НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ «КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»

УДК 519.21

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

________Олег КЛЕСОВ

«____» ________ 2024 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Оцінювання параметрів коваріаційної функції стаціонарного процесу»

Виконала:
студентка II курсу, групи ОМ-31мп
Степанець Ганна Яківна ______________

Керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор
Іванов Олександр Володимирович ______________

Рецензент:
професор кафедри дослідження операцій
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
д.ф.-м.н., с.н.с. Мацак Іван Каленикович ______________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань

Студентка ________________

Київ — 2024

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти — другий (магістерський)

Спеціальність — 111 «Математика»

Освітньо – наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

________Олег КЛЕСОВ

«____» ________ 2024 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту

Степанець Ганні Яківні

1. Тема дисертації «Оцінювання параметрів коваріаційної функції стаціонарного процесу», науковий керівник дисертації Іванов Олександр Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор затверджені наказом по університету від 6 грудня 2024р. № 4981-с.

2. Термін подання студентом дисертації 14 грудня 2024 р.

3. Об'єкт дослідження математична модель стаціонарного процесу, що задовольняє деякі умови регулярності.

4. Предмет дослідження асимптотичні властивості оцінки найменших квадратів параметрів коваріаційної функції стаціонарного процесу.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1) Поставити задачу оцінювання параметрів коваріаційної функції стаціонарного процесу.

2) Довести теорему про сильну консистентність оцінки найменших квадратів параметрів коваріаційної функції стаціонарного процесу.

3) Довести теорему про асимптотичну нормальність оцінки найменших квадратів параметрів коваріаційної функції стаціонарного процесу.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстрованого) матеріалу 17 слайдів.

7. Дата видачі завдання 04 вересня 2024 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомлення з літературою	04.09.2024–19.09.2024	виконано
2.	Доведення теореми про сильну консистентність оцінки найменших квадратів параметрів коваріаційної функції стаціонарного процесу	20.09.2024–22.10.2024	виконано
3.	Доведення теореми про асимптотичну нормальність оцінки найменших квадратів параметрів коваріаційної функції стаціонарного процесу	23.10.2024–25.11.2024	виконано
4.	Оформлення магістерської дисертації	26.11.2024–14.12.2024	виконано

Студентка Ганна СТЕПАНЕЦЬ

Науковий керівник дисертації Олександр ІВАНОВ

Реферат

Магістерська дисертація: 39 сторінок, 17 слайдів для проектора, 11 першоджерел.

В роботі досліджуються асимптотичні властивості оцінки найменших квадратів параметрів коваріаційної функції спостережуваного стаціонарного процесу з неперервним часом та нульовим середнім.

Мета роботи полягає в отриманні вимог до стаціонарного процесу, за яких оцінка найменших квадратів параметрів його коваріаційної функції є сильно консистентною та асимптотично нормальною.

Завданням роботи є доведення сильної консистентності та асимптотичної нормальності оцінки найменших квадратів параметрів стаціонарного процесу з неперервним часом спостереження. Об'єктом дослідження є математична модель стаціонарного процесу, що задовольняє деякі умови регулярності.

Для оцінювання невідомих параметрів коваріаційної функції стаціонарного процесу запропоновано оцінку найменших квадратів, що використовує коваріограму, тобто непараметричну оцінку самої коваріаційної функції.

В роботі доведено теореми про сильну консистентність та асимптотичну нормальність оцінки найменших квадратів параметрів коваріаційної функції стаціонарного процесу при виконанні певних умов перемішування, моментних умов та умов інтегровності похідних коваріаційної функції за параметрами.

Ключові слова: стаціонарний процес, коваріаційна функція, оцінка найменших квадратів, сильна консистентність, асимптотична нормальність.

Abstract

Master degree thesis contains 39 pages, 17 slides for projector, 11 primary sources.

Master's thesis examines the asymptotic properties of the least squares estimate of the stationary process covariance function parameter with continuous observation time and zero mean.

The goal of this study is to obtain conditions under which the specified lest squares estimate is strongly consistent and asymptotically normal.

The task of the work is to prove the strong consistency and asymptotic normality of least squares estimate of the parameters of a stationary process covariance function. The object of study is a mathematical model of a stationary process that satisfies certain regularity conditions.

To estimate the unknown parameter of the covariance function of a stationary process, the least squares estimate is proposed that uses the covariogram of this process.

In the thesis the theorems are proved on the strong consistency and asymptotic normality of the least squares estimates of the parameter of the covariance function of a stationary process under certain mixing conditions, moment conditions and integrability conditions for the derivatives of the covariance function with respect to the parameters.

Keywords: stationary process, covariance function, least squares estimate, strong consistency, asymptotic normality.

Зміст

Вступ

Оцінювання коваріаційних функцій стохастичних процесів є дуже важливою статистичною задачею. Обмежуючи себе розгляданням тільки стаціонарних процесів, слід зауважити, що основна увага фахівців прикута до непараметричних оцінок коваріаційних функцій. В оглядовій роботі Bilchouris, Olenko [1] наведено 20 різних непараметричних оцінок коваріаційних функцій стаціонарних процесів. Серед цих оцінок найбільшу популярність мають коваріограми, яким присвячена неосяжна кількість теоретичних та прикладних робіт (див., наприклад, Ivanov, Leonenko [2], Buldygin, Kozachenko [3] та численні посилання в цих монографіях).

Оцінюванню невідомих параметрів коваріаційних функцій в статистичній літературі приділяється значно менша увага. Багато в чому це пояснюється існуванням розвинутої теорії оцінювання параметрів спектральних щільностей стаціонарних процесів (див., наприклад, Ivanov, Leonenko, Orlovskyi [4] та літературні посилання, що там знаходяться). Оскільки коваріаційна функція стаціонарного процесу є перетворенням Фур'є спектральної щільності, а спектральна щільність є оберненим перетворенням Фур'є коваріаційної функції, то, взагалі кажучи, вони залежать від однієї й тієї ж сукупності параметрів. Але може так статися, що невідомі параметри ковіріаційної функції входять у спектральну щільність як конгломерати, тобто в порівнянні з параметрами коваріаційної функції, вони пов'язані складнішими функціональними залежностями. Це створює штучні проблеми, беручи до уваги, що параметри коваріаційної функції мають фізичний сеанс і представляють особливий інтерес для дослідника. Тут можна послатися на роботи Sakrison [5], Zhengynan Zhu, Stein [6], Bachoc [7],[8].

У нашій роботі невідомі параметри коваріаційної функції спостережуваного стаціонарного стохастичного процесу оцінено з використанням коваріограми цього процесу методом найменших квадратів за припущенням, що є відомим аналітичний вигляд цієї коваріаційної функції. За деяких умов регулярності спостережуваного процесу доведено сильну консистентність та асимптотичну нормальність оцінки найменших квадратів (ОНК) невідомого векторного параметра вказаної коваріаційної функції.

1 Сильна консистентність оцінки найменших квадратів

Нехай на інтервалі часу $[0, 2\mathrm{T}]$ спостерігається дійсний стаціонарний процес $\{X(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, заданий на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, такий, що $\mathbb{E}X(0) = 0$. Припустимо, що $X(t)$ — вибірково неперервний стохастичний процес, коваріаційна функція якого залежить від невідомого параметра, а саме:

$$\mathbb{E}X(t)X(0) = B(t, \theta^0), \quad \theta^0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^q, \tag{1.1}$$

де Θ — відкрита обмежена опукла множина.

Проблема полягає в оцінюванні параметра $\theta^0 = (\theta_1^0, \ldots, \theta_q^0)$ за реалізацією процесу $\{X(t), t \in [0, 2\mathrm{T}]\}$. У якості оцінки θ^0 оберемо випадковий вектор $\theta_T = (\theta_{1T}, \ldots, \theta_{qT})$, який мінімізує на Θ^C (Θ^C є замиканням Θ в $\mathbb{R}^q$) функціонал

$$Q_{\mathrm{T}}(\theta) = \int_0^{\mathrm{T}} \left[\mathrm{T}^{-1} \int_0^{\mathrm{T}} X(t+h)X(t)dt - B(h, \theta) \right]^2 dh. \tag{1.2}$$

Подальші припущення забезпечують існування θ_{T}, хоча θ_{T} може бути не єдиною оцінкою. Випадковий вектор θ_{T} природно назвати ОНК параметра θ^0.

Зауважимо, що в означенні θ_{T} використовується коваріограма процесу $X(t)$

$$\widetilde{B}_T(h) = \mathrm{T}^{-1} \int\limits_0^{\mathrm{T}} X(t+h)X(t)dt, \ h \in [0, \mathrm{T}], \tag{1.3}$$

яка є непараметричною оцінкою невідомої коваріаційної функції $B(h, \theta^0)$, $h \in [0, \mathrm{T}]$. Природно вважати, що функція $B(t, \theta)$ є коваріаційною функцією деякого стаціонарного процесу для кожного $\theta \in \Theta^C$.

Введемо деякі умови.

$\mathbf{A_1}$. $X(t)$ — гауссівський процес та

$$\sup_{\substack{A \in \sigma(\tau, +\infty) \\ B \in \sigma(-\infty, 0)}} \left| P(AB) - P(A)P(B) \right| = \alpha(\tau) = O(\tau^{-1-\varepsilon}) \ \text{ при } \tau \to +\infty \tag{1.4}$$

для деякого $\varepsilon > 0$; $\sigma(a,b)$ — це σ-алгебра, породжена сукупністю випадкових величин $\{X(t), t \in (a,b)\}$.

$\mathbf{A_2}$. (Умова Розанова[10]) $X(t)$ — строго стаціонарний процес, що задовільняє співвідношення (1.4) та $\mathbb{E}|X(t)|^{4+\delta} < \infty$ для деякого $\delta > 8/\varepsilon$.

$\mathbf{B_1}$. $B(h,\theta) \in C(\mathbb{R}\times\Theta^C)$; $\max\limits_{\theta\in\Theta^C}\big|B(h,\theta)\big| \le B(h)$; $h \in [0,\infty)$; $\int\limits_0^\infty hB(h)dh < \infty$.

$\mathbf{B_2}$. $B(h,\theta_1) \not\equiv B(h,\theta_2)$ для будь-яких $\theta_1 \neq \theta_2, \theta_1, \theta_2 \in \Theta^C$.

З умови $\mathbf{B_1}$ випливає існування неперервної та обмеженої за $\lambda \in \mathbb{R}$ функції $f(\lambda,\theta)$, що визначено співвідношенням

$$B(h,\theta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda h} f(\lambda,\theta)d\lambda. \tag{1.5}$$

Функція $f(\lambda,\theta^0)$ є спектральною щільністю процесу $X(t)$. Існування $f(\lambda,\theta^0)$ випливає також з $\mathbf{A_1}$ або з $\mathbf{A_2}$, оскільки $\mathbf{A_1}$ та $\mathbf{A_2}$ забеспечують інтегровність $B(h,\theta^0)$.

Позначимо

$$\xi_{\mathrm{T}}(h) = \widetilde{B}_{\mathrm{T}}(h) - B(h,\theta^0), \quad \eta_{\mathrm{T}}(\theta) = \int\limits_0^{\mathrm{T}} \xi_{\mathrm{T}}(h)B(h,\theta)dh. \tag{1.6}$$

Лема 1. *Нехай $X(t)$ — гауссівський процес і виконано умову $\mathbf{B_1}$. Тоді*

$$\zeta_{\mathrm{T}} = \sup_{\theta\in\Theta^C} |\eta_{\mathrm{T}}(\theta)| \xrightarrow[T\to\infty]{} 0 \text{ майже напевно (м.н.)} \tag{1.7}$$

Доведення. Послідовно отримуємо

$$\zeta_{\mathrm{T}} \le \int\limits_0^{\mathrm{T}} \big|\xi_{\mathrm{T}}(h)\big| \sup_{\theta\in\Theta^C} |B(h,\theta)|dh \le \int\limits_0^{\mathrm{T}} \big|\xi_{\mathrm{T}}(h)\big|B(h)dh \le$$

$$\le \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} B(h)dh\right)^{1/2} \left(\int\limits_0^{\mathrm{T}} \xi_{\mathrm{T}}^2(h)B(h)dh\right)^{1/2}. \tag{1.8}$$

Таким чином,

$$\mathbb{E}\zeta_{\mathrm{T}}^2 \le C_1 \int\limits_0^{\mathrm{T}} \mathbb{E}\xi_{\mathrm{T}}^2(h)B(h)dh. \tag{1.9}$$

Крім цього,

$$\mathbb{E}\xi_{\mathrm{T}}^2(h) = \mathrm{T}^{-2}\int\limits_0^{\mathrm{T}}\int\limits_0^{\mathrm{T}} \mathbb{E}X(t+h)X(t)X(s+h)X(s)dtds - B^2(h,\theta^0) =$$

$$= \mathrm{T}^{-2}\int\limits_0^{\mathrm{T}}\int\limits_0^{\mathrm{T}} \left(B^2(t-s,\theta^0) + B(t-s+h,\theta^0)B(t-s-h,\theta^0)\right) dtds. \tag{1.10}$$

Для отримання (1.10) було використано тотожність Ісерліса (див., наприклад, Gikhman, Skorokhod [9], стор.19): для центрованого гауссівського вектора (x_1, x_2, x_3, x_4)

$$\mathbb{E}x_1x_2x_3x_4 = \mathbb{E}x_1x_2\mathbb{E}x_3x_4 + \mathbb{E}x_1x_3\mathbb{E}x_2x_4 + \mathbb{E}x_1x_4\mathbb{E}x_2x_3. \tag{1.11}$$

Отже,

$$\mathbb{E}\zeta_{\mathrm{T}}^2 \le C_1(\Delta_{\mathrm{T}}^{(1)} + \Delta_{\mathrm{T}}^{(2)}), \tag{1.12}$$

де

$$\Delta_{\mathrm{T}}^{(1)} = \mathrm{T}^{-2}\int\limits_0^{\mathrm{T}}\int\limits_0^{\mathrm{T}} B^2(t-s,\theta^0)dtds\int\limits_0^{\mathrm{T}} B(h)dh \le$$

$$\le C_1^2\mathrm{T}^{-2}\int\limits_0^{\mathrm{T}}\int\limits_0^{\mathrm{T}} B^2(t-s,\theta^0)dtds = C_1^2\mathrm{T}^{-2}\int\limits_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} (\mathrm{T}-|s|)\, B^2(s,\theta^0)ds \le$$

$$\le \left(C_1^2\big|B(0,\theta^0)\big|\int_{-\infty}^{\infty}\big|B(s,\theta^0)\big|ds\right)\mathrm{T}^{-1} = O\left(\mathrm{T}^{-1}\right); \tag{1.13}$$

$$\Delta_{\mathrm{T}}^{(2)} = \mathrm{T}^{-2}\int\limits_0^{\mathrm{T}} B(h)\int\limits_0^{\mathrm{T}}\int\limits_0^{\mathrm{T}} \big|B(t-s+h,\theta^0)B(t-s-h,\theta^0)\big|dtds\,dh =$$

$$= 2\mathrm{T}^{-2}\int\limits_0^{\mathrm{T}} B(h)\int\limits_0^{\mathrm{T}}\int\limits_0^{s} \big|B(t+h,\theta^0)B(t-h,\theta^0)\big|dtds\,dh \le$$

$$\leq 2B(0,\theta^0)\mathrm{T}^{-2}\int\limits_0^{\mathrm{T}}\left(\int\limits_0^{\mathrm{T}}\int\limits_0^{s}\left|B(t+h,\theta^0)\right|dtds\right)B(h)dh \leq$$

$$\leq 2B(0,\theta^0)\left(\int_{-\infty}^{\infty}|B(t,\theta^0)|dt\right)C_1\mathrm{T}^{-1} = O\left(\mathrm{T}^{-1}\right) \text{ при } \mathrm{T}\to\infty. \qquad (1.14)$$

Ми показади, що $\mathbb{E}\zeta_{\mathrm{T}}^2 = O\left(\mathrm{T}^{-1}\right)$. Оберемо $\mathrm{T} = n^2$, тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\zeta_{\mathrm{T}_n}^2$ збігається, тобто $\zeta_{\mathrm{T}_n} \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$ м.н.

Розглянемо послідовність випадкових величин:

$$d_n = \sup_{\mathrm{T}_n\leq\mathrm{T}<\mathrm{T}_{n+1}}\left|\zeta_{\mathrm{T}} - \zeta_{\mathrm{T}_n}\right| \leq$$

$$\leq \sup_{\mathrm{T}_n\leq\mathrm{T}<\mathrm{T}_{n+1}}\sup_{\theta\in\Theta^C}\left|\int\limits_0^{\mathrm{T}_n}\left(\xi_{\mathrm{T}}(h) - \xi_{\mathrm{T}_n}(h)\right)B(h,\theta)dh + \int\limits_{\mathrm{T}_n}^{\mathrm{T}}\xi_{\mathrm{T}}(h)B(h,\theta)dh\right| \leq$$

$$\leq \sup_{\mathrm{T}_n\leq\mathrm{T}<\mathrm{T}_{n+1}}\sup_{\theta\in\Theta^C}\left|\int\limits_0^{\mathrm{T}_n}\left(\xi_{\mathrm{T}}(h) - \xi_{\mathrm{T}_n}(h)\right)B(h,\theta)dt\right| +$$

$$+ \sup_{\mathrm{T}_n\leq\mathrm{T}<\mathrm{T}_{n+1}}\sup_{\theta\in\Theta^C}\left|\int\limits_{\mathrm{T}_n}^{\mathrm{T}}\xi_{\mathrm{T}}(h)B(h,\theta)dt\right| = d_n^{(1)} + d_n^{(2)}; \qquad (1.15)$$

$$d_n^{(1)} = \sup_{\mathrm{T}_n\leq\mathrm{T}<\mathrm{T}_{n+1}}\sup_{\theta\in\Theta^C}\left|\int\limits_0^{\mathrm{T}_n}\left[\left(\mathrm{T}^{-1} - \mathrm{T}_n^{-1}\right)\int\limits_0^{\mathrm{T}_n}X(t+h)X(t)dt +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \mathrm{T}^{-1}\int\limits_{\mathrm{T}_n}^{\mathrm{T}}X(t+h)X(t)dt\right]B(h,\theta)dh\right| \leq$$

$$\leq \frac{\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n}{\mathrm{T}_n}\left(\zeta_{\mathrm{T}_n} + \int\limits_0^{\mathrm{T}_n}\left|B(h,\theta)\right|B(h)dh\right) +$$

$$+ \mathrm{T}_n^{-1}\int\limits_0^{\mathrm{T}_n}\left(\int\limits_{\mathrm{T}_n}^{\mathrm{T}_{n+1}}\left|X(t+h)X(t)\right|dt\right)B(h)dh = d_n^{(3)} + d_n^{(4)}. \qquad (1.16)$$

Враховуючи, що $\frac{\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n}{\mathrm{T}_n} = O\left(n^{-1}\right)$, отримуємо $d_n^{(3)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ м.н. З іншого боку,

$$\mathbb{E}\left(d_n^{(4)}\right)^2 \leq \int\limits_0^{\mathrm{T}_n} B(h)\mathrm{T}_n^{-2}\mathbb{E}\left(\int\limits_{\mathrm{T}_n}^{\mathrm{T}_{n+1}} \big|X(t+h)X(t)\big|dt\right)^2 dh \int\limits_0^{\mathrm{T}_n} B(h)dh; \quad (1.17)$$

$$\mathrm{T}_n^{-2}\mathbb{E}\left(\int\limits_{\mathrm{T}_n}^{\mathrm{T}_{n+1}} \big|X(t+h)X(t)\big|dt\right)^2 \leq$$

$$\leq 2^{-1}\mathrm{T}_n^{-2}\left[\mathbb{E}\left(\int_{\mathrm{T}_n}^{\mathrm{T}_{n+1}} X^2(t+h)dt\right)^2 + \mathbb{E}\left(\int_{\mathrm{T}_n}^{\mathrm{T}_{n+1}} X^2(t)dt\right)^2\right] =$$

$$= 3B^2(0,\theta^0)\left(\frac{\mathrm{T}_{n+1}-\mathrm{T}_n}{\mathrm{T}_n}\right)^2 + \frac{2}{\mathrm{T}_n^2}\int\limits_{\mathrm{T}_n}^{\mathrm{T}_{n+1}}\int\limits_{\mathrm{T}_n}^{\mathrm{T}_{n+1}} r^2(t-s)dtds \leq$$

$$\leq 3r^2(0,\theta^0)\left(\frac{\mathrm{T}_{n+1}-\mathrm{T}_n}{\mathrm{T}_n}\right)^2 = O\left(n^{-2}\right) \quad (1.18)$$

за формулою Ісерліса (1.11). Таким чином, збігається ряд $\sum\limits_n \mathbb{E}(d_n^{(4)})^2$ і, отже, $d_n^{(4)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ м.н.

Отримуємо далі

$$d_n^{(2)} \leq B(0,\theta^0)\int\limits_{\mathrm{T}_n}^{\mathrm{T}_{n+1}} B(h)dh + \int\limits_{\mathrm{T}_n}^{\mathrm{T}_{n+1}} B(h)\mathrm{T}_n^{-1}\int\limits_0^{\mathrm{T}_{n+1}} \big|X(t+h)X(t)\big|dt\,dh = d_n^{(5)} + d_n^{(6)} \quad (1.19)$$

Легко побачити, що $d_n^{(5)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Крім цього, як і вище,

$$\mathbb{E}(d_n^{(6)})^2 \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{\mathrm{T}_n}^{\mathrm{T}_{n+1}} B(h)dh\right)\left(\int\limits_{\mathrm{T}_n}^{\mathrm{T}_{n+1}} B(h)\mathrm{T}_n^{-2}\mathbb{E}\left(\int\limits_0^{\mathrm{T}_{n+1}} \big|X(t+h)X(t)\big|dt\right)^2 dh\right) \leq$$

$$\leq 3B^2(0,\theta^0)\left(\frac{\mathrm{T}_{n+1}}{\mathrm{T}_n}\right)^2\left(\int_{\mathrm{T}_n}^{\mathrm{T}_{n+1}} B(h)dh\right)^2 \leq C_2\int\limits_{\mathrm{T}_n}^{\mathrm{T}_{n+1}} B(h)dh,$$

тобто $\sum\limits_n \mathbb{E}(d_n^{(6)})^2 < \infty$ та $d_n^{(6)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ м.н. Таким чином, $\zeta_{\mathrm{T}} \xrightarrow[\mathrm{T}\to\infty]{} 0$ м.н.

□

Лема 2. *За умов* $\mathbf{A_2}$ *і* $\mathbf{B_1}$ *виконується співвідношення* (1.7).

Доведення. Зауважимо, що доведення леми 2 відрізняється від доведення леми 1 тільки в наступному.

1). Замість точної формули для $\mathbb{E}\xi^2_{\mathrm{T}}(h)$ ми можемо отримати тільки оцінку, яка спирається на одне твердження з книги Rozanov [10]. Для повного викладення матеріалу ми наводимо це твердження нижче.

Лема ([10])**.** *Нехай виконано співвідношення (1.4). Тоді для будь-яких випадкових величин* φ *та* ψ*, що мають обмежені моменти порядку* $2+\delta$, $\delta > 4/\varepsilon$*, вимірних відносно* σ*-алгебр* $\sigma(-\infty, t)$ *та* $\sigma(t+\tau, +\infty)$*, відповідно, є вірною наступна нерівність:*

$$\left|\mathbb{E}\varphi\psi - \mathbb{E}\varphi\mathbb{E}\psi\right| \leq C_3\tau^{-1-\varepsilon'},\ \varepsilon' > 0. \tag{1.20}$$

Завдяки строгій стаціонарності $X(t)$

$$\mathbb{E}\xi^2_{\mathrm{T}}(h) = \mathrm{T}^{-2}\int\limits_0^{\mathrm{T}}\int\limits_0^{\mathrm{T}}\left(\mathbb{E}X(t+h)X(t)X(s+h)X(s) - B^2(h,\theta^0)\right)dtds =$$

$$= \mathrm{T}^{-2}\int\limits_0^{\mathrm{T}}\int\limits_0^{\mathrm{T}}\left(\mathbb{E}X(t-s+h)X(t-s)X(h)X(0) - B^2(h,\theta^0)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\chi\{t>s\} + \chi\{t<s\}\right)dtds, \tag{1.21}$$

де χ — це індикатор відповідних множин.

Розглянемо спочатку випадок $t > s$. Тоді аргументи процесу X можуть бути розташованими наступним чином (будемо писати строгі нерівності):

(i) $\{0 < t-s < h < t-s+h\}$.

За умовою $\mathbf{A_2}$ та лемою [10] можна взяти $\varphi = X(0)X(t-s)$,$\psi = X(h)X(t-s+h)$, та отримати з (1.20) та (1.21):

$$\mathrm{T}^{-2}\iint\limits_{\{0<t-s<h\}}(\mathbb{E}X(t-s+h)X(t-s)X(h)X(0)-B^2(t-s,\theta^0)+$$

$$+B^2(t-s,\theta^0)-B^2(h,\theta^0))dtds\leq$$

$$\leq \mathrm{T}^{-2}\iint\limits_{\{0<t-s<h\}}\left(\frac{C_4}{1+|t-s-h|^{1+\varepsilon'}}+B^2(t-s,\theta^0)-B^2(h,\theta^0)\right)dsdt. \quad (1.22)$$

(ii) $\{0<h<t-s<t-s+h\}$.

Зараз візьмемо $\varphi = X(0)X(h)$, $\psi = X(t-s)X(t-s+h)$,

$$\mathrm{T}^{-2}\iint\limits_{\{t-s>h\}}\left(\mathbb{E}X(t-s+h)X(t-s)X(h)X(0)-B^2(h,\theta^0)\right)dtds\leq$$

$$\leq \mathrm{T}^{-2}\iint\limits_{t-s>h}\frac{C_4}{1+|t-s-h|^{1+\varepsilon'}}dtds. \quad (1.23)$$

Далі проаналізуємо випадок $t<s$. Тут також виникають дві можливості взаємного розташування аргументів процесу X.

(iii) $\{t-s<t-s+h<0<h\}$.

Тоді можна обрати $\varphi = X(t-s)X(t-s+h), \psi = X(0)X(h)$,

$$\mathrm{T}^{-2}\iint\limits_{\{t<s\}}\left(\mathbb{E}X(t-s+h)X(t-s)X(h)X(0)-B^2(h,\theta^0)\right)dtds\leq$$

$$\leq \mathrm{T}^{-2}\int\limits_{\{t<s\}}\frac{C_5}{1+|s-t-h|^{1+\varepsilon'}}dtds = \mathrm{T}^{-2}\int\limits_{t<s}\frac{C_5}{1+||t-s|-h|^{1+\varepsilon'}}dtds. \quad (1.24)$$

(iv) $\{t-s<0<t-s+h<h\}$.

Оберемо $\varphi = X(t-s)X(0), \psi = X(x-s+h)X(h)$,

$$\mathrm{T}^{-2}\iint\limits_{\{0>t-s>-h\}}\left(\mathbb{E}X(t-s+h)X(t-s)X(h)X(0)-B^2(h,\theta^0)\right)dtds\leq$$

$$\leq \mathrm{T}^{-2}\iint\limits_{\{0>t-s>-h\}}\left(\frac{C_5}{1-||t-s|-h|^{1+\varepsilon'}}+B^2(t-s,\theta^0)-B^2(h,\theta^0)\right)dtds.$$

$$(1.25)$$

Враховуючи нерівності (1.22)–(1.25) та лему [10], отримуємо

$$\mathbb{E}\xi_{\mathrm{T}}^2(h) = \mathrm{T}^{-2}\int\limits_0^{\mathrm{T}}\int\limits_0^{\mathrm{T}} \big(\mathbb{E}X(t-s-h)X(t-s)X(0)X(h) - B^2(h,\theta^0 dtds\big) \leq$$

$$\leq \mathrm{T}^{-2}\int\limits_0^{\mathrm{T}}\int\limits_0^{\mathrm{T}} \frac{C_6}{1+||t-s|-h|^{1+\varepsilon'}}dtds + \mathrm{T}^{-2}\int\limits_0^{\mathrm{T}}\int\limits_0^{\mathrm{T}} \frac{C_7}{1+|t-s|^{1+\varepsilon'}}dtds+$$

$$+hB^2(h,\theta^0)O(\mathrm{T}^{-1}). \tag{1.26}$$

3-ий додаток правої частини (1.26) виникає за рахунок того, що у випадках (i) та (iv) у відповідних інтегралах залишається функція $B^2(h,\theta^0)$, яка в цих інтегралах є константою та інтегрується за (s,t) множиною, що має міру Лебега $O(h\mathrm{T})$. 2-ий доданок, очевидно, є величиною $O(\mathrm{T}^{-1})$. Оцінимо 1-й інтеграл.

$$\mathrm{T}^{-2}\int\limits_0^{\mathrm{T}}\int\limits_0^{\mathrm{T}} \frac{C_6}{1+||t-s|-h|^{1+\varepsilon'}}dtds = 2\mathrm{T}^{-2}\int\limits_0^{\mathrm{T}}\left(\int\limits_0^{t}\frac{C_6}{1+|s-h|^{1+\varepsilon'}}ds\right)dt \leq$$

$$\leq 2\mathrm{T}^{-2}\int\limits_0^{\mathrm{T}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{C_6}{1+|s-h|^{1+\varepsilon'}}ds\right)dt = 2\mathrm{T}^{-2}\int\limits_0^{\mathrm{T}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{C_6}{1+|s|^{1+\varepsilon'}}ds\right)dt =$$

$$= 4\mathrm{T}^{-2}\int\limits_0^{\mathrm{T}}\left(\int\limits_0^{\infty}\frac{C_6}{1+s^{1+\varepsilon'}}ds\right)dt = O(\mathrm{T}^{-1}). \tag{1.27}$$

2). Друга відмінність доведення леми 2 від доведення леми 1 полягає в тому, що в оцінці $\mathbb{E}(d_n^{(4)})^2$ та $\mathbb{E}(d_n^{(6)})^2$ замість константи $3B(0,\theta^0)$ отримаємо іншу константу C_8 (точно її вказати неможливо).

$\square$

Лема 3. *За умови* $\mathbf{B_1}$ *невласний інтеграл*

$$b(\theta_1,\theta_2) = \int\limits_0^{\infty}\left(B(h,\theta_1) - B(h,\theta_2)\right)^2 dh \tag{1.28}$$

збігається рівномірно за $(\theta_1,\theta_2)\in\Theta^C\times\Theta^C$.

Доведення. Очевидно,

$$\sup_{(\theta_1,\theta_2)\in\Theta^C\times\Theta^C}\left|b(\theta_1,\theta_2)-\int\limits_0^{\mathrm{T}}\left(B(h,\theta_1)-B(h,\theta_2)\right)^2dh\right|=$$

$$=\sup_{(\theta_1,\theta_2)\in\Theta^C\times\Theta^C}\int\limits_{\mathrm{T}}^{\infty}(B(h,\theta_1)-B(h,\theta_2))^2dh\leq 4B(0)\int\limits_{\mathrm{T}}^{\infty}B(h)dh\xrightarrow[\mathrm{T}\to\infty]{}0 \quad (1.29)$$

□

Теорема 1. *Якщо виконуються припущення* $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$ *та або* $\mathbf{A_1}$, *або* $\mathbf{A_2}$, *то*

$$\theta_{\mathrm{T}}\xrightarrow[\mathrm{T}\to\infty]{}\theta^0 \text{ м.н.} \quad (1.30)$$

Доведення. За означенням ОНК [2]

$$Q_{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{T}})-Q_{\mathrm{T}}(\theta^0)\leq 0. \text{ м.н.} \quad (1.31)$$

З іншого боку,

$$Q_{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{T}})-Q_{\mathrm{T}}(\theta^0)=2(\eta_{\mathrm{T}}(\theta^0)-\eta_{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{T}}))+b_{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{T}},\theta^0), \quad (1.32)$$

де

$$b_{\mathrm{T}}(\theta_1,\theta_2)=\int\limits_0^{\mathrm{T}}(B(h,\theta_1)-B(h,\theta_2))^2dh. \quad (1.33)$$

За лемами 1 та 2

$$2(\eta_{\mathrm{T}}(\theta)-\eta_{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{T}}))\xrightarrow[\mathrm{T}\to\infty]{}0 \text{ м.н.} \quad (1.34)$$

З (1.31), (1.32) та (1.34) випливає, що

$$b_{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{T}},\theta^0)\xrightarrow[\mathrm{T}\to\infty]{}0 \text{ м.н.} \quad (1.35)$$

Позначимо $\Omega_0\subset\Omega$ випадкову подію, $P\{\Omega_0\}=1$, для якої справедливо (1.35). Зафіксуємо елементарну подію $\omega\in\Omega_0$. Нехай $\mathrm{T}_n\uparrow\infty$ — довільна послідовність, а T_{n_k} її довільна підпослідовність. Тоді існує підпослідовність $\mathrm{T}_{n_{k_m}}$ підпослідовності T_{n_k} така, що

$$\theta_{\mathrm{T}_{n_{k_m}}}(\omega)\xrightarrow[m\to\infty]{}\theta'\in\Theta^C. \quad (1.36)$$

За лемою 3

$$b_{\mathrm{T}_{n_{km}}}(\theta_{\mathrm{T}_{n_{km}}}(\omega), \theta^0) \xrightarrow[m\to\infty]{} b(\theta', \theta^0) = 0. \tag{1.37}$$

З умови $\mathbf{B_2}$ та неперервності $B(h, \theta)$ випливає, що $\theta' = \theta^0$. Таким чином, $\theta_{\mathrm{T}_n}(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta^0$ та $\theta_{\mathrm{T}}(\omega) \xrightarrow[\mathrm{T}\to\infty]{} \theta^0$.

□

2 Асимптотична нормальність оцінки найменших квадратів

У цьому розділі ми отримаємо властивість асимптотичної нормальності консистентності ОНК θ_{T} параметра θ^0 коваріаційної функції $B(h,\theta^0)$ стаціонарного процесу $X(t)$.

Нехай $\varkappa_4(t_1,t_2,t_3,t_4)$ – кумулянт 4-го порядку процесу $X(t)$. Позначимо

$$\rho(h_1,h_2;\theta)=\rho(h_2,h_1;\theta)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(B(t,\theta)B(t+h_1-h_2,\theta)+B(t+h_1,\theta)B(t-h_2,\theta)+$$

$$+\varkappa(t,t+h_1,h_2,0))dt,\ \ h_1,h_2\geq 0. \tag{2.1}$$

$\mathbf{C_1}$. Для довільних $\theta\in\Theta, H<\infty$ та деякого $\delta\in(0,1]:$

$$\sup_{h\in\mathbb{R}_+}\left|\rho(h,h';\theta)-\rho(h,h'';\theta)\right|\leq C_H(\theta)|h'-h''|^{\delta},$$

$$C_H(\theta)<\infty,\ h',h''\in[0,H]. \tag{2.2}$$

Зауважимо, що інтегровність $\varkappa_4(t,t+h_1,h_2,0)$ за t при фіксованих значеннях h_1 та h_2 є наслідком умови $\mathbf{A_2}$. Маємо

$$\varkappa_4(t,t+h_1,h_2,0)=\mathbb{E}X(t)X(t+h_1)X(0)X(h_2)-B(h_1,\theta^0)B(h_2,\theta^0)-$$

$$-B(t,\theta^0)B(t+h_1-h_2,\theta^0)-B(t+h_1,\theta^0)B(t-h_2,\theta^0). \tag{2.3}$$

Інтегровність за t двох останніх доданків очевидна. Нехай $t>h_2$. Тоді за лемою [10] (доведення леми 2) величина

$$\Delta=\left|\mathbb{E}X(t)X(t+h_1)X(0)X(h_2)-B(h_1,\theta^0)B(h_2,\theta^0)\right|\leq\frac{C_9}{1+|t-h_2|^{1+\varepsilon'}}, \tag{2.4}$$

тому що $0<h_2<t<t+h_1$ і можна обрати $\varphi=X(t)X(h_2)$, $\psi=X(t)X(t+h_1)$. Якщо ж $t<-h_1$, то $t<t+h_1<0<h_2$, і можна взяти $\varphi=X(t)X(t+h_1)$,

$\psi = X(0)X(h_2)$, тобто

$$\Delta \le \frac{C_{10}}{1 + |t + h_1|^{1+\varepsilon'}}. \tag{2.5}$$

Якщо $X(t)$ гауссовський процес, то $\varkappa_4 = 0$, і достатніми умовами для виконання $\mathbf{C_1}$ є умова $\mathbf{B_1}$ та

$\mathbf{C_1'}$. Для будь-якого $\theta \in \Theta$ та деякого $\delta \in (0, 1]$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^{\delta} f^2(\lambda, \theta) d\lambda < \infty. \tag{2.6}$$

Дійсно, за рівністю Парсеваля,

$$\rho(h_1, h_2; \theta) = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda, \theta) \left(e^{i\lambda(h_1 - h_2)} + e^{i\lambda(h_1 + h_2)}\right) d\lambda =$$

$$= 4\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda, \theta) \cos(\lambda h_1) \cos(\lambda h_2) d\lambda; \tag{2.7}$$

$$\sup_{h \in \mathbb{R}} |\rho(h, h'; \theta) - \rho(h, h''; \theta)| \le 4\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda, \theta) |\cos(\lambda h') - \cos(\lambda h'')| d\lambda \le$$

$$\le C(\theta)|h' - h''|^{\delta},\ C(\theta) = (4\pi)2^{1-\delta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda, \delta)|\lambda|^{\delta} d\lambda. \tag{2.8}$$

$\mathbf{C_2}$. Для довільної сукупності $\{h_1, \ldots, h_k\}, k \ge 2$, нерівних між собою чисел та будь-якого $\theta \in \Theta$ матриця $\rho = (\rho(h_i, h_j; \theta))_{i,j=1}^{k}$ додатно визначена.

Для гауссівського $X(t)$:

$$\rho = \left(4\pi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda, \theta) \cos(\lambda h_i) \cos(\lambda h_j) d\lambda\right)_{i,j=1}^{k}. \tag{2.9}$$

Якщо $x = (x_1, \ldots, x_k)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^k$ – довільний вектор, то при $x \ne 0$

$$< \rho x, x >= 4\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda, \theta) \big| \sum_{i=1}^{k} x_i \cos(\lambda h_i) \big|^2 d\lambda > 0. \tag{2.10}$$

Введемо додаткові умови.

$\mathbf{D_1}$. $B_i(h,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta_i}B(h,\theta)$ неперервні на $\mathbb{R}\times\Theta^C$; $\sup\limits_{\theta\in\Theta^C}\left|B_i(h,\theta)\right| \le B(h)$, $B_i(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$ та обмежені на $\mathbb{R}, i = \overline{1,q}$.

$\mathbf{D_2}$. $B_{ij}(h,\theta) = \frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}B(h,\theta)$ неперервні на $\mathbb{R}\times\Theta^C$; $\sup\limits_{\theta\in\Theta^C}\left|B_{ij}(h,\theta)\right| \le B_{ij}(h)$, $B_{ij}(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$ та обмежені на $\mathbb{R}, i,j, = \overline{1,q}$.

$\mathbf{D_3}$. Для довільного $\theta\in\Theta$ матриці

$$U(\theta) = \left(\int_0^\infty B_i(h,\theta)B_j(h,\theta)dh\right)_{i,j=1}^q, \tag{2.11}$$

$$\sigma(\theta) = \left(\int_0^\infty\int_0^\infty \rho(h_1,h_2;\theta)B_i(h_1,\theta)B_j(h_2,\theta)dh_1dh_2\right)_{i,j=1}^q \tag{2.12}$$

додатно визначені.

Будемо казати, що функція $a(\cdot)\in Lip\{\delta;[0,H]\}$, якщо $|a(h_1)-a(h_2)| \le \widetilde{a}(H)|h_1-h_2|^\delta$, $\widetilde{a}(H)<\infty$, для всіх $h_1,h_2\in[0,H]$ та деякого $\delta\in(0,1]$. Може так статися, що $\widetilde{a}(H) = \widetilde{a}(\delta,H)$.

M. Для будь-яких $\theta\in\Theta$ і $H<\infty$; $B_j(h,\theta)\in Lip\{\delta_j;[0,H]\}$.

Достатніми умовами виконання **M** є умова $\mathbf{D_1}$ та

M′. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\lambda|^{\delta_j}f_j(\lambda,\theta)d\lambda<\infty$ для будь-якого $\theta\in\Theta$ та деяких $\delta_j\in(0,1]$, $f_j(\lambda,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta_j}f(\lambda,\theta), j=\overline{1,q}$.

Це майже очевидно:

$$|B_i(h_1,\theta)-B_j(h_2,\theta)| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|1-e^{i\lambda(h_1-h_2)}\right|f_j(\lambda,\theta)d\lambda \le \widetilde{a}_H(\delta_j,H)|h_1-h_2|^{\delta_j},$$

$$\widetilde{a}_H(\delta_j,H) = 2^{1-\delta_j}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\lambda|^{\delta_j}f_j(\lambda,\theta)d\lambda.$$

Введемо позначення $\gamma_{\mathrm{T}}(h) = \mathrm{T}^{1/2}\xi_{\mathrm{T}}(h)$, де $\xi_{\mathrm{T}}(h)$ задано формулами (1.3) та (1.6).

Лема 4. *Якщо виконано одне з припущень* $\mathbf{A_1}$ *або* $\mathbf{A_2}$, *то*

$$\mathbb{E}\gamma_{\mathrm{T}}(h_1)\gamma_{\mathrm{T}}(h_2) \xrightarrow[\mathrm{T}\to\infty]{} \rho(h_1, h_2; \theta^0). \tag{2.13}$$

Доведення. Отримуємо

$$\mathbb{E}\gamma_{\mathrm{T}}(h_1)\gamma_{\mathrm{T}}(h_2) =$$

$$= \mathrm{T}^{-1}\int_0^{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}\left(\mathbb{E}X(t+h_1)X(t)X(s+h_2)X(s) - B(h_1,\theta^0)B(h_2,\theta^0)\right)dtds =$$

$$= \mathrm{T}^{-1}\int\limits_0^{\mathrm{T}}\int\limits_0^{t}(\mathbb{E}X(s)X(s+h_1)X(0)X(h_2) - B(h_1,\theta^0)B(h_2,\theta^0))dsdt+$$

$$+\mathrm{T}^{-1}\int\limits_0^{\mathrm{T}}\int\limits_0^{s}(\mathbb{E}X(t)X(t+h_2)X(0)X(h_1) - B(h_2,\theta^0)B(h_1,\theta^0))dsdt \xrightarrow[\mathrm{T}\to\infty]{}$$

$$\int\limits_0^{\infty}\left(\mathbb{E}X(t)X(t+h_1)X(0)X(h_2) - B(h_1,\theta^0)B(h_2,\theta^0)\right)dt+$$

$$+\int\limits_0^{\infty}(\mathbb{E}X(t)X(t+h_2)X(0)X(h_1) - B(h_2,\theta^0)B(h_1,\theta^0))dt, \tag{2.14}$$

за твердженням у підручнику Фіхтенгольця, Т.2, стор 596-597, яке узагальнює на невласні інтеграли відповідну теорему Коші про збіжні послідовності. Запишемо у 2-му інтегралі (2.14)

$$\mathbb{E}X(t)X(t+h_2)X(0)X(h_1) = \mathbb{E}X(0)X(h_2)X(-t)X(-t+h_1)$$

і зробимо в ньому заміну змінних $-t \to t$. Тоді

$$\mathbb{E}\gamma_{\mathrm{T}}(h_1)\gamma_{\mathrm{T}}(h_2) \xrightarrow[\mathrm{T}\to\infty]{} \int\limits_{-\infty}^{\infty}(B(t,\theta^0)B(t+h_1-h_2,\theta^0) + B(t+h_1,\theta^0)B(t-h_2,\theta^0)$$

$$+\varkappa_4(t,t+h_1,h_2,0))dt = \rho(h_1,h_2;\theta^0) \tag{2.15}$$

за формулою (2.1).

$\square$

Лема 5. *Нехай виконано припущення* $\mathbf{A_1}$*, або* $\mathbf{A_2}$*, а також* $\mathbf{C_2}$*. Тоді скінченновимірні розподіли процесу* $\gamma_{\mathrm{T}}(h)$ *асимптотично при* $\mathrm{T} \to \infty$ *нормальні.*

Доведення. Зауважимо, що випадковий процес $Y(t,h) = X(t+h)X(t) - B(h,\theta^0)$, $t \in \mathbb{R}$, при кожному h є строго стаціонарним за t стохастичним процесом. Крім цього, процеси $Y(t,h_1)$ і $Y(t,h_2)$ для довільних $h_1, h_2 \in [0,H]$ є стаціонарно пов'язаними, і тому для довільного $k \in \mathbb{N}$ та довільного набору нерівних між собою величин $\{h_1,\dots,h_k\}$, вектор $Y(t) = (Y(t,h_1),\dots,Y(t,h_k))$ є k-вимірним стаціонарним процесом.

Якщо $C(t) = (C_{ij}(t))_{i,j=1}^k$ — його коваріаційна матриця, та спектральна щільність

$$S(\lambda) = (S_{i,j}(\lambda))_{i,j=1}^k = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} C(t)dt \tag{2.16}$$

обмежена, неперервна та невироджена в нулі, тобто матриця $S(0)$ є невиродженою. Дійсно, $C_{ij}(t) = B(t,\theta^0)B(t+h_i-h_j,\theta^0) + B(t+h_i,\theta^0)B(t-h_j,\theta^0) + \varkappa_4(t,t+h_i,h_j,0)$, $i,j = \overline{1,k}$, є інтегровними на вісі функціями завдяки $\mathbf{A_1}$, якщо $\varkappa_4 \equiv 0$, і завдяки $\mathbf{A_2}$, якщо $\varkappa_4 \not\equiv 0$ (лема 4). Крім цього,

$$S(0) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} C(t)dt = (2\pi)^{-1} \left(\rho(h_i,h_j;\theta^0)\right)_{i,j=1}^k \tag{2.17}$$

з невиродженою матрицею за умовою C_2.

Слід зауважити, що умови леми 5 $\mathbf{A_1}$ та $\mathbf{A_2}$, щодо процесу $X(t)$ та додатна визначеність матриці $S(0)$ забезпечують виконання умов багатовимірної центральної граничної теореми з монографії [10] для векторного стаціонарного процесу Y, тобто збіжність випадкового вектора $= (\gamma_{\mathrm{T}}(h_1),\dots,\gamma_{\mathrm{T}}(h_k))$ при $\mathrm{T} \to \infty$ за розподілом до гауссівського випадкового вектора $\mathcal{N}(0, 2\pi S(0))$.

$\square$

Позначимо

$$\Phi(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int\limits_0^x \exp\Big\{-\frac{1}{2}\frac{(y-\mu)^2}{\sigma^2}\Big\}dy \tag{2.18}$$

функцію розподілу гауссівської випадкової величини $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

Лема 6. *Нехай виконано умови* $\mathbf{A_1},\mathbf{A_2},\mathbf{C_1}$ *та* $\mathbf{C_2}$. *Тоді для довільної функції* $a(\cdot)\in Lip\{\alpha;[0,H]\}, a(\cdot)\not\equiv 0$,

$$P\Big\{\int\limits_0^H \gamma_{\mathrm{T}}(h)a(h)dh<x\Big\}\xrightarrow[\mathrm{T}\to\infty]{}\Phi(x;0,\sigma_H^2),$$

$$\sigma_H^2=\int\limits_0^H\int\limits_0^H \rho(h_1,h_2;\theta^0)a(h_1)a(h_2)dh_1dh_2, \tag{2.19}$$

якщо $\sigma_H^2>0$.

Доведення. Позначимо

$$I_{\mathrm{T}}=\int\limits_0^H \gamma_{\mathrm{T}}(h)a(h)dh, \quad I_{\mathrm{T}}^n=\frac{H}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_{\mathrm{T}}\left(\frac{kH}{n}\right)a\left(\frac{kH}{n}\right); \tag{2.20}$$

$$P_{\mathrm{T}}^n=P\big\{\big|I_{\mathrm{T}}-I_{\mathrm{T}}^n\big|\geq\varepsilon_n\big\},\varepsilon_n\downarrow 0 \ \text{ при } n\to\infty.$$

Тоді для довільного $x\in\mathbb{R}$

$$P\{I_{\mathrm{T}}<x\}=P\{I_{\mathrm{T}}<x,|I_{\mathrm{T}}-I_{\mathrm{T}}^n|\geq\varepsilon_n\}+P\{I_{\mathrm{T}}<x,|I_{\mathrm{T}}-I_{\mathrm{T}}^n|<\varepsilon_n\}, \tag{2.21}$$

$$\{I_{\mathrm{T}}<x,|I_{\mathrm{T}}-I_{\mathrm{T}}^n|<\varepsilon_n\}=\{I_{\mathrm{T}}<x,-\varepsilon_n<I_{\mathrm{T}}^n-I_{\mathrm{T}}<\varepsilon_n\}\subset$$

$$\subset\{I_{\mathrm{T}}<x,I_{\mathrm{T}}^n-I_{\mathrm{T}}<\varepsilon_n\}\subset\{I_{\mathrm{T}}<x,I_{\mathrm{T}}^n<I_{\mathrm{T}}+\varepsilon_n\}\subset$$

$$\subset\{I_{\mathrm{T}}<x,I_{\mathrm{T}}^n<x+\varepsilon_n\}\subset\{I_{\mathrm{T}}^n<x+\varepsilon_n\}. \tag{2.22}$$

З (2.21) та (2.22) отримуємо нерівність

$$P\{I_{\mathrm{T}}<x\}\leq P\{I_{\mathrm{T}}^n<x+\varepsilon_n\}+P_{\mathrm{T}}^n. \tag{2.23}$$

З іншого боку,

$$\{I^n_{\mathrm{T}} < x - \varepsilon_n\} = \{I^n_{\mathrm{T}} + I_{\mathrm{T}} < I_{\mathrm{T}} + x - \varepsilon_n\} =$$

$$= \{I_{\mathrm{T}} < x + I_{\mathrm{T}} - I^n_{\mathrm{T}} - \varepsilon_n, I_{\mathrm{T}} - I^n_{\mathrm{T}} - \varepsilon_n < 0\} \cup$$

$$\cup \{I_{\mathrm{T}} < x + I_{\mathrm{T}} - I^n_{\mathrm{T}} - \varepsilon_n, I_{\mathrm{T}} - I^n_{\mathrm{T}} - \varepsilon_n \geq 0\} \subset$$

$$\subset \{I_{\mathrm{T}} < x\} \cup \{|I_{\mathrm{T}} - I^n_{\mathrm{T}}| \geq \varepsilon_n\},$$

тобто

$$P\{I_{\mathrm{T}} < x\} \geq P\{I^n_{\mathrm{T}} < x - \varepsilon_n\} - P^n_{\mathrm{T}}. \tag{2.24}$$

За лемою 5

$$P\{I^n_{\mathrm{T}} < x \pm \varepsilon_n\} \xrightarrow[\mathrm{T}\to\infty]{} \Phi(x \pm \varepsilon_n, 0, \sigma_n^2), \tag{2.25}$$

де, починаючи з деякого n,

$$\sigma_n^2 = \frac{H^2}{n^2} \sum_{k,j=1}^{n-1} \rho\left(\frac{kH}{n}, \frac{jH}{n}; \theta^0\right) a\left(\frac{kH}{n}\right) a\left(\frac{jH}{n}\right) > 0. \tag{2.26}$$

Зауважимо далі, що

$$\lim_{\mathrm{T}\to\infty} P^n_{\mathrm{T}} \leq \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{\mathbb{E}|I_{\mathrm{T}} - I^n_{\mathrm{T}}|^2}{\varepsilon_n^2} =$$

$$= \varepsilon_n^{-2} \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{\frac{kH}{n}}^{\frac{(k+1)H}{n}} \left(\gamma_{\mathrm{T}}(h)a(h) - \gamma_{\mathrm{T}}\left(\frac{kH}{n}\right) a\left(\frac{kH}{n}\right)\right) dh\right]^2 =$$

$$= \varepsilon_n^{-2} \sum_{k,j=0}^{n-1} \Delta_{kj}^{(n)}; \tag{2.27}$$

$$\Delta_{kj}^{(n)} = \int\limits_{\frac{kH}{n}}^{\frac{(k+1)H}{n}} \int\limits_{\frac{jH}{n}}^{\frac{(j+1)H}{n}} \left[\rho(h_1, h_2; \theta^0) a(h_1) a(h_2) - \rho\left(h_1, \frac{jH}{n}; \theta^0\right) a(h_1) a\left(\frac{jH}{n}\right) - \right.$$

$$\left. -\rho\left(\frac{kH}{n}, h_2; \theta^0\right) a\left(\frac{kH}{n}\right) a(h_2) + \rho\left(\frac{kH}{n}, \frac{jH}{n}; \theta^0\right) a\left(\frac{kH}{n}\right) a\left(\frac{jH}{n}\right)\right] dh_1 dh_2. \tag{2.28}$$

за лемою 4. За теоремою про середнє значення

$$\Delta_{kj}^{(n)} = \frac{H^2}{n^2}\left[\rho(h_1^*, h_2^*; \theta^0)a(h_1^*)a(h_2^*) - \rho\left(h_1^*, \frac{jH}{n}; \theta^0\right) a(h_1^*)a\left(\frac{jH}{n}\right) - \right.$$

$$\left. -\rho\left(\frac{kH}{n}, h_2^*; \theta^0\right) a\left(\frac{kH}{n}\right) a(h_2^*) + \rho\left(\frac{kH}{n}, \frac{jH}{n}; \theta^0\right) a\left(\frac{kH}{n}\right) a\left(\frac{jH}{n}\right)\right],$$

$$h_1^* \in \left[\frac{kH}{n}, \frac{(k+1)H}{n}\right], h_2^* \in \left[\frac{jH}{n}, \frac{(j+1)H}{n}\right]. \tag{2.29}$$

З використанням умови $\mathbf{C_1}$ отримуємо:

$$\left|{}_1\Delta_{kj}^{(n)}\right| = \left|\left[\rho(h_1^*, h_2^*; \theta^0) - \rho\left(h_1^*, \frac{jH}{n}; \theta^0\right)\right] a(h_1^*)a(h_2^*)\right| \leq$$

$$\leq \sup_{h\in[0,H]} |a(h)|^2 C_H(\theta^0) \left(\frac{H}{n}\right)^\delta; \tag{2.30}$$

$$\left|{}_2\Delta_{kj}^{(n)}\right| = \left|\rho\left(h_1^*, \frac{jH}{n}; \theta^0\right) a(h_1^*)\left[a(h_2^*) - a\left(\frac{jH}{n}\right)\right]\right| \leq$$

$$\leq \sup_{h_1,h_2\in[0,H]} \left|\rho(h_1, h_2; \theta^0)\right| \sup_{h\in[0,H]} |a(h)| \widetilde{a}_H \left(\frac{H}{n}\right)^\alpha; \tag{2.31}$$

$$\left|{}_3\Delta_{kj}^{(n)}\right| = \left|\left[\rho\left(\frac{kH}{n}, h_2^*; \theta^0\right) - \rho\left(\frac{kH}{n}, \frac{jH}{n}; \theta^0\right)\right] a\left(\frac{kH}{n}\right) a(h_2^*)\right| \leq$$

$$\leq \sup_{h\in[0,H]} |a(h)|^2 C_H(\theta^0) \left(\frac{H}{n}\right)^\delta; \tag{2.32}$$

$$\left|{}_4\Delta_{kj}^{(n)}\right| = \left|\rho\left(\frac{kH}{n}, \frac{jH}{n}; \theta^0\right) a\left(\frac{kH}{n}\right)\left[a(h_2^*) - a\left(\frac{jH}{n}\right)\right]\right| \leq$$

$$\leq \sup_{h_1,h_2\in[0,H]} \left|\rho(h_1, h_2; \theta^0)\right| \sup_{h\in[0,H]} |a(h)| \widetilde{a}_H \left(\frac{H}{n}\right)^\alpha. \tag{2.33}$$

Таким чином,

$$\left|\Delta_{kj}^{(n)}\right| \leq \left(\frac{H}{n}\right)^2 \left(C_1\left(\frac{H}{n}\right)^\alpha + C_2\left(\frac{H}{n}\right)^\delta\right), \tag{2.34}$$

оскільки

$$\left|\Delta_{kj}^{(n)}\right| \leq \sum_{m=1}^{4} \left|{}_m\Delta_{kj}^{(n)}\right|. \tag{2.35}$$

Тож

$$\varepsilon_n^{-2}\mathbb{E}|I_{\mathrm{T}} - I_{\mathrm{T}}^n|^2 \leq \varepsilon_n^{-2}\left(C_{11}\left(\frac{H}{n}\right)^\alpha + C_{12}\left(\frac{H}{n}\right)^\delta\right) = \beta_n. \tag{2.36}$$

Якщо $\varepsilon_n^2 n^\gamma \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ для $\gamma = \min(\alpha, \beta)$, то $\beta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
З (2.23), (2.24), (2.25) та (2.36) випливає, що

$$\overline{\lim}_{\mathrm{T}\to\infty} P\{I_{\mathrm{T}} < x\} \le \Phi(x + \varepsilon_n; 0, \sigma_n^2) + \beta_n; \tag{2.37}$$

та

$$\underline{\lim}_{\mathrm{T}\to\infty} P\{I_{\mathrm{T}} < x\} \ge \Phi(x - \varepsilon_n; 0, \sigma_n^2) - \beta_n. \tag{2.38}$$

Переходячи до границі за n у правих частинах нерівностей (2.37) та (2.38), отримуємо співвідношення (2.19).

□

Перед формулюванням теореми 2 про асимптотичну нормальність ОНК θ_{T} зробимо декілька зауважень.

Припустимо, що виконано умову $\mathbf{D_1}$. Тоді в умовах теореми 1

$$\sup_{h\in[0,\mathrm{T}]} |B(h, \theta_{\mathrm{T}}) - B(h, \theta^0)| \le$$

$$\le \max_{i=\overline{1,q}} (\sup_{h\in[0,\mathrm{T}]} B_i(h)) \cdot \sum_{i=1}^{q} |\theta_{i_{\mathrm{T}}} - \theta_i^0| \xrightarrow[\mathrm{T}\to\infty]{} 0 \text{ м.н.} \tag{2.39}$$

Якщо виконано умови теореми 1, то $\theta_{\mathrm{T}} \xrightarrow[\mathrm{T}\to\infty]{} \theta^0$ м.н., та ОНК θ_{T} задовольняє систему нормальних рівнянь

$$\nabla Q_{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{T}}) = \left(\frac{\partial}{\partial\theta_j} Q_{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{T}})\right)_{j=1}^{q} = 0 \tag{2.40}$$

або

$$\int_0^{\mathrm{T}} \left[\mathrm{T}^{-1}\int_0^{\mathrm{T}} X(t+h)X(t)dt - B(h, \hat{\theta}_{\mathrm{T}})\right] B_j(h, \hat{\theta}_{\mathrm{T}})dh = 0, j = \overline{1,q}. \tag{2.41}$$

Запишемо для кожного рівняння системи (2.41) розклад Тейлора. Тоді отримаємо наступний матричний вираз

$$R_{\mathrm{T}} = U_{\mathrm{T}}(\theta_{\mathrm{T}} - \theta^0) = 0, \tag{2.42}$$

в якому використано наступні позначення

$$R_{\mathrm{T}} = (R_{j\mathrm{T}})_{j=1}^{q} = \left(\int_0^{\mathrm{T}} \xi_{\mathrm{T}}(h) B_j(h, \theta^0) dh\right)_{j=1}^{q}; \tag{2.43}$$

матриця $U_{\mathrm{T}} = U_{\mathrm{T}}^{(1)} - U_{\mathrm{T}}^{(2)}$, причому

$$U_{\mathrm{T}}^{(1)} = \left(\int_0^{\mathrm{T}} B_j(h, \theta_{\mathrm{T}}^*) B_k(h, \theta_{\mathrm{T}}^*) dh\right)_{j,k=1}^{q}, \tag{2.44}$$

$$U_{\mathrm{T}}^{(2)} = \left(\int_0^{\mathrm{T}} \left(\mathrm{T}^{-1} \int_0^{\mathrm{T}} X(t+h) X(t) dt - B(h, \theta_{\mathrm{T}}^*)\right) B_{jk}(h, \theta_{\mathrm{T}}^*) dh\right)_{j,k=1}^{q}. \tag{2.45}$$

Зауважимо, що для кожного j, взагалі кажучі, $\theta_{\mathrm{T}}^* = \theta_{\mathrm{T}}^*(j)$ та всі θ_{T}^* — вектори, координати яких знаходяться між відповідних координат векторів θ_{T} та θ^0, і, таким чином,

$$\|\theta_{\mathrm{T}}^* - \theta^0\| \le \|\theta_{\mathrm{T}} - \theta^0\| \xrightarrow[\mathrm{T}\to\infty]{} 0, j = \overline{1, q}, \quad \text{м.н.} \tag{2.46}$$

Доведемо, що $U_{\mathrm{T}}^{(2)} \xrightarrow[\mathrm{T}\to\infty]{} 0$ м.н. Для цього перепишемо (2.45) у вигляді $U_{\mathrm{T}}^{(2)} = U_{\mathrm{T}}^{(3)} + U_{\mathrm{T}}^{(4)}$,

$$U_{\mathrm{T}}^{(3)} = \left(\int_0^{\mathrm{T}} \xi_{\mathrm{T}}(h) B_{jk}(h, \theta_{\mathrm{T}}^*) dh\right)_{j,k=1}^{q}, \tag{2.47}$$

$$U_{\mathrm{T}}^{(4)} = \left(\int_0^{\mathrm{T}} (B(h, \theta^0) - B(h, \theta_{\mathrm{T}}^*)) B_{jk}(h, \theta_{\mathrm{T}}^*) dh\right)_{j,k=1}^{q}. \tag{2.48}$$

Збіжність $U_{\mathrm{T}}^{(3)}$ до нульової матриці випливає з умови $\mathbf{D_2}$ та міркувань, що містяться в доведенні леми 1.

Для загального елемента матриці $U_{\mathrm{T}}^{(4)}$, скориставшись умовами $\mathbf{D_1}, \mathbf{D_2}$ та нерівністю (2.39) для θ_{T}^*, отримуємо

$$\left|U_{\mathrm{T},jk}^{(4)}\right| \le \int\limits_0^{\mathrm{T}} |B(h, \theta_{\mathrm{T}}^* - B(h, \theta^0)| B_{kj}(h) dh \le$$

$$\le \left(\int_0^{\infty} B_{kj}(h) dh\right) \max_{i=\overline{1,q}} (\sup_{h\in[0,\infty)} B_i(h)) \sum_{i=1}^{q} |\theta_{i\mathrm{T}}^* - \theta_i^0| \xrightarrow[\mathrm{T}\to\infty]{} 0 \text{ м.н.} \tag{2.49}$$

Аналогічно для загального елемента матриці $U_{\mathrm{T}}^{(1)}$ отримуємо:

$$U_{\mathrm{T},jk}^{(1)} = \int\limits_0^{\mathrm{T}} (B_j(h,\theta_{\mathrm{T}}^*) - B_j(h,\theta^0))B_k(h,\theta_{\mathrm{T}}^*)dh + \int\limits_0^{\mathrm{T}} B_j(h,\theta^0)B_k(h,\theta_{\mathrm{T}}^*)dh =$$

$$= \int\limits_0^{\mathrm{T}} (B_j(h,\theta_{\mathrm{T}}^*) - B_j(j,\theta^0))B_k(h,\theta_{\mathrm{T}}^*)dh + \int\limits_0^{\mathrm{T}} B_j(h,\theta^0)(B_k(h,\theta_{\mathrm{T}}^*) - B_k(h,\theta^0))dh +$$

$$+ \int\limits_0^{\mathrm{T}} B_j(h,\theta^0)B_k(h,\theta^0)dh = U_{\mathrm{T},jk}^{(5)} + U_{\mathrm{T},jk}^{(6)} + U_{\mathrm{T},jk}^{(7)}; \tag{2.50}$$

$$|U_{\mathrm{T},jk}^{(5)}| \leq \int\limits_0^{\mathrm{T}} |B_j(h,\theta_{\mathrm{T}}^*) - B_j(k,\theta^0)|B_k(h)dh \leq$$

$$\leq \left(\int_0^\infty B_k(h)dh\right) \max_{i=\overline{1,q}} \sup_{h\in[0,\infty)} B_{ji}(h) \sum_{i=1}^{h} |\theta_{i\mathrm{T}}^* - \theta_i^0| \xrightarrow[\mathrm{T}\to\infty]{} 0 \text{ м.н.}; \tag{2.51}$$

$$U_{\mathrm{T},jk}^{(6)} \leq \left(\int_0^\infty B_j(h)dh\right) \max_{i=\overline{1,q}} \sup_{h\in[0,\infty)} B_{ki}(h) \sum_{i=1}^{q} |\theta_{i\mathrm{T}}^* - \theta_i^0| \xrightarrow[\mathrm{T}\to\infty]{} 0 \text{ м.н.} \tag{2.52}$$

Це означає, що м.н.

$$\lim_{\mathrm{T}\to\infty} U_{\mathrm{T}}^{(1)} = \lim_{\mathrm{T}\to\infty} U_{\mathrm{T}}^{(7)} = U(\theta^0) = \left(\int_0^\infty B_j(h,\theta^0)B_k(h,\theta^0)dh\right)_{j,k=1}^{q}. \tag{2.53}$$

Гранична матриця $U(\theta^0)$ додатно визначена за умовою $\mathbf{D_3}$.

Теорема 2. *Нехай виконано одну з умов* $\mathbf{A_1}$ *або* $\mathbf{A_2}$, *а також умови* $\mathbf{B_1}, \mathbf{B_2}, \mathbf{C_1}, \mathbf{C_2}, \mathbf{D_1} - \mathbf{D_3}, \mathbf{M}$. *Тоді вектор* $\mathrm{T}^{1/2}(\theta_{\mathrm{T}} - \theta^0)$ *асимптотично нормальний з нульовим вектором середніх та коваріаційною матрицею*

$$\Sigma(\theta^0) = U^{-1}(\theta^0)\sigma(\theta^0)U^{-1}(\theta^0), \tag{2.54}$$

де матрицю $U(\theta^0)$ *задано формулою (2.11) (див. також (2.53)), а матрицю* $\sigma(\theta^0)$ *задано формулою (2.12).*

Доведення. Перепишемо рівняння (2.42) у вигляді

$$\mathrm{T}^{1/2}(\theta_{\mathrm{T}} - \theta^0) = U_{\mathrm{T}}^{-1}\mathrm{T}^{1/2}R_{\mathrm{T}}. \tag{2.55}$$

З наведених вище міркувань випливає, що

$$U_{\mathrm{T}}^{-1} \xrightarrow[\mathrm{T}\to\infty]{} U^{-1}(\theta^0) \text{ м.н.} \tag{2.56}$$

Нехай $\nabla B(h, \theta^0)$ – градієнт коваріаціної функції. Запишемо, користуючись позначенням $\gamma_{\mathrm{T}}(h) = \mathrm{T}^{1/2}\xi_{\mathrm{T}}(h)$,

$$\mathrm{T}^{1/2}R_{\mathrm{T}} = \int\limits_0^{\mathrm{T}} \mathrm{T}^{1/2}\xi_{\mathrm{T}}(h)\nabla B(h,\theta^0)dh = \int\limits_0^{\mathrm{T}} \gamma_{\mathrm{T}}(h)\nabla B(h,\theta^0)dh = R_{\mathrm{T}}^{(1)} - R_{\mathrm{T}}^{(2)}, \tag{2.57}$$

де

$$R_{\mathrm{T}}^{(1)} = \int\limits_0^{\infty} \gamma_{\mathrm{T}}(h)\nabla B(h,\theta^0)dh, \quad R_{\mathrm{T}}^{(2)} = \int\limits_{\mathrm{T}}^{\infty} \gamma_{\mathrm{T}}(h)\nabla B(h,\theta^0)dh. \tag{2.58}$$

Покажемо, що дисперсії координат вектора $R_{\mathrm{T}}^{(2)}$ прямують до нуля при $\mathrm{T} \to \infty$. Отримуємо для $j = \overline{1,q}$ за умови $\mathbf{D_1}$

$$\mathbb{E}\left(\int_{\mathrm{T}}^{\infty} \gamma_{\mathrm{T}}(h)B_j(h,\theta^0)dh\right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\int_0^{\infty} \mathbb{E}\gamma_{\mathrm{T}}^2(h)B_j(h)dh\right)\left(\int_{\mathrm{T}}^{\infty} B_j(h)dh\right) \xrightarrow[\mathrm{T}\to\infty]{} 0, \tag{2.59}$$

оскільки обмеженість за T величин

$$\int\limits_0^{\infty} \mathbb{E}\gamma_{\mathrm{T}}^2(h)B_j(h)dh \tag{2.60}$$

випливає, наприклад, з оцінок лем 1 та 2.

Таким чином, далі достатньо з'ясувати граничну поведінку випадкового вектора $R_{\mathrm{T}}^{(1)}$.

Нехай H – натуральне число. Запишемо

$$R_{\mathrm{T}}^{(1)} = R_{\mathrm{T}}'(H) + R_{\mathrm{T}}''(H), \tag{2.61}$$

де

$$R_{\mathrm{T}}'(H) = \int\limits_0^{H} \gamma_{\mathrm{T}}(h)\nabla B(h,\theta^0)dh, \quad R_{\mathrm{T}}''(H) = \int\limits_H^{\infty} \gamma_{\mathrm{T}}(h)\nabla B(h,\theta^0)dh. \tag{2.62}$$

Нехай також $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_q) \in \mathbb{R}^q$ – довільний ненульовий вектор. З урахуванням (2.59) отримуємо

$$P\{|\langle R''_{\mathrm{T}}(H), \lambda\rangle| \geq \varepsilon\} \leq \varepsilon^{-2}\mathbb{E}|\langle R''_{\mathrm{T}}(H), \lambda\rangle|^2 \leq$$

$$\leq \varepsilon^{-2}\sum_{j=1}^{q}\lambda_j^2\sum_{j=1}^{q}\mathbb{E}(R''_{\mathrm{T},j}(H))^2 \leq C_{13}\varepsilon^{-2}\|\lambda\|^2\sum_{j=1}^{q}\int_H^\infty B_j(h)dh = \sigma_H(\lambda), \quad (2.63)$$

ми використовуємо позначення $\langle\cdot,\cdot\rangle$ для скалярного добутку двох векторів. Оберемо таку послідовність $\varepsilon_H \downarrow 0$, що $\sigma_H(\lambda) \xrightarrow[H\to\infty]{} 0$ при фіксованому λ. Наприклад, можна взяти

$$\varepsilon_H = \left(\sum_{j=1}^{N}\int_H^\infty B_j(h)dh\right)^{1/4}. \quad (2.64)$$

Що стосується R'_{T}, то як і в доведенні леми 6, отримуємо для довільного $x \in \mathbb{R}$ нерівності

$$P\{\langle R'_{\mathrm{T}}(H), \lambda\rangle < x - \varepsilon_H\} - \delta_H(\lambda) \leq P\{\langle R^{(1)}_{\mathrm{T}}, \lambda\rangle < x\} \leq$$

$$\leq P\{\langle R'_{\mathrm{T}}(H), \lambda\rangle < x + \varepsilon_H\} + \delta_H(\lambda). \quad (2.65)$$

Завдяки умові **M**, так само, як у доведенні леми 6, для довільного $x \in \mathbb{R}$ знаходимо, що

$$P\{\langle R'_{\mathrm{T}}(H), \lambda\rangle < x \pm \varepsilon_H\} \xrightarrow[\mathrm{T}\to\infty]{} \Phi(x \pm \varepsilon_H; 0, \sigma_H(\lambda)), \quad (2.66)$$

$$\sigma_H(\lambda) = \int_0^H\int_0^H \rho(h_1, h_2; \theta^0)\langle\lambda, \nabla B(h_1, \theta^0)\rangle\langle\lambda, \nabla B(h_2, \theta^0)\rangle dh_1 dh_2. \quad (2.67)$$

Зауважимо, що при фіксованому $\lambda \neq 0$ за умовами $\mathbf{D_1}$ та $\mathbf{D_3}$ можна вказати таке число H_0, що $\sigma_H(\lambda) > 0$ для всіх $H > H_0$. Отже, з (2.65) випливає, що

$$\overline{\lim}_{\mathrm{T}\to\infty} P\{\langle R^{(1)}_{\mathrm{T}}, \lambda\rangle < x\} \leq \Phi(x + \varepsilon_H; 0, \delta_H(\lambda)) + \delta_H(\lambda); \quad (2.68)$$

$$\underline{\lim}_{\mathrm{T}\to\infty} P\{\langle R^{(1)}_{\mathrm{T}}, \lambda\rangle < x\} \geq \Phi(x - \varepsilon_H; 0, \delta_H(\lambda)) - \delta_H(\lambda). \quad (2.69)$$

Тепер перейдемо до границі за $H \to \infty$ у правих частинах нерівностей (2.68), (2.69) та отримаємо

$$\lim_{\mathrm{T}\to\infty} P\{\langle R_{\mathrm{T}}^{(1)}, \lambda\rangle < x\} = \Phi(x; 0, \sigma(\lambda)),$$

$$\sigma(\lambda) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \rho(h_1, h_2; \theta^0)\langle \lambda, \nabla B(h_1, \theta^0)\rangle\langle \lambda, \nabla B(h_2, \theta^0)\rangle dh_1 dh_2 > 0. \qquad (2.70).$$

Таким чином, теорему 2 доведено.

$\square$

Припустимо, що $X(t)$ — гауссівський процес. Запишемо граничну коваріаційну матрицю Σ (формула (2.54) у формулюванні теореми 2) у термінах спектральної щільності та її похідних цього гауссівського стаціонарного процесу.

За формулою (2.52) загальний елемент матриці $U(\theta^0)$ має вигляд

$$U_{jk}(\theta^0) = \int\limits_0^\infty B_j(h, \theta^0) B_k(h, \theta^0) dh = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^\infty B_j(h, \theta^0) B_k(h, \theta^0) dh =$$

$$= \pi \int\limits_{-\infty}^\infty f_j(\lambda, \theta^0) f_k(\lambda, \theta^0) d\lambda \qquad (2.71)$$

за рівністю Парсеваля, тобто

$$U(\theta^0) = \left(\pi \int_{-\infty}^\infty f_j(\lambda, \theta^0) f_k(\lambda, \theta^0) d\lambda\right)_{j,k=1}^q. \qquad (2.72)$$

З іншого боку, за формулами (2.1) при $\varkappa_4 \equiv 0$, (2.72) та (2.12) загальний елемент матриці $\sigma(\theta^0)$ має вигляд

$$\sigma_{jk}(\theta^0) = 4\pi \int\limits_{-\infty}^\infty f^2(\lambda, \theta^0) \int\limits_0^\infty B_j(h_1, \theta^0)\cos(\lambda h_1) dh_1 \int\limits_0^\infty B_k(h_2, \theta^0)\cos(\lambda h_2) dh_2 d\lambda =$$

$$= \pi \int\limits_{-\infty}^\infty f^2(\lambda, \theta^0) \int\limits_{-\infty}^\infty B_j(h_1, \theta^0)\cos(\lambda h_1) dh_1 \int\limits_{-\infty}^\infty B_k(h_2, \theta^0)\cos(\lambda h_2) dh_2 d\lambda =$$

$$= 4\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda, \theta^0) f_j(\lambda, \theta^0) f_k(\lambda, \theta^0) d\lambda, \tag{2.73}$$

тобто

$$\sigma(\theta^0) = \left(4\pi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda, \theta^0) f_j(\lambda, \theta^0) f_k(\lambda, \theta^0) d\lambda \right)_{j,k=1}^{q}. \tag{2.74}$$

Якщо ввести матричну знакозмінну міру, тобто матричний заряд

$$G(d\lambda, \theta) = (G_{jk}(d\lambda, \theta))_{j,k=1}^{q} = \left(f_j(\lambda, \theta^0) f_k(\lambda, \theta^0) d\lambda \right)_{j,k=1}^{q}, \tag{2.75}$$

то матрицю $\Sigma(\theta^0)$ можна записати у симетричному вигляді, а саме:

$$\Sigma(\theta^0) = 4\pi \left(\int_{-\infty}^{\infty} G(d\lambda, \theta^0) \right)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda, \theta^0) G(d\lambda, \theta^0) \left(\int_{-\infty}^{\infty} G(d\lambda, \theta^0) \right)^{-1}. \tag{2.76}$$

Приклад 1. Нехай $X(t)$ — гауссівський процес з нульовим середнім та коваріаційною функцією

$$B(h, \theta^0) = \exp\{-\theta^0 |h|\}, \theta^0 \in \Theta = (a, b), a > 0, b < \infty. \tag{2.77}$$

Тоді спектральною щільністю цього процесу є функція

$$f(\lambda, \theta^0) = \frac{\theta^0}{\pi(\lambda^2 + (\theta^0)^2)}. \tag{2.78}$$

Знайдемо дисперсію за формулами (2.54), (2.72) та (2.73). Оскільки параметр θ^0 скалярний, то

$$\Sigma(\theta^0) = 4\pi \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} f(\lambda, \theta^0) \right)^2 d\lambda \right)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda, \theta^0) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} f(\lambda, \theta^0) \right)^2 d\lambda,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} f(\lambda, \theta^0) \right)^2 d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda^2 - (\theta^0)^2}{\pi(\lambda^2 + (\theta^0)^2)^2} \right)^2 d\lambda =$$

$$= \pi^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{4(\theta^0)^4}{(\lambda^2 + (\theta^0)^2)^4} - \frac{4(\theta^0)^2}{(\lambda^2 + (\theta^0)^2)^3} + \frac{1}{(\lambda^2 + (\theta^0)^2)^2} \right) d\lambda =$$

$$= \pi^{-2} \left(\frac{20\pi}{16(\theta^0)^3} - \frac{12\pi}{8(\theta^0)^3} + \frac{\pi}{2(\theta^0)^3} \right) = \frac{1}{4\pi(\theta^0)^3},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda,\theta^0)\left(\frac{\partial}{\partial\theta} f(\lambda,\theta^0)\right)^2 d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\theta^0)^2(\lambda^2-(\theta^0)^2)^2}{\pi^4(\lambda^2+(\theta^0)^2)^6} d\lambda =$$

$$= \frac{(\theta^0)^2}{\pi^4}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{4(\theta^0)^4}{(\lambda^2+(\theta^0)^2)^6} - \frac{4(\theta^0)^2}{(\lambda^2+(\theta^0)^2)^5} + \frac{1}{(\lambda^2+(\theta^0)^2)^4}\right) d\lambda =$$

$$= \frac{(\theta^0)^2}{\pi^4}\left(\frac{252\pi}{256(\theta^0)^7} - \frac{140\pi}{128(\theta^0)^7} + \frac{5\pi}{16(\theta^0)^7}\right) = \frac{13}{64\pi^3(\theta^0)^5},$$

$$\Sigma(\theta^0) = 4\pi\left(4\pi(\theta^0)^3\right)^2\left(\frac{13}{64\pi^3(\theta^0)^5}\right) = 13\theta^0.$$

Таким чином, $\Sigma(\theta^0) = 13\theta^0$. З іншого боку, дисперсію оцінки максимальної вірогідності параметра θ^0 було підраховано достатньо давно, наприклад, в монографії Bartlett [11], і ця дисперсія $\Sigma^*(\theta^0) = \theta^0$. Ми бачимо, що ОНК має малу асимптотичну ефективність, а саме: $e = \Sigma^*(\theta^0)/\Sigma(\theta^0) = 1/13$.

Проте, можна рекомендувати сильно консистентну та асимптотично нормальну ОНК θ_{T} як для гауссівських процесів $X(t)$ із громіздким відношенням вірогідності, так і для негауссівських процесів $X(t)$, для яких відношення вірогідності записати неможливо, і, отже, оцінку максимальної вірогідності також знайти неможливо.

Припустимо, що $X(t)$ є стаціонарним, але не гауссівським стохастичним процесом. Тоді кумулянт 4-го порядку $\varkappa_4 \neq 0$, і вираз $\rho(h_1, h_2; \theta)$ містить $\varkappa_4$ (див. (2.1)), але нам треба вміти перевіряти виконання умови $\mathbf{C_1}$.

Оскільки для гауссівської частини, тобто при $\varkappa_4 = 0$, умову $\mathbf{C_1}$ виконано (див. умову $\mathbf{C_1'}$ та нерівність(2.8)), то треба довести, що для довільних $\theta \in \Theta$ та H

$$\sup_{h\in\mathbb{R}_+}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\varkappa_4(t,t+h,h',0)dt - \int_{-\infty}^{\infty}\varkappa_4(t,t+h,h'',0)dt\right| \leq$$

$$\leq C(\theta)|h'-h''|^\delta, h_1, h_2 \in [0,H]. \tag{2.79}$$

Таким чином, ми припускаємо, що $\varkappa_4$ може залежати від параметра $\theta \in \Theta$.

Щоб навести приклад виконання нерівності (2.79), розглянемо лінійний процес, керований двостороннім процесом Леві $L(t), t \in \mathbb{R}$, тобто

$$X(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{a}(t-s)dL(s), t \in \mathbb{R}, \tag{2.80}$$

$\widehat{a}(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – деяка вимірна функція. Опис конструкції стохастичного інтеграла (2.80), який називається інтегралом Райпут-Росінського, міститься, наприклад, у роботі [4], причому ми припускаємо, що

$$\mathbb{E}L(1) = 0, a = \sup_{t\in\mathbb{R}} |\widehat{a}(t)| < \infty; \ \|\widehat{a}\| = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{a}(t)|dt < \infty. \tag{2.81}$$

За деяких додаткових припущень щодо процесу Леві $L(t)$ (див. [4]) процес $X(t)$ має кумулянт 4-го порядку

$$\varkappa_4(t_1, t_2, t_3, t_4) = d_r \int\limits_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{4} \widehat{a}(t_j - x)dx, \tag{2.82}$$

де $d_4 = \mathbb{E}L^4(1) - 3(\mathbb{E}L^2(1))^2$ – кумулянт 4-го порядку випадкової величини $L(1)$. Коваріаційна функція процесу $X(t)$ є кумулянтом 2-го порядку $\varkappa_2(t_1, t_2) = B(t_1 - t_2)$, причому коваріаційну функцію можна записати у вигляді

$$B(t) = d_2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{a}(t+x)\widehat{a}(x)dt, \ d_2 = \mathbb{E}L^2(1). \tag{2.83}$$

Приклад 2. Оберемо у якості ядра функцію $\widehat{a}(t) = e^{-\theta|t|}, 0 < \underline{\theta} < \theta < \overline{\theta} < \infty$, тобто $\theta \in (\underline{\theta}, \overline{\theta})$.

Беручи до уваги формулу (2.79), запишемо з урахуванням формули (2.82)

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} (\varkappa_4(t, t+h, h', 0) - \varkappa_4(t, t+h, h'', 0))dt \right| \leq$$

$$\leq |d_4| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{a}(t-x)||\widehat{a}(t+h-x)||\widehat{a}(h'-x) - \widehat{a}(h''-x)||a(-x)|dxdt. \tag{2.84}$$

Далі під знаком підвійного інтеграла (2.84) запишемо $|\widehat{a}(t+h-x)| \leq a$ і розглянемо

$$|\widehat{a}(h'-x)-\widehat{a}(h''-x)| = |e^{-\theta|h'-x|} - e^{\theta|h''-x|}|.$$

Оскільки для функції $g(u)=e^{-\theta u}$ та невід'ємних значень $u=u_1,u_2$ за формулою скінченних приростів

$$|e^{-\theta u_1} - e^{-\theta u_2}| \leq \theta|u_1-u_2|,$$

то візьмемо $u_1=|h'-x|, u_2=|h''-x|$. Тоді за нерівністю трикутника

$$|e^{-\theta|h'-x|} - e^{-\theta|h''-x|}| \leq \theta||h'-x|-|h''-x|| \leq \theta|h'-h''|. \tag{2.85}$$

Тепер в правій частині нерівності (2.84) залишився інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{a}(t-x)||\widehat{a}(-x)|dxdt \leq \|\widehat{a}\|^2 \tag{2.86}$$

за теоремою Фубіні. Таким чином, нерівність (2.79) виконується з $\delta=1$ та константою $C(\theta)=a\|\widehat{a}\|^2|d_4|\theta$.

3 Висновки

У магістерській дисертації доведено сильну консистентність та асимтотичну нормальність ОНК невідомих параметрів коваріаційної функції стаціонарного процесу з неперервним часом та нульовим середнім. Для отримання вказаних результатів було розглянуто декілька умов, які має задовільняти спостережуваний стаціонарний процес та його коваріаційна функція. Основними є умови сильного перемішування, моментні умови та умови інтегровності похідних коваріаційної функції за параметрами.

Доведенню теорем про сильну консистентність та асимптотичну нормальність передує назка технічних лем, які забезпечують доведення основних результатів роботи.

Природним напрямком продовження дослідження є розгляд таких методів оцінювання параметрів коваріаційної функції, які дозволять підвищити ефективність оцінок у порівнянні з методом найменших квадратів.

Список використаних джерел

[1] A.Bilchouris, A.Olenko. On Nonparametric Estimation of Covariogram. Austrian Journal of Statistics, 54(2025), no.1, 112–137 (To appear).

[2] A.V. Ivanov, N.N. Leonenko. Statistical Analysis of Random Fields. Kluwer AP, Dordrecht, 1989.

[3] V.V. Buldygin, Yu.V. Kozachenko. Metric Characterization of Random Varieble and Random Processes. American Mathematical Society, 2000.

[4] A.V. Ivanov, N.N. Leonenko, I.V.Orlovski. On the Whittle estimator for linear random noise spectral density parameter in continuous-time nonlinear regression models. Stat. Inference Stoch. Processes, 23 (2020), 129-169.

[5] D.J. Sakrison. Efficient recursive estimation; application to estimating the parameters of covariance functions. International Journal of Engineering Science, v.3, №4, 1965, 461-483.

[6] Zhengyan Zhu, M.L. Stein. Spatial sampling design for parameter estimation of the covariance function. J. Statistical Planning and Inference, v.134, №2, 2005, 583-603.

[7] F.Bachoc. Asymptotic analysis of the role of spatial sampling for covariance parameter estimation of Gaussian processes. J. Multivariate Analysis. v.125, 2014, 1-35.

[8] F.Bachoc. Asymptotic Analysis of Maximum Likelihood Estimation of Covariance Parameters for Gaussian Processes: An Introduction with Proofs. Advances in Contemporary Statistics and Econometrics, Springer, 2021.

[9] I.I.Gikhman, A.V.Skorokhod. Introduction to the theory of stochastic processes. W.B. Saunders Company, 1969.

[10] Yu.A.Rozanov. Stationary Random Processes. San-Francisco, Holden-Day, 1967.

[11] M.S. Bartlett. Introduction to Stochastic Processes: With Special Reference to Methods and Applications. 3rd edition, Cambridge University Press, 1981.