

4. Адаптивні алгоритми

Однією з особливостей NIntegrate є використання адаптивних алгоритмів. На відміну від фіксованих методів адаптивні алгоритми автоматично змінюють щільність точок розбиття залежно від поведінки функції. Це робить їх ідеальними для складних функцій із різкими змінами чи особливостями.

```
NIntegrate[Sin[1/x ], {x, 0.01, 1 }]
alternate interpretations   related computations   full Wolfram|Alpha results
In[27]:= Integrate[Sin[1/x], {x, 0.01, 1}]
Out[27]= 0.503982
```

5. Особливості роботи з розривними функціями

У фінансовій математиці часто зустрічаються розривні функції, наприклад, при моделюванні опціонів з бар'єрами. NIntegrate може коректно обробляти такі функції, автоматично визначаючи точки розриву.

```
NIntegrate[UnitStep[x – 1 ], {x, 0, 2 }]
alternate interpretations   related computations   full Wolfram|Alpha results
Assuming "NIntegrate" is an integral | Use as a math function instead
In[23]:= Integrate[UnitStep[x - 1], {x, 0, 2}]
Out[23]= 1
```

результат 1 – це бар’єр, який буде в точці 1 в даному випадку.

6. Методи Монте-Карло

Використовуються для складних інтегралів та задач із випадковими функціями. Цей метод добре працює для багатовимірних інтегралів:

```
NIntegrate[Exp[-(x^2 + y^2 )], {x, -Infinity, Infinity }, {y, -Infinity, Infinity }, Method -> "MonteCarlo"]
```

```
In[8]:= NIntegrate[Exp[-(x^2 + y^2)], {x, -Infinity, Infinity}, {y, -Infinity, Infinity}, Method →
   "MonteCarlo"]

Out[8]= 3.22846
```

4.3. Управління точністю у Wolfram Mathematica

У Mathematica параметри точності можна задавати та контролювати за допомогою вбудованих функцій. Наприклад:

Опції точності в NIntegrate:

- $AccuracyGoal$: мінімальна кількість значущих цифр, необхідних у результаті.
- $PrecisionGoal$: мінімальна кількість точних цифр у обчисленнях.
- $WorkingPrecision$: кількість цифр точності під час обчислень.

4.4. Ціноутворення опціонів за допомогою чисельного інтегрування

Чисельне інтегрування використовується для розрахунку цін опціонів та інших похідних інструментів. Наприклад, при використанні моделі Блека-Шоулза для оцінки вартості європейського опціону на акцію:

$$C = e^{-rT} \int_{-\infty}^{\infty} (S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}z} - K)\varphi(z)dz$$

де:

- C – ціна опціону
- S_0 – поточна ціна базового активу,
- r – безризикова ставка,
- σ – волатильність,
- T – час до експірації,
- K – ціна виконання,
- $\varphi(z)$ – щільність нормального розподілу.

- $S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}z} > K$

Чисельне інтегрування з використанням функції NIntegrate у Wolfram Mathematica дозволяє обчислити даний інтеграл навіть для складних випадків, таких як опціони з бар'єрними умовами або багатовимірні опціонні структури.

4.4.1. Інтегральний підхід до розрахунку бар'єрних опціонів

Бар'єрні опціони є складнішими фінансовими інструментами, де підсумкова виплата залежить від того, чи перетнула ціна базового активу певний рівень. Такі опціони вимагають багатовимірної інтеграції, якщо враховувати кореляцію між різними активами.

Приклад:

Згідно моделі Блека-Шоулза, логарифм кінцевої ціни активу S_t має нормальний розподіл:

$$\ln(S_t) \sim N\left(\ln(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right)$$

Використовуємо стандартне перетворення нормальної випадкової величини та потенціюючи отримаємо:

$$S_t = S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}z}$$

$$C = e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}(S_t - K)H(S_t - B)\varphi(z)dz$$

де S_t – представляє собою ціну активу в момент закінчення опціону, $H(S_t - B)$ – індикатор функції, який набуває значення 1, якщо ціна S_t перетнула бар'єр B.

4.5. Приклади застосування у фінансовій математиці

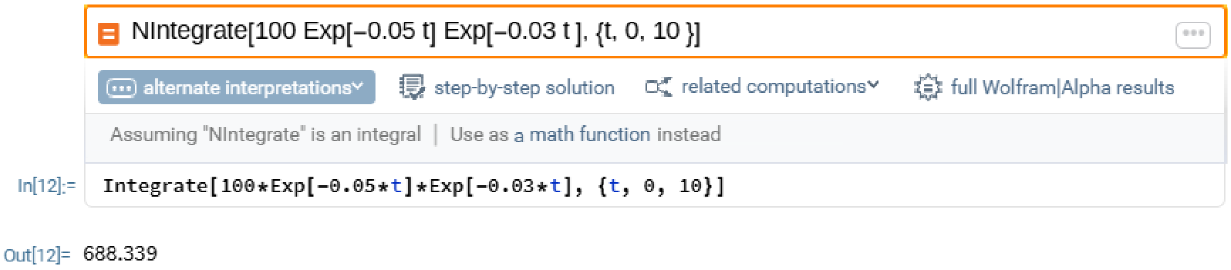
Приклад:

Для розрахунку вартості фінансових інструментів, таких як облігації або свопи, можна використовувати таку функцію:

$$\mathrm{NIntegrate[CashFlow[t]\ Exp[-r\ t], \{t, t0, tn\}]}$$

1. $CashFlow[t]$: Функція $CashFlow(t)$ визначає грошовий потік у часі. Це може бути будь-яка заздалегідь задана або функція, що обчислюється, що описує зміни потоку.
2. $Exp[-r\ t]$: Множник e^{-rt} виконує дисконтування майбутніх грошових потоків до поточного часу. Де r – безперервна відсоткова ставка (наприклад, річна).
3. $\{t, 0, T\}$: Вказує межі інтегрування:
   - $t = 0$: початковий час (зазвичай тепер).
   - $t = T$: кінцевий час (наприклад, час закінчення проекту).

Нехай наш грошовий потік описується функцією $100e^{-0.05t}$, ставка дисконтування $r = 0.03$, а межі інтегрування $(0,10)$, тобто ($T = 10$ років), код реалізації буде:



Приклад:

Реалізація бар'єрного опціону "Up-and-Out" у Mathematica з наступними умовами:

1. Умови бар'єрного опціону:
   - Бар'єр встановлений лише на рівні $Barrier = 120$.
   - Якщо ціна базового активу x перетинає бар'єр ($x \geq 120$), опціон стає недійсним.
2. Умови виплати ($Payoff$):

Виплата опціону залежить від формули:

$$Payoff(x) = \max(x - Strike, 0)$$

де $Strike\ = \ 100$ – ціна виконання опціону.

3. Щільність ймовірності базового активу:

Ціна базового активу x підпорядковується нормальному розподілу $N(100{,}20)$.

4. Процентна ставка та дисконтування:

Враховується дисконтування за ставкою $r = 0.05$ на період $T = 1$ рік.

Реалізація коду:

```
NIntegrate [( Max[x − 100, 0 ]) * PDF[NormalDistribution[100, 20 ], x] * If[x < 120, 1, 0 ], {x, 0, Infinity }] * Exp[−0.05 * 1]
full Wolfram|Alpha results
In[17]:= NIntegrate[Max[x - 100, 0]*PDF[NormalDistribution[100, 20], x]*If[x < 120, 1, 0], {x, 0, Infinity}]*Exp[-0.05*1]

Out[17]= 2.98632
```

5. Реалізація симуляцій Монте-Карло у Wolfram Mathematica

Wolfram Mathematica, як універсальна система для чисельних розрахунків і візуалізації даних, надає багатий інструментарій для реалізації методу Монте-Карло. За допомогою цієї платформи можливо генерувати випадкові процеси, моделювати динаміку цін активів і обчислювати вартості опціонів з високою точністю. Можливість інтеграції чисельних, аналітичних і графічних методів робить Mathematica ідеальним вибором для симуляцій.

Моделювання Вінерівського процесу для оцінки вартості опціонів

Вінерівський процес – це стохастичний процес з неперервними часом, який є математичною моделлю випадкового блукання. Він є основою більшості моделей динаміки цін активів у теорії фінансової математики.

Нагадаємо його властивості:

- $w(0) = 0$, тобто початкове значення в нулі,
- Неперервність траєкторій: траєкторії процесу безперервна з часом.
- Незалежність приростів: прирости $w(t) - w(s)$ незалежні для будь-яких $t > s \geq 0$
- Прирости мають нормальний розподіл з параметрами $N(0, t - s)$.

У фінансовій математиці часто використовується геометричний вінерівський процес для моделювання цін активів. Якщо ціна активу $S(t)$ у момент часу t описується стохастичним диференціальним рівнянням:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dw(t),$$

це називається геометричним Вінерівським процесом, де:

- μ – середня дохідність активу,
- σ – волатильність,
- $dw(t)$ – приріст Вінерівського процесу.

Wolfram Mathematica пропонує потужні інструменти для моделювання випадкових процесів, включаючи реалізацію Вінерівського процесу. Генерація траєкторій Вінерівського процесу включає використання функцій для випадкових чисел та нормального розподілу.

5.1. Генерація траєкторій

У Mathematica можна використовувати функцію $RandomVariate$ для створення випадкових чисел, що відповідають розподілу приrощень Вінерівського процесу:

```
In[2]:= (* Параметри *)
timeSteps = 100; (* Кількість тимчасових кроків *)
T = 1; (* Кінцевий час *)
dt = T/timeSteps; (* Крок за часом *)

In[11]:=
(* Генерація приросту Вінівського процесу *)
increments = RandomVariate[NormalDistribution[0, Sqrt[dt]], timeSteps];

In[12]:=
(* Побудова траєкторії *)
trajectory = Accumulate[Prepend[increments, 0]];

In[13]:=
(* Візуалізація *)
ListLinePlot[trajectory, PlotStyle → Thick,
  AxesLabel → {"Time Step", "W(t)"},
  PlotLabel → "Траєкторія Вінерівського процесу"]
```

Out[13]=

Цей код створює випадкову траєкторію Вінерівського процесу на тимчасовому відрізку $[0, T]$ з кроком Δt.

Приклад моделювання геометричного Вінерівського процесу

Для моделювання геометричного Вінерівського процесу необхідно увімкнути параметри μ та σ:

```
In[20]:= (* Параметри моделі *)
mu = 0.05; (* Середня прибутковість *)
sigma = 0.2; (* Волатильність *)
S0 = 100; (* Початкова ціна активу *)

(* Генерація траєкторії *)
geoTrajectory = S0 * Exp[Accumulate[Prepend[mu * dt + sigma * increments, 0]]];

(* Візуалізація *)
ListLinePlot[geoTrajectory, PlotStyle → Thick,
 AxesLabel → {"Time Step", "S(t)"},
 PlotLabel → "Траєкторія геометричного Вінерівського процесу"]
```

Out[24]=

5.2. Моделювання вартості різних типів опціонів за допомогою методу Монте-Карло

Основна ідея методу Монте-Карло полягає у генерації великої кількості сценаріїв (траєкторій) динаміки ціни активу, оцінці відповідних виплат за опціоном та обчисленні середнього значення дисконтованих виплат:

$$C = e^{-rt}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Payoff(S_i(T))$$

де:

- C – вартість опціону,
- r – безризикова процентна ставка,

- T – час до виконання опціону,
- N – число сценаріїв,
- $Payoff(S_i(T))$ – виплата за опціоном на i-ої траєкторії.

5.2.1. Європейський опціон

Вінерівський процес є основою оцінки вартості опціонів методом Монте-Карло. Основна ідея полягає в симуляції великої кількості траєкторій цін активу та розрахунку середньої дисконтованої виплати за опціонами.

Алгоритм для європейського опціонна "call" та "put"

1. Задати параметри опціону: ціна виконання K, час до виконання T, початкова ціна активу S_0, волатильність σ, середня прибутковість μ, безризикова ставка r.
2. Змоделювати N – траєкторій геометричного Вінерівського процесу.
3. Для кожної траєкторії розрахувати ціну активу $S(T)$ у момент виконання.
4. Обчислити виплати за опціонами:
   - Для опціону "call": $\max(S(T) - K, 0)$
   - Для опціону "put":$\max(K - S(T),0)$
5. Дисконтувати виплати з урахуванням ставки r.
6. Знайти середнє значення всіх виплат.

Реалізація у Mathematica:

(unnamed) File Edit Format

```
In[214]:= (* Параметри *)
    nPaths = 10000; (* Число траєкторій *)
    K = 110; (*Ціна виконання *)
    r = 0.03; (* Безризикова ставка *)
    S0 = 100; (* Початкова ціна активу *)
    mu = 0.05; (* Очікувана прибутковість *)
    sigma = 0.2; (* Волатильність *)
    T = 1; (* Час до експірації *)
    timeSteps = 100; (* Кількість тимчасових кроків *)
    dt = T / timeSteps; (* Крок за часом *)
```

```
(* Генерація траєкторій *)
trajectories = Table[ S0 * Exp[Accumulate[mu * dt + sigma * RandomVariate[NormalDistribution[0, Sqrt[dt]], timeSteps]]][[-1]], {nPaths} ];

(* Розрахунок виплат *)
payoffsCall = Table[Max[trajectory - K, 0], {trajectory, trajectories}];
payoffsPut = Table[Max[K - trajectory, 0], {trajectory, trajectories}];

(* Дисконтування *)
priceCall = Mean[payoffsCall] * Exp[-r * T];
pricePut = Mean[payoffsPut] * Exp[-r * T];

(* Результати *)
{priceCall, pricePut}
Out[228]= {7.1595, 9.7582}
```

5.2.2. Азіатські опціони

Азіатські опціони ґрунтують свої виплати на середній ціні активу за певний період. Це робить їх менш схильними до короткострокової волатильності ринку.

Середня ціна активу:

Для азіатського опціону виплата розраховується на основі середньої арифметичної ціни базового активу:

$$A_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(t_i)$$

Виплати за азіатським опціоном:

- Для опціону "call": $\max(A_T - K, 0)$
- Для опціону "put":$\max(K - A_T, 0)$

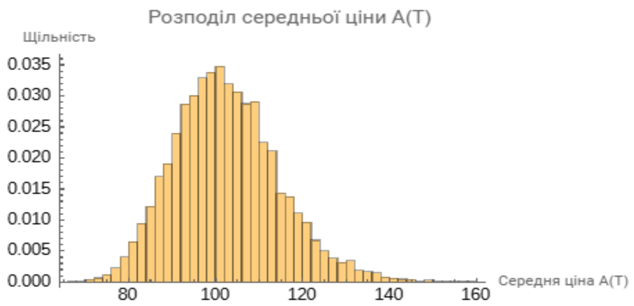
Реалізація у Mathematica:

```
In[14]:= (* Параметри *)
S0 = 100; (* Початкова вартість базового активу *)
K = 100; (*Ціна виконання *)
r = 0.05; (* Безризикова ставка *)
sigma = 0.2; (* Волатильність *)
T = 1; (* Час до експірації (у роках) *)
timeSteps = 100; (* Кількість тимчасових кроків *)
dt = T / timeSteps; (* Крок за часом *)
nPaths = 10000; (* Кількість симуляцій *)

In[22]:= (* Генерація траєкторій базового активу *)
trajectories = Table[
  Module[{S = S0}, Table[ S = S * Exp[(r - 0.5 * sigma ^ 2) * dt + sigma * Sqrt[dt] * RandomVariate[NormalDistribution[0, 1]]], {timeSteps} ] ],
  {nPaths}
];
```

```
In[23]:= (* Середні арифметичні ціни для всіх траєкторій *)
averagePrices = Mean /@ trajectories;

In[24]:= (* Розрахунок виплат за азіатським опціоном *)
payoffsCall = Max[#, 0] & /@ (averagePrices - K);
payoffsPut = Max [#, 0] & /@ (K - averagePrices); (* Для пут - опціону *)

In[26]:= (* Оцінка вартості опціону *)
priceCall = Mean[payoffsCall] * Exp[-r * T];
pricePut = Mean[payoffsPut] * Exp[-r * T];

In[32]:= (* Результати *)
{priceCall, pricePut}

(* Графік розподілу середньої ціни *)
Histogram[ averagePrices, 50, "PDF", PlotLabel → "Розподіл середньої ціни A(T)",
  AxesLabel → {"Середня ціна A(T)", "Щільність"}]

(* Графік однієї з траєкторій *)
ListLinePlot[ trajectories[[1]], PlotStyle → Thick, AxesLabel → {"Крок часу", "Ціна базового активу"}, PlotLabel → "Приклад траєкторії базового активу"]
```

Out[32]= {5.73037, 3.41708}

Out[33]=



Out[34]=

5.2.3. Бар'єрні опціони

Бар'єрні опціони активуються або деактивуються, якщо ціна активу досягає заданого рівня ("бар'єра") протягом терміну дії опціону.

Типи бар'єрних опціонів:

- Knock-in: активується при досягненні бар'єру.
- Knock-out: деактивується при досягненні бар'єру.

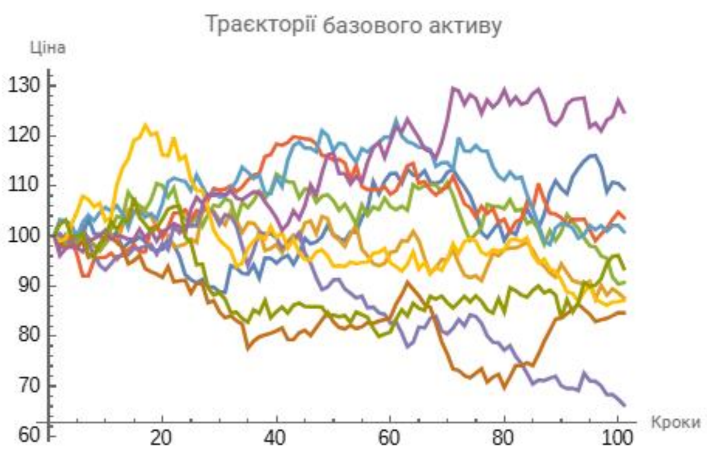
Реалізація у Wolfram Mathematica

Приклад для knock-out опціону "call":

```
In[54]:= (* Параметри *)
S0 = 100; (* Початкова ціна базового активу *)
K = 100; (*Ціна виконання *)
barrier = 120; (* Рівень бар'єру *)
r = 0.05; (* Безризикова ставка *)
sigma = 0.2; (* Волатильність *)
T = 1; (* Час до експірації *)
timeSteps = 100; (* Кількість тимчасових кроків *)
dt = T / timeSteps; (* Крок за часом *)
nPaths = 10000; (* Кількість симуляцій *)

In[63]:= (* Генерація траєкторій *)
trajectories = Table[Module[{path}, path = S0 * Exp [ Accumulate[
    Prepend[ RandomVariate[ NormalDistribution[(r - 0.5 * sigma ^ 2) * dt, sigma * Sqrt[dt]], timeSteps ], 0 ] ] ]; path ], {nPaths}

In[64]:= (* Перевірка перетину бар'єру *)
knockOutTrajectories = Select[trajectories, Max[#] < barrier &];

In[65]:= (* Розрахунок виплат *)
finalPrices = Last /@ knockOutTrajectories; (* Останні ціни по траєкторіях *)
payoffsCall = Max [#, 0] & /@ (finalPrices - K); (* Виплати за опціоном *)

In[67]:= (* Вартість опціону *)
priceCall = If [
  Length[knockOutTrajectories] > 0, (* Перевіряємо, чи є траєкторії без перетину бар'єру *)
  Mean[payoffsCall] * Exp[-r * T], (* Розраховуємо вартість *)
  0 (* Якщо всі траєкторії перетнули бар'єр, вартість = 0 *)
];

In[68]:= (* Результат *)
priceCall

ListLinePlot[trajectories[[1 ;; 10]], PlotRange → All,
  PlotLabel → "Траєкторії базового активу", AxesLabel → {"Кроки", "Ціна"}]

ListLinePlot[knockOutTrajectories[[1 ;; Min[10, Length[knockOutTrajectories]]]],
  PlotRange → All, PlotLabel → "Траєкторії без перетину бар'єру",
  AxesLabel → {"Кроки", "Ціна"}]
```

Out[68]= 2.2559

Out[69]=



Out[70]=


5.3. Порівняння результатів симуляцій із аналітичними рішеннями

Щоб порівняти результати симуляцій Монте-Карло з аналітичним рішенням реалізуємо послідовно наступні дії:

1. Виконання симуляції методом Монте-Карло: генерація траєкторій ціни активу та розрахунок середньої виплати.
2. Розрахунок аналітичного рішення: використання формули Блека-Шоулза.
3. Порівняння: обчислення різниці між результатами двох методів.

Критерії порівняння:

- Абсолютна помилка:$|C_{MC} - C_{BS}|$, де C_{MC} – результат Монте-Карло, C_{BS} – аналітичне рішення.
- Відносна помилка: $\frac{|C_{MC}-C_{BS}|}{C_{BS}}$
- Час обчислень: аналітичне рішення зазвичай отримується швидше, але є менш гнучким.

Приклад: Європейський опціон.

Аналітичне рішення:

```
In[84]:= (* Параметри *)
S0 = 100; (* Початкова вартість базового активу *)
K = 110; (*Ціна виконання *)
T = 1; (* Час до закінчення опціону *)
r = 0.05; (* Безризикова ставка *)
sigma = 0.2; (* Волатильність *)
nPaths = 10000; (* Кількість траєкторій *)

In[90]:= (* Формула Блека - Шоулза *)
d1 = (Log[S0 / K] + (r + sigma ^ 2 / 2) * T) / (sigma * Sqrt[T]);
d2 = d1 - sigma * Sqrt [T];
callPriceBS = S0 * CDF[NormalDistribution[], d1] - K * Exp[-r * T] * CDF[NormalDistribution[], d2];
Print["Ціна колл-опціону за формулою Блека-Шоулза: ", callPriceBS];
Ціна колл-опціону за формулою Блека-Шоулза: 6.04009
```

Результат методом Монте-Карло для тих самих параметрів:

```
In[94]:= (* Монте - Карло симуляція *)
trajectories =
Table[
  S0 * Exp[(r - 0.5 * sigma ^ 2) * T + sigma * RandomVariate[NormalDistribution[0, Sqrt[T]]]],
  {nPaths}
  ];

In[95]:= payoffs = Max [#, 0] & /@ (trajectories - K);
callPriceMC = Mean[payoffs] * Exp[-r * T];
Print["Ціна колл-опціону методом Монте-Карло: ", callPriceMC];
Ціна колл-опціону методом Монте-Карло: 6.20272
```

Маємо:

$$C_{MC} = 6.20272;\ C_{BS} = 6.04009$$

Зайдемо похибку:

- Абсолютна помилка:$|C_{MC} - C_{BS}| = 0.16263$
- Відносна помилка: $\frac{|C_{MC} - C_{BS}|}{C_{BS}} = 0.0269251$

Бачимо, що відмінність у двох методів мінімальна та дорівнює 0.16263. А відносна помилка становить лише близько 2.7%, що є прийнятним результатом для симуляцій із 10,000 траєкторій.

6. Аналіз похибок і порівняння методів

Одним із найважливіших аспектів застосування чисельних методів є аналіз їх точності. Помилки, що виникають у процесі обчислень, можуть суттєво впливати на результати фінансового аналізу, особливо у сценаріях, де малі похибки призводять до значних змін вартості інструментів чи показників ризику. Тому для побудови ефективних обчислювальних моделей стає необхідним глибоке розуміння природи помилок, їх джерел і способів їх мінімізації.

6.1. Точність чисельної інтеграції

Чисельна інтеграція застосовується на вирішення завдань, де аналітичне інтегрування неможливе чи недоцільно. Приклади включають розрахунок поточної вартості грошових потоків або вартості опціонів із безперервними функціями виплат.

Похибки чисельної інтеграції поділяються на три основні категорії:

1. Похибки, що визначаються обраним кроком дискретизації функції.

При чисельній інтеграції безперервна функція замінюється кінцевим набором значень у заданих точках. Чим менший крок розбиття, тим вища точність, проте це збільшує кількість та складність обчислень. Якщо мова йде про використані методи, то

– при використанні методу трапецій похибка зменшується пропорційно квадрату кроку $\left(O(h^2)\right)$;

– у методі Сімпсона точність зростає і помилка зменшується пропорційно до четвертого ступеня кроку $\left(O(h^4)\right)$.

2. Похибки округлення.

У розрахунках з використанням комп'ютерів похибки округлення накопичуються, особливо під час роботи з великими масивами даних. Ці помилки залежать від точності арифметики, реалізованої у програмному середовищі.

3. Похибки, пов’язані з особливостями поведінки функції.

Якщо функція, що інтегрується, має особливості (розриви, точки перегину), стандартні методи можуть працювати неефективно. Для таких випадків використовуються адаптивні методи, наприклад, інтеграція зі змінним кроком.

Методи підвищення точності:

1. Збільшення числа вузлів.

Зменшення кроку розбиття призводить до більшої точності, проте потребує великих обчислювальних ресурсів. Для складних функцій може бути непрактичним.

2. Використання адаптивних методів.

Метод Гауса підбирає точки інтеграції (вузли) таким чином, щоб мінімізувати похибку для поліномів високого ступеня. Це робить його точним для поліномів ступеня до $2n-1$, де n – кількість точок. Завдяки цьому метод є ефективним для гладких і складних функцій.

3. Застосування сплайн-інтерполяції.

Розподіл функції на шматкові поліноми дозволяє згладити особливості функції, підвищуючи точність інтеграції.

6.2. Точність методу Монте-Карло

Метод Монте-Карло є особливо корисним для високорозмірних завдань або задач зі складною геометрією. Однак його точність обмежена випадковою природою методу.

Джерела помилок методу Монте-Карло:

1. Статистична помилка

Точність методу Монте-Карло залежить від кількості симуляцій N. Стандартна помилка зменшується пропорційно $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Наприклад, збільшення числа симуляцій з 1000 до 10000 зменшує стандартну помилку приблизно втричі.

2. Помилки генерації випадкових чисел

Якість випадкових послідовностей, які у симуляціях, безпосередньо впливає на результати. Використання псевдовипадкових чисел може призвести до накопичення систематичних помилок.

3. Неправильна модель стохастичного процесу

Якщо вибрана модель випадкового процесу погано описує реальну динаміку, помилки методу Монте-Карло зростуть, навіть за великої кількості симуляцій.

Методи підвищення точності:

1. Використання високоякісних генераторів квазівипадкових чисел

Квазівипадкові числа, також їх називають послідовностями з низькою розбіжністю, часто позначаються як $\{x_i\}_{i=1}^N$, де $x_i \in [0,1]^d$ – точка в d-вимірному одиничному кубі, а i – індекс точки.

2. Збільшення числа симуляцій

Збільшення числа траєкторій підвищує точність, але потребує значних обчислювальних ресурсів.

6.3. Методи оцінки похибок

Для точного визначення рівня похибок у симуляціях застосовуються такі підходи:

1. Аналітичний вираз похибки

Для чисельних методів, таких як інтеграція трапецій або методу Сімпсона, відомі аналітичні оцінки похибки, що залежать від кроку розбиття.

2. Метод повторних обчислень

Включає повторення розрахунків із різними параметрами, такими як крок інтеграції чи кількість траєкторій. Порівняння результатів дозволяє оцінити стабільність методу.

3. Порівняння з точним рішенням

У деяких випадках можна порівняти чисельні результати з аналітичним рішенням, якщо воно відоме. Наприклад, вартість європейського опціону можна оцінити як чисельно, і аналітично за формулою Блека-Шоулза.

4. Оцінка дисперсії

Для методу Монте-Карло дисперсія результатів дає змогу оцінити рівень випадкової помилки.

У фінансовій математиці, де рішення приймаються за умов обмеженого часу, оцінка часу виконання алгоритмів стає критичним аспектом. Наприклад:

- Біржові торги: розрахунок ціни опціону у реальному часі може вплинути на стратегію хеджування.
- Кредитні ризики: швидка оцінка ймовірності дефолту допомагає приймати рішення щодо видачі кредитів.
- Аналіз портфелів: оновлення моделі ризику за зміни ринкових умов потребує миттєвих розрахунків.

6.4. Оптимізація обчислень

Для підвищення ефективності чисельних методів у фінансових задачах застосовуються такі підходи:

1. Адаптивні алгоритми

Наприклад, у чисельній інтеграції адаптивні методи зменшують кількість обчислень в областях із малим вкладом в інтеграл.

2. Паралельні обчислення

Метод Монте-Карло ідеально підходить для паралельної обробки, оскільки траєкторії можуть моделюватись незалежно одна від одної.

3. Використання GPU

Для інтенсивних обчислень GPU(Графічний процесор) дозволяють прискорити симуляції Монте-Карло вдесятеро порівняно з CPU.

4. Оптимізація коду

Використання спеціалізованих функцій, таких як $NIntegrate$ або $ParallelTable$ у Wolfram Mathematica, знижує час виконання.

7. Приклад застосування для реальних фінансових інструментів

Для моделювання вартості деривативів необхідні якісні та актуальні ринкові дані, включаючи:

- Ціни базових активів (акції, облігації, товари).
- Історичну волатильність та передбачувану волатильність.
- Дані про процентні ставки.
- Коефіцієнти кореляції між активами (якщо це портфель).

Джерела реальних даних:

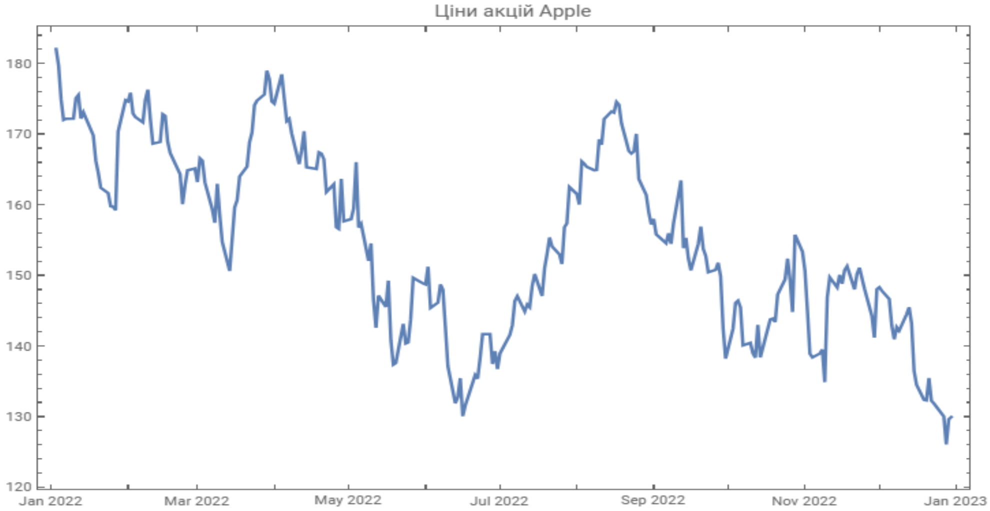
1. Yahoo Finance
   - Платформа надає безкоштовний доступ до даних про ціни акцій, історичну волатильність та опціони.
   - API-інтерфейси та експорт даних у CSV полегшують інтеграцію з Mathematica.
2. Quandl
   - Платформа пропонує доступ до безлічі фінансових даних, включаючи дані про сировинні ринки, облігації та валютні курси.
3. Alpha Vantage
   - Безкоштовний API для отримання даних про ціни акцій, криптовалют та індексів.
4. Bloomberg Terminal (платний):
   - Одне з найнадійніших джерел ринкових даних із широким функціоналом для аналізу деривативів.
5. Вбудовані функції Wolfram Mathematica
   - $FinancialData[]$ – функція для завантаження ринкових даних у реальному часі. Наприклад, $FinancialData["AAPL","Close"]$ повертає ціни закриття акцій Apple.
   - $TimeSeries$ і $TemporalData$ використовуються для аналізу часових рядів.

Для компанії Apple:

In[16]:=
```
(* Завантаження цін закриття акцій Apple за останній рік *)
dataAAPL = FinancialData["AAPL", {{2022, 1, 1}, {2023, 1, 1}}];
FinancialData["AAPL", "Close"]

(* Візуалізація часового ряду *)
DateListPlot[dataAAPL, PlotLabel → "Ціни акцій Apple",
  AxesLabel → {"Date", "Price"}, ImageSize → Large]
```

Out[17]= $242.84

Out[18]=

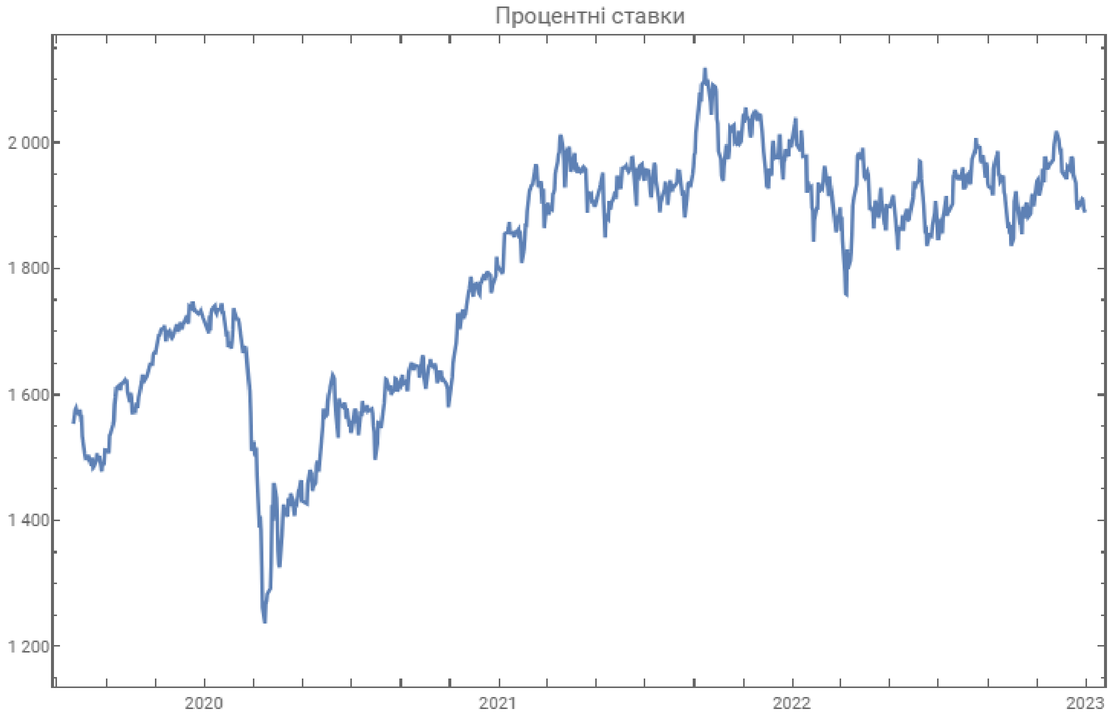


Приклад завантаження процентних ставок(Tokyo Stock Price Index):

```
(* Завантаження даних про 10-річні казначейські облігації Японії *)
dataRates = FinancialData["^TOPX", {{2013, 1, 1}, {2023, 1, 1}}];
```

In[28]:=
```
(* Візуалізація процентних ставок *)
DateListPlot[dataRates, PlotLabel → "Процентні ставки",
  AxesLabel → {"Date", "Rate (%)"}, ImageSize → Large]
```

Out[28]=

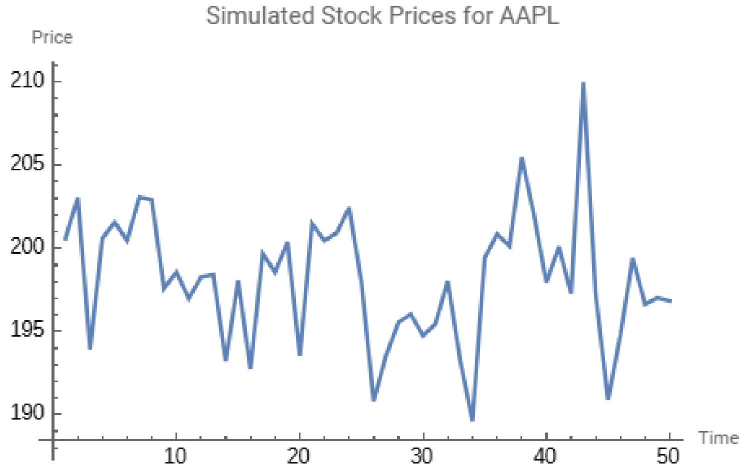


7.2. Реалізація методу Монте-Карло для опціонів:

Приклад для компанії Apple:

In[169]:=
```
(* Поточна ціна *)
currentPrice = QuantityMagnitude[Last[dataAAPL["Values"]]];

(* Перетворимо дані з текстового формату на числові *)
prices = QuantityMagnitude[dataAAPL["Values"]]

(* Параметри *)
sigma = StandardDeviation[Differences[Log[prices]]];
r = 0.03; (* Безризикова ставка *)
t = 1; (* Час - 1 рік *)
paths = 1000; (* Кількість симуляцій *)
dt = t / 252; (* Крок часу *)

(* Генерація симуляцій *)
simulations = Table[
  Module[{s = currentPrice}, Do[ s = s Exp[(r - sigma^2 / 2) dt + sigma Sqrt[dt]
      RandomVariate[NormalDistribution[0, 1]]], {252} ]; s ], {paths}];

(* Візуалізація *)
ListLinePlot[simulations[[ ;; 50]], PlotRange → All,
 PlotLabel → "Змодельовані ціни на акції для AAPL",
 AxesLabel → {"Time", "Price"}]
```

Out[152]=



Приклад для компанії NVDA:

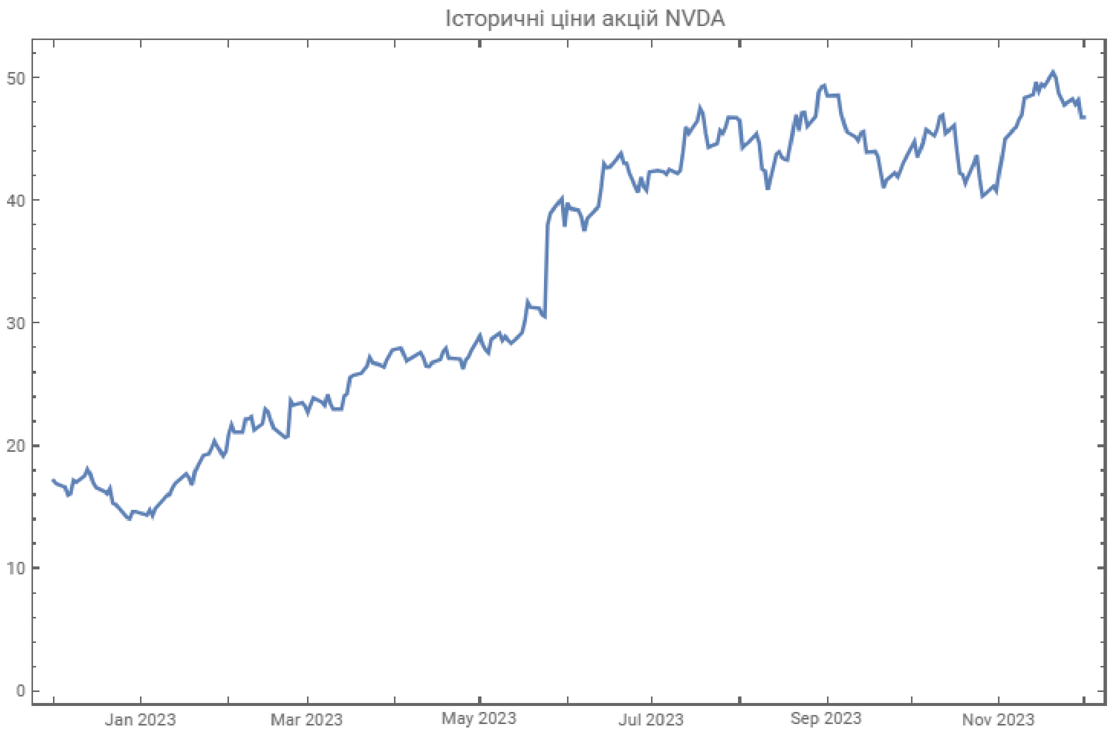
1. Завантаження даних:

Спочатку завантажуємо історичні дані цін акцій:

In[134]:=
```
(* Завантаження даних цін акцій NVDA за минулий рік *)
data = FinancialData["NVDA", {{2022, 12, 1}, {2023, 12, 1}}];
```

In[135]:=
```
(* Побудова графіка цін  *)
DateListPlot[data, PlotLabel → "Історичні ціни акцій NVDA",
  AxesLabel → {"Дата", "Ціна ($)"}, ImageSize → Large]
```

Out[135]=



2. Розрахунок параметрів моделі:

На основі завантажених даних оцінюємо середню прибутковість та волатильність:

```
In[181]:= cleanedData = QuantityMagnitude[data];

          (* Розрахунок денних доходностей *)
          returns = Differences[Log[cleanedData]];

          (* Середня прибутковість та волатильність *)
          mu = Mean[returns];
          sigma = StandardDeviation[returns];
```

3. Симуляція методом Монте-Карло:

```
(* Параметри *)
s0 = Last[cleanedData[[All]]];
strike = 15;
r = 0.05;
t = 1;
paths = 10000;
steps = 252; (* Днів у році *)

dt = t / steps;
simulations = Table[ Module[{s = s0},  Do[ s = s Exp[(r - sigma^2 / 2) dt + sigma
      Sqrt[dt] RandomVariate[NormalDistribution[0, 1]]],  {steps} ];  s ],
  {paths}];

(* Розрахунок вартості опціону *)
payoffs = Map[Max[#, 0] &, simulations - strike];
optionPrice = Exp[-r t] Mean[payoffs]
```

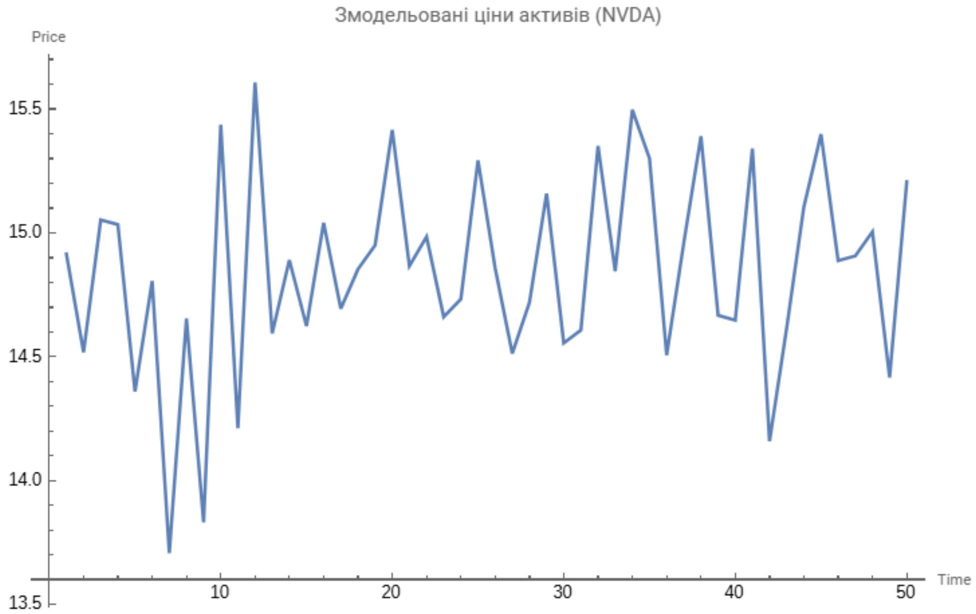
4. Візуалізація:

Зробимо графічно частину змодельованих траєкторій:

```
ListLinePlot[simulations[[ ;; 50]], PlotRange → All,
  AxesLabel → {"Time", "Price"},
  PlotLabel → "Змодельовані ціни активів (NVDA)",
  ImageSize → Large]
```

```
Out[257]= 0.0871752
```

Out[258]=



Результат 0.0871752 вказує на очікувану вартість «call»-опціону при поточних параметрах та моделюванні методом Монте-Карло.

Аналіз свопів з використанням додаткових даних про постачання

Приклад:

```
In[238]:= (* Крива процентних ставок *)
discountRates = {0.02, 0.025, 0.03};
paymentDates = {1, 2, 3};


(* Розрахунок платежів *)
fixedRate = 0.03;
floatingRate = 0.025;

payments = Table[
  Exp[-rate time],
  {rate, discountRates}, {time, paymentDates}
];
```

```
(* Загальна вартість свопу *)
fixedLeg = Total[fixedRate # & /@ payments];
floatingLeg = Total[floatingRate # & /@ payments];
swapValue = fixedLeg - floatingLeg

Out[245]= {0.0146298, 0.0142689, 0.0139172}
```

Результат – це числа які є вартістю різниці між фіксованими платежами і плаваючими платежами свопу в міру проходження часу.

7.3. Моделювання вартості опціонів у різних сценаріях

1: Базовий сценарій

Візьмемо реальний актив, наприклад акції Apple (AAPL), для оцінки вартості «call»-опціону в базовому сценарії:

- Вартість базового активу: $180.
- Страйк ціна: $200.
- Час до експірації: 1 рік.
- Волатильність: 20%.
- Безризикова ставка: 5%.

Розрахунок вартості з використанням методу Монте-Карло:

```
In[268]:= (* Параметри *)
s0 = 180; (* Поточна ціна *)
strike = 200; (* Забастовка ціна *)
sigma = 0.2; (* Волатильність *)
r = 0.05; (* Безризикова ставка *)
t = 1; (* Час до експірації (рік) *)
paths = 10000; (* Число симуляцій *)

In[277]:= (* Монте - Карло *)
dt = t / 252; (* Крок часу *)
simulations = Table[
  Module[{s = s0},
   Do[
    s = s Exp[(r - sigma^2 / 2) dt + sigma Sqrt[dt] RandomVariate[NormalDistribution[0,
         1]]], {252} ]; Max[s - strike, 0] (* Виплата для кол - опціону *) ],
  {paths}];
optionPrice = Mean[simulations] Exp[-r t]

Out[279]= 10.4216
```

1. Сценарій зростання волатильності

Розглянемо сценарій, у якому волатильність збільшується до 30%. Це може статися, наприклад, перед виходом важливих новин.

```
In[280]:= (* Сценарій зі збільшеною волатильністю *)
  sigmaHigh = 0.3; (* Нова волатильність *)
  simulationsHighVol = Table[
    Module[{s = s0},
     Do[
      s = s Exp[(r - sigmaHigh^2/2) dt + sigmaHigh Sqrt[dt]
          RandomVariate[NormalDistribution[0, 1]]],
      {252}
      ];
     Max[s - strike, 0]
     ],
    {paths}
   ];
  optionPriceHighVol = Mean[simulationsHighVol] Exp[-r t]

Out[282]= 17.498
```

Аналіз показує, що збільшення волатильності призводить до зростання вартості опціону, оскільки ймовірність досягнення страйк-ціни збільшується.

2. Сценарій зниження базової ціни

Зниження базової ціни, наприклад, до $160, викликає зменшення вартості опціону:

```
In[283]:= (* Сценарій із зниженням ціни активу *)
  sLow = 160; (* Нова ціна *)
  simulationsLowPrice = Table[
    Module[{s = sLow},
     Do[
      s = s Exp[(r - sigma^2/2) dt + sigma Sqrt[dt]
         RandomVariate[NormalDistribution[0, 1]]],
      {252}
      ];
     Max[s - strike, 0]
     ],
    {paths}
   ];
  optionPriceLow = Mean[simulationsLowPrice] Exp[-r t]

Out[285]= 3.65285
```

1. Розрахунок VaR

Value at Risk (VaR) оцінює максимальний збиток при заданій ймовірності та горизонті часу. Наприклад, для опціону:

```
In[∘]:= (* Розрахована VaR *)
   sortedSimulations = Sort[simulations];
   percentileVaR = 0.05; (* 5 % ризик *)
   VaR = sortedSimulations[[Round[paths percentileVaR]]]

Out[∘]= 14.1576
```

2 Розрахунок $CVaR$

Conditional Value at Risk ($CVaR$) оцінює середні збитки у разі перевищення VaR.

```
In[∘]:= (* Розрахунок CVaR *)
   CVaR = Mean[Take[sortedSimulations, Round[paths percentileVaR]]]

Out[∘]= 14.0006
```

8. Висновки:

У магістерській роботі було досліджено методи чисельного інтегрування, Монте-Карло та апроксимації в контексті їх застосування до фінансових завдань. Основна увага приділялася моделюванню та оцінці вартості деривативів, таких як опціони та свопи, а також аналізу ризиків та точності результатів.

Чисельні методи, такі як метод трапецій, метод Сімпсона та метод Гауса, продемонстрували високу ефективність для задач чисельного інтегрування. Кожен із методів показав свої переваги та обмеження при роботі з функціями різного роду. Наприклад, метод Гауса виявився особливо корисним при роботі з гладкими функціями, тоді як метод трапецій демонстрував кращу стійкість для розривних функцій.

Метод Монте-Карло довів свою універсальність, особливо у завданнях моделювання складних фінансових інструментів, таких як бар'єрні опціони чи портфелі з корельованими активами. Використання псевдовипадкових та квазівипадкових послідовностей у рамках Монте-Карло дозволило покращити точність результатів та скоротити обчислювальні ресурси.

Метою дослідження було вивчення та реалізація чисельних методів для завдань фінансової математики з використанням Wolfram Mathematica. У роботі було розглянуто такі основні завдання:

- Дослідження теоретичної бази чисельних методів та їх адаптація до фінансових завдань.
- Реалізація методів чисельного інтегрування та Монте-Карло для оцінки вартості деривативів.
- Моделювання реальних ринкових даних та аналіз точності отриманих результатів.

Усі поставлені завдання були виконані, а отримані результати підтвердили практичну застосовність методів для аналізу та оцінки фінансових інструментів.

Кожен метод, розглянутий у роботі, продемонстрував свої переваги та обмеження:

1. Чисельне інтегрування
   - Метод трапецій виявився простим та ефективним для функцій з незначними розривами.
   - Метод Сімпсона забезпечував високу точність на гладких функціях та при рівномірній сітці.
   - Метод Гаусса, хоч і вимагав значних обчислювальних витрат, показав чудові результати на складних функціях.
2. Метод Монте-Карло
   - Використання квазівипадкових послідовностей (наприклад, послідовностей Соболя) покращило збіжність результатів порівняно з псевдовипадковими послідовностями.
   - У завданнях моделювання бар'єрних опціонів та портфелів метод показав гнучкість та здатність адаптуватися до складних умов.

Результати, отримані в ході дослідження, демонструють високу практичну значущість чисельних методів та їх інтеграцію з інструментами, такими як Wolfram Mathematica, для аналізу фінансових завдань. методів дозволяє оцінити вартість фінансових інструментів, провести аналіз ризиків та змоделювати різні ринкові сценарії з огляду на високий ступінь невизначеності, властивий фінансовим ринкам.

Одним із найважливіших висновків дослідження є підтвердження, що чисельні методи, включаючи методи чисельного інтегрування, Монте-Карло забезпечують необхідну гнучкість та універсальність для моделювання фінансових інструментів, навіть коли їх динаміка змінюється в умовах високої волатильності та нестабільності ринку.

Методи чисельного інтегрування, такі як метод трапецій, метод Сімпсона та метод Гаусса, показали свою ефективність при обчисленні очікуваних значень фінансових деривативів та оцінці інтегралів, пов'язаних із зміною ринкових параметрів.

Один з основних показників практичної значущості чисельних методів проявляється у їх застосуванні для аналізу фінансових деривативів, таких як опціони. Опціони є фінансовими інструментами, вартість яких залежить від зміни ціни базового активу, відсоткових ставок, волатильності та інших параметрів. нестандартних умовах або високих рівнях невизначеності, що вимагає застосування чисельних методів.

Метод Монте-Карло показав свою універсальність у моделюванні різних типів опціонів, включаючи бар'єрні опціони та американські опціони. , процентних ставок та інших ринкових змінних на вартість опціону

Отримані результати дослідження та застосовані чисельні методи відкривають перспективи для подальшого аналізу та досліджень у галузі фінансової математики та моделювання.

По-перше, подальше вдосконалення чисельних методів та їх гібридизація з методами машинного навчання можуть значно підвищити точність моделювання та оцінки ризиків на фінансових ринках.

По-друге, розширення чисельних методів на інші фінансові інструменти, такі як структуровані деривативи, кредитні деривативи та криптовалюти, дозволить оцінити їхню поведінку в умовах високої волатильності та нових ринкових сценаріїв.

По-третє, інтеграція більш високорівневих даних та сервісів, наприклад, через API та інші джерела надасть можливості для більш детального аналізу та прогнозування.

Таким чином, результати роботи не тільки сприяли вирішенню конкретних фінансових завдань.

Список використаних джерел

- Wolfram Research, Inc. "Monte Carlo Simulations." *Wolfram Language Documentation*. URL: https://www.wolframcloud.com/.
- Shreve, S. E. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer, 2004. 586 p.
- Lyuu, Yuh-Dauh. *Methods and Algorithms of Financial Mathematics*. Cambridge University Press, 2004. 467 p.
- Glasserman, P. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, 2013. 596 p.
- Hull, J. C. *Options, Futures, and Other Derivatives*. 11th ed., Pearson, 2021. 896 p.
- Kloeden, P. E., & Platen, E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer, 2010. 636 p.
- Clewlow, L., & Strickland, C. *Implementing Derivative Models*. Wiley, 2010. 190 p.
- Wolfram Research, Inc. "RandomVariate—Wolfram Language Documentation." URL: https://reference.wolfram.com/language/ref/RandomVariate.html.
- Wolfram Research, Inc. "Monte Carlo Methods—Wolfram Language Documentation." URL: https://resources.wolframcloud.com/FunctionRepository/resources/MonteCarloSample.
- Higham, D. J. *An Introduction to Financial Option Valuation: Mathematics, Stochastics, and Computation*. Cambridge University Press, 2004. 296 p.
- Wilmott, P. *Introduction to Numerical Methods and Stochastic Processes in Finance*. Wiley, 2006. 284 p.
- Siu, C.-C., & Kim, C.-T. *Numerical Methods in Finance*. Springer, 2010. 220 p.

- Jäckel, P. *Monte Carlo Methods in Finance*. Wiley, 2002. 239 p.
- Wolfram Research, Inc. *Wolfram Cloud: A Centralized Infrastructure for Wolfram Technologies*. URL: https://www.wolframcloud.com/.
- Wilmott, P., Howison, S., & Dewynne, J. *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction.* Cambridge University Press, 1995. 317 p.
- Paul Wilmott. *Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance.* 3rd ed., Wiley, 2015. 743 p.
- Hull, J. C. *Options, Futures, and Other Derivatives.* 10th ed., Pearson, 2017. 888 p.