НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 336.763.3

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

________О.І. Клесов

«___»_____________20__ р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-професійною програмою «Страхова та фінансова математика»

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Стратегії створення портфеля облігацій з оптимальним співвідношенням ризику та дохідності»

Виконала:
студентка ІІ курсу, групи ОМ-31мп
Мізернюк Софія Владиславівна

____

Науковий керівник:
Кандидат технічних наук, доцент
Іваненко Тетяна Вікторівна ___________

Рецензент:
Завідувач кафедри теоретичної
прикладної механіки механіко-математичного
факультету КНУ ім. Тараса Шевченка,
доктор фізико-математичних наук,
професор
Жук Ярослав Олександрович ___________

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних посилань.
Студентка ______________

Київ – 2024 року

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-професійна програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_______Олег, КЛЕСОВ

«___»____________20__ р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту

Мізернюк Софії Владиславівні

1. Тема дисертації «Стратегії створення портфеля облігацій з оптимальним співвідношенням ризику та дохідності», науковий керівник дисертації Іваненко Тетяна Вікторівна, кандидат технічних наук, доцент, затверджені наказом по університету від « 6 » листопада 2024 р. № 4981-с

2. Термін подання студентом дисертації 14.12.2024 р.

3. Об’єкт дослідження: ринок облігацій, методи створення портфелів облігацій з оптимальним співвідношенням ризику та дохідності.

4. Вихідні дані: дані про державні й корпоративні облігації з платформ ПФТС і Української біржі.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1) Збір і аналіз теоретичних даних про найефективніші фінансові моделі для створення портфелів.

2) Збір даних про державні й корпоративні облігації.

3) Побудова математичної моделі для створення портфеля з оптимальним співвідношенням ризику й дохідності.

4) Аналіз отриманих результатів і удосконалення отриманого портфеля.

6. Дата видачі завдання 04.09.2024 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Пошук та обробка наукової літератури.	04.09.2024 – 30.09.2024	Виконано
2	Написання 1 розділу.	30.09.2024 – 15.10.2024	Виконано
3	Збір та аналіз вхідних даних для побудування математичної моделі.	16.10.2024 – 31.10.2024	Виконано
4	Написання 2 розділу.	31.10.2024 – 14.11.2024	Виконано
5	Підбиття висновків проведеної роботи.	15.11.2024 – 28.11.2024	Виконано
6	Оформлення магістерської дисертації та підготовка до захисту.	29.11.2024 – 14.12.2024	Виконано

Студент Софія МІЗЕРНЮК

Науковий керівник Тетяна ІВАНЕНКО

РЕФЕРАТ

Магістерська робота містить 49 сторінок, 15 слайдів презентації, 11 джерел.

Об'єктом даної дипломної роботи є ринок облігацій, портфелі облігацій і методи створення портфелів облігацій з оптимальним співвідношенням ризику та дохідності.

Метою даної дипломної роботи є розробка практичних стратегій створення та управління портфелем облігацій з оптимальним співвідношенням ризику та дохідності.

У роботі було розглянуто класичні та сучасні підходи до оптимізації облігаційних портфелів (модель Марковіца, багатофакторні моделі, Value at Risk). Було досліджено вплив особливостей облігацій на стійкість портфеля. Використано методи математичного моделювання для оцінки ризику та дохідності. Запропоновано алгоритми формування збалансованого портфеля облігацій за допомогою реалізації в Python.

Ключові слова: облігації, ризик, дохідність, портфельна теорія, модель Марковіца, диверсифікація, Value at Risk, оптимізація.

ABSTRACT

The master's thesis contains 49 pages, 15 slides of presentation, and 11 primary sources.

The object of this thesis is the bond market, bond portfolios, and methods for constructing a bond portfolio with an optimal risk-return ratio.

The aim of this thesis is to develop practical strategies for creating a bond portfolio with an optimal risk-return ratio.

The study examines classical and modern approaches to bond portfolio optimization (Markowitz model, multifactor models, Value at Risk). The impact of bond characteristics on portfolio stability was analyzed. Mathematical modeling methods were applied to assess risk and profitability. Algorithms for constructing a balanced bond portfolio were proposed, implemented using Python.

Keywords: bonds, risk, profitability, portfolio theory, Markowitz model, diversification, Value at Risk, optimization.

Зміст

Вступ

Сучасні фінансові ринки переживають період значної трансформації через фінансові інновації та впровадження нових фінансових інструментів. Ця складність виникає внаслідок еволюції ринкової динаміки, інформаційної асиметрії та взаємозв'язку різних фінансових секторів.

Сьогодні міжнародне портфельне інвестування займає значну частку глобального інвестиційного ринку. Так, вартість світового ринку облігацій зросла на 16,5% до 123,5 трлн дол. США у 2020 році, тоді як капіталізація світового ринку акцій у 2020 році також зросла на 18,2% у порівнянні з аналогічним періодом минулого року, до 105,8 трлн дол. США, за даними SIFMA. Це пов'язано з тим, що учасниками міжнародного ринку цінних паперів протягом останніх років стають все більше осіб, а сам фондовий ринок стає все більш доступним для потенційних інвесторів, перш за все, за рахунок лібералізації та наявності невисоких бар'єрів входження. Український фондовий ринок також поступово зростає, про що свідчить той факт, що загалом на українських фондових біржах обсяг укладених угод у січні 2022 р. становив 48,8 млрд грн., що на 27% більше, ніж у грудні 2021 р. Вітчизняні та іноземні фінансові експерти сходяться в думках щодо наявності двох основних стратегій портфельного інвестування– активної, яка характеризується тим, що інвестор прагне переграти ринок для отримання більшої дохідності, тому він схильний до ризику та постійно й старанно слідкує за фондовим ринком, та пасивної, що характеризується тим, що інвестор не намагається обіграти ринок, приділяє мінімум уваги тому, що відбувається на ринках, не реагує на фон новин та схильний до диверсифікації свого інвестиційного портфеля. [4]

Облігації, зокрема державні та корпоративні, є одним із найбільш популярних інструментів для диверсифікації портфелів і стабілізації інвестицій. Вони пропонують передбачувані грошові потоки та порівняно низький рівень ризику в порівнянні з акціями або альтернативними інвестиціями. У цьому контексті особливої важливості набуває оптимізація співвідношення ризику та дохідності, яка дозволяє інвесторам забезпечити максимальний прибуток при мінімальних ризиках, пов'язаних із коливаннями ринкових умов.

Оптимізація співвідношення ризику та дохідності передбачає застосування математичних моделей, що дають можливість більш точно оцінювати ризики та прогнозувати дохідність портфелів. Однією з основних моделей, яка використовується для досягнення цієї мети, є модель Марковіца, яка визначає оптимальний портфель активів на основі їхніх очікуваних доходів і ризиків (варіації дохідності).[6]

Однак, традиційні моделі, як-от модель Марковіца, часто не враховують складнощі сучасних фінансових інструментів і нових умов ринку. У зв'язку з цим важливість інновацій, таких як машинне навчання для аналізу ризиків та дохідності, стає дедалі більш очевидною. Моделі, що базуються на машинному навчанні, можуть забезпечити більш точні прогнози ризиків і виявлення патернів в історичних даних.

Водночас, зростає значення інноваційних підходів, таких як машинне навчання і багатофакторні моделі, що можуть підвищити ефективність прогнозування ринкових коливань та їхнього впливу на портфелі. Оскільки інвестори прагнуть збалансувати ризик і дохідність, зростає попит на фінансові інструменти та стратегії, які забезпечують довгострокову стабільність і передбачуваність. Облігації, завдяки їхній низькій волатильності та стабільності грошових потоків, стають центральним елементом у портфелях багатьох інвесторів.[5]

У цій роботі досліджуються стратегії створення портфеля облігацій з оптимальним співвідношенням ризику та дохідності, враховуючи сучасні фінансові тенденції та використовуючи сучасні математичні моделі для управління інвестиціями. Важливість цих стратегій підкреслюється в контексті традиційних фінансових концепцій, що аналізують ризики, дохідність та інвестиційні рішення, а також новітніми дослідженнями в галузі фінансової математики.

Розділ 1

Математичні моделі фінансових ринків

1.1. Основні поняття портфельної теорії

1.1.1. Ризик і очікувана дохідність портфеля.

Портфель, сформований із n різних цінних паперів, може бути описаний за допомогою їхніх ваг:

$$w_i = \frac{x_i S_i(0)}{V(0)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

де x_i — кількість активів i-го типу в портфелі, $S_i(0)$ — початкова ціна активу i, а $V(0)$ — початково інвестована сума в портфель. Зручно записувати ваги у вигляді матриці-рядка:

$$\mathbf{w} = [w_1\, w_2\, \dots\, w_n].$$

Як і для двох цінних паперів, сума ваг дорівнює одиниці, що можна записати у матричній формі:

$$1 = \mathbf{u}\mathbf{w}^T, \tag{1}$$

де

$$\mathbf{u} = [1\, 1\, \dots\, 1]$$

є матрицею-рядком, в якій усі елементи дорівнюють 1, а $\mathbf{w}^T$ — це транспонована матриця $\mathbf{w}$. Правила множення матриць залишаються чинними. Набір портфелів із вагами $\mathbf{w}$, які задовольняють рівняння (1), називається *досяжними портфелями.*[4]

Нехай дохідність цінних паперів позначена як $K_1, \dots, K_n$. Очікувані дохідності

$\mu_i = \mathbb{E}(K_i)$ для $i = 1, \ldots, n$ також будуть записані у вигляді матриці-рядка:

$$\mathbf{m} = [\mu_1\, \mu_2\, \ldots\, \mu_n].$$

Коваріації між дохідностями позначаються $c_{ij} = \mathrm{Cov}(K_i, K_j)$. Ці значення є елементами матриці коваріацій $n \times n$:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix}.$$

Відомо, що матриця коваріацій є симетричною та додатно визначеною. Діагональні елементи є дисперсіями дохідностей, $c_{ii} = \mathrm{D}(K_i)$. У подальшому ми припускаємо, що матриця $\mathbf{C}$ також має обернену $\mathbf{C}^{-1}$.

Твердження 1
Очікувана дохідність $\mu_V = \mathbb{E}(K_V)$ і дисперсія $\sigma_V^2 = \mathrm{D}(K_V)$ портфеля з вагами $\mathbf{w}$ задаються формулами:

$$\mu_V = \mathbf{m}\mathbf{w}^T, \tag{2}$$

$$\sigma_V^2 = \mathbf{w}\mathbf{C}\mathbf{w}^T. \tag{3}$$

Доведення
Формула для μ_V випливає з лінійності математичного сподівання:

$$\mu_V = \mathbb{E}(K_V) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i K_i\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i = \mathbf{m}\mathbf{w}^T.$$

Для σ_V^2 використовуємо лінійність коваріації щодо кожного з її аргументів:

$$\sigma_V^2 = \mathrm{Var}(K_V) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i K_i\right)$$

$$= \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i K_i, \sum_{j=1}^{n} w_j K_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j c_{ij}$$

$$= \mathbf{w}\mathbf{C}\mathbf{w}^T. \qquad \square$$

Ми розглянемо розв'язання наступних двох задач:

1. Знаходження портфеля із найменшою дисперсією серед усіх досяжних портфелів. Такий портфель називається *портфелем мінімальної дисперсії.*

2. Знаходження портфеля із найменшою дисперсією серед усіх досяжних портфелів, очікувана дохідність яких дорівнює заданому значенню μ_V. Сімейство таких портфелів, параметризоване μ_V, називається *лінією мінімальної дисперсії.*

Оскільки дисперсія є неперервною функцією ваг, обмеженою знизу нулем, мінімум однозначно існує в обох випадках.

Твердження 2 (Портфель мінімальної дисперсії)
Портфель із найменшою дисперсією в досяжній множині має ваги, визначені формулою:

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}}{\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^T},$$

за умови, що знаменник не дорівнює нулю.

Доведення
Необхідно мінімізувати вираз (3) за умови обмеження (1). Для цього скористаємося методом множників Лагранжа. Нехай

$$F(\mathbf{w}, \lambda) = \mathbf{w}\mathbf{C}\mathbf{w}^T - \lambda(\mathbf{u}\mathbf{w}^T),$$

де λ — множник Лагранжа. Прирівнюючи до нуля часткові похідні функції F за вагами w_i, отримаємо:

$$2\mathbf{w}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{u} = 0,$$

або

$$\mathbf{w} = \frac{\lambda}{2}\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}.$$

Це необхідна умова для мінімуму. Підставляючи цей вираз у обмеження (1), отримаємо:

$$1 = \frac{\lambda}{2}\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^T,$$

де використано той факт, що $\mathbf{C}^{-1}$ є симетричною матрицею, оскільки $\mathbf{C}$ є симетричною. Вирішуючи це рівняння відносно λ і підставляючи отримане значення λ у вираз для $\mathbf{w}$, отримуємо задану формулу. $\square$

Твердження 3 (Лінія мінімальної дисперсії)
Портфель із найменшою дисперсією серед досяжних портфелів з очікуваною дохідністю μ_V має ваги:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\begin{vmatrix} uC^{-1}u^T & uC^{-1}m^T \\ mC^{-1}u^T & mC^{-1}m^T \end{vmatrix}} \left[uC^{-1} \begin{vmatrix} 1 & uC^{-1}m^T \\ \mu_V & mC^{-1}m^T \end{vmatrix} + mC^{-1} \begin{vmatrix} uC^{-1}u^T & 1 \\ mC^{-1}u^T & \mu_V \end{vmatrix} \right],$$

за умови, що визначник у знаменнику є ненульовим.

за умови, що визначник у знаменнику не дорівнює нулю, ваги залежать лінійно від μ_V.

Доведення
Тут потрібно знайти мінімум формули (3) за умов двох обмежень (1) та (2). Введемо функцію Лагранжа:

$$G(\mathbf{w}, \lambda, \mu) = \mathbf{w}\mathbf{C}\mathbf{w}^T - \lambda \mathbf{u}\mathbf{w}^T - \mu \mathbf{m}\mathbf{w}^T,$$

де λ і μ — множники Лагранжа. Часткові похідні G за вагами $\mathbf{w}_i$, прирівняні до нуля, дають необхідну умову для мінімуму:

$$2\mathbf{w}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{u} - \mu\mathbf{m} = 0,$$

що означає:

$$\mathbf{w} = \frac{\lambda}{2}\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1} + \frac{\mu}{2}\mathbf{m}\mathbf{C}^{-1}.$$

Підставляючи це в обмеження (1) і (2), отримуємо систему лінійних рівнянь:

$$1 = \frac{\lambda}{2}\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^T + \frac{\mu}{2}\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m}^T,$$

$$\mu_V = \frac{\lambda}{2}\mathbf{m}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^T + \frac{\mu}{2}\mathbf{m}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{m}^T.$$

Ця система вирішується відносно λ і μ. Формула, яку потрібно було довести, випливає з підстановки отриманих значень λ і μ у вираз для $\mathbf{w}$. $\square$

1.1.2. Ефективний кордон.

Даючи вибір між двома цінними паперами, раціональний інвестор, якщо це можливо, обере той, який має вищу очікувану дохідність і нижче стандартне відхилення, тобто нижчий ризик. Це мотивує наступне визначення, важливе для розуміння портфельної теорії.

Визначення 1

Ми кажемо, що цінний папір із очікуваною дохідністю μ_1 і стандартним відхиленням σ_1 **домінує** над іншим цінним папером із очікуваною дохідністю μ_2 і стандартним відхиленням σ_2, якщо:

$$\mu_1 \geq \mu_2 \quad \text{та} \quad \sigma_1 \leq \sigma_2.$$

Це визначення легко поширюється на портфелі, які, звісно, також можна розглядати як цінні папери.

Зауваження 1

Якщо два цінних папери такі, що один домінує над іншим, домінований цінний папір може здатися цілком зайвим на перший погляд. Однак це не завжди так. Можливо створити портфелі, що складаються з цих двох паперів, які матимуть менший ризик, ніж будь-який із них окремо. Наприклад, на 1.1 показано, як цінний папір із характеристиками σ_2, μ_2 домінує над папером із характеристиками σ_1, μ_1.

Визначення 2

Портфель називається *ефективним*, якщо не існує іншого портфеля, окрім нього самого, який би домінував над ним.

Набір ефективних портфелів серед усіх досяжних портфелів називається *ефективним кордоном.*

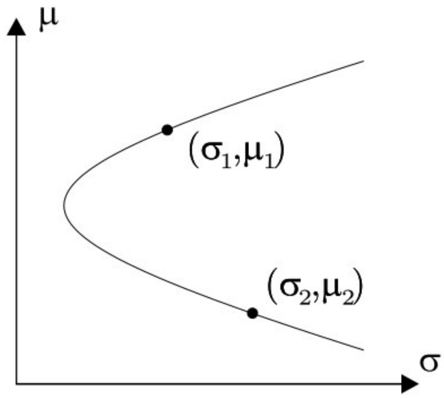

Рис. 1.1. Зменшення ризику за допомогою домінованого цінного паперу

Кожен раціональний інвестор обере ефективний портфель, завжди віддаючи перевагу портфелю, що домінує, над тим, що є домінованим. Однак різні інвестори можуть обирати різні портфелі на ефективному кордоні, залежно від своїх індивідуальних вподобань. Наприклад, якщо є два ефективних портфелі з $\mu_1 \leq \mu_2$ і $\sigma_1 \leq \sigma_2$, обережний інвестор може віддати перевагу тому, який має нижчий ризик σ_1 та нижчу очікувану дохідність μ_1, тоді як інші можуть обрати портфель із вищим ризиком σ_2, вважаючи вищу очікувану дохідність μ_2 компенсацією за збільшення ризику.

Зокрема, ефективний портфель має найвищу очікувану дохідність серед усіх доступних портфелів із тим самим стандартним відхиленням (тим самим ризиком) і найнижче стандартне відхилення (найменший ризик) серед усіх доступних портфелів із тією самою очікуваною дохідністю. Таким чином, ефективний кордон обов'язково є підмножиною лінії мінімальної дисперсії. Щоб зрозуміти структуру ефективного кордону, спершу вивчимо лінію мінімальної дисперсії докладніше, а потім оберемо відповідну підмножину.

1.2. CAPM

Однією з найвідоміших моделей є модель оцінки капітальних активів (CAPM), розроблена Шарпом-Лінтнером-Моссеном. CAPM описує взаємозв'язок між систематичним ризиком або загальними ризиками інвестування та очікуваною прибутковістю активів. Це фінансова модель, яка встановлює лінійну залежність між необхідною прибутковістю інвестицій та ризиком.

У часи, коли комп'ютери були повільними, використовувати портфельну було важко. Для ринку з $n = 1000$ активів матриця коваріації C буде мати $n^2 = 1,000,000$ елементів. Для знаходження ефективного кордону необхідно обчислити обернену матрицю C^{-1}, що є складним завданням. Точна оцінка C на практиці може також створювати значні проблеми. Модель оцінки капітальних активів (CAPM) забезпечує рішення, яке є значно ефективнішим з обчислювальної точки зору: вона не потребує оцінки C, але пропонує глибоке, хоча й дещо спрощене, розуміння деяких фундаментальних економічних питань. [4]

У межах CAPM припускається, що кожен інвестор використовує однакові значення очікуваних доходів, стандартного відхилення та кореляцій для всіх активів, приймаючи інвестиційні рішення, ґрунтуючись виключно на цих показниках. Зокрема, кожен інвестор обчислює один і той самий ефективний кордон, на основі якого формується портфель. Однак, інвестори можуть відрізнятися у ставленні до ризику, обираючи різні портфелі на ефективному кордоні.

1.2.1. Лінія ринку капіталу.

Твердження 2.
Стандартне відхилення σ_V портфеля, що складається з ризикованого цінного паперу з очікуваним прибутком μ_1 і стандартним відхиленням $\sigma_1 > 0$, а також безризикового цінного паперу з прибутком r_F і нульовим стандартним відхиленням залежить від ваги w_1 ризикового цінного паперу й визначається наступним чином:

$$\sigma_V = |w_1|\sigma_1 \tag{1}$$

Доведення.
Нехай $\sigma_1 > 0$ і $\sigma_2 = 0$. Тоді твердження (2) зводиться до

$$\sigma_V = w_1^2\sigma_1^2.$$

Взявши квадратний корінь з обох сторін, ми отримаємо формулу σ_V

$$\sigma_V = w_1\sigma_1.$$

$\square$

Лінія на площині $(\sigma,\ \mu)$ представляє портфелі, побудовані з одного ризикового і одного безризикового цінного паперу, показаного на 1.2 Відрізок, що виділений жирним, відповідає портфелям без коротких продажів.

Розглянемо портфель, що складається з безризикових цінних паперів і цінні папери з визначеним рівнем ризику (можливо, портфель ризикованих цінних паперів)

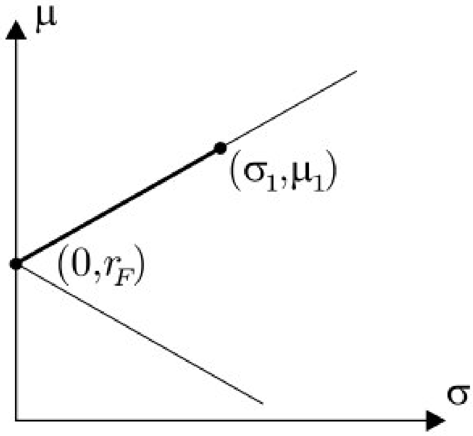

Рис. 1.2. Портфельна лінія для одного ризикового та одного безризикового цінного паперу

з очікуваною прибутковістю μ_1 і стандартним відхиленням $\sigma_1 > 0$. Згідно з твердженням (1), усі такі портфелі утворюють ламану пряму на площині (σ, μ), що представлена двома променями, див. 1.2. Беручи портфелі, що містять безризиковий цінний папір і цінний папір із σ_1, μ_1 будь-де в досяжному наборі, представленому кулею Марковіца (куля Марковіца — це обмежувальна лінія, яка містить портфелі мінімального ризику для кожного доходу) на площині (σ, μ), ми можемо побудувати будь-яке портфоліо між двома показаними променями на 1.3. Ефективним кордоном цього нового набору портфелів, які можуть містити безризикові цінні папери, є верхня пів лінія, дотична до кулі Марковіца та проходить через точку з координатами $0, r_F$. Згідно з припущеннями CAPM, кожен раціональний інвестор вибере свій портфель на цьому промені, який називається *лінією ринку капіталу (CML)*. Цей аргумент працює до тих пір, поки безризикова прибутковість r_F не надто висока, тому верхній промінь є дотичним до кулі. (Якщо r_F занадто висока, то верхній промінь більше не буде дотичним до кулі). Особливу роль відіграє точка дотику з координатами σ_M, μ_M. Кожен портфель на лінії ринку капіталу може бути побудований з безризикового цінного паперу та портфеля зі стандартним відхиленням σ_M та очікуваною прибутковістю μ_M.

Оскільки кожен інвестор вибере портфель на лінії ринку капіталу, кожен матиме портфель з однаковими відносними пропорціями ризикованих цінних паперів. Але це означає, що портфель зі стандартним відхиленням σ_M і очікуваною прибутковістю μ_M має містити всі ризиковані цінні папери з вагою, що дорівнює їх відносній частці на всьому ринку. Через цю властивість його називають ринковим портфелем. На практиці ринковий портфель апроксимується відповідним біржовим індексом.[11]

Лінія ринку капіталу, що поєднує безризикові цінні папери та ринковий портфель,

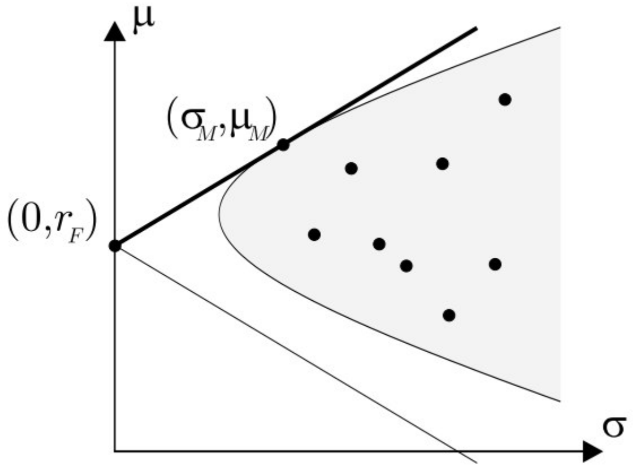

Рис. 1.3. Ефективний кордон для портфелів із безризиковими цінними паперами

задовольняє рівняння

$$\mu = r_F + \frac{\mu_M - r_F}{\sigma_M}\sigma. \tag{4}$$

Для портфеля на лінії ринку капіталу з ризиком σ термін $\frac{\mu_M - r_F}{\sigma_M}\sigma$ називається премією за ризик. Цей додатковий прибуток вище безризикового рівня забезпечує компенсацію за ризик.

Твердження 4.
Ваги w будь-якого портфеля, що належить до ефективного кордону (за винятком портфеля з мінімальною дисперсією), задовольняють умову

$$\gamma w C = m - \mu u \tag{5}$$

для деяких дійсних чисел $\gamma > 0$ і μ.

Доведення.
Нехай w — ваги портфеля, крім портфеля з мінімальною дисперсією, що належить до ефективного кордону. Портфель має очікувану прибутковість $\mu_V = mw^T$ і стандартне відхилення $\sigma_V = \sqrt{wCw^T}$. На площині (σ, μ) проведемо дотичну до ефективного кордону через точку, що представляє портфель. Ця лінія перетинатиме вертикальну вісь у деякій точці з координатою μ, де градієнт $\frac{mw^T - \mu}{\sqrt{wCw^T}}$. Цей градієнт є максимумом серед усіх ліній, що проходять через точку на вертикальній осі з координатою μ і

перетинають множину досяжних портфелів. Максимум має бути прийнято для всіх ваг w з урахуванням обмеження $uw^T = 1$. Покладемо

$$F(w,\lambda) = \frac{mw^T - \mu}{\sqrt{wCw^T}} - \lambda uw^T,$$

де λ – множник Лагранжа. Необхідною умовою для обмеженого максимуму є те, що часткові похідні F за ваговими коефіцієнтами повинні бути нульовими. Тоді маємо:

$$m - \lambda\sigma_V u = \frac{\mu_V - \mu}{\sigma_V^2} wC.$$

Помноживши праву частину на w^T та враховуючи обмеження, ми знайдемо, що $\lambda = \frac{\mu}{\sigma_V}$. Для $\gamma = \frac{\mu_V - \mu}{\sigma_V^2}$ це дає заявлену умову. Оскільки дотична пряма є зростаючою, маємо $\mu_V > \mu$, тобто $\gamma > 0$. □

1.2.2. Бета-фактор.

Важливо розуміти, як прибутковість K_V для певного портфеля або окремого цінного папера реагуватиме на тенденції, що впливають на весь ринок. Побудуємо графік значень K_V для кожного ринкового сценарію на вісі ординат і зі значеннями доходності K_M на ринковому портфелі на вісі абсцис. Обчислимо *лінію найкращої відповідності (line of best fit)*, також відому як *лінія регресії* або *характеристична лінія*. На 1.4 зображено графік найкращої відповідності, яка задається рівнянням

$$y = \beta_V x + \alpha_V.$$

Для будь-яких заданих β і α значення випадкової величини $\alpha + \beta K_M$ можна розглядати як прогнозовану дохідності даного портфеля. Різниця $\varepsilon = K_V - (\alpha + \beta K_M)$ між фактичною прибутковістю K_V і прогнозованою прибутковістю $\alpha + \beta K_M$ називається залишковою випадковою величиною. Умова, що визначає лінію найкращої відповідності:

$$\mathbb{E}(\varepsilon^2) = \mathbb{E}(K_V^2) - 2\beta\mathbb{E}(K_V K_M) + \beta^2\mathbb{E}(K_M^2) + \alpha^2 - 2\alpha\mathbb{E}(K_V) + 2\alpha\beta\mathbb{E}(K_M).$$

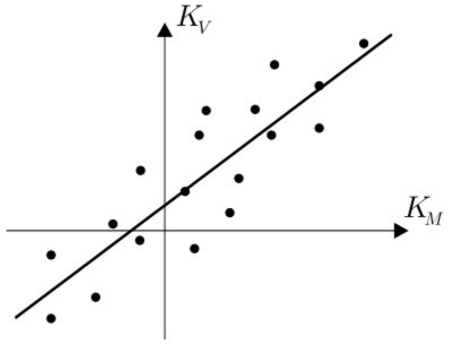

Рис. 1.4. Лінія найкращої відповідності

Функції β і α, повинні досягати свого мінімуму при $\beta = \beta_V$ і $\alpha = \alpha_V$ відповідно. Іншими словами, лінія найкращої відповідності повинна забезпечувати максимально близькі, до справжніх значень K_V, прогнози. Необхідною умовою мінімуму є те, що часткові похідні за β і α повинні дорівнювати нулю при $\beta = \beta_V$ і $\alpha = \alpha_V$. Це призводить до системи лінійних рівнянь:

$$\alpha_V \mathbb{E}(K_M) + \beta_V \mathbb{E}(K_M^2) = \mathbb{E}(K_V K_M),$$

$$\alpha_V + \beta_V \mathbb{E}(K_M) = \mathbb{E}(K_V),$$

які можна розв'язати, щоб знайти градієнт β_V і перетин α_V лінії найкращої відповідності:

$$\beta_V = \frac{\mathrm{Cov}(K_V, K_M)}{\sigma_M^2},$$

$$\alpha_V = \mu_V - \beta_V \mu_M.$$

Тут ми використовуємо звичайне позначення $\mu_V = \mathbb{E}(K_V)$, $\mu_M = \mathbb{E}(K_M)$ і $\sigma_M^2 = \mathrm{Var}(K_M)$.

Визначення 3.
Ми називаємо

$$\beta_V = \frac{\mathrm{Cov}(K_V, K_M)}{\sigma_M^2}$$

бета-фактором даного портфеля або окремого цінного папера.

Бета-фактор є показником очікуваних змін прибутковості конкретного портфеля або окремого цінного паперу, у відповідь на поведінку ринку в цілому. Оскільки $\mu_V = \beta_V \mu_M + \alpha_V$, прибутковість цінного папера з додатнім бета-фактором має тенденцію до збільшення, коли прибутковість ринкового портфеля зростає, то прибутковість цінного папера з від'ємним бета-фактором має тенденцію до збільшення, якщо прибутковість ринкового портфеля знижується.

Далі ми обговоримо іншу інтерпретацію бета-фактора. Ризик $\sigma_V^2 = \mathrm{Var}(K_V)$ цінного папера або портфеля можна записати як:

$$\sigma_V^2 = \mathrm{Var}(\varepsilon_V) + \beta_V^2 \sigma_M^2.$$

Цю формулу легко перевірити, підставивши замість залишкової випадкової величини вираз $\varepsilon_V = K_V - (\alpha_V + \beta_V K_M)$. Перший доданок $\mathrm{Var}(\varepsilon_V)$ називається залишковою дисперсією або диверсифікованим ризиком. Вона зникає для ринкового портфеля, $\mathrm{Var}(\varepsilon_M) = 0$. Цю частину ризику можна диверсифікувати, інвестуючи в ринковий портфель. Другий доданок $\beta_V^2 \sigma_M^2$ називається систематичним або недиверсифікованим ризиком. Ринковий портфель передбачає лише такий ризик. Бета-фактор β_V можна розглядати як міру систематичного ризику, пов'язаного з цінним папером або портфелем. Така інтерпретація бета-фактора має вирішальне значення. У CAPM систематичний ризик, виміряний β_V, буде пов'язаний з очікуваною прибутковістю μ_V і, отже, з ціноутворенням окремих цінних паперів і портфелів: чим вищий систематичний ризик, тим вищий прибуток вимагається інвесторами як премія за ризик такого роду. Однак ризик, який можна диверсифікувати, не залучатиме додаткової премії, не впливаючи на μ_V. Це тому, що ризик, який диверсифікується, можна усунути шляхом розподілу інвестицій у портфель багатьох цінних паперів і, зокрема, шляхом інвестування в ринковий портфель. Наступний розділ присвячений встановленню зв'язку між β_V і μ_V.

1.2.3. Лінія ринку цінних паперів (Security Market Line).

Розглянемо довільний портфель з вагами w_V. Вагу в ринковому портфелі позначатимемо w_M. Ринковий портфель належить до ефективного кордону досяжного набору портфелів, що складається з ризикових цінних паперів. Отже, за Твердженням 3

$$\gamma w_M C = m - \mu_u$$

для деяких чисел $\gamma > 0$ та μ. Таким чином, бета-фактор портфеля з вагами w_V можна записати як

$$\beta_V = \frac{\mathrm{Cov}(K_V, K_M)}{\sigma_M^2} = \frac{w_M C w_V^T}{w_M C w_M^T} = \frac{\gamma(m-\mu_u)w_V^T}{\gamma(m-\mu_u)w_M^T} = \frac{\mu_V - \mu}{\mu_M - \mu}.$$

Щоб знайти μ, розглянемо безризиковий цінний папір з прибутком r_F і бета-фактором $\beta_F = 0$. Підставляючи β_F і r_F замість β_V і μ_V у наведеному вище рівнянні, ми знайдемо, що $\mu = r_F$. Таким чином, ми довели наступну властивість.

Теорема 1. Очікувана дохідність μ_V портфеля (або окремого цінного паперу) є лінійною функцією бета-коефіцієнта β_V портфеля,

$$\mu_V = r_F + (\mu_M - r_F)\beta_V. \tag{6}$$

Очікувана прибутковість, нанесена на графік відносно бета-коефіцієнта будь-якого портфеля чи окремого цінного папера, утворюватиме пряму лінію на площині β, μ, яка називається *лінією ринку цінних паперів*. Це показано на Рис. 1.4., на якому для порівняння лінія ринку цінних паперів нанесена поруч із лінією ринку капіталу. Ряд різних портфелів та окремих цінних паперів позначені крапками на обох графіках.

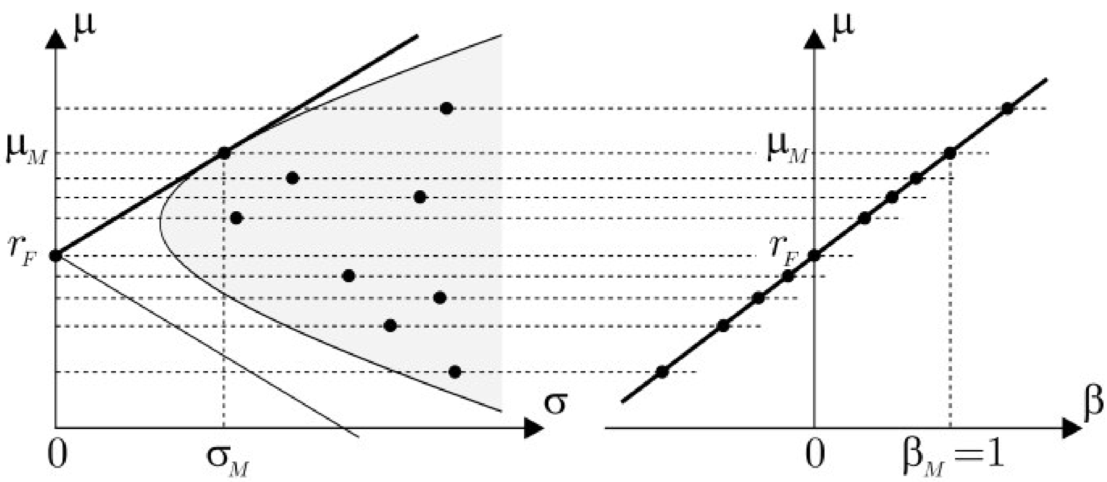

Рис. 1.5. Лінія ринку капіталу й лінія ринку цінних паперів

Подібно до виразу (4) для лінії ринку капіталу, $(\mu_M - r_F)\beta_V$ у (6) — премія за ризик, що інтерпретується як компенсація за схильність до систематичного ризику. Однак (4) застосовується лише до портфелів на лінії ринку капіталу, тоді як (6) є набагато загальнішим: воно застосовується до всіх портфелів та окремих цінних паперів.

CAPM описує стан рівноваги на ринку. Кожен тримає портфель ризикованих цінних паперів з тією ж вагою, що й ринковий портфель. Будь-які угоди, які здійснюють інвестори, вплинуть лише на розподіл їхніх коштів між безризиковим цінним папером і ринковим портфелем. У результаті попит і пропозиція на всі цінні папери будуть збалансовані. Це залишатиметься так, доки оцінки очікуваної прибутковості та бета-факторів задовольнятимуть (6).

Однак, як тільки нова інформація про ринок стане доступною для інвесторів, це може вплинути на їхні оцінки очікуваної прибутковості та бета-факторів. Нові розрахункові значення можуть більше не задовольняти (6). Припустимо, наприклад, що

$$\mu_K^V > r_F + (\mu_K^M - r_F)\beta_V$$

для конкретного цінного паперу. У цьому випадку інвестори захочуть збільшити свою відносну позицію в цьому цінному папері, який пропонує більший очікуваний прибуток, ніж вимагається компенсація за систематичний ризик. У цьому випадку інвестори захочуть збільшити свою відносну позицію в цьому цінному папері, який пропонує більший очікуваний прибуток, ніж вимагається компенсація за систематичний ризик. Попит перевищить пропозицію, ціна цінного паперу почне зростати, а очікувана прибутковість знизиться. З іншого боку, якщо зворотна нерівність

$$\mu_V < r_F + (\mu_M - r_F)\beta_V$$

виконується - інвестори захочуть продати цінні папери. У цьому випадку пропозиція перевищить попит, ціна впаде, а очікувана прибутковість зросте. Це триватиме до тих пір, поки ціни, а разом з ними й очікувана прибутковість усіх цінних паперів не встановляться на новому рівні, відновлюючи рівновагу.

Наведені вище нерівності важливі на практиці. Вони посилають чіткий сигнал для інвесторів про те, чи занижена ціна певного цінного паперу або, відповідно, завищена ціна на нього, тобто чи варто її купувати чи продавати.

1.3. Value at Risk

Для аналізу портфеля та правильного врахування ризиків ми коротко розглянемо важливе поняття Value at Risk (VaR). Це значення вказує на те, що ми втрачаємо у разі відмови від ризику.

Основну ідею можна пояснити на простому прикладі. Ми купуємо акцію за

$S(0) = 100$ умовних одиниць, щоб продати її через рік. Ціна продажу $S(1)$ є випадковою. Ми зазнаємо збитків, якщо $S(1) < 100e^r$, де r — безризикова ставка за безперервного компаундування (процес переходу від теперішньої вартості до майбутньої). Купівля може бути профінансована за рахунок позики, або, якщо початкова сума вже є в нашому розпорядженні, ми беремо до уваги упущену можливість безризикового інвестування. Яка ймовірність того, що збиток буде меншим за задану суму, наприклад:

$$P(100e^r - S(1) < 20) = ?$$

Тепер змінемо питання і зафіксуємо ймовірність 95%. Тепер ми шукаємо таку суму, що ймовірність збитку, який не перевищує цю суму, становить 95%. Це називається Value at Risk на 95% рівні довіри та позначається як VaR. (Також можна використовувати інші рівні довіри.) Отже, VaR — це така сума, що

$$P(100e^r - S(1) < VaR) = 95\%.$$

Приклад

Припустимо, що розподіл ціни акцій є логнормальним, логарифмічний прибуток $k = \ln(S(1)/S(0))$ має нормальний розподіл із середнім $m = 12\%$ і стандартним відхиленням $\sigma = 30\%$. З імовірністю 95% прибутковість задовольнить:

$$k > m + x\sigma \approx -37.50\%,$$

де $N(x) \approx 5\%$, отже, $x \approx -1.645$. Тут $N(x)$ — функція нормального розподілу:

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = \int_{-x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy,$$

із середнім значенням 0 і дисперсією 1. Отже, з імовірністю 95% майбутня ціна $S(1)$ задовольнятиме:

$$S(1) > S(0)e^{m+x\sigma} \approx 68.83\,\text{у.о.},$$

і, враховуючи $r = 8\%$,

$$VaR = S(0)e^r - S(0)e^{m+x\sigma} \approx 39.50\,\text{у.о.}$$

1.4. Модель Марковіца. Модель Марковіца для управління портфелями облігацій

Головним викликом для інвесторів є проблема прийняття рішень в умовах невизначеності. А основною сферою дослідження фінансів є питання про те, як люди насправді приймають рішення, коли стикаються з ризиком. Наприклад, поширена головоломка, яку спостерігають економісти: чому люди купують лотерейні квитки, коли очікувана вартість такої «інвестиції» менша, ніж вартість квитка — поведінка, яка суперечить більшості звичайних функцій корисності. Гаррі Марковіц (Harry Markowitz, 1927 - 2023) запропонував одне з найперших рішень цієї проблеми, припустивши, що ставлення інвесторів до азартних ігор на різні суми неявно порівнюється з їхнім "звичайним багатством а до азартних ігор на великі суми порівняно зі звичайним багатством ставляться більш консервативно. Іншими словами, бажання грати в азартні ігри дуже сильно залежало від статус-кво.

Модель Марковіца, представлена в статті Гаррі Марковіца *Portfolio Selection* 1952 року, є основою для сучасної портфельної теорії (MPT). Вона забезпечує системний підхід до побудови інвестиційного портфеля, який оптимізує рівновагу між ризиком і прибутком. Ця модель доповнює модель оцінки капітальних активів (CAPM), поширюючи її принципи на практичну диверсифікацію та оптимізацію портфеля.

У цьому розділі розглядається застосування моделі Марковіца для управління портфелями облігацій, демонструючи її адаптивність до різних класів активів.

Модель Марковіца передбачає, що інвестори раціональні та прагнуть максимізувати очікувану прибутковість портфеля при заданому рівні ризику або мінімізувати ризик при заданій прибутковості. Ризик портфеля кількісно оцінюється за допомогою дисперсії (σ^2) або стандартного відхилення (σ) доходів.

1.4.1. Математичне формулювання.

Очікувана прибутковість портфеля обчислюється за формулою:

$$\mathbb{E}(K_p) = \sum_{i=1}^{N} w_i \mathbb{E}(K_i), \tag{7}$$

де w_i — вага активу i в портфелі, а $\mathbb{E}(K_i)$ — очікувана прибутковість активу i.

Дисперсія портфеля враховує як індивідуальні дисперсії активів, так і коваріації між ними:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}, \tag{8}$$

де σ_{ij} — коваріація між активами i та j.

Тоді як стандартне відхилення прибутковості будь-якого портфеля можна записати як

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}, \tag{9}$$

де σ_P - стандартне відхилення портфеля, яке є мірою загального ризику портфеля; σ_P^2 - дисперсія портфеля, квадрат стандартного відхилення. Це сукупна міра ризику портфеля; n - кількість активів у портфелі; w_i - вага i-го активу в портфелі, тобто частка загальної інвестиції, вкладена в актив i; σ_i - стандартне відхилення (ризик) i-го активу, яке відображає волатильність його дохідності; ρ_{ij} - коефіцієнт кореляції між дохідностями активів i та j, при цьому

- $\rho_{ij} = 1$: активи змінюються синхронно;
- $\rho_{ij} = 0$: активи змінюються незалежно;
- $\rho_{ij} = -1$: активи змінюються у протилежних напрямах;

$\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2$ - внесок індивідуальних ризиків кожного активу в загальний ризик портфеля, де вага кожного активу (w_i^2) помножується на квадрат його стандартного відхилення (σ_i^2); $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$ - внесок коваріацій (взаємозв'язків) між активами в загальний ризик портфеля. Тут враховуються всі пари активів i та j, їх ваги (w_i, w_j), стандартні відхилення (σ_i, σ_j) та кореляція (ρ_{ij}).

Ця формула демонструє, як можна мінімізувати ризик портфеля шляхом поєднання активів із низькою або негативною кореляцією.[8]

1.4.2. Ефективний кордон.

Згадаємо, що ефективний кордон представляє собою множину портфелів, що оптимізують співвідношення ризику та прибутковості. Портфелі на цьому кордоні домінують над іншими, пропонуючи вищу прибутковість за того ж рівня ризику або менший ризик за тієї ж прибутковості. Ефективний кордон представляє собою множину портфелів, що оптимізують співвідношення ризику та прибутковості. Портфелі на цьому кордоні домінують над іншими, пропонуючи вищу прибутковість за того ж рівня ризику або менший ризик за тієї ж прибутковості.

Вище згадані рівняння визначають вхідні дані, необхідні для аналізу портфеля. З рівняння (7) ми бачимо, що нам потрібні оцінки очікуваного доходу від кожного цінного паперу, який є кандидатом на включення до нашого портфеля. З рівняння (8) ми бачимо, що нам потрібні оцінки дисперсії кожного цінного паперу, а також оцінки кореляції між кожною можливою парою цінних паперів для акцій, що розглядаються. Потреба в оцінках коефіцієнтів кореляції відрізняється як за величиною, так і за змістом від двох попередніх вимог. Оцінка коефіцієнтів кореляції (між кожною можливою парою активів) відрізняється за своєю складністю. Вона вимагає розгляду взаємозв'язків між усіма активами у портфелі. Для акцій це означає не лише вивчення взаємозв'язків між цінними паперами однієї галузі (наприклад, металургія), але й між акціями з різних секторів (наприклад, металургія та хімічна промисловість). Для облігацій оцінка кореляції може враховувати залежність між державними, корпоративними та муніципальними випусками, а також вплив макроекономічних факторів.

Кількість необхідних оцінок є значною. Якщо позначити n як кількість активів у портфелі, тоді для кожної пари активів i і j потрібна оцінка ρ_{ij}. Перший індекс i може приймати n значень, тоді як другий індекс j — $n-1$ значень ($j \neq i$). Загальна кількість коефіцієнтів кореляції визначається за формулою:

$$n(n-1).$$

Однак, оскільки $\rho_{ij} = \rho_{ji}$, необхідно оцінити лише:

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Наприклад, фінансова установа, яка слідкує за 150 та 250 активами, потребує оцінки від 11175 до 31125 коефіцієнтів кореляції. Ця значна кількість даних може перевищувати можливості традиційного підходу до аналітики.

З огляду на складність, сучасний аналіз портфелів застосовує моделі для оцінки кореляцій. Наприклад, однофакторна модель (CAPM): замість оцінки всіх пар кореляцій передбачає використання одного фактора — ринкової дохідності. Інша модель є багатофакторною (APT), де враховується вплив декількох макроекономічних факторів (наприклад, інфляції, зміни процентних ставок) на кореляцію між активами. Такі моделі знижують кількість необхідних оцінок і дозволяють більш точно прогнозувати ризики портфеля.

Також застосування сучасних технологій, таких як машинне навчання, значно спрощує оцінку кореляцій. Ці методи дозволяють аналізувати великі обсяги даних і створювати більш точні моделі взаємозв'язків між активами. Для портфелів облігацій такі підходи можуть враховувати динаміку кривої дохідності, кредитні рейтинги емітентів та макроекономічні чинники.

Отже, ефективний кордон залишається ключовим інструментом для оптимізації портфелів. Однак його практичне застосування вимагає точних оцінок ризику, кореляцій і математичних моделей. Застосування автоматизованих систем і сучасних методів аналітики дозволяє значно спростити цей процес і підвищити ефективність управління портфелем.

1.4.3. Адаптація моделі Марковіца до облігацій.

Для того, щоб краще зрозуміти особливості адаптації моделі Марковіца до облігацій, розглянемо особливості облігацій.

У порівнянні з акціями, облігації мають специфічні характеристики, які впливають на підхід до управління портфелем. Зокрема, враховуються наступні аспекти:

Дюрація та опуклість

Ці показники є основними інструментами для оцінки чутливості облігацій до змін процентних ставок.

Для нашої адаптації краще розглянути дюрацію Маколея, яка обчислює середньозважений час отримання всіх грошових потоків облігації, а опуклість враховує нелінійний вплив змін ставок на ціну облігації.

Формула дюрації Маколея:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{T} t \cdot \frac{CF_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^{T} \frac{CF_t}{(1+r)^t}},$$

де D — дюрація (в роках); CF_t — грошовий потік у момент часу t; r — дохідність до погашення (yield to maturity, YTM); T — кількість періодів до погашення.

Дюрація Маколея є основою для розрахунку модифікованої дюрації:

$$D_{\text{mod}} = \frac{D}{1+r},$$

яка показує, як зміниться ціна облігації у відповідь на зміну процентних ставок. Опуклість додає точності до оцінки, враховуючи криволінійність залежності між ціною облігації та ставкою.

Дюрація є основним показником для управління ризиками в портфелі облігацій. Вона використовується для оцінки ризику процентної ставки й оптимізації портфеля.

Ризики процентних ставок та кредитний ризик.

Ціна облігацій має високу залежність від змін процентних ставок. Для довгострокових облігацій цей вплив значно більший, тому дюрація й опуклість є ключовими для їх аналізу.

Кредитний ризик враховує ймовірність дефолту емітента, особливо для корпоративних облігацій. Для державних облігацій цей ризик є мінімальним, однак вплив глобальних економічних чинників також може бути значним.

Структура грошових потоків.

Грошові потоки облігацій включають періодичні купонні виплати та основну суму погашення. Це дозволяє розраховувати прогнозовані дохідності та оцінювати ризики.

Оцінка ризику процентної ставки.

Чим більша дюрація портфеля, тим більша його чутливість до змін ставок. Наприклад, портфель із дюрацією 5 років втратить приблизно 5% своєї вартості за зростання ставок на 1%.

1.4.4. Оптимізація портфеля. .

Враховуючи дюрацію та опуклість, портфельний менеджер може комбінувати облігації з різними строками та ризиками, досягаючи оптимального співвідношення ризику та дохідності.

Матриця коваріації для портфелів облігацій

Твердження 5.
Прибутковість портфеля K_V, що складається з двох цінних паперів, є середньозваженим:

$$K_V = w_1 K_1 + w_2 K_2, \tag{10}$$

де w_1 і w_2 — ваги активів у портфелі, а K_1 і K_2 — прибутковість двох компонентів.

Доведення.
Припустимо, що портфель складається з x_1 часток цінного паперу 1 і x_2 часток цінного паперу 2. Тоді початкові та кінцеві значення портфеля дорівнюють:

$$V(0) = x_1 S_1(0) + x_2 S_2(0),$$

$$V(1) = x_1 S_1(0)(1 + K_1) + x_2 S_2(0)(1 + K_2) = V(0)\big(w_1(1 + K_1) + w_2(1 + K_2)\big).$$

В результаті прибутковість портфеля становить:

$$K_V = \frac{V(1) - V(0)}{V(0)} = w_1 K_1 + w_2 K_2.$$

$\square$

Зауваження.
Формула, подібна до (10), справедлива для логарифмічних прибутків:

$$e^{k_V} = w_1 e^{k_1} + w_2 e^{k_2}. \tag{11}$$

Проте це не дуже корисно, якщо очікування та відхилення або стандартні відхилення прибутку повинні бути пов'язані з вагами. З іншого боку, як буде видно нижче, формула (10) добре підходить для цього завдання.

Очікувана прибутковість портфеля, що складається з двох цінних паперів, може бути легко виражена в термінах ваг і очікуваної прибутковості компонентів:

$$\mathbb{E}(K_V) = w_1 \mathbb{E}(K_1) + w_2 \mathbb{E}(K_2). \tag{12}$$

Це очевидно випливає з (10) через адитивність математичного сподівання.

Приклад.

Розглянемо три сценарії з ймовірностями, наведеними нижче (триноміальна модель). Нехай прибутковості двох різних акцій в цих сценаріях є наступними:

Сценарій	Ймовірність	Прибутковість K_1	Прибутковість K_2
ω_1 (рецесія)	0.2	-10%	-30%
ω_2 (стагнація)	0.5	0%	20%
ω_3 (бум)	0.3	10%	50%

Очікувані прибутковості активів становлять:

$$\mathbb{E}(K_1) = -0.2 \times 10\% + 0.5 \times 0\% + 0.3 \times 10\% = 1\%,$$

$$\mathbb{E}(K_2) = -0.2 \times 30\% + 0.5 \times 20\% + 0.3 \times 50\% = 19\%.$$

Припустимо, що $w_1 = 60\%$ доступних коштів інвестовано в актив 1, а $w_2 = 40\%$ — в актив 2. Очікувана прибутковість такого портфеля становить:

$$\mathbb{E}(K_V) = w_1\mathbb{E}(K_1) + w_2\mathbb{E}(K_2),$$

$$\mathbb{E}(K_V) = 0.6 \times 1\% + 0.4 \times 19\% = 8.2\%.$$

1.4.5. Практична реалізація моделі для портфелів облігацій.

Інвестори визначають свої цілі за рівнем ризику і дохідності, орієнтуючись на стабільність грошових потоків та низьку чутливість до процентних ставок.

Гнучкість моделі Марковіца робить її цінним інструментом для управління портфелями облігацій. Завдяки акценту на диверсифікацію та кількісну оптимізацію, модель допомагає створювати портфелі, що врівноважують ризик і дохідність навіть у складних фінансових умовах. Її інтеграція з інноваційними методами, такими як багатофакторні моделі та машинне навчання, забезпечує актуальність у сучасному фінансовому середовищі.

Розділ 2

Приклад розробки портфеля облігацій

2.1. Оптимізація портфеля облігацій

2.1.1. Постановка задачі. Цей розділ присвячено розробці оптимального портфеля облігацій із використанням класичної моделі Марковіца. З попереднього розділу ми можемо зробити висновок, що ця модель найкраще підходить для портфеля облігацій, адже вона найкраще враховує їхні особливості.[7]

Метою завдання є мінімізація ризику портфеля при заданій очікуваній дохідності. Завданнями дослідження є визначення очікуваної дохідності й ризику облігацій і аналіз ефективності отриманого портфеля. Для цього ми сформуємо матрицю коваріацій для обраних облігацій і оптимізуємо ваги активів портфеля для мінімізації ризику. Далі ми більш детально розглянемо кожен з процесів розробки й оптимізації портфеля облігацій.

2.1.2. Опис початкових даних. Для оптимізації було використано дані 20 державних облігацій України (ОВДП), наведені у таблиці 2.1. Дані про облігації внутрішніх державних позик було отримано з Фондової біржі ПФТС. Дохідність μ_i у таблиці задано у відсотках, ризик оцінено як стандартне відхилення дохідностей σ_i^2.[2]

Стандартне відхилення зручно подати у таблиці початкових даних для подальшого моделювання й оптимізації математичної моделі. У вхідних даних для кожної облігації (активу) квадрат відхилення обчислюється як дисперсія, яка показує ризик (мінливість дохідності) цього активу.

Квадрат відхилення активу i задається як:

$$\sigma_i^2 = \mathbb{E}[(K_i - \mu_i)^2],$$

де K_i — дохідність активу i; $\mu_i = \mathbb{E}[K_i]$ — середня очікувана дохідність активу i; σ_i^2 — квадрат відхилення (дисперсія) активу i.

Для розрахунку дисперсії (квадрату відхилення) кожної облігації використовується середня дохідність усіх облігацій ($\bar{K}$) як еталонне значення:

$$\sigma_i^2 = (K_i - \bar{K})^2,$$

де K_i — дохідність конкретної облігації i; $\bar{K} = \frac{\sum_{i=1}^{n} K_i}{n}$ — середня дохідність усіх облігацій у портфелі.

Тоді середня дохідність дорівнює

$$\bar{K} = \frac{14.85 + 16.75 + 13.51 + \cdots + 16.75}{20} = 15.8425.$$

Для облігації ОВДП-1 із дохідністю $K_1 = 14.85\%$ відхилення дорівнюватиме

$$K_1 - \bar{K} = 14.85 - 15.8425 = -0.9925,$$

а квадрат відхилення

$$\sigma_1^2 = (-0.9925)^2 = 0.9851.$$

Отримані квадрати відхилень (σ_i^2) для кожної облігації знадобляться нам для оцінки ризику портфеля, враховуючи ваги кожного активу та взаємозв'язки між ними.

Табл. 2.1. Дані для розрахунку портфеля ОВДП з датами погашення

Облігація	Дохідність, % (μ_i)	Стандартне відхилення, % (σ_i^2)	Дата погашення
ОВДП-1	14.85	0.9851	26.02.2025
ОВДП-2	16.75	0.8236	13.05.2026
ОВДП-3	13.51	5.4406	30.10.2024
ОВДП-4	13.50	5.4873	04.12.2024
ОВДП-5	16.00	0.0248	21.05.2025
ОВДП-6	15.75	0.0086	02.04.2025
ОВДП-7	15.25	0.3511	06.08.2025
ОВДП-8	16.75	0.8236	05.11.2025
ОВДП-9	15.75	0.0086	18.02.2026
ОВДП-10	15.00	0.7098	15.01.2025
ОВДП-11	17.25	1.9811	22.07.2026
ОВДП-12	17.25	1.9811	04.11.2026
ОВДП-13	16.00	0.0248	18.06.2025
ОВДП-14	16.50	0.4323	30.09.2026
ОВДП-15	16.50	0.4323	23.07.2025
ОВДП-16	17.75	3.6386	24.02.2027
ОВДП-17	16.75	0.8236	15.10.2025
ОВДП-18	13.49	5.5343	20.11.2024
ОВДП-19	15.50	0.1173	12.03.2025
ОВДП-20	16.75	0.8236	28.01.2026

2.1.3. Математична модель.

Очікувана дохідність портфеля. У рамках моделі Марковіца очікувана прибутковість портфеля є ключовою характеристикою, яка дозволяє оцінити середній дохід від інвестицій при заданій структурі портфеля. Ця величина розраховується як середньозважена прибутковість активів, що входять до портфеля. Формула для обчислення виглядає наступним чином:

$$\mathbb{E}(K_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mathbb{E}(K_i),$$

де $\mathbb{E}(K_p)$ — очікувана прибутковість портфеля; w_i — вага активу i у портфелі, яка визначає частку інвестицій у цей актив ($0 \leq w_i \leq 1$); $\mathbb{E}(K_i)$ — очікувана прибутковість активу i; n — загальна кількість активів у портфелі.

Приклад розрахунку Припустимо, що портфель складається з трьох облігацій. Нехай очікувана прибутковість $\mathbb{E}(K_1) = 10\%$, $\mathbb{E}(K_2) = 12\%$, $\mathbb{E}(K_3) = 8\%$, ваги активів дорівнюють $w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.3$, $w_3 = 0.3$.

Тоді очікувана прибутковість портфеля розраховується як:

$$\mathbb{E}(K_p) = (0.4 \cdot 10\%) + (0.3 \cdot 12\%) + (0.3 \cdot 8\%) = 4\% + 3.6\% + 2.4\% = 10\%.$$

Це означає, що середній дохід від інвестицій у такий портфель становитиме 10%.

Очікувана прибутковість є важливим критерієм у процесі оптимізації портфеля, так як під час мінімізації ризику очікувана прибутковість може бути зафіксована на певному рівні ($\mathbb{E}(K_p) = \text{const}$), а при максимізації прибутковості ваги активів підбираються таким чином, щоб $\mathbb{E}(K_p)$ було максимальним, враховуючи обмеження на ризик портфеля.

Таким чином, очікувана прибутковість портфеля є основою для ухвалення інвестиційних рішень та формування оптимальної структури портфеля.

Ризик портфеля. У моделі Марковіца ризик (волатильність) портфеля враховує як індивідуальні ризики активів, так і взаємозв'язки між ними. Формула для стандартного відхилення портфеля, яке є мірою ризику, визначається як

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \text{Cov}(i, j)}, \tag{13}$$

де σ_p — стандартне відхилення портфеля (ризик); w_i, w_j — ваги активів i та j у портфелі; $\text{Cov}(i, j)$ — коваріація між дохідностями активів i та j.

Роль індивідуальних ризиків та кореляції

1. **Індивідуальні ризики активів.** У випадку з індивідуальними ризиками активів, для активів $i = j$, коваріація дорівнює дисперсії ($\text{Cov}(i, i) = \sigma_i^2$), що визначає індивідуальний ризик активу. Таким чином, частина формули для ризику портфеля враховує $w_i^2 \sigma_i^2$, де σ_i^2 — дисперсія (квадрат стандартного відхилення) активу i.

2. **Кореляція між активами.** У випадку кореляції між активами, для $i \neq j$, коваріація враховує взаємозв'язок між активами. Вона визначається наступним чином:

$$\text{Cov}(i, j) = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j,$$

де ρ_{ij} — коефіцієнт кореляції між активами i та j; σ_i, σ_j — стандартні відхилення активів i та j. Кореляція ρ_{ij} варіюється від -1 (ідеальна негативна кореляція) до 1 (ідеальна позитивна кореляція). Низька або негативна кореляція зменшує загальний ризик портфеля завдяки ефекту диверсифікації.

Ризик портфеля залежить не лише від ризиків окремих активів, але й від кореляції між їх дохідностями. Кореляція $\rho_{i,j}$ між активами i та j визначає, як зміна дохідності одного активу впливає на зміну дохідності іншого. Значення кореляції може варіюватися від -1 до 1.

Негативна кореляція ($\rho_{i,j} < 0$) означає, що зростання дохідності одного активу, як правило, супроводжується зниженням дохідності іншого. Такий зв'язок є важливим для зниження загального ризику портфеля. Наприклад, у разі негативної кореляції між активами дохідності можуть компенсувати коливання одна одної, зменшуючи сумарну волатильність портфеля.

Якщо коваріація між активами є негативною, це сприяє зниженню загальної волатильності портфеля, роблячи його більш стійким до ринкових коливань.

В окремих випадках, наприклад, у моделюванні ринкових циклів, припускають ідеальну негативну кореляцію ($\rho = -1$), яка забезпечує максимальну компенсацію ризиків між активами. Це є цінним інструментом для побудови добре диверсифікованого портфеля з мінімальним ризиком.

Диверсифікація є ключовим інструментом управління портфелем, який дозволяє знижувати загальний ризик шляхом включення до портфеля активів із низькою або негативною кореляцією. Диверсифікація дозволяє компенсувати коливання дохідності окремих активів завдяки їхній взаємній кореляції, знизити вплив високоризикових активів на загальний ризик портфеля й підвищити стабільність дохідності портфеля у довгостроковій перспективі.

У випадку з низькою або негативною кореляцією, диверсифікація є ефективним інструментом для зниження ризику. Наприклад, включення активів із різних секторів економіки або з різних географічних регіонів знижує ймовірність того, що всі активи зазнають збитків одночасно. Наприклад, у дослідженні про вплив диверсифікації портфеля на ефективність і ризики інвестицій Фонду пенсійних заощаджень Косово [9], було показано, що ефект диверсифікації забезпечив стабільність їхніх інвестицій навіть у періоди економічних спадів.

Таким чином, диверсифікація є одним із найбільш ефективних підходів для мінімізації ризику портфеля.

Умови оптимізації Розв'язання задачі оптимізації портфеля вимагає дотримання наступних умов:

1. **Мінімізація ризику (σ_p).** Основна мета полягає в мінімізації ризику портфеля для заданого рівня очікуваної дохідності ($\mathbb{E}(K_p)$).

$$\min \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \mathrm{Cov}(i, j).$$

2. **Обмеження на ваги (w_i).** Всі ваги активів у портфелі повинні сумуватися до одиниці:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

   Це означає, що весь капітал інвестується у портфель.

3. **Додатність ваг ($w_i \geq 0$).** Відсутність коротких продажів означає, що всі ваги активів повинні бути додатними або нульовими.

Значення формули для роботи Отже, формула (13) дозволяє оцінити загальний ризик портфеля, беручи до уваги як індивідуальні ризики активів, так і взаємозв'язки між ними. Вона забезпечує теоретичну основу для оптимізації структури портфеля та мінімізації ризику шляхом ефективного розподілу активів.

2.1.4. Програмна реалізація.

Програмний код для оптимізації портфеля реалізовано в Python. Він включає:

1. Завантаження даних про облігації.

   У дані було включення найменування облігацій (Bond-1,...,Bond-20), дохідність активів (Return %) і рівномірно розподілені початкові ваги ($w_i = 0,05$).

   За допомогою цього кроку було структуровано вхідні дані, що зробило їх зручними для подальшого аналізу.

2. Формування матриці коваріацій.

   У нашому випадку, ми припускаємо, що активи некорельовані ($\rho_{i,j} = 0$), тому матриця є діагональною. Це спрощує обчислення, адже коваріація між активами дорівнює нулю. Нульова кореляція ($\rho_{ij} = 0$) означає, що зміни дохідності активів не пов'язані. У такому випадку ризик портфеля залежить лише від ваг активів та їхніх індивідуальних ризиків.

3. Оптимізацію ваг активів за допомогою методу SLSQP.

   Оптимізатор SLSQP — це послідовний алгоритм програмування за методом найменших квадратів для мінімізації функції кількох змінних з будь-якою комбінацією обмежень, рівності та нерівності.

   Оптимізація ваг активів базується на мінімізації ризику портфеля (σ_p) за допомогою методу SLSQP. Методи SQP використовуються для математичних задач, для яких цільова функція та обмеження двічі безперервно диференціюються. Цільова функція для мінімізації має наступний вигляд:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \mathrm{Cov}(i,j)},$$

   де w_i, w_j — ваги активів i та j; $\mathrm{Cov}(i,j)$ — коваріація дохідностей активів i та j.

   При цьому зберігаються попередньо розглянуті обмеження на ваги.

   Метод SLSQP ітеративно знаходить оптимальні ваги w_i, які мінімізують ризик портфеля.

   В результаті оптимізації ми отримаємо ряд результатів, а саме:

   - Розподіл інвестицій між активами для мінімізації ризику, тобто оптимальні ваги;
   - Очікувану дохідність портфеля;
   - Мінімізоване значення стандартного відхилення (σ_p), тобто ризик портфеля.

4. Візуалізацію результатів.

   Результат буде представлено графіком, на якому буде зображено ефективний кордон, тобто набір портфелів із мінімальним ризиком для різних рівнів дохідності; оптимальний портфель, який буде представлений точкою, що відповідає мінімальному ризику портфеля.

Код програми

```python
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import minimize

```

```
# Loading data
data = {
    "Bonds": [
        "Bond-1", "Bond-2", "Bond-3", "Bond-4", "Bond-5",
        "Bond-6", "Bond-7", "Bond-8", "Bond-9", "Bond-10",
        "Bond-11", "Bond-12", "Bond-13", "Bond-14", "Bond-15",
        "Bond-16", "Bond-17", "Bond-18", "Bond-19", "Bond-20"
    ],
    "Return (%)": [
        14.85, 16.75, 13.51, 13.50, 16.00, 15.75, 15.25, 16.75,
        15.75, 15.00, 17.25, 17.25, 16.00, 16.50, 16.50, 17.75,
        16.75, 13.49, 15.50, 16.75
    ],
    "Weights (w_i)": [0.05] * 20
}

df = pd.DataFrame(data)

# Calculating the covariance matrix (assumption: standard deviation
    = sqrt(variance))
std_deviation = np.sqrt([
    0.9851, 0.8236, 5.4406, 5.4873, 0.0248, 0.0086, 0.3511, 0.8236,
    0.0086, 0.7098, 1.9811, 1.9811, 0.0248, 0.4323, 0.4323, 3.6386,
    0.8236, 5.5343, 0.1173, 0.8236
])

returns = df["Return (%)"].values / 100
cov_matrix = np.diag(std_deviation**2)

# Functions for optimization
def portfolio_performance(weights, returns, cov_matrix):
    portfolio_return = np.dot(weights, returns)
    portfolio_volatility = np.sqrt(np.dot(weights.T, np.dot(
        cov_matrix, weights)))
    return portfolio_return, portfolio_volatility

def minimize_volatility(weights, returns, cov_matrix):
    return portfolio_performance(weights, returns, cov_matrix)[1]

# Constraints: sum of weights = 1
```

```
constraints = {"type": "eq", "fun": lambda x: np.sum(x) - 1}

# Bounds: weights between 0 and 1
bounds = [(0, 1) for _ in range(len(returns))]

# Initial weights
initial_weights = np.array([1/len(returns)] * len(returns))

# Optimization for minimal volatility
optimized = minimize(
    minimize_volatility,
    initial_weights,
    args=(returns, cov_matrix),
    method="SLSQP",
    bounds=bounds,
    constraints=constraints
)

optimized_weights = optimized.x

# Results
opt_return, opt_volatility = portfolio_performance(
   optimized_weights, returns, cov_matrix)

print("Optimal weights:")
for bond, weight in zip(df["Bonds"], optimized_weights):
    print(f"{bond}: {weight:.4f}")

print(f"\nExpected portfolio return: {opt_return:.4f}")
print(f"Portfolio risk (standard deviation): {opt_volatility:.4f}")
```

Лістинг 2.1. Код для оптимізації портфеля

Візуалізація результатів

```
# Plot
fig, ax = plt.subplots()
ax.scatter(std_deviation, returns, c='blue', label='Individual
   bonds')
ax.scatter(opt_volatility, opt_return, c='red', label='Optimal
   portfolio')
ax.set_title("Efficient Frontier (Markowitz)")
```

```
ax.set_xlabel("Risk (standard deviation)")
ax.set_ylabel("Expected Return")
ax.legend()
plt.show()
```

Лістинг 2.2. Код для побудови графіка

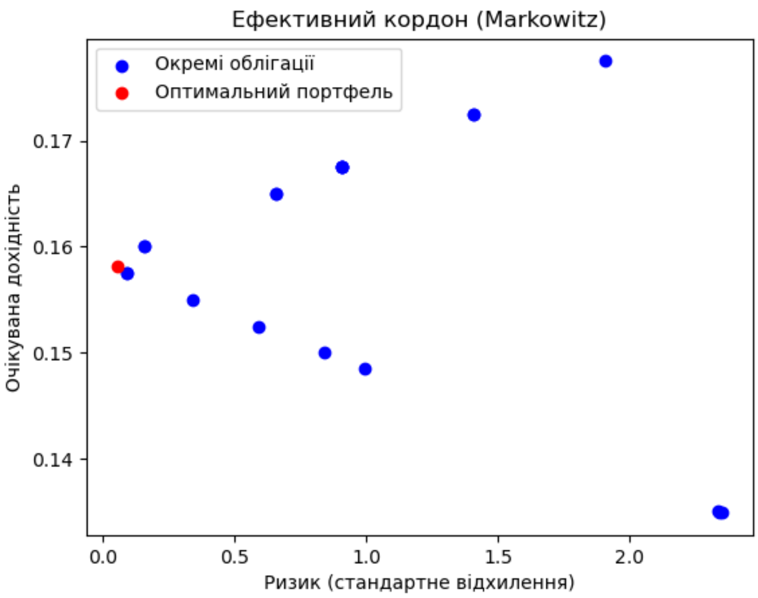

Рис. 2.1. Ефективний кордон із позначенням оптимального портфеля

На графіку 2.1 вісь x — ризик (стандартне відхилення, σ_p); вісь y — очікувана дохідність ($\mathbb{E}(K_p)$).

2.1.5. Аналіз результатів.

Оптимізація показала, що найбільші ваги у портфелі мають облігації ОВДП-6 і ОВДП-9 (34.37%), які забезпечують найкраще співвідношення ризику та дохідності. Очікувана дохідність портфеля — 15.82%, ризик — 5.44%. Ці облігації мають оптимальне співвідношення ризику та дохідності, а також меншу дисперсію (ризик) порівняно з іншими активами.

Інші облігації мають значно менші ваги, наприклад, ОВДП-3 і ОВДП-4 (по 0.05%, що свідчить про їхній менший внесок у ефективність портфеля.

Для даного портфеля очікувана дохідність становить 15.82%. Це є середньозваженою величиною дохідностей активів з урахуванням оптимальних ваг.

Ризик портфеля дорівнює 5.44%, що є значно нижчим за ризик будь-якої окремої облігації (диверсифікацією ризику).

Цей портфель забезпечує баланс між ризиком і дохідністю, що відповідає класичному підходу до формування інвестиційних портфелів.

Даний портфель можна удосконалити диверсифікацією активів. У заданому портфелі переважають облігації, які можуть мати високий рівень кореляції. Рішенням може стати включення активів з різними ринковими регіонами (міжнародні облігації), облігацій з різними термінами погашення для зниження ризику ліквідності й залучення облігацій з різних сфер економіки.[10]

2.2. Удосконалення портфеля

Спробуємо урізноманітнити портфель, додавши різні види облігацій і проаналізуємо зміни в дохідності й ризику нового портфеля. Порівняємо результати двох портфелів і перевіримо, чи диверсифікація допоможе знизити ризик.

На даний момент наш портфель складається з 20-ти облігацій внутрішніх державних позик, що були розміщені на сайті Фондової біржі ПФТС. Очікувана дохідність портфеля становить 15.82%, ризик — 5.44%.

2.2.1. Опис нових початкових даних.

Залучимо декілька корпоративних облігацій. Не дивлячись на те, що корпоративні облігації не гарантуються державою й додатково оподатковуються, вони мають вищу дохідність через вищу ставку та частішу виплату купона. Знехтуємо податком на військовий збір у розмірі 5% для спрощення розрахунків. Перш за все, нас цікавитиме зміна ризику, й неточності в дохідності не гратимуть значної ролі.

Оновлена таблиця 2.2 включає в себе ті ж вхідні дані, що й таблиця для нашого першого портфеля.

Серед нових облігацій є корпоративні облігації, дані про які розміщені на сайті Української біржі й військові державні облігації [3]:

1. Облігації NovaPay (Нова пошта) з дохідністю 15% річних;
2. Облігації Кредитсервіс, ТОВ з дохідністю 25% річних;
3. Облігації ФАРМАЦЕВТИЧНА ФІРМА «ДАРНИЦЯ» з дохідністю 30% річних;
4. Військові облігації з дохідністю 17,5% річних.

Табл. 2.2. Дані для розрахунку портфеля облігацій з датами погашення

Облігація	Дохідність, % (μ_i)	Стандартне відхилення, % (σ_i^2)	Дата погашення
ОВДП-1	14.85	3.992	26.02.2025
ОВДП-2	16.75	0.010	13.05.2026
ОВДП-3	13.51	11.142	30.10.2024
ОВДП-4	13.50	11.209	04.12.2024
ОВДП-5	16.00	0.719	21.05.2025
ОВДП-6	15.75	1.205	02.04.2025
ОВДП-7	15.25	2.553	06.08.2025
ОВДП-8	16.75	0.010	05.11.2025
ОВДП-9	15.75	1.205	18.02.2026
ОВДП-10	15.00	3.415	15.01.2025
ОВДП-11	17.25	0.162	22.07.2026
ОВДП-12	17.25	0.162	04.11.2026
ОВДП-13	16.00	0.719	18.06.2025
ОВДП-14	16.50	0.121	30.09.2026
ОВДП-15	16.50	0.121	23.07.2025
ОВДП-16	17.75	0.814	24.02.2027
ОВДП-17	16.75	0.010	15.10.2025
ОВДП-18	13.49	11.276	20.11.2024
ОВДП-19	15.50	1.817	12.03.2025
ОВДП-20	16.75	0.010	28.01.2026
облігація-21	15.00	3.415	07.12.2025
облігація-22	25.00	66.456	18.12.2028
облігація-23	30.00	172.977	05.01.2026
облігація-24	17.50	0.425	07.12.2026

2.2.2. Програмна реалізація.

Умови для програмної реалізації лишаються незмінними.

Код програми

```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import minimize

# Loading data
data = {
    "Bonds": [
        "Bond-1", "Bond-2", "Bond-3", "Bond-4", "Bond-5",
        "Bond-6", "Bond-7", "Bond-8", "Bond-9", "Bond-10",
        "Bond-11", "Bond-12", "Bond-13", "Bond-14", "Bond-15",
        "Bond-16", "Bond-17", "Bond-18", "Bond-19", "Bond-20", "
            Bond-21", "Bond-22", "Bond-23", "Bond-24"
    ],
    "Return (%)": [
        14.85, 16.75, 13.51, 13.50, 16.00, 15.75, 15.25, 16.75,
        15.75, 15.00, 17.25, 17.25, 16.00, 16.50, 16.50, 17.75,
        16.75, 13.49, 15.50, 16.75, 15.00, 25.00, 30.00, 17.50
    ],
    "Weights (w_i)": [0.0417] * 24
}

df = pd.DataFrame(data)

# Calculating the covariance matrix (assumption: standard deviation
    = sqrt(variance))
std_deviation = np.sqrt([
    3.992, 0.010, 11.142, 11.209, 0.719, 1.205, 2.553, 0.010,
    1.205, 3.415, 0.162, 0.162, 0.719, 0.121, 0.121, 0.814,
    0.010, 11.276, 1.817, 0.010, 3.415, 66.456, 172.977, 0.425
])

returns = df["Return (%)"].values / 100
cov_matrix = np.diag(std_deviation**2)

# Functions for optimization
```

```
def portfolio_performance(weights, returns, cov_matrix):
    portfolio_return = np.dot(weights, returns)
    portfolio_volatility = np.sqrt(np.dot(weights.T, np.dot(
       cov_matrix, weights)))
    return portfolio_return, portfolio_volatility

def minimize_volatility(weights, returns, cov_matrix):
    return portfolio_performance(weights, returns, cov_matrix)[1]

# Constraints: sum of weights = 1
constraints = {"type": "eq", "fun": lambda x: np.sum(x) - 1}

# Bounds: weights between 0 and 1
bounds = [(0, 1) for _ in range(len(returns))]

# Initial weights
initial_weights = np.array([1/len(returns)] * len(returns))

# Optimization for minimal volatility
optimized = minimize(
    minimize_volatility,
    initial_weights,
    args=(returns, cov_matrix),
    method="SLSQP",
    bounds=bounds,
    constraints=constraints
)

optimized_weights = optimized.x

# Results
opt_return, opt_volatility = portfolio_performance(
   optimized_weights, returns, cov_matrix)

print("Optimal weights:")
for bond, weight in zip(df["Bonds"], optimized_weights):
    print(f"{bond}: {weight:.4f}")

print(f"\nExpected portfolio return: {opt_return:.4f}")
print(f"Portfolio risk (standard deviation): {opt_volatility:.4f}")
```

Лістинг 2.3. Код для оптимізації портфеля

Візуалізація результатів

```
# Plot
fig, ax = plt.subplots()
ax.scatter(std_deviation, returns, c='blue', label='Individual
    bonds')
ax.scatter(opt_volatility, opt_return, c='red', label='Optimal
    portfolio')
ax.set_title("Efficient Frontier (Markowitz)")
ax.set_xlabel("Risk (standard deviation)")
ax.set_ylabel("Expected Return")
ax.legend()
plt.show()
```

Лістинг 2.4. Код для побудови графіка

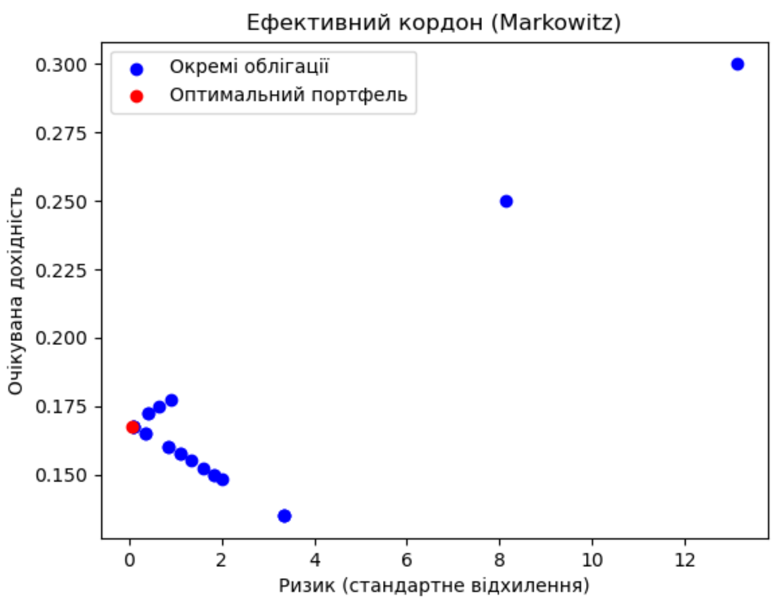

Рис. 2.2. Ефективний кордон із позначенням оптимального портфеля

2.2.3. Аналіз нових результатів.

У результаті проведеного вдосконалення портфеля можна спостерігати більш рівномірний розподіл ваг. Незважаючи на це, деякі ваги, а саме ваги облігацій, позначених як ОВДП-2, ОВДП-8, ОВДП-17 і ОВДП-20, мають значну вагу — 22,8%. У цьому портфелі більше облігацій отримали вагу понад 1%, що свідчить про більш широку диверсифікацію активів. У першому портфелі розподіл ваг не можна було назвати рівномірним, адже дві облігації, а саме ОВДП-6 і ОВДП-9, мають найбільший внесок — 34.37%, при цьому ваги інших облігацій незначні. На ці дві облігації припадала більша концентрація ризику та дохідності, ніж на інші, що робило портфель менш рівномірним і стійким.

Крім цього, новий портфель має очікувану дохідність — 16,75%, яка є помітно більшою за дохідність першого портфеля.

Головним критерієм для вдосконалення було обрано ризик портфеля, й з результатів програмної реалізації очевидно видно, що ризик нового портфеля (4.77%) є нижчим, ніж для першого сформованого портфеля (5.44%). Це свідчить про кращу диверсифікацію в новій оптимізації.

Отже, новий портфель є більш оптимізованим із точки зору балансу ризику та дохідності. Нижчий ризик при вищій дохідності робить його кращим вибором з-поміж двох сформованих портфелів, якщо стратегія спрямована на максимізацію дохідності при мінімізації ризику.

Однак, значна вага в новому портфелі припадає на чотири облігації (22.8% кожна), що все ще може бути потенційним джерелом ризику в разі несприятливих змін для цих активів. Тобто удосконалення можна продовжувати до моменту врівноваження всіх активів у портфелі.

Висновок

У ході роботи було розглянуто деякі з найефективніших моделей оцінки фінансових активів, зокрема: модель Марковіца, CAPM і VaR для оцінки ризику. Було досліджено адаптацію моделі Марковіца для портфеля облігацій, з урахуванням особливостей цих активів.

Було розроблено модель оптимізації портфеля облігацій, яка мінімізує ризик при заданій дохідності. Реалізація моделі за допомогою Python дозволила автоматизувати розрахунок ризику та дохідності портфеля, оптимізувати ваги активів у портфелі з урахуванням їхніх ризиків та кореляцій і побудувати ефективний кордон, що демонструє співвідношення ризику та дохідності. Завдяки отриманому алгоритму було зручно модифікувати вже сформований портфель і підлаштовувати його під нові вхідні дані, задля отримання оптимального портфеля, який би задовільняв вимоги щодо співвідношення ризику й дохідності.

Проведений аналіз показав, що диверсифікація портфеля дійсно допомагає знизити ризик і, в нашому випадку, підвищити дохідність портфеля. Таким чином вдалося знизити ризик з 5.44% до 4.77%, що є значним покращенням, якщо врахувати те, що кількість активів у портфелі змінилась не значно.

Запропонована модель довела свою ефективність у створенні портфелів, що забезпечують оптимальний баланс між ризиком та дохідністю.

Джерела

1. Бершадська І. М. Модель Марковіца як основа побудови алгоритму формування ефективного інвестиційного портфеля. Академічний огляд. Економіка та підприємництво. 2010. № 2 (33). С. 57–61.

2. Всі цінні папери України на одній фондовій біржі – ПФТС. Всі цінні папери України на одній фондовій біржі – ПФТС. URL: https://pfts.ua/

3. Українська біржа. URL: https://www.ux.ua/

4. Capinski M., Zastawniak T. Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering. Springer London, Limited, 2006. 314 p.

5. Elton E. J. Modern Portfolio Theory and Investment Analysis. Wiley Sons, Incorporated, John, 2015.

6. Fabozzi F. J., Markowitz H. The theory and practice of investment management: Asset allocation, valuation, portfolio construction, and strategies. 2nd ed. Hoboken, N.J : Wiley, 2011. 682 p.

7. Keller W. J., Butler A., Kipnis I. Momentum and Markowitz: A Golden Combination. SSRN Electronic Journal. 2015. URL: https://doi.org/10.2139/ssrn.2606884

8. Markowitz H. Portfolio Selection. The Journal of Finance. 1952. Vol. 7, no. 1. P. 77. URL: https://doi.org/10.2307/2975974

9. Pula J. S., Berisha G., Ahmeti S. The Impact of Portfolio Diversification in the Performance and the Risk of Investments of Kosovo Pension Savings Trust. Journal of Business and Economics. 2012. Vol. 3, no. 3. P. 198–211. URL: https://doi.org/10.15341/jbe(2155-7950)/03.03.2012/005

10. Reilly F. K. Investment Analysis Portfolio Management. Dryden Press, 1979.

11. Sharpe W. F. CAPITAL ASSET PRICES: A THEORY OF MARKET EQUILIBRIUM UNDER CONDITIONS OF RISK*. The Journal of Finance. 1964. Vol. 19, no. 3. P. 425–442. URL: https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x