НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Фізико - математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірності

«На правах рукопису»

УДК 519.21

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

__________ Клесов Олег Іванович

«____»_______________ 2024 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра
за освітньо-професійною програмою «Страхова та фінансова математика»
зі спеціальності 111 «Математика»
на тему: «Формальна юстиція(справедливість)»

Виконав (-ла):
студент (-ка) II курсу магістратури, групи ОМ-31мп
Ігнатенко Дарина Володимирівна ____________
Науковий керівник:
Професор, доктор фізико-математичних наук
Клесов Олег Іванович ____________
Рецензент:
Професор, доктор фізико-математичних наук
Гавриленко Валерій Володимирович ____________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент (-ка) _______________

Київ 2024

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського
Фізико - математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірності

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-професійна програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

__________ Клесов Олег Іванович

«____»_______________ 2024 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Ігнатенко Дарина Володимирівна

1. Тема дисертації «Формальна юстиція(справедливість)», науковий керівник дисертації професор, доктор фізико-математичних наук Клесов Олег Іванович, затверджені наказом по університету від «06» листопада 2024 р. № 4981-с

2. Термін подання студентом дисертації 14.12.2024.

3. Об'єктом дослідження є Формальна юстиція(справедливість).

4. Предметом дослідження є Формальна справедливість, як математична модель для справедливого оцінення заробітньої плати(винагороди) фахівців за допомоги даних критеріїв.

5. Перелік завдань, які потрібно виконати:

1) Розгляд математичних моделей формальної справедливості для точної(справедлив
праці.

2) Розгляд зауважень до основної моделі та введення узагальнення.

3) Розгляд основної математичної моделі для множинної кваліфікації.

4) Дослідження екзотичних розв'язків.

6. Дата видачі завдання 04.09.2024

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Збір та аналіз літератури по темі дослідження. Формулювання основних завдань.	04.09.2024-04.10.2024	виконано
2	Розробка математичної моделі.Визначення методів доведення теорем.	05.10.2024-25.10.2024	виконано
3	Виконання частини з самостійної роботи.	26.10.2024-08.11.2024	виконано
4	Написання попереднього тексту дисертації.	09.11.2024-15.11.2024	виконано
5	Аналіз отриманих даних.	16.11.2024-20.11.2024	виконано
6	Написання основного тексту дисертації. Редагування та коректура.	21.11.2024-30.11.2024	виконано
7	Формування висновків. Підготовка презентації за результатами дослідження.	01.12.2024-13.12.2024	виконано

Студент Ігнатенко Дарина Володимирівна

Науковий керівник Клесов Олег Іванович

Реферат

Магістерська дисертація: 31 сторінка, 20 слайдів для проектора, 6 першоджерела.

У цьому рефераті ми досліджуємо застосування формальної справедливості для точної оплати праці. Зокрема, визначається формальна справедливість, як спосіб справедливого розділення винагороди між фахівцями, опираючись на дані критерії. Розглядаються різні моделі для визначення зі своїми особливостями та проблематикою. Робота включає як теоретичний аналіз цих моделей, так і практичне їх застосування для визначення найкращого способу для визначення справедливої оплати праці.

Мета роботи полягає в представленні, побудові та аналізі математичної моделі формальної справедливості як способу справедливої оплати праці.

Завданням роботи є аналіз основної математичної моделі формальної справедливості при більш реалістичних припущеннях та розгляд, аналіз моделі множинної кваліфікації.

Ключові слова: модель Арістотеля, модель Солтана, функціональне рівняння Коші, неперервна функція, монотонна функція.

Master's thesis: 31 pages, 20 slides for projector, 6 primary sources.

In this essay, we investigate the application of formal justice to precision pay. In particular, it defines formal justice as a way of fairly dividing remuneration between specialists based on these criteria. Different models are considered for determination with their own peculiarities and problems. The work includes both a theoretical analysis of these models and their practical application to determine the best way to determine fair pay.

The aim of the work is to present, build and analyze a mathematical model of formal justice as a way of fair pay.

The task of the paper is to analyze the basic mathematical model of formal justice under more realistic assumptions and to consider and analyze the model of multiple qualifications.

Keywords: Aristotle's model, Soltan's model, Cauchy's functional equation, continuous function, monotonic function.

Зміст

1 Вступ

Досліджуючи наукову літературу та аналізуючи різні точки зору та твердження вчених щодо їхнього розуміння поняття «юстиція», слід зауважити, що дане поняття з однієї сторони є багатогранним. Формальна юстиція(справедливість) - це фундаментальна концепція у філософії, соціології, праві та управлінні, яка підкреслює справедливість у застосуванні правил, процедур та процесів прийняття рішень. Вона гарантує, що до людей ставляться однаково, а результати визначаються на основі об'єктивних критеріїв, таких як кваліфікація та досягнення. Формальна справедливість забезпечує основу для послідовного та неупередженого прийняття рішень у різних сферах життя суспільства - від правових систем і практики на робочому місці до освіти та політики.

Ми будемо розглядати формальну справедливість, як справедливий спосіб розділити винагороду між фахівцями, покладаючись на розглянуті далі критерії. Це питання є особливо актуальним у сучасному суспільстві, а особливо на ринках праці. У наш час, зі зростаючою увагою до питань рівності та справедливості, забезпечення того, щоб заробітна плата та винагорода відображали вимірювані критерії, такі як освіта, навички та досвід, має вирішальне значення для зміцнення довіри та мотивації серед працівників.

До речі, концепція формальної справедливості у створенні справедливої шкали оплати праці не є новою. Уперше, розглянув цю проблему більш детально, понад 2300 років тому саме Арістотель, коли він запропонував пропорційну справедливість. За сучасними нотаціями його ідеї можна озвучити так, що винагорода (заробітна плата) повинні розподілятися пропорційно до зусиль або заслуг людини. Його ключовим принципом було твердження : «до рівних ставитися однаково, а до нерівних - неоднаково». Це означає, що люди, які роблять більший внесок (у вигляді навичок чи зусиль), повинні справедливо отримувати більшу винагороду. У цій роботі ми зробимо більш детальне дослідження справедливості Арістотеля.

У сучасному світі ми постійно зіштовхуємося з математикою, інколи навіть не помічаючи цього. Можемо навіть сказати, що зараз математика починає домінувати у всіх сферах нашого життя. Якщо заглибитись у сферу ринку праці та розглянути професію, наприклад, HR - менеджера (менеджера по роботі з персоналом), виникає питання: "Чи дійсно ця професія пов'язана з математикою?". З огляду на вище сказане, можна сказати: "Так". HR - менеджер відіграє важливу роль у забезпеченні справедливості та рівності на робочому місці. За допомогою формальної справедливості, менеджер може створити системи та процеси, які забезпечують об'єктивне, послідовне та прозоре прийняття рішень, особливо зі сторони справедливої оплати праці. Формальна справедливість може допомогти сфокусуватися на справедливому ставленні до нових працівників на основі заздалегідь визначених критеріїв.

Я сподіваюся внести свій невеличкий вклад у розвиток цієї теми, за допомогою розглянутих надалі математичних моделей.

2 Справедливість Арістотеля. Базове функціональне рівняння

Розглянемо пропорційну справедливість Арістотеля. Слово «пропорція» одразу вказує на те, що кваліфікація, як і винагорода фахівців, має бути виміряна за числовою шкалою.

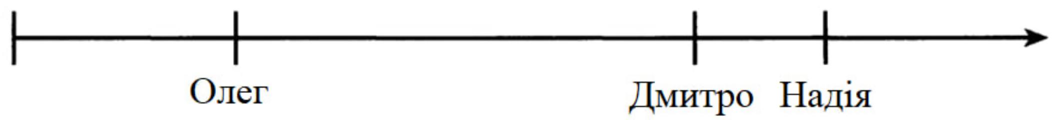

Рис. 1: Три фахівці оцінюються залежно від їхньої кваліфікації, яка вимірюється числом $x \in \mathbb{R}$.

Це легко для винагороди, але досить делікатне завдання для кваліфікації. Припустимо, що можна виміряти кваліфікацію, числом $x \in \mathbb{R}^+$, як показано на Рисунку 1. Якщо ми розглянемо лише одну кваліфікацію, яка вимірюється $x \in \mathbb{R}^+$, то винагорода повинна бути функцією від x, позначеною через $m(x)$. Формальна справедливість має бути виражена через властивості m. Наприклад, ідея пропорційної справедливості Арістотеля стверджує, що кваліфікація та заробітна плата(винагорода) повинні бути пропорційними, тобто $m(x)$ повинна задовольняти:

$$\frac{m(x)}{m(y)} = \frac{x}{y}, \qquad x, y \in \mathbb{R}^+$$

Для $y = 1$ це дає $m(x)/m(1) = x$ і, отже, $m(x) = m(1)x$. Отже, $m(x) = cx$, де c - деяка константа. Тобто, фахівець, який має вдвічі вищу кваліфікацію, ніж інший, має право на вдвічі вищу заробітну плату. Ця шкала заробітної плати є обмеженою, оскільки допускає лише лінійну залежність. Очевидно, що це занадто обмежує підхід.

Згідно з **[2]** поняття формальної справедливості означає, що $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ має бути перетворенням відносно шкали співвідношень. Тобто,

$$m\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{m(x)}{m(y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}^+. \tag{2.1}$$

Це функціональне рівняння буде нашим основним об'єктом дослідження.

Зауваження 2.1. Недолік виникає при припущенні, що $m(1) = 1$. Можемо сказати, що необов'язково при одиничній кваліфікації, винагорода буде також одиничною. Оскільки $m(1)$ не завжди буде дорівнювати 1. Ми розглянемо його детальніше в 3 розділі.

2.1 Модель Солтана.

Теорема 2.1. *Припустимо, що m неперервна в деякій точці $x_o \in \mathbb{R}^+$ і задовольняє*

$$m\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{m(x)}{m(y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Тоді m має вигляд $m(x) = x^p$, для деякого $p \in \mathbb{R}$.

Доведення. Перевіримо, що $m(x) = x^p$ розв'язує наше функціональне рівняння. Проведемо та проаналізуємо доведення цієї теореми, яке покроково розглянув Райнгард Ільнер у **[4]**.

Крок 1: Використовуючи перетворення, маємо

$$m(xy) = m\left(\frac{x}{y^{-1}}\right) = \frac{m(x)}{m(1/y)} = \frac{m(x)m(y)}{m(1)},$$

що, оскільки

$$m(1) = m\left(\frac{x}{x}\right) = \frac{m(x)}{m(x)} = 1,$$

дає результат

$$m(xy) = m(x)m(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^+. \tag{2.2}$$

Таким чином, можна використовувати (2.2), як еквівалентну форму (2.1)

Крок 2: Нехай $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з $h(t) = \ln[m(e^t)]$. Функція $h(t)$ задовольняє *функціональному рівнянню Коші*, яке детальніше розглянуте у **[1]**. Тобто $h(t+s) = h(t) + h(s)$ для всіх $s, t \in \mathbb{R}$. Дійсно, з означення h

$$h(t+s) = \ln\left[m(e^{t+s})\right] = \ln\left[m(e^t e^s)\right], \qquad t, s \in \mathbb{R},$$

використовуючи *Крок 1* та властивості логарифмів отримуємо

$$h(t+s) = \ln\left[m(e^t)m(e^s)\right] = \ln\left[m(e^t)\right] + \ln\left[m(e^s)\right] = h(t) + h(s)$$

як і було зазначено.

Крок 3: Далі виведемо основні властивості h. Оскільки $h(t) = h(t+0) = h(t) + h(0)$, то зрозуміло, що $h(0) = 0$. Отже,

$$h(0) = h(t-t) = h\left[t + (-t)\right] = h(t) + h(-t) = 0,$$

а отже $-h(t) = h(-t)$. Таким чином

$$h(t-s) = h(t) + h(-s) = h(t) - h(s).$$

Крок 4: Стверджуємо, що $h(nt) = nh(t)$ для всіх $t \in \mathbb{R}$ та $n \in \mathbb{Z}$. Рівняння Коші для випадку $n = 2$ дає

$$h(2t) = h(t+t) = h(t) + h(t) = 2h(t),$$

і за допомогою індукції

$$h(n) = h\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n\text{ разів}} = nh(1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поєднаємо з *Кроком 3*, щоб встановити твердження для випадків $n = 0$ та $-n \in \mathbb{N}$.

Крок 5: Нехай $p := h(1)$. Тепер можемо показати, що $h(r) = pr$ для всіх $r \in \mathbb{Q}$. З *Кроку 4*, $h(n) = nh(1) = np$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Аналогічно,

$$p = h(1) = h\left(n\frac{1}{n}\right) = nh\left(\frac{1}{n}\right)$$

і, поділивши обидві сторони на n, $h(1/n) = p/n$. Якщо $r \in \mathbb{Q}$ таке, що $r = a/b$ з $a, b \in \mathbb{Z}$ та $b \neq 0$, тоді

$$h(r) = h\left(\frac{a}{b}\right) = ah\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b}p;$$

тобто, $h(r) = pr$ я всіх $r \in \mathbb{Q}$.

Крок 6: Можна довести, що остання тотожність є справедливою для всіх $r \in \mathbb{R}$ за умови, що h неперервна в кожній точці. Для цього, спочатку покажемо, що h неперервна при $t = 0$. Оскільки m неперервна в точці $x_o \in \mathbb{R}^+$, $h(t) = \ln(m(t))$ неперервна в $e^t = x_o$.

$$\lim_{\epsilon \to 0} [h(x_o + \epsilon) - h(x_o)] = 0$$

та з *Кроку 3*

$$\lim_{\epsilon \to 0} h(x_o + \epsilon - x_o) = \lim_{\epsilon \to 0} h(\epsilon) = 0.$$

Оскільки ми вже знаємо, що $h(0) = 0$, зрозуміло, що $h(t)$ неперервна при $t = 0$.

Крок 7: Неперервність при $t = 0$ є достатньою, щоб показати, що функція $h(t)$ неперервна при кожному $t \in \mathbb{R}$. Використовуючи *Крок 3* отримаємо

$$\lim_{\epsilon \to 0} [h(t + \epsilon) - h(t)] = \lim_{\epsilon \to 0} h(t + \epsilon - t) = \lim_{\epsilon \to 0} h(\epsilon) = 0.$$

Таким чином, $h(t)$ неперервна всюди.

Крок 8: Використовуючи *Крок 7*, можемо показати, що $h(t) = pt$ для всіх $t \in \mathbb{R}$. Нехай $t \in \mathbb{R}$ і виберемо послідовність $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ таку, що $t_i \in \mathbb{Q}$ для всіх $i \in \mathbb{N}$ та що $t_i \to t$ як і $i \to \infty$. Використовуючи неперервність $h(t)$, яку ми встановили у *Кроці 7*,

$$h(t) = h\left(\lim_{i \to \infty} t_i\right) = \lim_{i \to \infty} h(t_i),$$

але з *Кроку 5*, $h(t_i) = pt_i$, оскільки $t \in \mathbb{Q}$, так що

$$h(t) = \lim_{i \to \infty} pt_i = pt.$$

Отже, $h(t) = pt$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Крок 9: Знайшовши $h(t)$, ми можемо обчислити $m(t)$. Використовуючи озна-

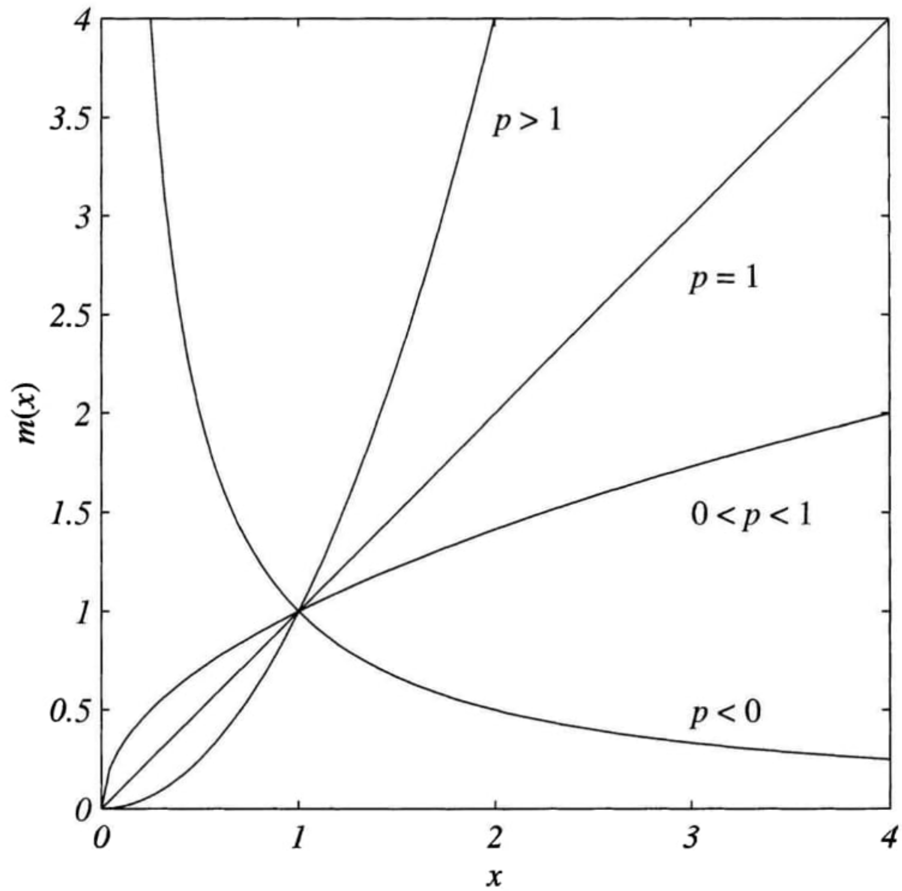

Рис. 2: Модель Солтана допускає як лінійні, так і нелінійні відношення. Можемо побачити, що всі криві проходять через точку $(1, 1)$. Модель Аристотеля - це випадок, коли $p = 1$.

чення $h(t)$, маємо

$$h(t) = pt = \ln\left[m(e^t)\right]$$

так що $m(e^t) = (e^t)^p$. Отже, якщо ми запишемо $x = e^t$, то можемо побачимо, що m має вигляд $m(x) = x^p$, що і треба було довести. $\square$

На Рисунку 2 показано шкалу компенсацій для цієї моделі формальної справедливості . Модель Аристотеля є окремим випадком (випадок, коли $p = 1$). Усі криві компенсації повинні проходити через точку $(1, 1)$, тому що $m(1) = 1$ не залежить від p. Реалістичними є випадки, коли $p > 0$ шкали оплати праці для визначення заробітної плати на основі позитивних результатів кваліфікацій, таких як рівень освіти. Якщо $p < 0$, це означає, що заробітна плата повинна зменшуватися з підвищенням кваліфікації, що є вкрай нереалістичним.

2.2 Узагальнення моделі Солтана

На практиці, винагорода не завжди буде неперервною функцією від кваліфікацій, скоріше вона є монотонною. Тому з точки зору практичних застосувань варто використовувати функцію винагороди монотонною. Тож розглянемо узагальнення Теореми 1, коли m монотонна на деякому інтервалі $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^+$. Запишемо нашу теорему та доведемо її.

Теорема 2.2. *Припустимо, що m монотонна на деякому інтервалі $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^+$ та задовольняє*

$$m\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{m(x)}{m(y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Тоді m має вигляд $m(x) = x^p$, для деякого $p \in \mathbb{R}$.

Примітка: В умові теореми мається на увазі нестрога монотонність, тобто $m(x) \leq m(y)$, $x \leq y$ або $m(x) \geq m(y)$, $x \geq y$ відповідно.

Доведення. Доведення перших п'яти кроків буде аналогічним до доведення Ільнера. Тому почнемо з *Кроку 6.*

Крок 6: Доведемо, що h неперервна в точці 0. Оскільки $m(t)$ монотонна на $[\alpha, \beta]$, $h(t) = \ln(m(e^t))$ монотонна на $[\ln \alpha, \ln \beta]$, як композиція трьох монотонних функцій. Розглянемо спочатку випадок, коли h монотонно неспадна, тобто $h(x) \geq h(y)$, $x \geq y$, $x, y \in [\ln \alpha, \ln \beta]$.

Припустимо, що h не є неперервною в 0, тобто знайдеться $\varepsilon > 0$, таке, що для всіх $\delta > 0$ існує $x \in (-\delta, \delta) \backslash \{0\}$ таке, що

$$|h(x) - h(0)| = |h(x)| > \varepsilon.$$

Позначимо $\Delta = h(\ln \beta) - h(\ln \alpha) \geq 0$. Також позначимо

$$N = \left[\frac{\Delta}{\varepsilon}\right] + 1, \delta = \frac{\ln \beta - \ln \alpha}{N}.$$

За нашим припущенням знайдеться $x \in (-\delta, \delta)$ таке, що $|h(x)| > \varepsilon$.

Оскільки, $h(-x) = h(x)$, маємо $|h(|x|)| > \varepsilon$. Припустимо, що $h(|x|) < 0$, тоді

$$h(\ln\alpha + |x|) - h(\ln\alpha) = h(|x|) < 0,$$

що протирічить неспадності h. Тобто, маємо $h(|x|) > \varepsilon$. Тоді

$$\ln\beta = \ln\alpha + N\delta > \ln\alpha + N|x|.$$

Маємо $\ln\alpha < \ln\alpha + N|x| < \ln\beta$, і, в силу неспадності h на $[\ln\alpha, \ln\beta]$:

$$h(\ln\beta) \geq h(\ln\alpha + N|x|) = h(\ln\alpha) + h(N|x|) =$$

$$= h(\ln\alpha) + Nh(|x|) > h(\ln\alpha) + N\varepsilon \geq h(\ln\alpha) + \frac{\Delta}{\varepsilon}\cdot\varepsilon =$$

$$= h(\ln\alpha) + \Delta.$$

Отримали нерівність

$$h(\ln\beta) - h(\ln\alpha) > \Delta.$$

Що протирічить означенню Δ. Отримане протиріччя доводить, що для монотонно неспадної h є неперервність в 0. Тепер припустимо, що h монотонно незростаюча на $[\ln\alpha, \ln\beta]$. Позначимо $\Delta = h(\ln\alpha) - h(\ln\beta) \geq 0$.
Позначимо

$$N = \left[\frac{\Delta}{\varepsilon}\right] + 1, \delta = \frac{\ln\beta - \ln\alpha}{N}.$$

За нашим припущенням знайдеться $x \in (-\delta, \delta)$ таке, що $|h(x)| > \varepsilon$.
Оскільки, $h(-x) = h(x)$, маємо $|h(|x|)| > \varepsilon$. Припустимо, що $h(|x|) > 0$, тоді

$$h(\ln\alpha + |x|) - h(\ln\alpha) = h(|x|) > 0,$$

що протирічить незростанню h. Тобто, маємо $h(|x|) < -\varepsilon$. Тоді

$$\ln\beta = \ln\alpha + N\delta > \ln\alpha + N|x|.$$

У силу незростання h на $[\ln\alpha, \ln\beta]$:

$$h(\ln\beta) \leq h(\ln\alpha + N|x|) = h(\ln\alpha) + h(N|x|) =$$

$$= h(\ln \alpha) + Nh(|x|) < h(\ln \alpha) - N\varepsilon \le h(\ln \alpha) - \frac{\Delta}{\varepsilon} \cdot \varepsilon =$$
$$= h(\ln \alpha) - \Delta.$$

Отримали нерівність

$$h(\ln \beta) - h(\ln \alpha) < -\Delta,$$

що протирічить означенню Δ. Отримане протиріччя доводить, що для монотонно незростаючої h є неперервність в 0.

Таким чином, в обох випадках h є неперервною в точці 0.

Крок 7: Неперервність при $t = 0$ є достатньою, щоб показати, що функція $h(t)$ неперервна при кожному $t \in \mathbb{R}$. Використовуючи *Крок 3* отримаємо

$$\lim_{\epsilon \to 0} [h(t+\epsilon) - h(t)] = \lim_{\epsilon \to 0} h(t + \epsilon - t) = \lim_{\epsilon \to 0} h(\epsilon) = 0.$$

Таким чином, $h(t)$ неперервна всюди.

Крок 8: Використовуючи *Крок 7*, можемо показати, що $h(t) = pt$ для всіх $t \in \mathbb{R}$. Нехай $t \in \mathbb{R}$ і виберемо послідовність $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ таку, що $t_i \in \mathbb{Q}$ для всіх $i \in \mathbb{N}$ та що $t_i \to t$ як і $i \to \infty$. Використовуючи неперервність $h(t)$, яку ми встановили у *Кроці 7*,

$$h(t) = h\left(\lim_{i \to \infty} t_i\right) = \lim_{i \to \infty} h(t_i),$$

але з *Кроку 5*, $h(t_i) = pt_i$, оскільки $t \in \mathbb{Q}$, так що

$$h(t) = \lim_{i \to \infty} pt_i = pt.$$

Отже, $h(t) = pt$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Крок 9: Знайшовши $h(t)$, ми можемо обчислити $m(t)$. Використовуючи означення $h(t)$, маємо

$$h(t) = pt = \ln\left[m(e^t)\right]$$

так що $m(e^t) = (e^t)^p$. Отже, якщо ми запишемо x, як $x = e^t$, то можемо побачимо, що m має вигляд $m(x) = x^p$, що і треба було довести. $\square$

Отже, отримані результати показали, що вигляд функції винагороди не змінився при використанні більш реалістичного припущення, коли m - монотонна. Отже, у двох випадках: коли m - неперервна(в 1-му випадку) або монотонна(в 2-му випадку), має вигляд $m(x) = x^p$.

3 Недолік моделі Солтана

Можемо зауважити, що модель Солтана, хоча й ширша за обсягом ніж у Арістотеля, містить серйозний недолік. Повернемось до Зауваження 2.1. Очевидно, що ця властивість не є незмінною при зміні шкали вимірювання як кваліфікації, так і винагород. Наприклад, розглянемо сценарій, коли заробітна плата буде виплачуватися в центах, а не в доларах. Тоді $m^* = 100m(x)$. Згадавши, що $m(x/y) = m(x)/m(y)$, знаходимо, що

$$m^*\left(\frac{x}{y}\right) = 100m\left(\frac{x}{y}\right) = 100\frac{m(x)}{m(y)},$$

і, використовуючи означення m^*, отримуємо

$$m^*\left(\frac{x}{y}\right) = 100\frac{\frac{m^*(x)}{100}}{\frac{m^*(y)}{100}} = 100\frac{m^*(x)}{m^*(y)}.$$

Очевидно, що основне функціональне рівняння не є незмінним. Спробуємо ввести узагальнення.

Для того, щоб виправити модель так, щоб вона була незмінною до шкали вимірювання, переглянемо наше визначення формальної справедливості. Будемо стверджувати, що шкала заробітної плати m задовольняє критерію формальної справедливості, якщо існує (залежна від шкали) константа $c > 0$ така, що

$$m\left(\frac{x}{y}\right) = c\frac{m(x)}{m(y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}^+. \tag{3.1}$$

Перевіримо, чи введення цієї константи усуває наш недолік у рівнянні (2.1). Спочатку змінимо масштаб функції $m(x)$, задавши $\overline{m}(x) = c^{-1}m(x)$. Використовуючи це визначення та співвідношення (3.1) для оцінки $\overline{m}(x/y)$, отримаємо

$$\overline{m}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{c}m\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{cm(x)}{cm(y)} = \frac{\frac{1}{c}m(x)}{\frac{1}{c}m(y)},$$

тоді

$$\overline{m}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\overline{m}(x)}{\overline{m}(y)}, \quad x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Отже, ми переконались, що означена функція заробітної плати задовольняє основне функціональне рівняння як моделі Солтана, так і узагальненої моделі Солтана. Отже, за Теоремою 2.1 або Теоремою 2.2, $\overline{m}(x)$ матиме вигляд $\overline{m}(x) = x^p$. Отже, рівняння (3.1) матиме розв'язки, де $p \in \mathbb{R}$

$$m(x) = c\overline{m}(x) = cx^p, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

3.1 Шкали заробітної плати

Отримані наші результати можуть бути використані для визначення того, чи є певна шкала оплати праці справедливою. Припустимо, що три працівники A, B і C працюють на компанію, яка визначає їхні заробітні плати залежно від кількості років, протягом яких вони працюють, тобто, на основі їхнього стажу. Працівник A працює двадцять п'ять років років і заробляє 2 000 000 доларів на рік. Працівник Б, після шістнадцяти років, заробляє 60 000 доларів на рік, а працівник C заробляє 40 000 доларів, пропрацювавши лише три роки.

Щоб визначити, чи задовольняють ці зарплати формальну справедливість, ми дослідимо, наскільки добре вони вписуються в графік однієї з наших кривих розв'язку:$m(x) = cx^p$. Якщо б у нас було лише два працівники, параметри c і p можна було б підібрати для ідеального співвідношення. Для трьох і більше ми визначаємо c і p за логарифмічним методом підбору найменших квадратів. Після цього, залежно від прийнятих валових прибутків, вирішується, кому з працівників недоплачують або переплачують відповідно. Нагадаємо, що $h(t) = \ln m(e^t)$, маємо

$$h(t) = \ln m(e^t) = \ln \left[c(e^t)^p\right] = \ln c + pt,$$

і, отже, для справедливої шкали заробітної плати графік $h(t)$ є прямою лінією. Отже, розподіл заробітної плати буде справедливим, якщо перетворені дані відповідають лінійному методу найменших квадратів, знайденому шляхом побудови логарифмів зарплат і логарифмів (виміряних) кваліфікацій.

На Рисунку 3 показано лінійну криву найменших квадратів для працівників А, В і С, побудовану за логарифмічною шкалою. На Рисунку 3 можна побачити, що працівникам А і Б значно переплачують і недоплачують відповідно.

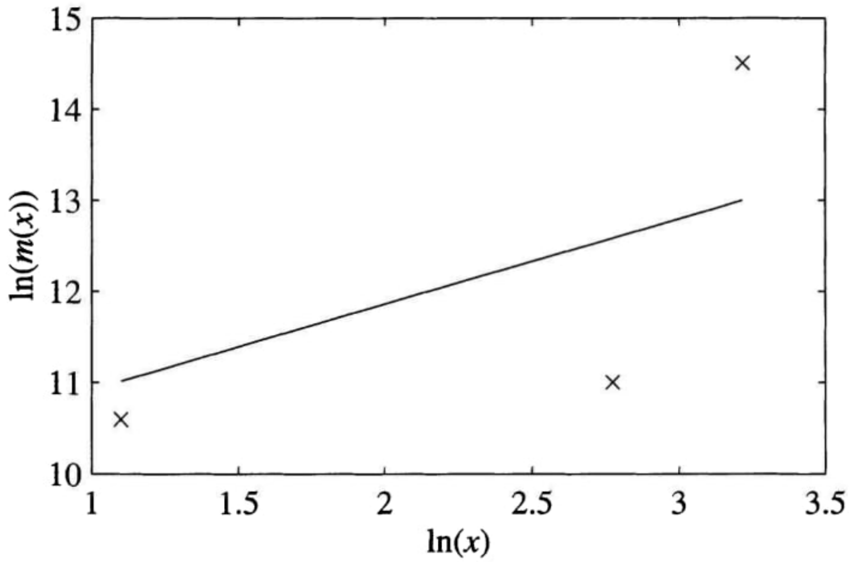

Рис. 3: Трансформована шкала оплати праці, описана в тексті. Тут x - це кваліфікація (в даному випадку стаж), а $m(x)$ - це винагорода або зарплата. Очевидно, що формальна справедливість не виконується.

4 Множинна кваліфікація

У реальності заробітна плата є на основі декількох кваліфікацій, тобто $m = m(x_1, \ldots, x_N)$ є функцією від N виміряних компенсованих властивостей та x_i позначає вимірювання i-ї кваліфікації.

Якщо ми розглянемо випадок $N = 2$, то можемо сказати, що $m = (x, y)$ задовольняє критерій формальної справедливості. Залишаємо одну змінну постійною і розглядаємо функцію лише як функцію однієї (іншої) змінної. Позначимо

$$m_{y_o}(x) = m(x, y)|_{y=y_o}, \tag{4.1}$$

$$m_{x_o}(x) = m(x, y)|_{x=x_o}. \tag{4.2}$$

Тоді формальна справедливість визначається справедливістю двох зв'язаних функціональних рівнянь

$$m_y \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = c_1 \frac{m_y(x_1)}{m_y(x_2)}, \tag{4.3}$$

$$m_x \left(\frac{y_1}{y_2} \right) = c_2 \frac{m_x(y_1)}{m_x(y_2)}, \tag{4.4}$$

де x та y позначають виміряні кваліфікації. Значення c_i, залишатимуться фіксованими доти, доки відповідна змінна буде фіксованою, і, таким чином, формальна справедливість буде дотримана, але c_1 і c_2 насправді можуть залежати від y і x відповідно. За припущень про неперервність на m рівняння (4.3) та (4.4) матимуть розв'язки $m_y(x) = c_1(y)x^{p(y)}$ та $m_x(y) = c_2(x)y^{q(x)}$, де $c_1(y), c_2(x), p(y)$ та $q(x)$ - параметричні функції, які необхідно визначити.

Теорема 4.1. *Якщо $m(x, y)$ неперервна така, що $m : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ і задовольняє рівнянням (4.3) і (4.4), то m має вигляд*

$$m(x, y) = cx^p y^q e^{\alpha \ln x \ln y}, \quad p, q, \alpha \in \mathbb{R},$$

де c - деяка додатна константа. Усі функції цього типу задовольняють рівняння (4.3) і (4.4).

Зауваження 4.1. Припущення про неперервність можна значно послабити. Наприклад, достатньо, щоб m була неперервною в одній точці в діапазоні невід'ємних значень x, y. Однак слід зазначити, що твердження теореми не залишається правильним, якщо на функціональні рівняння не накладено жодних інших умов - у цьому випадку функціональні рівняння мають (екзотичні) розв'язки, які не належать до заданого типу. Ці розв'язки не можна виміряти, вони не обмежені жодним інтервалом додатної довжини і взагалі не піддаються графічному зображенню. Доведення їх існування базується на понятті *Базису Гамеля* дійсних чисел над раціональними числами. Більш детально розглянемо їх у наступному розділі.

Проведемо та проаналізуємо доведення Теореми 4.1, яке було розглянуто Ільнером у **[3]**.

Доведення. Спочатку перевіримо, що функція $m(x, y) = cx^p y^q e^{\alpha \ln x \ln y}$ задовольняє рівнянням (4.3) і (4.4). Зафіксувавши x, запишемо

$$m_x(y) = cx^p y^q e^{\alpha \ln x \ln y} = cx^p y^{q+\alpha \ln x}.$$

Оскільки x фіксована, то вона має вигляд $m_x(y) = c_2(x) y^{q(x)}$. Аналогічно, зафіксуємо y, тоді

$$m_y(x) = cx^p y^q e^{\alpha \ln x \ln y} = cy^q x^{p+\alpha \ln y} = c_1(y) x^{p(y)}.$$

Звернемо увагу на те, що $m_y(x) = m(x, y) = m_x(y)$, тож

$$m_y(x) = c_1(y) x^{p(y)} = c_2(x) y^{q(x)} = m_x(y).$$

Візьмемо логарифм обох сторін:

$$\ln c_1(y) + p(y) \ln(x) = \ln c_2(x) + q(x) \ln y, \quad x, y > 0, \tag{4.5}$$

коли $x = y = 1$, це дає $c_1(1) = c_2(1) =: c$. Задамо $y = 1$ у рівнянні (4.5)

$$\ln c + p(1) \ln x = \ln c_2(x), \tag{4.6}$$

яка визначає $\ln c_2(x)$. Аналогічно, нехай $x = 1$ у рівнянні (4.5)

$$\ln c_1(y) = \ln c + q(1) \ln y, \tag{4.7}$$

і це визначає $\ln c_1(y)$. Після підстановки (4.6) і (4.7) у співвідношення (4.5) і спрощуючи, маємо

$$q(1) \ln y + p(y) \ln x = p(1) \ln x + q(x) \ln y.$$

Для визначення $p(y)$ та $q(x)$ згрупуємо подібні члени:

$$[q(1) - q(x)] \ln y = [p(1) - p(y)] \ln x,$$

розділення змінних дає:

$$\frac{\ln y}{p(1) - p(y)} = \frac{\ln x}{q(1) - q(x)}. \tag{4.8}$$

Тепер припустимо, що для всіх $x \neq 1$ маємо $q(x) \neq q(1)$, і для всіх $y \neq 1$, $p(y) \neq p(1)$. За цих припущень обидві частини рівняння (4.8) дорівнюватимуть деякій константі, позначеній як C. Отже,

$$\ln y = C[p(1) - p(y)],$$

і розв'язуючи для $p(y)$, маємо:

$$p(y) = p(1) - \frac{1}{C} \ln y. \tag{4.9}$$

Аналогічно, $q(x)$ має вигляд

$$q(x) = q(1) - \frac{1}{C} \ln x.$$

Розв'язання рівняння (4.7) для $c_1(y)$ тепер дає $c_1(y) = ce^{q(1) \ln y}$. Отже,

$$m(x, y) = m_y(x) = c_1(y) x^{p(y)} = ce^{q(1) \ln y} x^{p(y)}.$$

Після підстановки $p(y)$ з (4.9) це набуває вигляду

$$m(x,y) = cy^{q(1)}x^{p(1)-\frac{1}{C}\ln y} = cy^{q(1)}x^{p(1)}x^{-\frac{1}{C}\ln y},$$

та оскільки $x = e^{\ln x}$, то це зводимо

$$m(x,y) = cy^{q(1)}x^{p(1)}e^{-\frac{1}{C}\ln x \ln y}.$$

Задаючи $\alpha = -1/C$, загальний розв'язок $m(x,y)$ має вигляд

$$m(x,y) = cy^{q(1)}x^{p(1)}e^{\alpha \ln x \ln y}$$

що і потрібно було довести. $\square$

Отже, якщо $N = 2$ та всі m неперервні, що задовольняють нашому критерію формальної справедливості, мають вигляд

$$m(x,y) = cy^q x^p e^{\alpha \ln x \ln y}. \tag{4.10}$$

Зауваження 4.2. Аналогічним чином до Теореми 4.1, можна стверджувати, що як і для випадку при неперервності m, так і для випадку монотонності, всі m будуть мати вигляд (4.10).

Коли маємо справу з N кваліфікаціями, можна довести, що m має вигляд

$$m(x_1,\ldots,x_N) = \prod_{i=0}^{2^N-1}\left[\exp\left(\alpha_i \prod_{j\in M_i}\ln x_j\right)\right],$$

де $M_i \subset \{1,\ldots,N\}$. Існує 2^N таких підмножин. Наприклад, при $N = 2$, буде 2^2 підмножини: $\emptyset, \{1\}, \{2\}$, та { 1,2 }, що відповідає $i = 0,1,2,3$, відповідно. Отже,

$$m(x_1,x_2) = e^{\alpha_0}\cdot e^{\alpha_1 \ln x_1}\cdot e^{\alpha_2 \ln x_2}\cdot e^{\alpha_3 \ln x_1 \ln x_2}.$$

Після спрощення отримуємо

$$m(x_1,x_2) = c\cdot x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdot e^{\alpha_3 \ln x_1 \ln x_2},$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ та c - константи. Це узгоджується з рівнянням (4.10). Випадки, коли $N > 2$, можна довести за допомогою індукційного аргументу.

Отже, під час нашого дослідження, ми виявили, що функція заробітної плати m задовольняє нашу вимогу формальної справедливості, 2^N параметри повинні бути визначені (по одному для кожної підмножини $\{1, \ldots, N\}$).

5 Екзотичні розв'язки

У минулому розділі ми дізналися, що функціональне рівняння Коші

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{4.11}$$

має лише розв'язки типу $f(x) = cx$, за умови, що f неперервна хоча б в одній точці. Отже, якщо існують інші рішення, то це мають бути функції, які взагалі не мають точок неперервності. Хоча такі функції навряд чи мають якесь практичне значення. Виникає питання: чи існують такі розв'язки рівняння (4.11) взагалі?

Існування таких екзотичних розв'язків рівняння (4.11) було вперше встановлено на початку 20-го століття, воно ґрунтується на понятті *базису Гамеля* дійсних чисел над раціональними числами. Базис Гамеля є добре відомим поняттям у теорії векторних просторів. У нашому випадку дослідження ми розглянемо лише дійсні числа.

Означення 5.1. *Базисом Гамеля H* дійсних чисел над раціональними числами називається множина $H \subset \mathbb{R}$ така, що кожен $x \in \mathbb{R}$ можна однозначно (з точністю до нуля доданків) представити у вигляді скінченної суми

$$x = \sum_{k=1}^{n} q_k h_k, \qquad q_k \in \mathbb{Q}, \quad h_k \in H.$$

Тут раціональний коефіцієнт q_k та ціле число n залежать від x. Представлення є унікальним за винятком можливого додавання нулів (позначається як $0 \cdot h$ з $h \in H$).

Гамелів базис такого типу є досить складною множиною. Це має бути незліченна множина, тому що інакше ми могли б довести, що дійсні числа є зліченною множиною. Це має бути лінійно незалежна множина в тому значенні, що тотожність

$$\sum_{k=1}^{n} r_k h_k = 0, \quad r_k \in \mathbb{Q},$$

завжди означатиме, що всі $r_k = 0$. Таким чином, якщо (наприклад) $\sqrt{2} \in H$, то жодне раціональне кратне число $\sqrt{2}$ не може знаходитись у H.

Існування Гамелевого базису $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$ випливає з леми Зорна і того факту, що $\mathbb{R}$ є лінійним векторним простором над $\mathbb{Q}$. Це виходить за рамки нашого дослідження формальної справедливості.

Теорема 5.1. *Дійсні числа мають базис Гамеля над раціональними числами.*

Базиси Гамеля є інструментом вибору для отримання найбільш загальних розв'язків (4.11). Нехай H - довільний базис Гамеля $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$. Для $h \in H$, вибрати $f(h)$ довільним. Для $x \in \mathbb{R}$, записуємо $x = \sum_k^n q_k h_k$, як це можливо за означенням базису Гамеля, і задаємо $f(x) =: \sum_k^n q_k f(h_k)$, яка визначає f для всіх дійсних x.

Теорема 5.2. *Визначена таким чином функція f є розв'язком (4.11), і кожен розв'язок (4.11) задовольняє умову*

$$f\left(\sum_k^n q_k h_k\right) = \sum_k^n q_k f(h_k).$$

Доведення. Можемо побачити, що друга частина твердження була фактично доведена, де ми вперше проаналізували рівняння Коші. Що стосується першої частини, то нехай x та y знаходяться в $\mathbb{R}$. Тоді x та y мають унікальні репрезентації (за винятком нульових коефіцієнтів)

$$x = \sum_{k=1}^m p_k h_k, \qquad y = \sum_{k=1}^m q_k h_k$$

(оскільки ми завжди можемо додати доданки $0 \cdot h_k$, то припущення про однакову кількість доданків в обох сумах не є обмеженням загальності). $x + y$ має (унікальне) подання

$$x + y = \sum_{k=1}^m (p_k + q_k) h_k,$$

а отже, за визначенням f,

$$f(x+y) = \sum_{k=1}^{m}(p_k + q_k)f(h_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} p_k f(h_k) + \sum_{k=1}^{m} q_k f(h_k) = f(x) + f(y).$$

□

Отже, тепер ми знаємо, як знаходити загальні розв'язки рівняння (4.11). Усе, що нам потрібно зробити, це взяти базис Гамеля і вибрати довільні значення f на цій множині. Але, на жаль, не існує способу *знайти* базис Гамеля. Розглянута раніше теорема, яка стверджує існування, говорить нам, що існує така річ, як базис Гамеля, але не говорить нам, як його знайти. Доведення існування (на основі леми Зорна) не є конструктивним.

Тим не менш, ми можемо зібрати багато інформації про розв'язки (4.11), які не мають вигляду $f(x) = cx$. Нагадаємо, що графіком функції f називається множина:

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}.$$

Теорема 5.3. *Припустимо, що f є розв'язком рівняння (4.11), який не має вигляд виду $f(x) = cx$. Тоді графік f є щільним в $\mathbb{R}^2$; іншими словами, для довільної точки P на евклідовій площині $\mathbb{R}^2$ і довільного числа $\epsilon > 0$ існує точка Q на графіку f така, що $|P - Q| < \epsilon$.*

Доведення. Якщо f не має вигляд $f(x) = cx$, то повинні бути дійсні числа $x_1 \neq 0$ та $x_2 \neq 0$ такі, що $f(x_1)/x_1 \neq f(x_2)/x_2$. Іншими словами, детермінант

$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) \\ x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Це означає, що вектори $\vec{p_1} = (x_1, f(x_1))$ та $\vec{p_2} = (x_2, f(x_2))$ лінійно незалежні, тому будь-який $\vec{p} \in \mathbb{R}^2$ можна однозначно представити як

$$\vec{p} = \rho_1 \vec{p_1} + \rho_2 \vec{p_2}.$$

Більше того, множина всіх векторів $\vec{p}$, які можна представити таким чином із раціональними коефіцієнтами ρ_1, ρ_2, є щільною в $\mathbb{R}^2$. Тепер нехай $(r_1, r_2) \in \mathbb{Q}^2$, то

$$r_1\vec{p_1} + r_2\vec{p_2} = (r_1x_1 + r_2x_2, r_1f(x_1) + r_2f(x_2)) = (r_1x_1 + r_2x_2, f(r_1x_2 + r_2x_2)),$$

де той факт, що f задовольняє (4.11), використано в останній тотожності. Звідси випливає доведення теореми. □

З цієї теореми випливає безпосередній наслідок.

Наслідок 5.1. *Якщо f задовольняє (4.11) і не має вигляду $f(x) = cx$, то зображення будь-якого непорожнього проміжку (a, b) з $a < b$ є щільним у $\mathbb{R}$.*

Крім того, можемо узагальнити інше.

Наслідок 5.2. *Якщо f задовольняє (4.11) і є або:*
- *неперервна хоча б в одній точці, або*
- *монотонна на проміжку додатної довжини, або*
- *обмежена з одного боку (зверху або знизу) інтервалом додатної довжини,*

тоді існує $c \in \mathbb{R}$ таке, що для всіх x, $f(x) = cx$.

Отже, зрозуміло, що графік f не може бути щільним на площині.

6 Висновки

У рамках даної магістерської дисертації було розглянуто моделі формальної справедливості для точної(справедливої) оплати праці та здійснено їх аналіз. А саме, це були: модель Арістотеля (пропорційна справедливість) та модель Солтана. Основним аспектом при вивченні моделі Солтана є функціональне рівняння Коші. Робота виявила значущість цієї теми в розв'язку задачі про визначення розміру винагороди (заробітньої плати) у кожній галузі праці.

Під час дослідження зазначених моделей було помічено, що кожна з них має свої недоліки. Модель Арістотеля має обмежене застосування. При припущенні про неперервність функції винагороди, за якою задана модель Солтана, було виявлено, що на практиці скоріше ця функція буде монотонною. Тому було розглянуто узагальнену модель Солтана з монотонною функцією винагороди. Припущення про монотонність дозволяє охопити випадки, коли незначні покращення кваліфікацій можуть привести до суттєвої зміни результатів діяльності.

Також було розглянуто та усунуто недолік моделі Солтана, врахувавши різні шкали при оцінці кваліфікацій. Отриманий результат показав, що при введенні константи, отримана функція задовольняє функціональне рівняння як моделі Солтана, так і узагальненої моделі Солтана. Оскільки, в реальності заробітна плата є функцією від декількох кваліфікацій, то було розглянуто модель розв'язку відповідного рівняння у випадку множинної кваліфікації. Було досліджено, що функціональне рівняння також має екзотичні розв'язки. Їх існування ґрунтується на понятті базису Гамеля.

Результати дисертації розширюють межі застосування моделей формальної справедливості, відкриваючи нові можливості для професіоналів, які працюють у сфері оплати праці. Отримані знання можуть бути використані для подальших досліджень та розвитку даних моделей.

7 Список використаної літератури

[1]Клесов О. І. Правильно змінні функції у теорії ймовірностей: конспект лекцій.(2018)

[2]Soltan, K.E..(1987) The Causal Theory of Justice. California: University of California Press.

[3]Reinhard Illner.(May 1990) Formal Justice and Functional equations.

[4]Reinhard Illner, C. Sean Bohun, Samantha McCollum, Thea van Roode.(2005) Mathematical modelling : a case studies approach - (Student mathematical library)

[5]N. H. Bingham, C. M. Goldie, and J. L. Teugel.(1987) Regular Variation. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 27. Cambridge University Press.

[6]E. Seneta.(1976) Regularly Varying Functions. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 508. Springer-Verlag. Berlin–Heidelberg–New York.