НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
фізико-математичний факультет
кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК ____519.2____

До захисту допущено
Завідувач кафедри
__________ Олег КЛЕСОВ
____

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра
за освітньо-науковою програмою
«Страхова та фінансова математика»
зі спеціальності 111 «Математика»
на тему: «Оцінювання ймовірності банкрутства для процесу ризику з φ-субгауссовими величинами позовів»

Виконав:
студент II курсу магістратури, групи ОМ-31мп
Селіванов Віктор Васильович ____________

Керівник:
доктор фізико-математичних наук, доцент
Василик Ольга Іванівна ____________

Рецензент:
канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри
теорії ймовірностей, статистики та
актуарної математики Київського національного
університету імені Тараса Шевченка
Яневич Тетяна Олександрівна
____

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань
Студент ____________

Київ – 2024

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
фізико-математичний факультет
кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)
Спеціальність – 111 «Математика»
Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
____________ Олег КЛЕСОВ
____

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Селіванову Віктору Васильовичу

1. **Тема дисертації** «Оцінювання ймовірності банкрутства для процесу ризику з φ-субгауссовими величинами позовів», науковий керівник дисертації Василик Ольга Іванівна, доктор фізико-математичних наук, доцент, затверджені наказом по університету від «06» листопада 2024 р. №4981-с.
2. **Термін подання** студентом дисертації «14» грудня 2024 року.
3. **Об'єкт дослідження** класичний процес ризику з φ-субгауссовими випадковими величинами виплат.
4. **Предмет дослідження** оцінка ймовірності банкрутства у класичному процесі ризику з φ-субгауссовими випадковими величинами виплат.
5. **Перелік завдань, які потрібно розробити**
   (а) Ознайомитись з літературою на тему φ-субгауссових випадкових процесів.
   (б) Користуючись літературними джерелами, дослідити оцінку ймовірності виходу траєкторії φ-субгауссового випадкового процесу за рівень, заданий деякою неперервною функцією.
   (в) Знайти оцінку ймовірністі банкрутства класичного процесу ризику у вигляді пуассонівської суми з φ-субгауссовими випадковими виплатами у випадку, коли функція φ має заздалегідь заданий вираз.
   (г) Побудувати приклад процесу ризику у вигляді пуассонівської суми $X(t)$ з φ-субгауссовими випадковими виплатами та, використовуючи знайдену оцінку, оцінити ймовірність банкрутства для процесу ризику $X(t)$ у випадку, коли функція φ має заздалегідь заданий вираз.
   (д) Зробити висновки з отриманих результатів.
6. **Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу** 28 слайдів.
7. **Дата видачі завдання** «04» вересня 2024 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомлення з темою магістерської роботи та літературою	04.09.2024 – 10.09.2024	Виконано
2.	Опрацювання першого та другого розділу монографії «φ-субгауссові випадкові процеси» О.І. Василик, Ю.В. Козаченко, Р.Є. Ямненко.	11.09.2024 – 24.09.2024	Виконано
3.	Вивчення необхідних означень та теорем для оцінки ймовірності виходу траєкторії φ-субгауссового випадкового процесу за рівень, заданий деякою неперервною функцією.	25.09.2024 – 15.10.2024	Виконано
4.	Знаходження оцінки ймовірністі банкрутства класичного процесу ризику у вигляді пуассонівської суми з φ-субгауссовими випадковими виплатами у випадку, коли функція φ має заздалегідь заданий вираз.	16.10.2024 – 11.11.2024	Виконано
5.	Побудова прикладу процесу ризику у вигляді пуассонівської суми $X(t)$ з субгауссовими випадковими величинами виплат. Знаходження оцінки ймовірності банкрутства для процесу ризику $X(t)$. Порівняння отриманого результату з оцінкою вказаною у [9, с. 14-16]	12.11.2024 - 22.11.2024	Виконано
6.	Побудова прикладу процесу ризику у вигляді пуассонівської суми $X(t)$ з φ-субгауссовими випадковими величинами виплат, які мають розподіл Вейбулла. Знаходження оцінки ймовірності банкрутства для процесу ризику $X(t)$.	23.11.2024 - 02.12.2024	Виконано
7.	Оформлення дипломної роботи	03.12.2024 – 14.12.2024	Виконано

Студент Віктор СЕЛІВАНОВ

Науковий керівник Ольга ВАСИЛИК

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 34 сторінки, 28 слайдів для проектора, 11 першоджерел.

Актуальність теми дисертації напряму випливає з важливості дослідження процесів ризику за допомогою застосування випадкових величин та процесів, які не є гауссовими. Через можливість використання процесів ризику для прогнозування різноманітних результатів діяльності будь-якої страхової компанії, будь-якого банку або бізнесу і т.п. процеси ризику є одним з основних предметів дослідження у страховій та фінансовій математиці, теорії масового обслуговування тощо. Хоч для аналізу великої кількості процесів ризику використовувалися гауссові випадкові величини та процеси, наразі відомо, що існують процеси ризику, які не можна вважати гауссовими, звідки випливає пряма необхідність у створенні та розвитку теорії φ-субгауссових випадкових величин та процесів як розширення теорії гауссових випадкових величин та процесів.

Мета і завдання роботи: отримати оцінку ймовірності банкрутства класичного процесу ризику, представленого у вигляді пуассонівської суми з φ-субгауссовими випадковими величинами виплат, у випадку, коли функція φ має заздалегідь заданий вираз. Навести приклади використання отриманих результатів для процесів ризику у вигляді пуассонівської суми з субгауссовими випадковими величинами виплат та процесу ризику з виплатами, що мають двосторонній розподіл Вейбулла.

Об'єкт дослідження: Класичний процес ризику з φ-субгауссовими випадковими величинами виплат.

Предмет дослідження: Ймовірність банкрутства у класичному процесі ризику з φ-субгауссовими випадковими величинами виплат.

Для отримання вказаних результатів використано основні поняття та деякі результати з теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів, теорії φ-субгауссових випадкових процесів.

В магістерській дисертації отримано оцінку ймовірності банкрутства для класичного процесу ризику у вигляді пуассонівської суми з φ-субгауссовими випадковими величинами виплат та наведено приклади її використання для процесів ризику з субгауссовими випадковими величинами виплат і процесу ризику, у якому величини виплат мають двосторонній розподіл Вейбулла.

Ключові слова: N-функції Орліча, простір φ-субгауссових випадкових величин, φ-субгауссові випадкові процеси, строго φ-субгауссові випадкові процеси, ймовірність банкрутства, класичний процес ризику.

ABSTRACT

Master's thesis: 34 pages, 28 slides for a projector, 11 primary sources.

The relevance of the thesis topic directly follows from the importance of studying risk processes applying random variables and processes that are not Gaussian. Due to the possibility of using risk processes to forecast various results of the activities of any insurance company, any bank or business, etc., risk processes are one of the main subjects of research in actuarial and financial mathematics, queuing theory, etc. Although Gaussian random variables and processes were used to analyze a large number of risk processes, it is now known that there are risk processes that cannot be considered Gaussian, which leads to a direct need to create and develop the theory of φ-sub-Gaussian random variables and processes as an extension of the theory of Gaussian random variables and processes.

Purpose and objectives of the work: to obtain an estimate of ruin probability for a classical risk process, represented in the form of a Poisson sum with φ-sub-Gaussian random claims, in the case when the function φ has a given expression; to give examples of using the obtained results for risk processes in the form of a Poisson sum with sub-Gaussian random claims and a risk process with claims having a two-sided Weibull distribution.

Object of research: Classical risk process with φ-sub-Gaussian random claims.

Subject of research: Ruin probability for a classical risk process with φ-sub-Gaussian random claims.

To obtain the specified results, the basic concepts and some results from probability theory, the theory of random processes, and the theory of φ-sub-Gaussian random processes were used.

The master's thesis provides an estimate of ruin probability for a classical risk process in the form of a Poisson sum with φ-sub-Gaussian random claims and provides examples of its use for risk processes with sub-Gaussian random claims and for a risk process in which the random claims have a two-sided Weibull distribution.

Keywords: Orlich N-functions, space of φ-sub-Gaussian random variables, φ-sub-Gaussian random processes, strictly φ-sub-Gaussian random processes, ruin probability, classical risk process.

Зміст

Вступ

Магістерська дисертація присвячена дослідженню моделі ризику, у якій процес ризику є сумою випадкової кількості позовів, розміри виплат у якій задаються φ-субгауссовими випадковими величинами, а кількість позовів описується пуассонівським процесом. Пуассонівські суми займають важливе місце у такій галузі страхової математики як теорія ризику, особливо у її практичному використанні під час роботи актуарія для, наприклад, аналізу портфелів полісів загального страхування. Доволі часто в різних прикладних дослідженнях виникають гауссові процеси через можливість їх використання для ефективного моделювання багатьох існуючих випадкових процесів. Проте наразі відомо, що деякі з процесів актуарної та фінансової математики, які раніше вважалися гауссовими, не є такими, хоч і можуть бути близькими до них, через що з'явилась необхідність у дослідженні більш загальних класів випадкових процесів.

У 1960-у році у роботі Кахана [3] вперше розглядаються субгауссові випадкові величини, які є більш загальними, ніж гауссові випадкові величини. Метричні характеристики субгауссових та строго субгауссових випадкових величин і процесів детально вивчаються у монографії Булдигіна В.В. та Козаченка Ю.В. [1]. За означенням центрована випадкова величина ξ називається субгауссовою, якщо існує деяка константа $a > 0$ така, що виконується нерівність

$$\mathbf{E}e^{\lambda\xi} \leq e^{\frac{\lambda^2 a^2}{2}},\ \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

Іншими словами, будь-яка центрована випадкова величина є субгауссовою, якщо її твірну функцію моментів можна обмежити зверху твірною функцією моментів гауссової випадкової величини.

Пізніше простори субгауссових випадкових величин були узагальнені до просторів φ-субгауссових випадкових величин $\mathbf{Sub}_\varphi(\Omega)$ — просторів центрованих випадкових величин з певними експоненціальними моментами: центрована випадкова величина ξ є φ-субгауссовою, якщо існує така константа $a > 0$, для якої виконується нерівність

$$\mathbf{E}e^{\lambda\xi} \leq e^{\varphi(\lambda a)},\ \forall\lambda \in \mathbb{R},$$

де $\varphi(x),\ x \in \mathbb{R}$, є певною N-функцією Орліча.

Такі простори є підпросторами просторів Орліча експоненціального типу, які детально вивчаються в монографії [1]. Класи φ-субгауссових випадкових процесів є більш широкими, ніж класи гауссових та субгауссових випадкових процесів, тому дають можливість краще моделювати реальні випадкові процеси.

Подальший розвиток теорія φ-субгауссових випадкових процесів отримала у роботах Козаченка Ю.В. та Василик О.І. [4–6]. Детальному викладу теорії φ-субгауссових випадкових процесів присвячена монографія [8], яка містить, зокрема, умови вибіркової неперервності та оцінки розподілів супремумів функціоналів від φ-субгауссових випадкових процесів, вейвлет-розклади таких процесів, деякі методи моделювання тощо. До класу φ-субгауссових випадкових процесів належать, зокрема, процеси дробового броунівського руху, які дуже часто зустрічаються у задачах фінансової математики та інших прикладних областях. Дослідження показують (див., наприклад, [7]), що дані спостережень у теорії масового обслуговування та фінансовій математиці ефективно описуються процесами, які мають властивості самоподібності та сильної залежності від минулого.

В роботах Ямненка Р.Є. [9–11] зі співавторами теорія φ-субгауссових випадкових величин та процесів застосовується до задач знаходження оцінок ймовірності виходу траєкторій випадкових процесів за рівень, заданий деякою кривою. Такі задачі мають пряме застосування в теорії масового обслуговування для оцінювання ймовірності переповнення буфера для черги та в страховій математиці для оцінювання ймовірності банкрутства в моделях ризику. Зокрема, в роботі [9] досліджуються пуассонівські суми, доданками яких є φ-субгауссові випадкові величини, отримано оцінки ймовірності перевищення такими сумами рівня, що заданий деякою неперервною функцією. Обгрунтування використання саме φ-субгауссових випадкових величин для моделювання розмірів позовів для деякого страхового портфеля полягає в тому, що результати, отримані для φ-субгауссових випадкових величин, можна використовувати не тільки для гауссового розподілу виплат, а й, наприклад, для розподілу Вейбулла, який, поряд з гамма-розподілом, на думку багатьох авторів є найбільш реальною моделлю розподілу страхових виплат та інших фінансових ризиків (див., наприклад, [2]).

У даній магістерській дисертації продовжується дослідження таких моделей ризику з метою оцінювання ймовірності банкрутства у випадку деякої заданої функції φ. У першому розділі наведено основні означення та необхідні властивості φ-субгауссових випадкових величин та процесів. У другому розділі даної роботи розглядається класична модель ризику, в якій процес ризику задається у вигляді пуассонівської суми з φ-субгауссовими величинами виплат. Основну увагу приділено результатам, які стосуються оцінювання ймовірності виходу вищеописаного процесу за рівень, визначений певною неперервною функцією. У третьому — основному розділі дисертації, доведено теорему, яка містить оцінку ймовірності банкрутства для процесу ризику з φ-субгауссовими випадковими величинами виплат для такої функції φ, що частковими випадками відповідних φ-субгауссових величин є як субгауссові (наприклад, нормальні) випадкові величини, так і випадкові величини, які мають двосторонній розподіл Вейбулла. Для цих часткових випадків доведено відповідні наслідки.

1 φ-субгауссові випадкові величини та процеси з просторів $\mathbf{Sub}_\varphi(\Omega)$

У цьому розділі наведені необхідні в подальшому означення, приклади та твердження з теорії φ-субгауссових випадкових величин та процесів [1, 8, 9].

N-функції Орліча

Означення 1. *[8] Неперервна парна опукла функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається N-функцією Орліча, якщо $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x)$ є монотонно зростаючою при $x > 0$ та мають місце границі*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty. \tag{1}$$

Приклад 1. *[8] Такі функції є N-функціями:*

$$\varphi(x) = C|x|^\alpha,\ C > 0,\ \alpha > 1;$$
$$\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1;$$
$$\varphi(x) = \exp\{a|x|^\alpha\} - 1,\ a > 0,\ \alpha > 1;$$
$$\varphi(x) = \begin{cases} \left(\frac{e\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} x^2, & \text{коли } |x| \le \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}; \\ \exp\{|x|^\alpha\}, & \text{коли } |x| > \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\ 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Лема 1. *[8] Для будь-якої N-функції φ мають місце такі твердження:*

- $\varphi(\alpha x) \le \alpha\varphi(x)$, *коли* $x \in \mathbb{R}$, $0 \le \alpha \le 1$*;*
- $\varphi(\alpha x) \ge \alpha\varphi(x)$, *коли* $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$*;*
- $\varphi(|x| + |y|) \ge \varphi(x) + \varphi(y)$, *коли* $x, y \in \mathbb{R}$*;*
- *існує така стала $c > 0$, що $\varphi(x) > c|x|$, коли $|x| > 1$;*
- *функція $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$ є монотонно неспадною при $x > 0$;*
- $\varphi(x) = \int_0^{|x|} p(t)\,dt$, *де функція $p = \{p(t), t \ge 0\}$ неспадна неперервна справа функція така, що $p(0) = 0$ та $p(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ — N-функція Орліча.*

Лема 2. *[9] Нехай φ – деяка N-функція, $\varphi^{(-1)} = \{\varphi^{(-1)}(x), x \in \mathbb{R}^+\}$ – обернена функція до φ. Мають місце такі твердження:*

- $\varphi^{(-1)}(x)$ *– монотонно зростаюча, увігнута, неперервна функція така, що $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ при $x > 0$, $\varphi(x) \to \infty$ при $x \to \infty$;*
- $\varphi^{(-1)}(\alpha x) \le \alpha\varphi^{(-1)}(x)$, *коли* $\alpha \ge 1$*;*

- *$\varphi^{(-1)}(\alpha x) \geq \alpha \varphi^{(-1)}(x)$, коли $0 \leq \alpha < 1$;*
- *$\varphi^{(-1)}(x+y) \leq \varphi^{(-1)}(x) + \varphi^{(-1)}(y)$;*
- *існує така стала $c > 0$, що $\varphi^{(-1)}(x) \leq cx$, коли $x > 1$;*
- *функція $\theta(x) = \frac{\varphi^{(-1)}(x)}{x}$, $x > 0$, є монотонно незростаючою.*

N-функції Орліча, що задовольняють умову Q

Означення 2. *[9] N-функція Орліча задовольняє умову Q, якщо*

$$\liminf_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = c > 0. \tag{2}$$

Зауваження 1. *[9] Можливий випадок, у якому $c = +\infty$.*

Приклад 2. *[8] Для N-функції $\varphi(x) = c|x|^\alpha$, коли $c > 0$, $1 < \alpha \leq 2$, виконується умова Q. Для N-функції $\{c|x|^\alpha,\ x \in \mathbb{R}\}$ при $c > 0$, $\alpha > 2$ умова Q не виконується, але для функції*

$$\varphi(x) = \begin{cases} |x|^2, & |x| \leq 1, \\ |x|^\alpha, & |x| > 1, \end{cases} \quad \text{коли } \alpha > 2,$$

умова Q виконується.

Приклад 3. *Функція $\varphi = \{\varphi(x),\ x \in \mathbb{R}\}$, яка задається виразом*

$$\varphi(x) = \begin{cases} \begin{cases} \frac{|x|^\omega}{\omega}, & \text{якщо } |x| \geq 1, \\ \frac{x^2}{\omega}, & \text{якщо } |x| < 1; \end{cases} & \text{якщо } 2 < \omega < 3, \\ \frac{|x|^\omega}{\omega},\ x \in \mathbb{R}, & \text{якщо } 1 < \omega \leq 2. \end{cases}$$

є N-функцією, яка задовольняє умову Q.

φ-субгауссові випадкові величини та процеси. Означення та властивості

Нехай $\{\Omega, \mathrm{F}, \mathbf{P}\}$ – стандартний імовірнісний простір, T — деякий параметричний простір.

Означення 3. *[9] Нехай φ — N-функція, яка задовільняє умову Q. Центрована випадкова величина ξ є φ-субгауссовою випадковою величиною, якщо $\mathbf{E}\exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність*

$$\mathbf{E}\exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda a)\}. \tag{3}$$

Якщо випадкова величина ξ є φ-субгауссвою, то кажуть, що вона належить простору φ-субгауссових величин $\mathbf{Sub}_\varphi(\Omega)$, використовуючи для цього таке позначення:

$$\xi \in \mathbf{Sub}_\varphi(\Omega).$$

Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, то простір $\mathbf{Sub}_{\frac{x^2}{2}}(\Omega) = \mathbf{Sub}(\Omega)$ називається субгауссовим.

Теорема 1. *[1] Простір $\mathbf{Sub}_\varphi(\Omega)$ є банаховим простором з нормою*

$$\tau_\varphi(\xi) = \sup_{\lambda>0} \frac{\varphi^{(-1)}\left(\ln \mathbf{E} \exp\{\lambda\xi\}\right)}{\lambda}, \tag{4}$$

де $\varphi^{(-1)}$ — обернена до φ функція, також для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\mathbf{E} \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\left\{\varphi(\lambda\tau_\varphi(\xi))\right\},$$

а також існує така стала $c_\varphi > 0$, що

$$(\mathbf{E}\xi^2)^{\frac{1}{2}} \leq c_\varphi \tau_\varphi(\xi).$$

Приклад 4. *[9] Центровані гауссові величини $\xi = \mathcal{N}(0;\sigma^2)$ належать до простору $\mathbf{Sub}(\Omega)$ і $\tau_\varphi(\xi) = \left(\mathbf{E}\xi^2\right)^{\frac{1}{2}}$.*

Приклад 5. *Нехай ξ — випадкова величина, яка має центральний розподіл Вейбулла, тобто*

$$\mathbf{P}\{\xi > x\} = \frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{1}{\alpha}x^\alpha\right\}, \quad \text{коли} \quad x > 0,$$
$$\mathbf{P}\{\xi < x\} = \frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{1}{\alpha}|x|^\alpha\right\}, \quad \text{коли} \quad x < 0.$$

Нехай $\alpha > 2$, тоді $\xi \in \mathbf{Sub}_\varphi(\Omega)$, де

$$\varphi(x) = \frac{1}{\beta}|x|^\beta, \ \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = 1, \ x \in \mathbb{R}.$$

Зауваження 2. *З того, що у прикладі 5 число α задовольняє нерівність $\alpha > 2$ та число β задається рівністю*

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = 1,$$

вірними є такі міркування:

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = 1, \ \alpha > 2 \implies \beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1}, \ \alpha > 2 \implies \beta \in (1; 2).$$

Тоді функція $\varphi(y)$ з прикладу 5 має такий вигляд:

$$\varphi(y) = \frac{1}{\beta}|y|^{\beta}, \; y \in \mathbb{R}, \; \beta \in (1;2),$$

тобто функція $\varphi(y)$ з прикладу 5 є частковим випадком функції $\varphi(x)$ з прикладу 3.

Означення 4. *[8] Випадковий процес $X = \{X(t), \; t \in T\}$ називається φ-субгауссовим процесом, якщо він задовольняє такі умови при всіх $t \in T$:*

$$X(t) \in \mathbf{Sub}_{\varphi}(\Omega), \quad \sup_{t \in T} X(t) < +\infty. \tag{5}$$

Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, то випадковий процес $X(t)$ називається субгауссовим.

Означення 5. *[8] Сім'я Δ випадкових величин з простору $\mathbf{Sub}_{\varphi}(\Omega)$ називається строго φ-субгауссовою, якщо існує стала $C_{\Delta} > 0$ така, що для будь-якої скінченої множини I, $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$ та для будь-яких $\lambda_i \in \mathbb{R}$ має місце нерівність*

$$\tau_{\varphi}\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i\right) \leq C_{\Delta}\left(\mathbf{E}\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Сталу C_{Δ} називають визначальною сталою сім'ї Δ. Простір строго φ-субгауссових випадкових величин позначають $\mathbf{SSub}_{\varphi}(\Omega)$.

Означення 6. *[8] Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ називається строго φ-субгауссовим, якщо сім'я випадкових величин $\{X(t), \; t \in T\}$ є строго φ-субгауссовою. Визначальна стала цієї сім'ї називається визначальною сталою процесу та позначається C_X.*

Приклад 6. *[8] Центрований гауссовий випадковий процес є строго субгауссовим випадковим процесом.*

Перед наступними двома теоремами, у яких вказуються оцінки ймовірності виходу траєкторії деякого φ-субгауссового процесу за рівень, заданий деякою неперервною функцією, варто заздалегідь ввести декілька нових позначень.

Нехай (T, ρ) — псевдометричний (метричний) сепарабельний простір з псевдометрикою (метрикою) ρ. Розглянемо сепарабельний φ-субгауссовий випадковий процес $Y = \{Y(t), \; t \in T\}$. Припустимо, що існує неперервна монотонно зростаюча функція $\sigma = \{\sigma(h), \; h > 0\}$ така, що $\sigma(h) \to 0$ при $h \to 0$ та має місце нерівність

$$\sup_{\rho(t;s) \leq h} \tau_{\varphi}(Y(t) - Y(s)) \leq \sigma(h). \tag{7}$$

Зауважимо, що таку властивість має функція

$$\sigma(h) = \sup_{\rho(t;s)\le h} \tau_\varphi(Y(t) - Y(s)), \tag{8}$$

якщо процес $Y(t)$ є неперервним у нормі $\tau_\varphi(\cdot)$.

Нехай B — компактна множина, причому $B \subset T$. Введемо такі позначення:

— $\gamma(u) = \tau_\varphi(Y(u))$;

— $\beta > 0$ — деяке число таке, що $\beta \le \sigma\left(\inf_{s\in B}\sup_{t\in B}\rho(t;s)\right)$;

— $\varepsilon_k = \sigma^{(-1)}(\beta p^k),\ p \in (0;1),\ k = 0, 1, 2\ldots$;

— $N_B(u)$ — метрична масивність простору (B, ρ), тобто мінімальна кількість замкнених куль радіуса u, що покривають простір (B, ρ);

— $H_B(u)$ — метрична ентропія простору (B, ρ), тобто $H_B(u) = \ln N_B(u)$.

Розглянемо сепарабельний φ-субгауссовий випадковий процес $Y = (Y(t),\ t \in B)$, визначений на компакті B. Нехай $\gamma < +\infty$ та $f = \{f(t),\ t \in B\}$ — деяка неперервна функція. Наступні теореми містять умови обмеженості з ймовірністю одиниця та оцінки ймовірності виходу траєкторій φ-субгауссового випадкового процесу за рівень, визначений деякою неперервною функцією.

Теорема 2. *[9] Нехай для φ-субгауссового випадкового процесу $Y(t) = (Y(t),\ t \in B)$ виконується умова (7) і нехай $f = \{f(t),\ t \in B\}$ — неперервна функція така, що $|f(u) - f(\nu)| \le \delta(\rho(u; v))$, де функція $\delta = \{\delta(s),\ t > 0\}$ — невід'ємна та монотонно зростаюча, а $r = \{r(u),\ u \ge 1\}$ — така неперервна функція, що $r(u) > 0$ при $u > 1$ та функція $r(\exp\{t\}),\ t \ge 0$ є опуклою. Тоді при виконанні умови*

$$\int_0^\beta \frac{r\left(N_B\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)}{\varphi^{(-1)}\ln N_B\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)}\,\mathrm{d}u < +\infty$$

процес $X(t) = Y(t) - f(t)$ є обмеженим з ймовірністю одиниця та для всіх $p \in (0;1)$ і $x > 0$ виконуються такі нерівності:

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\in B}(Y(t) - f(t)) > x\} \le Z_r(\lambda; p; \beta; x),$$

$$\mathbf{P}\{\inf_{t\in B}(Y(t) - f(t)) < -x\} \le Z_r(\lambda; p; \beta; x),$$

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\in B}|Y(t) - f(t)| > x\} \le 2Z_r(\lambda; p; \beta; x),$$

де

$$Z_r(\lambda;p;\beta;x)=\exp\left\{W(\lambda;p;\beta)+p\varphi\left(\frac{\lambda\beta}{1-p}\right)+\lambda\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\delta\left(\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^{k-1}\right)\right)\right)-x\right)\right\}\cdot$$
$$\cdot\left(r^{(-1)}\left(\frac{\lambda}{p(1-p)}\int\limits_0^{\beta p^2}\frac{r(N_B\left(\sigma^{(-1)}(u)\right))}{\varphi^{(-1)}\left(\ln N_B\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)}\,\mathrm{d}u\right)\right)^2,$$
$$W(\lambda,p,\beta)=\inf_{\nu\geq(1-p)^{-1}}\left(\frac{1}{\nu}H_B(\varepsilon_1)+\sup_{u\in T}\left(\frac{\varphi(\lambda\gamma(u)\nu)}{\nu}-\lambda f(u)\right)\right).$$

Теорема 3. *[9] Нехай для φ-субгауссового випадкового процесу $Y(t)=(Y(t),\ t\in B)$ виконується умова (7) і нехай $f=\{f(t),\ t\in B\}$ — неперервна функція така, що $|f(u)-f(\nu)|\leq\delta(\rho(u;v))$, де функція $\delta=\{\delta(s),\ t>0\}$ — невід'ємна та монотонно зростаюча, а $r=\{r(u),\ u\geq 1\}$ — така неперервна функція, що $r(u)>0$ при $u>1$ та функція $r(\exp\{t\}),\ t\geq 0$ є опуклою. Тоді при виконанні умови*

$$\int\limits_0^{\beta} r\left(N_B\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\,\mathrm{d}u<+\infty.$$

процес $X(t)=Y(t)-f(t)$ є обмеженим з ймовірністю одиниця та для всіх $p\in(0;1)$ і $x>0$ виконуються такі нерівності:

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\in B}(Y(t)-f(t))>x\}\leq Z_r(\lambda;p;\beta;x),$$
$$\mathbf{P}\{\inf_{t\in B}(Y(t)-f(t))<-x\}\leq Z_r(\lambda;p;\beta;x),$$
$$\mathbf{P}\{\sup_{t\in B}|Y(t)-f(t)|>x\}\leq 2Z_r(\lambda;p;\beta;x),$$

де

$$Z_r(\lambda;p;\beta;x)=\inf_{\lambda>0}\exp\left\{\theta(\lambda;p)+p\varphi\left(\frac{\lambda\beta}{1-p}\right)+\lambda\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\delta\left(\sigma^{(-1)}\left(\beta p^{k-1}\right)\right)-x\right)\right\}\cdot$$
$$\cdot r^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int\limits_0^{\beta p} r\left(N_B\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right)\,\mathrm{d}u\right),$$
$$\theta(\lambda,p)=\sup_{u\in B}\left((1-p)\varphi\left(\frac{\lambda\gamma(u)}{1-p}\right)-\lambda f(u)\right).$$

2 Процес ризику з φ-субгауссовими величинами виплат

У роботі [9] досліджується класична модель ризику $X(t),\ t \geq 0$, в якій процес ризику є пуассонівською сумою з φ-субгауссовими розмірами виплат. Дану модель можна описати так

$$X(t) = u + Ct - \sum_{i=1}^{N_t} (Y_i + m) = u + (C - m\mu)\, t - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,\ t \geq 0, \tag{9}$$

де u —початковий капітал, C — інтенсивність надходження премій, m — середній розмір виплат та:

1. N_t — процес Пуассона, $\mathbf{E}(N_t) = \mu t$,
2. Y_i є незалежними між собою випадковими величинами, що мають однаковий закон розподілу, $\mathbf{E}(Y_i) = 0$,
3. N_t та послідовність випадкових величин $(Y_1,\ Y_2, \ldots)$ є незалежними,
4. випадкові величини Y_i належать простору $\mathbf{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Надалі розглядаються властивості сум $S(t) = \sum\limits_{i=1}^{N_t} Y_i$, для яких виконуються вищевказані умови (1)-(4). Для них є справедливими наступні леми.

Лема 3. *[9] Нехай $S(t) = \sum\limits_{i=1}^{N_t},\ t \geq 0$ — випадковий процес, для якого виконуються умови (1)-(4). Тоді для всіх $t,\ s > 0$ та $\lambda \in \mathbb{R}$ виконуються нерівність*

$$\mathbf{E} \exp\{\lambda S(t)\} \leq \exp\{\mu t(\varphi(\lambda \tau_\varphi(Y_1)) - 1)\} \tag{10}$$

та

$$\mathbf{E}\left(\sum_{n=1}^{N_t} Y_n - \sum_{k=1}^{N_s} Y_k\right)^2 = \mathbf{E}\left(\sum_{n=N_s}^{N_t} Y_n\right)^2 = \mu \mathbf{E}(Y_1)^2 |t-s|. \tag{11}$$

Нехай B — компакт, а метрика $\rho(t;s) = |t-s|$. В якості функції $\sigma(h)$, яка відповідає нерівності (8), користуючись тотожністю (11), виберемо

$$\sigma(h) = \left(\mu h E(Y_1)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

У [9] отримано оцінки ймовірності перевищення пуассонівськими сумами вигляду $S(t) = \sum\limits_{i=1}^{N_t} Y_i$ деякого рівня $x \geq 0$ та деякої неперервної функції $f(t)$. Наступна лема містить умови обмеженості супремуму випадкового процесу $X(t) = Y(t) - f(t)$ та оцінки для експоненціального моменту цього супремуму.

Лема 4. *[9] Нехай $X(t) = Y(t) - f(t),\ t \in B$, причому для процесу $S(t)$ виконуються умови* (1)-(4), *$f(t)$ — така неперервна функція, що $|f(u) - f(v)| \leq \delta(\rho(u;v))$, де $\delta = \{\delta(s),\ s > 0\}$ є невід'ємною* *монотонно зростаючою функцією, а* $\{q_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ *— деяка послідовність така, що* $q_k>1$ *та* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{q_k}\le 1$. *Тоді для всіх* $\lambda>0$ *та* $p\in(0;1)$ *виконується нерівність*

$$\mathbf{E}\exp\{\lambda\sup_{t\in B}X(t)\}\le\prod_{k=1}^{+\infty}\left(N_B\left(\frac{\left(\beta p^k\right)^2}{\mu\mathbf{E}(Y_1)^2}\right)\right)^{\frac{1}{q_k}}\exp\left\{\sup_{u\in B}\left(\frac{\mu u}{q_1}(\exp\{\varphi(q_1\lambda\tau_\varphi(Y_1))\}-1)-\lambda f(u)\right)\right\}\cdot$$
$$\cdot\exp\left\{\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{\left(\beta p^{k-1}\right)^2}{q_k\mu\mathbf{E}(Y_1)^2}(\exp\{\varphi(q_1\lambda\tau_\varphi(Y_1))\}-1)+\lambda\delta\left(\frac{\left(\beta p^{k-1}\right)^2}{\mu\mathbf{E}(Y_1)^2}\right)\right)\right\}. \qquad (13)$$

Лема 5. *[9] Припустимо, що умови Леми 4 виконуються та*

$$\int_0^\beta H_B\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\mathrm{d}u<+\infty.$$

Тоді для всіх $p\in(0;1),\ 0\le\beta\le\left(\frac{\mu(b-a)\mathbf{E}(Y_1)^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ *і* $\lambda>0$ *виконується нерівність*

$$\mathbf{E}\exp\left\{\lambda\sup_{t\in B}X(t)\right\}\le Z(\lambda;p;\beta), \qquad (14)$$

де

$$Z(\lambda;p;\beta)=\exp\left\{W(\lambda;p;\beta)+\frac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p^2}H_B\left(\frac{u^2}{\mu\mathbf{E}(Y_1)^2}\right)\mathrm{d}u\right\}\cdot$$
$$\cdot\exp\left\{\frac{\beta^2(1-p)}{\mathbf{E}(Y_1)^2}\sum_{k=2}^{+\infty}p^{3k-1}\varphi\left(\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}}\right)+\lambda\sum_{k=2}^{+\infty}\delta\left(\frac{\beta^2p^{2k}}{\mu\mathbf{E}(Y_1)^2}\right)\right\},$$
$$W(\lambda;p;\beta)=\inf_{\nu\ge(1-p)^{-1}}\left(\frac{1}{\nu}H_B\left(\frac{(\beta p)^2}{\mu\mathbf{E}(Y_1)^2}\right)+\sup_{u\in B}(\mu u(\exp\{\varphi(\nu\tau_\varphi(Y_1))\}-1))-\lambda f(u)\right).$$

У роботі [9] отримано аналоги теорем 2 і 3, які містять умови обмеженості з ймовірністю одиниця та оцінки ймовірності виходу траєкторій процесу за рівень, визначений деякою неперервною функцією.

Теорема 4. *[9] Нехай для процесу* $S(t)=\sum\limits_{i=1}^{N_t}Y_i,\ t\in B$ *виконуються умови (1)-(4) і нехай* $f(t)$ *— це така неперервна функція, що* $|f(u)-f(v)|\le\delta(\rho(u;v))$, *де* $\delta=\{\delta,\ s>0\}$ *є невід'ємною монотонно зростаючою функцією, а* $r=\{r(t),\ t\ge1\}$ *— така неперервна функція, що* $r(u)>0$ *при* $u>1$ *та* $r(1)=0$, *причому функція* $s(t)=r(\exp\{t\}),\ t\ge0$ *є опуклою. Тоді якщо*

$$\int_0^\beta r\left(N_B\left(\frac{u^2}{\mu\mathbf{E}(Y_1)^2}\right)\right)\mathrm{d}u<+\infty,$$

то для всіх $0 \le \beta \le \left(\frac{\mu(b-a)\mathbf{E}(Y_1)^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ *та* $p \in (0;1)$ *виконуютсья нерівності*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in B}(S(t)-f(t))>x\right\} \le Z_r(p;\beta;x),$$
$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in B}(S(t)-f(t))<-x\right\} \le Z_r(p;\beta;x),$$
$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in B}|S(t)-f(t)|>x\right\} \le 2Z_r(p;\beta;x),$$

де

$$Z_r(p;\beta;x) = r^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int\limits_0^{\beta p^2} r\left(N_B\left(\frac{u^2}{\mu\mathbf{E}(Y_1)^2}\right)\right)\mathrm{d}u\right)\cdot$$
$$\cdot \inf_{\lambda>0}\exp\left\{W(\lambda;p;\beta)+\frac{\beta^2(1-p)}{\mathbf{E}(Y_1)^2}\sum_{k=2}^{+\infty}p^{3k-1}\varphi\left(\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}}\right)+\lambda\sum_{k=2}^{+\infty}\delta\left(\frac{\beta^2p^{2k}}{\mu\mathbf{E}(Y_1)^2}\right)-\lambda x\right\},$$
$$W(\lambda;p;\beta) = \inf_{\nu\ge(1-p)^{-1}}\left(\frac{1}{\nu}H_B\left(\frac{(\beta p)^2}{\mu\mathbf{E}(Y_1)^2}\right)+\sup_{u\in B}(\mu u(\exp\{\varphi(\nu\tau_\varphi(Y_1))\}-1))-\lambda f(u)\right).$$

Теорема 5. *[9] Нехай для процесу* $S(t)=\sum\limits_{i=1}^{N_t}Y_i,\ t\in B$ *виконуються умови* (1)-(4) *і нехай* $f(t)$ *— це така неперервна функція, що* $|f(u)-f(v)|\le\delta(\rho(u;v))$, *де* $\delta=\{\delta(s),\ s>0\}$ *є невід'ємною монотонно зростаючою функцією, а* $r=\{r(t),\ t\ge 1\}$ *— така неперервна функція, що* $r(u)>0$ *при* $u>1$ *та* $r(1)=0$, *причому функція* $s(t)=r(\exp\{t\}),\ t\ge 0$ *є опуклою. Тоді якщо*

$$\int\limits_0^{\beta} r\left(N_B\left(\frac{u^2}{\mu\mathbf{E}(Y_1)^2}\right)\right)\mathrm{d}u<+\infty,$$

то для всіх $0 \le \beta \le \left(\frac{\mu(b-a)\mathbf{E}(Y_1)^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ *та* $p \in (0;1)$ *вірними є нерівності*

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in B}(S(t)-f(t))>x\right\} \le Z_r(p;\beta;x),$$
$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in B}(S(t)-f(t))<-x\right\} \le Z_r(p;\beta;x),$$
$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\in B}|S(t)-f(t)|>x\right\} \le 2Z_r(p;\beta;x),$$

∂e

$$Z_r(p;\beta;x) = \inf_{\lambda>0} r^{(-1)} \left(\frac{1}{\beta p} \int\limits_0^{\beta p} r\left(N_B\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) \mathrm{d}u \right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{ \theta_\varphi(\lambda;p) + \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{(1-p)\beta^2 p^{3(k-1)}}{\mu \mathbf{E}(Y_1)^2} \left(\exp\left\{ \varphi\left(\frac{\lambda \tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}} \right) \right\} - 1 \right) + \lambda\delta \left(\frac{\left(\beta p^{k-1}\right)^2}{\mu \mathbf{E}(Y_1)^2} \right) \right) - \lambda x \right\},$$

$$\theta_\varphi(\lambda;p) = \sup_{u\in B} \left((1-p)\mu u \left(\exp\left\{ \varphi\left(\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{1-p} \right) \right\} - 1 \right) - \lambda f(u) \right).$$

3 Оцінювання ймовірності банкрутства

У даному розділі буде знайдено оцінку ймовірності банкрутства для класичної моделі ризику, у якій процес ризику задано у вигляді пуассонівської суми з φ-субгауссовими розмірами виплат та деякою функцією φ. Розглянемо $X(t)$ — класичну модель ризику, що задається таким виразом:

$$X(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,\ t \in [a;b],\ c = C - m\mu > 0, \tag{15}$$

де u —початковий капітал, C — інтенсивність надходження премій, m — середній розмір виплат та:

1. N_t — процес Пуассона, $\mathbf{E}(N_t) = \mu t$,
2. Y_i є незалежними між собою випадковими величинами, що мають однаковий закон розподілу, $\mathbf{E}(Y_i) = 0$,
3. N_t та послідовність випадкових величин $(Y_1,\ Y_2, \dots)$ — незалежні,
4. випадкові величини Y_i належать до простору $\mathbf{Sub}_\varphi(\Omega)$, де

$$\varphi(x) = \begin{cases} \begin{cases} \frac{|x|^\omega}{\omega}, & \text{якщо } |x| \geq 1, \\ \frac{x^2}{\omega}, & \text{якщо } |x| < 1; \end{cases} & \text{якщо } 2 < \omega < 3, \\ \frac{|x|^\omega}{\omega}, & x \in \mathbb{R},\ \text{якщо } 1 < \omega \leq 2; \end{cases}$$

Теорема 6. *Нехай $X(t)$ є класичним процесом ризику, для якого виконуються такі твердження:*

- *випадковий процес $X(t)$ задається виразом* (15)*;*
- *випадковий процес $X(t)$ задовольняє умови 1.-4.;*
- *випадковий процес $S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,\ t \in [a;b]$ є строго ψ-субгауссовим з визначальною сталою $C_S = 1$, функція $\psi(x)$ дорівнює*

$$\psi(x) = \mu t(\exp\{\varphi(x)\} - 1),\ x \in \mathbb{R},\ t \text{ — фіксоване.}$$

Тоді для всіх $p \in A$, де

$$A = \begin{cases} (0;1), & \text{якщо } \tau_\varphi(Y_1) > \frac{1}{4},\ \tau_\varphi(Y_1) \geq \left(\frac{\omega c}{\mu}\right)^{\frac{1}{\omega}}, \\ \left(1 - \left(\frac{\mu}{\omega c}\right)^{\frac{1}{\omega}} \tau_\varphi(Y_1); 1\right), & \text{якщо } \frac{1}{4} < \tau_\varphi(Y_1) \leq \left(\frac{\omega c}{\mu}\right)^{\frac{1}{\omega}}, \\ (0; p_-) \cup (p_+, 1), & \text{якщо } \left(\frac{\omega c}{\mu}\right)^{\frac{1}{\omega}} \leq \tau_\varphi(Y_1) \leq \frac{1}{4}, \\ ((0;p_-) \cup (p_+,1)) \cap \left(1 - \left(\frac{\mu}{\omega c}\right)^{\frac{1}{\omega}} \tau_\varphi(Y_1); 1\right), & \text{якщо } \tau_\varphi(Y_1) \leq \frac{1}{4},\ \tau_\varphi(Y_1) < \left(\frac{\omega c}{\mu}\right)^{\frac{1}{\omega}}; \end{cases}$$

$$p_- = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\tau_\varphi(Y_1)}}{2},\ p_+ = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\tau_\varphi(Y_1)}}{2};$$

виконуються нерівності

$$P\{(S(t) - ct) > u\} \leq Z_0(u),$$
$$P\{(S(t) - ct) > -u\} \leq Z_0(u),$$
$$P\{|S(t) - ct| > u\} \leq 2Z_0(u),$$

де

$$Z_0(u) = \inf_{(\lambda;p)\in L} e^{2-b\mu} \frac{2^{2-p}}{p^{4-2p}} \cdot \exp\left\{ b\mu \exp\left\{ \frac{(\tau_\varphi(Y_1))^\omega}{\omega} \left(\frac{\lambda}{1-p}\right)^\omega \right\} + \right.$$
$$\left. + \frac{2\mu(b-a)(\tau_\varphi(Y_1))^\omega}{\omega} \frac{p^{5-\omega}}{(1-p^{3-\omega})(1-p)^{\omega-1}} \lambda^\omega + \frac{(b-a)}{2} \frac{p^4}{1-p^2}\lambda - (u+bc)\lambda \right\},$$

L — множина значень $(\lambda; p)$ таких, що задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} \lambda \geq \frac{(1-p)p}{\tau_\varphi(Y_1)} \left(1 + \left[\left(\frac{\omega c}{\mu\tau_\varphi(Y_1)} \frac{1-p}{p^{\omega-1}}\right)^{\frac{1}{\omega-1}} - 1\right] \mathbb{I}_{\{p\in K\}}\right), \\ 0 < \lambda < 1, \\ p \in A; \end{cases}$$

$$K = \left\{ p \,\middle|\, \frac{\mu\tau_\varphi(Y_1)}{\omega c} p^{\omega-1} + p - 1 > 0 \right\},\ \mathbb{I}_{\{p\in K\}} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } p \in K, \\ 0, & \text{якщо } p \notin K. \end{cases}$$

Доведення. Для доведення теореми буде використано Теорему 4 у випадку, коли:

$$f(t) = ct,\ B = [a;b],\ \delta(t) = t,\ r(s) = s^\alpha,\ \alpha \in \left(0; \frac{1}{2}\right),\ \nu \geq \frac{1}{1-p},\ p \in (0;1), \rho(t;s) = |t-s|,$$

$\sigma(h),\ h > 0$ — неперервна монотонно зростаюча функція, яка задовольняє такі умови:

$$\lim_{h\to 0} \sigma(h) = 0,\ \sup_{\rho(t;s)\leq h} \tau_\psi(S(t) - S(s)) \leq \sigma(h),$$

β — довільне число, яке задовольняє умову

$$0 < \beta \leq \sigma(\inf_{s\in B} \sup_{t\in B} \rho(t;s))$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \begin{cases} \frac{|x|^\omega}{\omega}, & \text{якщо } |x| \geq 1, \\ \frac{x^2}{\omega}, & \text{якщо } |x| < 1; \end{cases} & \text{якщо } 2 \leq \omega < 3, \\ \frac{|x|^\omega}{\omega}, & \text{якщо } x \in \mathbb{R},\ 1 < \omega < 2; \end{cases}$$

Проте для можливості використання Теореми 4 потрібно, щоб функція $\sigma(h)$ мала вираз, ідентичний тому, який використовувався у теоремі 5:

$$\sigma(h) = \left(\mu h \mathbf{E}(Y_1)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Спочатку потрібно перевірити, чи можна визначити функцію $\sigma(h)$ виразом з попереднього рядка і у разі підтвердження такої можливості задати для неї саме такий вираз.
За умовою теореми процес $S(t)$ є строго ψ субгауссовим з визначальною сталою $C_S = 1$, тому

$$\tau_\psi(S(t) - S(s)) \leq \left(\mathbf{E}\left(S(t) - S(s)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\mu|t-s|\mathbf{E}(Y_1)^2\right)^{\frac{1}{2}} \implies$$
$$\implies \sup_{\rho(t;s)\leq h} \tau_\psi(S(t) - S(s)) \leq \sup_{\rho(t;s)\leq h} \left(\mu|t-s|\mathbf{E}(Y_1)^2\right)^{\frac{1}{2}},\ \rho(t;s) = |t-s| \implies$$
$$\implies \sup_{\rho(t;s)\leq h} \tau_\psi(S(t) - S(s)) \leq \left(\mu h\mathbf{E}(Y_1)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

враховуючи останню нерівність, функцію $\sigma(h),\ h > 0$ дійсно можна визначити так:

$$\sigma(h) = \left(\mu h\mathbf{E}(Y_1)^2\right)^{\frac{1}{2}},\ h > 0.$$

Отже, можливе і використання Теореми 4.

Для подальших міркувань, потрібних для доведення даної теореми, слід визначити знайти обернену до $\sigma(h)$ функцію $\sigma^{(-1)}(h)$:

$$\sigma(h) = \left(\mu h\mathbf{E}(Y_1)^2\right)^{\frac{1}{2}},\ h > 0 \implies \sigma^{(-1)}(h) = \frac{h^2}{\mu\mathbf{E}(Y_1)},\ h > 0.$$

Також потрібно уточнити обмеження для β. Згідно з умов теореми:

$$0 < \beta \leq \sigma\left(\inf_{s\in B} \sup_{t\in B} \rho(t;s)\right),\ \rho(t;s) = |t-s|,\ B = [a;b],$$

тоді

$$\sup_{t\in B}\rho(t;s)=\sup_{t\in[a;b]}|t-s|=\begin{cases}b-s, & s<\frac{a+b}{2},\\ s-a, & s\geq\frac{a+b}{2};\end{cases}\implies$$

$$\implies \inf_{s\in B}\sup_{t\in B}\rho(t;s)=\begin{cases}\inf\limits_{s\in\left[a;\frac{a+b}{2}\right)}(b-s), & s<\frac{a+b}{2},\\ \inf\limits_{s\in\left[\frac{a+b}{2};b\right]}(s-a), & s\geq\frac{a+b}{2};\end{cases}=\frac{b-a}{2}\implies$$

$$\implies \sigma\left(\inf_{s\in B}\sup_{t\in B}\rho(t;s)\right)=\sigma\left(\frac{b-a}{2}\right)=\left(\frac{\mu(b-a)\mathbf{E}(Y_1)^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

звідки маємо такі обмеження для β:

$$0<\beta\leq\left(\frac{\mu(b-a)\mathbf{E}(Y_1)^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Вирази для функцій $\sigma(h)$, $\sigma^{(-1)}(h)$ та обмеження для β визначено, причому отримана функція $\sigma(h)$ не відрізняється від функції $\sigma(h)$ з Теореми 4. Почнемо доведення теореми, починаючи зі знаходження або значень виразів, що використовуються у Теоремі 4, або обмежень справа для цих значень.

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\delta\left(\frac{\beta^2p^{2k}}{\mu\mathbf{E}(Y_1)^2}\right)=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\beta^2p^{2k}}{\mu\mathbf{E}(Y_1)^2}=\frac{\beta^2}{\mu\mathbf{E}(Y_1)^2}\cdot\frac{p^4}{1-p^2}=\frac{\beta^2p^4}{(1-p^2)\mu\mathbf{E}(Y_1)^2};$$

Значення ряду $M=\frac{\beta^2(1-p)}{\mathbf{E}(Y_1)^2}\sum\limits_{k=2}^{+\infty}p^{3k-1}\varphi\left(\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}}\right)$ залежить від значення функції $\varphi(x)$ за різних значень $\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}}$ та ω. Звідси випливає, що ряд M може приймати нескінченну кількість значень, проте надалі розглядатиметься лише випадок, у якому

$$\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}}\geq 1,\ \forall k\in\mathbb{N}\backslash\{1\}\text{ та }\omega\in(1;3).$$

Причиною даного вибору є границя

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}}=+\infty,$$

звідки випливає, що

$$\exists k_0\in\mathbb{N}\backslash\{1\},\ \forall k>k_0,\ k\in\mathbb{N}\backslash\{1\}\ \frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}}\geq 1,$$

тобто за будь-яких обраних значень λ, p та випадкової величини Y розглядатиметься ряд, схожий на M при $\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}}\geq 1,\ \forall k\in\mathbb{N}\backslash\{1\},\ \omega\in(1;3)$, різниця між рядами полягатиме лише у скінченній кількості доданків. Додатково слід зауважити, що

$$\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}} \geq 1,\ \forall k \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \iff \min_{k\geq 2}\left\{\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}}\right\} = \frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p} \geq 1,$$

тому замість умови

$$\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}} \geq 1,\ \forall k \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \text{ та } \omega \in (1;3)$$

можна розглядати умову

$$\frac{\lambda}{(1-p)p} \geq \frac{1}{\tau_\varphi(Y_1)} \text{ та } \omega \in (1;3).$$

Враховуючи попередні міркування, маємо

$$\sum_{k=2}^{+\infty} p^{3k-1}\varphi\left(\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}}\right) = \sum_{k=2}^{+\infty} p^{3k-1}\frac{1}{\omega}\left(\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}}\right)^\omega =$$
$$= \frac{1}{\omega}\left(\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{1-p}\right)^\omega \sum_{k=2}^{+\infty} p^{3k-1-\omega(k-1)} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{1-p}\right)^\omega \sum_{k=2}^{+\infty} p^{(3-\omega)k-1+\omega} =$$
$$= \frac{1}{\omega}\left(\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{1-p}\right)^\omega \sum_{k=2}^{+\infty} p^{3k-1-\omega(k-1)} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{1-p}\right)^\omega \frac{p^{5-\omega}}{1-p^{3-\omega}} \implies$$
$$\implies \frac{\beta^2(1-p)}{E(Y_1)^2}\sum_{k=2}^{+\infty} p^{3k-1}\varphi\left(\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}}\right) = \frac{\beta^2(1-p)}{E(Y_1)^2}\cdot\frac{1}{\omega}\left(\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{1-p}\right)^\omega \frac{p^{5-\omega}}{1-p^{3-\omega}} =$$
$$= \frac{\beta^2(\lambda\tau_\varphi(Y_1))^\omega}{\omega\mathbf{E}(Y_1)^2}\frac{p^{5-\omega}}{(1-p^{3-\omega})(1-p)^{\omega-1}}.$$

Якщо $s \leq \beta$, то:

$$\sigma^{(-1)}(s) \leq \sigma^{(-1)}(\beta) \leq \sigma^{(-1)}\left(\left(\frac{\mu(b-a)\mathbf{E}(Y_1)^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{b-a}{2} \implies 1 \leq \frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(s)},$$

також вірною є нерівність

$$N_B(s) \leq \frac{b-a}{2s} + 1,$$

тоді:

$$N_B\left(\frac{s^2}{\mu E(Y_1)^2}\right) = N_B(\sigma^{(-1)}(s)) \leq \frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(s)} + 1 \leq \frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(s)} + \frac{b-a}{2\sigma^{(-1)}(s)} = \frac{b-a}{\sigma^{(-1)}(s)},$$

звідки

$$r^{(-1)}\left(\frac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p^2} r\left(N_B\left(\frac{s^2}{\mu E(Y_1)^2}\right)\right)\mathrm{d}s\right) \leq \left(\frac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p^2}\left(\frac{b-a}{\sigma^{(-1)}(s)}\right)^\alpha \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\alpha}} =$$

$$= (b-a)\mu E(Y_1)^2\left(\frac{1}{\beta p}\int_0^{\beta p^2} s^{-2\alpha}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{b-a}{(\beta p)^2}\mu E(Y_1)^2(1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}},\ 0<\alpha<\frac{1}{2};$$

Враховуючи попередні міркування, можна знайти такі обмеження для деяких значень з Теореми 4:

$$H_B\left(\frac{(\beta p)^2}{\mu E(Y_1)^2}\right) = H_B\left(\sigma^{(-1)}(\beta p)\right) = \ln\left(N_B\left(\sigma^{(-1)}(\beta p)\right)\right) \leq \ln\left(\frac{b-a}{(\beta p)^2}\mu E(Y_1)^2\right);$$

$$\sup_{u\in[a;b]}\left(\mu u\left(\exp\{\varphi(\nu\lambda\tau_\varphi(Y_1))\}-1\right)-\lambda f(u)\right) = \sup_{u\in[a;b]} u\left[\mu\left(\exp\left\{\frac{(\nu\lambda\tau_\varphi(Y_1))^\omega}{\omega}\right\}-1\right)-\lambda c\right] =$$

$$= \begin{cases} b\left[\mu\left(\exp\left\{\frac{(\nu\lambda\tau_\varphi(Y_1))^\omega}{\omega}\right\}-1\right)-\lambda c\right], & \text{якщо } \exp\left\{\frac{(\nu\lambda\tau_\varphi(Y_1))^\omega}{\omega}\right\} \geq 1+\frac{\lambda c}{\mu}, \\ a\left[\mu\left(\exp\left\{\frac{(\nu\lambda\tau_\varphi(Y_1))^\omega}{\omega}\right\}-1\right)-\lambda c\right], & \text{якщо } \exp\left\{\frac{(\nu\lambda\tau_\varphi(Y_1))^\omega}{\omega}\right\} \leq 1+\frac{\lambda c}{\mu}; \end{cases}$$

для $\lambda > 0$ таких, що задовольняють нерівність

$$\lambda \geq \left(\frac{\omega c}{\mu}(\nu\tau_\varphi(Y_1))^{-\omega}\right)^{\frac{1}{\omega-1}},$$

вірними є такі міркування:

$$\exp\left\{\frac{(\nu\lambda\tau_\varphi(Y_1))^\omega}{\omega}\right\} \geq 1+\frac{(\nu\lambda\tau_\varphi(Y_1))^\omega}{\omega} \geq 1+\frac{\lambda c}{\mu} \implies$$
$$\implies \sup_{u\in[a;b]} u\left[\mu\left(\exp\left\{\frac{(\nu\lambda\tau_\varphi(Y_1))^\omega}{\omega}\right\}-1\right)-\lambda c\right] = b\left[\mu\left(\exp\left\{\frac{(\nu\lambda\tau_\varphi(Y_1))^\omega}{\omega}\right\}-1\right)-\lambda c\right].$$

Нехай $\nu = \frac{1}{1-p}$, тоді, враховуючи отриману рівність, маємо таку нерівність:

$$W(\lambda;p;\beta) \leq (1-p)\ln\frac{(b-a)\mu E(Y_1)^2}{(\beta p)^2} + b\left(\mu\left(\exp\left\{\frac{(\tau_\varphi(Y_1))^\omega}{\omega(1-p)^{\omega+1}}\right\}-1\right)-\lambda c\right),$$

якщо $\lambda \geq \left(\frac{\omega c}{\mu}(\nu\tau_\varphi(Y_1))^{-\omega}\right)^{\frac{1}{\omega-1}}$.

Впродовж доведення теореми вже було утворено та використано декілька нерівностей, які повинні виконуватися одночасно:

$$\frac{\lambda}{(1-p)p} \geq \frac{1}{\tau_\varphi(Y_1)} \tag{16}$$

$$\lambda \geq \left(\frac{\omega c}{\mu}\left(\frac{\tau_\varphi(Y_1)}{1-p}\right)^{-\omega}\right)^{\frac{1}{\omega-1}}; \tag{17}$$

утворимо з них систему нерівностей для $p \in (0;1)$ і $\lambda \in (0;1)$, тоді отримаємо

$$\begin{cases} \lambda \geq \frac{(1-p)p}{\tau_\varphi(Y_1)}, \\ \lambda \geq \left(\frac{\omega c}{\mu}\left(\frac{1-p}{\tau_\varphi(Y_1)}\right)^{\omega}\right)^{\frac{1}{\omega-1}}, \\ 0 < p < 1, \\ 0 < \lambda < 1. \end{cases} \tag{18}$$

Відразу можна зауважити, що і $\frac{(1-p)p}{\tau_\varphi(Y_1)}$, і $\left(\frac{\omega c}{\mu}\left(\frac{1-p}{\tau_\varphi(Y_1)}\right)^{\omega}\right)^{\frac{1}{\omega-1}}$ є невід'ємними за даних умов, проте варто перевірити, чи завжди існуватимуть значення p такі, щоб вищеописані вирази були обмежені числом 1 одночасно, бо у протилежному випадку виконання хоча б одної з нерівностей (16) та (17) є неможливим. Розв'яжемо обидві нерівності відносно p:

$$\frac{(1-p)p}{\tau_\varphi(Y_1)} < 1 \implies p - p^2 < \tau_\varphi(Y_1) \implies p^2 - p > -\tau_\varphi(Y_1) \implies$$
$$\implies \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1}{4} - \tau_\varphi(Y_1) \implies$$
$$\implies \begin{cases} p \in (0;1) \cap \mathbb{R}, & \text{якщо } \tau_\varphi(Y_1) > \frac{1}{4}, \\ p \in (0;1) \cap ((-\infty; p_-) \cup (p_+; +\infty)), & \text{якщо } \tau_\varphi(Y_1) \leq \frac{1}{4} \end{cases} \implies$$
$$\implies \begin{cases} p \in (0;1), & \text{якщо } \tau_\varphi(Y_1) > \frac{1}{4}, \\ p \in (0;p_-) \cup (p_+, 1), & \text{якщо } \tau_\varphi(Y_1) \leq \frac{1}{4}, \end{cases}$$
$$\text{де } p_- = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\tau_\varphi(Y_1)}}{2},\ p_+ = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\tau_\varphi(Y_1)}}{2};$$
$$\left(\frac{\omega c}{\mu}\left(\frac{1-p}{\tau_\varphi(Y_1)}\right)^{\omega}\right)^{\frac{1}{\omega-1}} < 1 \implies \left(\frac{1-p}{\tau_\varphi(Y_1)}\right)^{\omega} < \frac{\mu}{\omega c} \implies$$
$$\implies 1 - p < \left(\frac{\mu}{\omega c}\right)^{\frac{1}{\omega}} \tau_\varphi(Y_1) \implies p > 1 - \left(\frac{\mu}{\omega c}\right)^{\frac{1}{\omega}} \tau_\varphi(Y_1) \implies$$
$$\implies \begin{cases} p \in (0;1), & \text{якщо } z \geq 1, \\ p \in (1-z;1), & \text{якщо } z < 1, \end{cases} \quad \text{де } z = \left(\frac{\mu}{\omega c}\right)^{\frac{1}{\omega}} \tau_\varphi(Y_1) > 0.$$

З отриманих розв'язків можна зробити висновок, що за будь-якого значення норми $\tau_\varphi(Y_1)$ множина значень p таких, що нерівності (16) та (17), не є порожньою, тобто за будь-якого обраного φ-субгауссового випадкового процесу система (18) має розв'язок. Щоправда, множина можливих значень для p може бути відмінною від $(0;1)$ через значення $\tau_\varphi(Y_1)$, тому умову в системі (18) для p у вигляді

$$0 < p < 1$$

варто замінити на

$$p \in A,\ \text{де } A = \begin{cases} (0;1), & \text{якщо } \tau_\varphi(Y_1) > \frac{1}{4},\ \tau_\varphi(Y_1) \geq \left(\frac{\omega c}{\mu}\right)^{\frac{1}{\omega}}, \\ \left(1 - \left(\frac{\mu}{\omega c}\right)^{\frac{1}{\omega}} \tau_\varphi(Y_1); 1\right), & \text{якщо } \frac{1}{4} < \tau_\varphi(Y_1) \leq \left(\frac{\omega c}{\mu}\right)^{\frac{1}{\omega}}, \\ (0; p_-) \cup (p_+, 1), & \text{якщо } \left(\frac{\omega c}{\mu}\right)^{\frac{1}{\omega}} \leq \tau_\varphi(Y_1) \leq \frac{1}{4}, \\ ((0; p_-) \cup (p_+, 1)) \cap \left(1 - \left(\frac{\mu}{\omega c}\right)^{\frac{1}{\omega}} \tau_\varphi(Y_1); 1\right), & \text{якщо } \tau_\varphi(Y_1) \leq \frac{1}{4},\ \tau_\varphi(Y_1) < \left(\frac{\omega c}{\mu}\right)^{\frac{1}{\omega}}. \end{cases}$$

Перепишемо систему (18), враховуючи зміну множини можливих значень p:

$$\begin{cases} \lambda \geq \frac{(1-p)p}{\tau_\varphi(Y_1)}, \\ \lambda \geq \left(\frac{\omega c}{\mu}\left(\frac{1-p}{\tau_\varphi(Y_1)}\right)^{\omega}\right)^{\frac{1}{\omega-1}}, \\ 0 < \lambda < 1 \\ p \in A; \end{cases}$$

перші дві умови можна переписати як одну:

$$\lambda \geq \frac{(1-p)p}{\tau_\varphi(Y_1)},\ \lambda \geq \left(\frac{\omega c}{\mu}\left(\frac{1-p}{\tau_\varphi(Y_1)}\right)^{\omega}\right)^{\frac{1}{\omega-1}} \implies \lambda \geq \max\left\{\frac{(1-p)p}{\tau_\varphi(Y_1)}; \left(\frac{\omega c}{\mu}\left(\frac{1-p}{\tau_\varphi(Y_1)}\right)^{\omega}\right)^{\frac{1}{\omega-1}}\right\},$$

якщо видозмінити вираз $\left(\frac{\omega c}{\mu}\left(\frac{1-p}{\tau_\varphi(Y_1)}\right)^{\omega}\right)^{\frac{1}{\omega-1}}$ таким чином:

$$\left(\frac{\omega c}{\mu}\left(\frac{1-p}{\tau_\varphi(Y_1)}\right)^{\omega}\right)^{\frac{1}{\omega-1}} = \left(\frac{\omega c}{\mu p^{\omega}}\left(\frac{(1-p)p}{\tau_\varphi(Y_1)}\right)^{\omega}\right)^{\frac{1}{\omega-1}} = \frac{(1-p)p}{\tau_\varphi(Y_1)}\left(\frac{\omega c}{\mu \tau_\varphi(Y_1)}\frac{1-p}{p^{\omega-1}}\right)^{\frac{1}{\omega-1}},$$

то, враховуючи, що $\frac{(1-p)p}{\tau_\varphi(Y_1)} > 0$, маємо

$$\lambda \geq \frac{(1-p)p}{\tau_\varphi(Y_1)} \max\left\{1; \left(\frac{\omega c}{\mu \tau_\varphi(Y_1)}\frac{1-p}{p^{\omega-1}}\right)^{\frac{1}{\omega-1}}\right\} =$$
$$= \frac{(1-p)p}{\tau_\varphi(Y_1)}\left(1 + \max\left\{0; \left(\frac{\omega c}{\mu \tau_\varphi(Y_1)}\frac{1-p}{p^{\omega-1}}\right)^{\frac{1}{\omega-1}} - 1\right\}\right).$$

Для продовження доведення варто попередньо розв'язати таку нерівність:

$$1 < \left(\frac{\omega c}{\mu \tau_\varphi(Y_1)}\frac{1-p}{p^{\omega-1}}\right)^{\frac{1}{\omega-1}} \implies \frac{\mu \tau_\varphi(Y_1)}{\omega c} p^{\omega-1} < 1 - p \implies$$
$$\implies \frac{\mu \tau_\varphi(Y_1)}{\omega c} p^{\omega-1} + p - 1 > 0.$$

Враховуючи отриманий результат, нерівність для λ можна переписати так:

$$\lambda \geq \frac{(1-p)p}{\tau_\varphi(Y_1)}\left(1+\left[\left(\frac{\omega c}{\mu\tau_\varphi(Y_1)}\frac{1-p}{p^{\omega-1}}\right)^{\frac{1}{\omega-1}}-1\right]\mathbb{I}_{\{p\in K\}}\right),$$

де

$$K=\left\{p\,\middle|\,\frac{\mu\tau_\varphi(Y_1)}{\omega c}p^{\omega-1}+p-1>0\right\},\ \mathbb{I}_{\{p\in K\}}=\begin{cases}1, & \text{якщо } p\in K,\\ 0, & \text{якщо } p\notin K;\end{cases}$$

Звідси випливає, що систему нерівностей (18) можна переписати у такому вигляді:

$$\begin{cases}\lambda \geq \frac{(1-p)p}{\tau_\varphi(Y_1)}\left(1+\left[\left(\frac{\omega c}{\mu\tau_\varphi(Y_1)}\frac{1-p}{p^{\omega-1}}\right)^{\frac{1}{\omega-1}}-1\right]\mathbb{I}_{\{p\in K\}}\right),\\ 0<\lambda<1,\\ p\in A.\end{cases} \tag{19}$$

Для зменшення обсягу подальших записів варто ввести множину L – множину пар $(\lambda;p)$ таких, що задовольняють систему нерівностей (19).

Отже, з усіх попередніх міркувань, маємо такий результат:

$$\begin{aligned}Z(\lambda;p;\beta)\leq \inf_{(\lambda;p)\in L}(1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}\frac{(b-a)\mu E(Y_1)^2}{(\beta p)^2}\exp\left\{(1-p)\ln\frac{(b-a)\mu E(Y_1)^2}{(\beta p)^2}\right\}\cdot\\ \cdot\exp\left\{b\left[\mu\left(\exp\left\{\frac{1}{\omega}\left(\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{1-p}\right)^\omega\right\}-1\right)-\lambda c\right]+\frac{\beta^2\ (\lambda\tau_\varphi(Y_1))^\omega\ p^{5-\omega}}{E(Y_1)^2\ \omega(1-p^{3-\omega})(1-p)^{\omega-1}}+\right.\\ \left.+\frac{\lambda\beta^2p^4}{\mu(1-p^2)E(Y_1)^2}-\lambda u\right\},\end{aligned}$$

проте дану нерівність можна замінити на

$$\begin{aligned}Z(\lambda;p;\beta)\leq \inf_{(\lambda;p)\in L,\ 0<\alpha<\frac{1}{2}}(1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}\frac{(b-a)\mu E(Y_1)^2}{(\beta p)^2}\exp\left\{(1-p)\ln\frac{(b-a)\mu E(Y_1)^2}{(\beta p)^2}\right\}\cdot\\ \cdot\exp\left\{b\left[\mu\left(\exp\left\{\frac{1}{\omega}\left(\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{1-p}\right)^\omega\right\}-1\right)-\lambda c\right]+\frac{\beta^2\ (\lambda\tau_\varphi(Y_1))^\omega\ p^{5-\omega}}{E(Y_1)^2\ \omega(1-p^{3-\omega})(1-p)^{\omega-1}}+\right.\\ \left.+\frac{\lambda\beta^2p^4}{\mu(1-p^2)E(Y_1)^2}-\lambda u\right\}=\\ =\inf_{0<\alpha<\frac{1}{2}}(1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}\inf_{(\lambda;p)\in L}\frac{(b-a)\mu E(Y_1)^2}{(\beta p)^2}\exp\left\{(1-p)\ln\frac{(b-a)\mu E(Y_1)^2}{(\beta p)^2}\right\}\cdot\\ \cdot\exp\left\{b\left[\mu\left(\exp\left\{\frac{1}{\omega}\left(\frac{\lambda\tau_\varphi(Y_1)}{1-p}\right)^\omega\right\}-1\right)-\lambda c\right]+\frac{\beta^2\ (\lambda\tau_\varphi(Y_1))^\omega\ p^{5-\omega}}{E(Y_1)^2\ \omega(1-p^{3-\omega})(1-p)^{\omega-1}}+\right.\\ \left.+\frac{\lambda\beta^2p^4}{\mu(1-p^2)E(Y_1)^2}-\lambda u\right\}\end{aligned}$$

Знайдемо значення $\inf\limits_{0<x<\frac{1}{2}} g(x)$, де $g(x) = (1-2x)^{-\frac{1}{x}},\ x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$:

$$g(x) = (1-2x)^{-\frac{1}{x}} > 0 \implies \ln g(x) = -\frac{1}{x}\ln(1-2x) \implies$$

$$\implies \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{x^2}\ln(1-2x) + \frac{2}{x(1-2x)} \implies g'(x) = \frac{(1-2x)\ln(1-2x)+2x}{(1-2x)x^2}(1-2x)^{-\frac{1}{x}},$$

$$(1-2x)\ln(1-2x)+2x = (1-2x)\ln(1-2x)-(1-2x)+1 = 1+(1-2x)(-1+\ln(1-2x)) =$$

$$= 1+(1-2x)\left(-1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-2x)^n}{n!}\right) = 1-(1-2x)\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2x)^n}{n!}\right) >$$

$$> 1-(1-2x) = 2x > 0,$$

$$0 < x < \frac{1}{2} \implies 0 < 1-2x < 1,$$

$$1-2x > 0,\ (1-2x)\ln(1-2x)+2x > 0 \implies g'(x) > 0 \implies$$

$$\implies \inf_{0<x<\frac{1}{2}} g(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}(1-2x)^{-\frac{1}{x}} = e^2.$$

Нехай $\beta^2 = \frac{\mu(b-a)E(Y_1)^2}{2}$, тоді, враховуючи те, що

$$\inf_{0<\alpha<\frac{1}{2}}(1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} = e^2,$$

маємо твердження теореми, бо

$$P\{(S(t)-ct) > u\} \le Z_0(u),$$

$$P\{(S(t)-ct) > -u\} \le Z_0(u),$$

$$P\{|S(t)-ct| > u\} \le 2Z_0(u),$$

де

$$Z_0(u) = \inf_{(\lambda;p)\in L} e^{2-b\mu}\left(\frac{2}{p^2}\right)^{2-p} \exp\left\{b\mu \exp\left\{\frac{(\tau_\varphi(Y_1))^\omega}{\omega}\left(\frac{\lambda}{1-p}\right)^\omega\right\}+\right.$$
$$\left.+\frac{2\mu(b-a)(\tau_\varphi(Y_1))^\omega}{\omega}\frac{p^{5-\omega}}{(1-p^{3-\omega})(1-p)^{\omega-1}}\lambda^\omega + \frac{(b-a)}{2}\frac{p^4}{1-p^2}\lambda - (u+bc)\lambda\right\}.$$

■

Наслідок 1. *Нехай випадковий процес $(X(t),\ t \in [0;1])\}$ задовольняє умови Теореми 6 та випадкові* *величини $\{Y_i, i \geq 1\}$ мають двосторонній розподіл Вейбулла виду:*

$$\mathbf{P}\{\xi > x\} = \frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{1}{\alpha}x^{\alpha}\right\}, \quad \text{коли} \quad x > 0,$$
$$\mathbf{P}\{\xi < x\} = \frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{1}{\alpha}|x|^{\alpha}\right\}, \quad \text{коли} \quad x < 0,\ \alpha = 4.$$

Тоді

$$P\{(S(t) - ct) > u\} \leq R_0(u),$$
$$P\{(S(t) - ct) > -u\} \leq R_0(u),$$
$$P\{|S(t) - ct| > u\} \leq 2R_0(u),$$

де

$$R_0(u) = \inf_{(\lambda;p)\in L} e^{2-\mu}\left(\frac{2}{p^2}\right)^{2-p} \cdot \exp\left\{\mu \exp\left\{\frac{3}{4}\pi^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\lambda}{1-p}\right)^{\frac{4}{3}}\right\} + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{2}\mu\pi^{\frac{2}{3}}\frac{p^{\frac{11}{3}}}{(1-p^{\frac{5}{3}})(1-p)^{\frac{1}{3}}}\lambda^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2}\frac{p^4}{1-p^2}\lambda - (u+c)\lambda\right\}.$$

Доведення. З того, що випадкові величини $Y_i,\ i \geq 1$ є φ-субгауссовими та мають розподіл Вейбулла з параметром α, який задовольняє нерівність $\alpha > 2$, та прикладу 5 випливає, що функція $\varphi = \varphi(y)$ дорівнює

$$\varphi(y) = \frac{1}{\beta}|y|^{\beta},\ y \in \mathbb{R},\ \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = 1,\ \alpha = 4,$$

тоді:

$$\alpha = 4,\ \beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \implies \beta = \frac{4}{3} \implies \varphi(y) = \frac{3}{4}|y|^{\frac{4}{3}},$$

з виразу функції $\varphi(y)$ випливає, що функція $\varphi(y)$ є частковим випадком функції $\varphi(x)$ з Теореми 6, у якому параметр ω дорівнює

$$\omega = \frac{4}{3} \in (1; 2].$$

За Теоремою 6 маємо:

$$P\{(S(t) - ct) > u\} \leq Z_0(u),$$
$$P\{(S(t) - ct) > -u\} \leq Z_0(u),$$
$$P\{|S(t) - ct| > u\} \leq 2Z_0(u),$$

де

$$\inf_{(\lambda;p)\in L} e^{2-b\mu}\left(\frac{2}{p^2}\right)^{2-p}\exp\left\{b\mu\exp\left\{\frac{(\tau_\varphi(Y_1))^\omega}{\omega}\left(\frac{\lambda}{1-p}\right)^\omega\right\}+\right.$$
$$\left.+\frac{2\mu(b-a)(\tau_\varphi(Y_1))^\omega}{\omega}\frac{p^{5-\omega}}{(1-p^{3-\omega})(1-p)^{\omega-1}}\lambda^\omega+\frac{(b-a)}{2}\frac{p^4}{1-p^2}\lambda-(u+bc)\lambda\right\}.$$

За умовою:

$$t\in[0;1] \implies a=0,\ b=1.$$

З того, що випадковий процес $S(t)=\sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ є строго φ-субгауссовим з визначальною сталою $C_\Delta=1$, випливає нерівність

$$\tau_\varphi\left(S(t)-S(s)\right)\le C_\Delta\left(\mathbf{E}\left(S(t)-S(s)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\mu|t-s|\mathbf{E}(Y_1)^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\mu|b-a|\mathbf{E}(Y_1)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\mu\mathbf{E}(Y_1)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Потрібно знайти значення моменту другого порядку випадкової величини Y. Знайдемо його без підстановки $\alpha=4$, причому використовуватимемо позначення Y замість Y_1:

$$\mathbf{E}(Y)^2=\int_{\mathbb{R}} x^2 f_Y(x)\mathrm{d}x;$$

$$F_Y(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{1}{\alpha}x^\alpha\right\}, & x>0,\\ \frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{1}{\alpha}(-x)^\alpha\right\}, & x\le 0,\end{cases} \implies f_Y(x)=\begin{cases}\frac{x^{\alpha-1}}{2}\exp\left\{-\frac{1}{\alpha}x^\alpha\right\}, & x>0,\\ \frac{(-x)^{\alpha-1}}{2}\exp\left\{-\frac{1}{\alpha}(-x)^\alpha\right\}, & x\le 0,\end{cases}$$

$$\mathbf{E}(Y)^2=\int_{-\infty}^{0} x^2\frac{1}{2}(-x)^{\alpha-1}e^{-\frac{1}{\alpha}(-x)^\alpha}\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty} x^2\frac{1}{2}x^{\alpha-1}e^{-\frac{1}{\alpha}x^\alpha}\mathrm{d}x=$$
$$=\int_0^{+\infty} t^2\frac{1}{2}t^{\alpha-1}e^{-\frac{1}{\alpha}t^\alpha}\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty} x^2\frac{1}{2}x^{\alpha-1}e^{-\frac{1}{\alpha}x^\alpha}\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty} x^2\frac{1}{2}x^{\alpha-1}e^{-\frac{1}{\alpha}x^\alpha}\mathrm{d}x=$$
$$=\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{\alpha}x^\alpha}\mathrm{d}\left(\frac{1}{\alpha}x^\alpha\right)=\int_0^{+\infty}\left(\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}x^\alpha\right)^{\frac{2}{\alpha}}e^{-\frac{1}{\alpha}x^\alpha}\mathrm{d}\left(\frac{1}{\alpha}x^\alpha\right)=$$
$$=\alpha^{\frac{2}{\alpha}}\int_0^{+\infty} t^{\left(\frac{2}{\alpha}+1\right)-1}e^{-t}\mathrm{d}t=\alpha^{\frac{2}{\alpha}}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}+1\right)=\alpha^{\frac{2}{\alpha}}\frac{2}{\alpha}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)=2\alpha^{\frac{2}{\alpha}-1}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right).$$

Зі значення $\mathbf{E}(Y)^2$ маємо:

$$\mathbf{E}(Y_1)^2=2\alpha^{\frac{2}{\alpha}-1}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)\Big|_{\alpha=4}=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},$$

звідки

$$\tau_\varphi\left(S(t)-S(s)\right)\le\sqrt{\pi}.$$

Враховуючи попередні міркування, маємо

$$P\{(S(t)-ct)>u\} \le Z_0(u),$$
$$P\{(S(t)-ct)>-u\} \le Z_0(u),$$
$$P\{|S(t)-ct|>u\} \le 2Z_0(u),$$

де

$$Z_0(u) = \inf_{(\lambda;p)\in L} e^{2-b\mu}\left(\frac{2}{p^2}\right)^{2-p} \exp\left\{b\mu\exp\left\{\frac{(\tau_\varphi(Y_1))^\omega}{\omega}\left(\frac{\lambda}{1-p}\right)^\omega\right\}+\right.$$
$$\left.+\frac{2\mu(b-a)(\tau_\varphi(Y_1))^\omega}{\omega}\frac{p^{5-\omega}}{(1-p^{3-\omega})(1-p)^{\omega-1}}\lambda^\omega+\frac{(b-a)}{2}\frac{p^4}{1-p^2}\lambda-(u+bc)\lambda\right\} \le$$
$$\le \inf_{(\lambda;p)\in L} e^{2-\mu}\left(\frac{2}{p^2}\right)^{2-p}\cdot\exp\left\{\mu\exp\left\{\frac{3}{4}\pi^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\lambda}{1-p}\right)^{\frac{4}{3}}\right\}+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{2}\mu\pi^{\frac{2}{3}}\frac{p^{\frac{11}{3}}}{(1-p^{\frac{5}{3}})(1-p)^{\frac{1}{3}}}\lambda^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{2}\frac{p^4}{1-p^2}\lambda-(u+c)\lambda\right\} := R_0(u).$$

■

Наслідок 2. *Нехай випадковий процес $X(t)$ задовольняє умови Теореми 6 та функція $\varphi(x)$ дорівнює*

$$\varphi(x)=\frac{x^2}{2},\ x\in\mathbb{R},$$

тобто функція $\varphi(x)$ є частковим випадком функції φ з Теореми 6, коли $\omega=2$. Тоді маємо результат, схожий на результат з теореми про оцінку ймовірності банкрутства субгауссового процесу ризику, доведеної у [9], бо

$$P\{(S(t)-ct)>u\} \le Z_0(u),$$
$$P\{(S(t)-ct)>-u\} \le Z_0(u),$$
$$P\{|S(t)-ct|>u\} \le 2Z_0(u),$$

де

$$Z_0(u) = \inf_{(\lambda;p)\in L} e^{2-b\mu}\left(\frac{2}{p^2}\right)^{2-p} \exp\left\{b\mu\exp\left\{\frac{(\tau_\varphi(Y_1))^\omega}{\omega}\left(\frac{\lambda}{1-p}\right)^\omega\right\}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2\mu(b-a)(\tau_\varphi(Y_1))^\omega}{\omega}\frac{p^{5-\omega}}{(1-p^{3-\omega})(1-p)^{\omega-1}}\lambda^\omega+\frac{(b-a)}{2}\frac{p^4}{1-p^2}\lambda-(u+bc)\lambda\right\}\right|_{\omega=2} =$$
$$= \inf_{(\lambda;p)\in L} e^{2-b\mu}\left(\frac{2}{p^2}\right)^{2-p} \exp\left\{b\mu\exp\left\{\frac{(\tau_\varphi(Y_1))^2}{2}\left(\frac{\lambda}{1-p}\right)^2\right\}+\right.$$
$$\left.+\mu(b-a)(\tau_\varphi(Y_1))^2\frac{p^3}{(1-p)^2}\lambda^2+\frac{(b-a)}{2}\frac{p^4}{1-p^2}\lambda-(u+bc)\lambda\right\}.$$

Зауваження 3. *Різниця між значеннями* $Z_0(u)$ *у Наслідку 2 та вказаній теоремі полягає лише у множині допустимих значень* $(\lambda; p)$. *Проте, якщо врахувати те, що умова* $\frac{\lambda}{(1-p)p} \geq \frac{1}{\tau_\varphi(Y_1)}$, *через яку дані множини допустимих значень відрізняються між собою, використовується лише через специфіку функції* $\varphi(x)$ *з Теореми 6 при обранні параметра* ω *з інтервалу* $\in (2;3)$, *то даною умовою у Теоремі 6 можна знехтувати при обранні параметра з напівінтервалу* $(1;2]$. *У такому випадку результати з Наслідку 2 та вказаної у ньому теореми є однаковими.*

Висновки

У даній магістерській дисертації досліджено класичну модель ризику з φ-субгауссовими величинами виплат. Для цього використано деякі відомості та результати з теорії φ-субгауссових випадкових величин та процесів. Причина виникнення та розвитку даної теорії полягає у неможливості використання гауссових випадкових процесів для аналізу великої кількості процесів ризику, що зустрічаються у задачах страхової математики, теорії масового обслуговування тощо. Використання φ-субгауссових випадкових величин дозволяє аналізувати не лише ті процеси ризику, для моделювання яких використовуються гауссові процеси, а й ті, що моделюються двостороннім розподілом Вейбулла, дробовим броунівським рухом тощо.

Процес ризику, який було розглянуто у роботі, є класичним процесом ризику у вигляді пуассонівської суми випадкових величин, що мають φ-субгауссовий розподіл. Основна увага була приділена оцінюванню ймовірності виходу траєкторії φ-субгауссового випадкового процесу за рівень, заданий деякою неперервною функцією. Було наведено теорему зі статті [9] про оцінку вищевказаної ймовірності.

У роботі отримано оцінку ймовірності банкрутства для процесу ризику з φ-субгауссовими випадковими величинами виплат у випадку, коли функція $\varphi = \varphi(x)$ дорівнює

$$\varphi(x) = \begin{cases} \begin{cases} \frac{|x|^\omega}{\omega}, & \text{якщо } |x| \geq 1, \\ \frac{x^2}{\omega}, & \text{якщо } |x| < 1; \end{cases} & \text{якщо } 2 < \omega < 3, \\ \frac{|x|^\omega}{\omega}, \ x \in \mathbb{R}, & \text{якщо } 1 < \omega \leq 2. \end{cases}$$

Отримані результати застосовано до процесів ризику, у яких страхові виплати мають субгауссовий розподіл (наприклад, нормальний розподіл) та двосторонній розподіл Вейбулла.

Список використаних джерел

[1] Buldygin V. V. and Kozachenko Yu. V., Metric characterization of random variables and random processes. American Mathematical Society, Providence RI, 2000.

[2] Chen Q., Gerlach R. H. . The two-sided Weibull distribution and forecasting financial tail risk. International Journal of Forecasting, Volume 29, Issue 4, 2013, p. 527-540

[3] Kahane J.P. Propriétés locales des fonctions à series de Fouries aléatories // Studia Math. 1960. **19**, № 1. P. 1–25.

[4] Kozachenko Yu.V., Vasilik O.I. On the distribution of suprema of $\mathbf{Sub}_{\varphi}(\Omega)$ random processes // Theory of Stochastic Processes. 1998. Vol. 4(20), issue 1–2. P. 147–160.

[5] Kozachenko Yu.V., Vasilik O.I. Stochastic processes of the classes $V(\varphi, \psi)$ // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2001. No. 63. P. 109–121.

[6] Kozachenko Yu., Sottinen T., Vasylyk O. Self-similar processes with stationary increments in the spaces $SSub_{\varphi}(\Omega)$ // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2002. No. 65. P. 77–88.

[7] Sottinen T. Fractional Brownian Motion in Finance and Queueing. Academic Dissertation, University of Helsinki, 2003. ISBN 952-91-5653-7 (Paperback), ISBN 952-10-0984-5 (PDF).

[8] Василик О. І., Козаченко Ю. В., Ямненко Р. Є. φ-субгауссові випадкові процеси: Монографія. — К.: ВПЦ «Київський університет», 2008. — 232 с.

[9] Ямненко Р.Є., Василик О.І. Деякі властивості випадкових пуассонівських сум із φ-субгауссовими доданками // Прикладна статистика, актуарна та фінансова математика. – 2007. – Вип. 1. – С. 133–148.

[10] Yamnenko R. Ruin probability for generalized φ-sub-Gaussian fractional Brownian motion // Theory of Stochastic Processes. — 2006. — T. 12 (28), № 3-4. — C. 261–275

[11] Yamnenko, R., Lamin, A. (2022). Estimation of ruin probability for binomially distributed number of φ-sub-Gaussian claims. Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physical and Mathematical Sciences, (2), 20–27.