НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

фізико-математичний факультет
кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 517.9 : 534.1

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
______________ О. І. Клесов
« » 2024 р.

Магістерська дисертація
на здобуття ступеня магістра
за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»
зі спеціальності 111 «Математика»
на тему:
«Огляд результатів наукових досліджень
теорії неідеальних динамічних систем»

Виконала:
студентка VI курсу, групи ОМ-31мп
Суярко Вікторія Ігорівна ____________________

Науковий керівник:
професор кафедри математичної фізики
та диференціальних рівнянь, доктор фізико-математичних наук,
професор Швець Олександр Юрійович ____________________

Рецензент:
доцент кафедри автоматизації електротехнічних та мехатронних комплексів
«КПІ ім. І. Сікорського» Віктор Городецький

____

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студентка ____________________

Київ – 2024 рік

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ «КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
________ О.І. Клесов
«   »   2024 р.

Завдання
на магістерську дисертацію студентці
Суярко Вікторії Ігорівні

1. Тема дисертації «Огляд результатів наукових досліджень теорії неідеальних динамічних систем», науковий керівник дисертації Швець Олександр Юрійович, доктор фізико-математичних наук, професор, затверджений наказом по університету від «06» листопада 2024 р. №4981-с.

2. Термін подання студентом дисертації 14 грудня 2024 року.

3. Об'єкт дослідження: теорія динамічних систем.

4. Предмет дослідження: наукові праці з неідеальних динамічних систем

5. Перелік завдань, які потрібно виконати:

   (а) Огляд наукових публікацій з маятникових систем.

   (б) Огляд наукових публікацій з гідродинамічних систем.

   (в) Огляд наукових публікацій з електропружних систем.

6. Дата видачі завдання 04 листопада 2024 року.

Календарний план

№	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Огляд наукових публікацій з маятникових систем	01.09.24-03.10.24	Виконано
2.	Огляд наукових публікацій з гідродинамічних систем	04.10.24-05.11.24	Виконано
3.	Огляд наукових публікацій з електропружних систем	06.11.24-10.12.24	Виконано

Студентка Суярко Вікторія Ігорівна

Науковий керівник Швець Олександр Юрійович

Реферат

Магістерська дисертація містить 43 сторінки та 38 посилань. Дисертаційна робота присвячена огляду результатів наукових досліджень у теорії неідельних динамічних систем.

Актуальність роботи полягає у тому, що неідеальі динамічні системи мають широкий спектр застосувань у різних галузях, а також потребують детального дослідження через складну динаміку.

Метою дисертації є аналіз наукових результатів неідеальних динамічних систем, щоб зрозуміти та описати складні процеси, які неможливо точно описати та пояснити за допомогою простих моделей.

При виконанні роботи було розглянуто теоретичні відомості досліджень, досягнення науковців та результати їх досліджень.

Новизна отриманих результатів полягає у висвітленні сучасних підходів до аналізу складних систем та описі методів стабілізації систем.

Ключові слова: неідеальні динамічні системи, запізнення, детермінований хаос, біфуркації, хаотичні атрактори.

Abstract

The master's thesis contains 42 pages and 38 references.
The dissertation work to a review of the results of scientific research in the theory of nonideal dynamical systems.
The relevance of the work lies in the fact that non-ideal dynamical systems have a wide range of applications in various fields and require detailed research due to their complex dynamics.
The aim of the dissertation is to analyze the scientific results of non-ideal dynamical systems in order to understand and describe complex processes that cannot be accurately described and explained using simple models.
In the course of the work, the theoretical information of research, the achievements of scientists and the results of their research were considered.
The novelty of the results obtained is to highlight modern approaches to the analysis of complex systems and to describe methods of system stabilization.
Key words: imperfect dynamical systems, delay, deterministic chaos, bifurcations, chaotic attractors.

Зміст

1 Вступ

Динамічні системи — це математичні моделі, які описують як щось змінюється з часом. Вони є невід'ємною частиною багатьох явищ та процесів, які існують у будь-якій галузі. Ці системи є важливими, бо вони дозволяють моделювати реальні процеси, розуміти їх закономірності, а також знаходити способи впливати на них та прогнозувати їх поведінку.

У сучасній науці досить важливим напрямком є неідеальні динамічні системи так як більшість реальних систем не відповідають ідеальним припущенням.

Основнна мета неідеальних динамічних систем полягає у тому, щоб зрозуміти та описати складні процеси, які неможливо точно описати та пояснити за допомогою простих моделей. Системи досить часто мають недосконалості, такі як: нелінійність, зовнішні збурення або зміна під впливом випадкових факторів.

У даній роботі буде зроблено огляд результатів накових досліджень теорії неідеальних динамічних систем, аналізуючи основні підходи до їх дослідження, результати, а також перспективи для їх подальшого розвитку у застосуванні.

У процесі роботи буде розглянуто теоритичні відомості кожного з досліджень, досягнення науковців у цій галузі та результати їх досліджень.

Це все дозволить сформувати цілісне уявлення про актуальність та значення теорії неідеальних динамічних досліджень, які допоможуть окреслити роль даної теорії у сучасній науці та визначити напрям для подальших досліджень.

2 РОЗДІЛ
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

2.1 Динамічна система

При написанні цього розділу використані наукові публікації

Означення 1. *Динамічна система – це об'єкт, що складається з трьох основних компонентів:*

1. *Фазового простору D, що є метричним простором, у якому описується поведінка системи;*
2. *Часу t, який може бути неперервним ($t \in \mathbb{R}$), або дискретним ($t \in \mathbb{Z}$);*
3. *Закону(оператора) еволюції φ, який визначає, як змінюються стани з часом. Який задоволяняє властивості:*

   1) $\varphi(0, x) = x$;

   2) $\varphi(t_2, \varphi(t_1, x)) = \varphi(t_1 + t_2, x)$;

   3) $\varphi(t, x)$ *неперервне за* (t, x).

Фазову траєкторією точки $x \in D$ у просторі можна представити у вигляді множини точок:

$$\varphi(x) := \{\varphi(t, x) \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \textit{у випадку неперервного часу;}$$
$$\varphi(x) := \{\varphi(t, x) \mid t \in \mathbb{Z}\} \quad \textit{у випадку дискретного часу.}$$

Означення 2. *Множина $\mathcal{L} \subset D$ є інваріантною, якщо*

$$\varphi(\mathcal{L}) = \mathcal{L},$$

тобто еволюція системи не виводить точки за межі цієї множини.

Означення 3. *Динамічна система є диспативною, якщо для будь-якої множини*

$$\forall V \subset D \implies \lim_{t \to +\infty} \mu(\varphi(t, V)) = 0,$$

де $\mu(V)$ – міра множини V.Це означає, що траєкторії системи з часом стискаються до певних областей у фазовому просторі.

Означення 4. *Множина $A \subset D$ є атрактором, якщо*

(I) для кожної відкритої множини існує $B \supset \mathcal{A} : \forall x \in B \implies \lim_{t\to+\infty} \rho(\mathcal{A}, \varphi(t,x)) = 0$;

(II) не існує $C \subset \mathcal{A}$ такої, що C, є інваріантною множиною;

де $\rho(\cdot,\cdot)$ — метрика на $D : \rho(\mathcal{A}, x) := \inf_{y\in\mathcal{A}} \rho(y,x)$ — відстань від точки x до множини $\mathcal{A}$.

Означення 5. *Множина $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ є басейном притягання аттрактора $\mathcal{A}$, якщо*

$$\forall x \in \mathcal{B}_{\mathcal{A}} \implies \lim_{t\to+\infty} \rho(\mathcal{A}, \varphi(t,x)) = 0.$$

Зауваження 1. Аттрактори існують лише у диспативних системах.

2.2 Система звичайних диференціальних рівнянь як динамічна система

Автономну систему звичайних диференціальних рівняньь n-ого порядку, можна представити у вигляді:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(x), \quad f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — вектор невідомих функцій: $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x}))$ неперервно диференційована вектор-функція.

Припустимо, що будь-який розв'язок $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ рівняння (1), такий що $\mathbf{x}(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 \in U$, існує при всіх $t \in [0, +\infty)$, єдиний і не залишає множини U. У такому випадку відображення $\varphi : [0, +\infty) \times U \to U$, таке що

$$\varphi(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0),$$

задає динамічну систему з метрикою

$$\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||,$$

де $||x|| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ — евклідова норма.

2.3 Перехідні та усталені процеси. Поняття хаотичного аттрактора

Рух у дисипативних системах можна розділити на два основні типи. Перший тип включає перехідні, нестаціонарні рухи, які описують процес наближення системи від її початкового стану до граничних множин (атракторів). Другий тип охоплює усталені, стаціонарні рухи, при яких фазові траєкторії вже знаходяться в межах цих граничних множин (атракторів).

У загальній теорії динамічних систем встановлено, що дисипативні динамічні системи повинні містити певні типи атракторів, зокрема: [11, 15, 16, 18]:

1. Положення рівноваги – точки у фазовому просторі, які є станами спокою системи.

2. Граничні цикли – замкнені лінії у фазовому просторі, що описують періодичні коливання.

3. Квазіперіодичні атрактори – тороїдальні поверхні у фазовому просторі, що характеризують квазіперіодичні рухи.

Ці атрактори називають регулярними. Окрім них, існують також інші типи атракторів. Траєкторії, що спрямовуються до таких граничних множин, демонструють абсолютно непередбачувану поведінку, яку називають хаотичною. Важливо зазначити, що ця непередбачуваність визначається властивостями самої динамічної системи, а не зовнішніми факторами.

Попри хаотичність, такі рухи мають певні кількісні та якісні закономірності, які відрізняють їх від випадкових процесів. Для опису таких типів рухів використовується термін «детермінований хаос», що підкреслює впорядкованість хаотичних траєкторій. Натомість для рухів, пов'язаних із регулярними атракторами, використовується термін «порядок».

Математична модель детермінованого хаосу у фазовому просторі представляє собою складно влаштовані притягувальні множини, фазові траєкторії яких не належать жодному з типів регулярних атракторів. Такі траєкторії виглядають як нескінченні лінії, що ніколи не перетинаються, не виходять за межі обмеженої області при $t \to +\infty$ і не наближаються до регулярних атракторів. Точка, яка описує траєкторію, періодично повертається до околиці початкового стану, але ці повернення є непередбачуваними та нагадують випадкову послідовність. Такі атрактори називають хаотичними.

2.4 Приховані та рідкісні аттрактори

На сьогодні не існує алгоритмів або теорем, які б дозволяли оцінити кількість атракторів у системі або їхню локалізацію. Водночас, існування лише одного виду інваріантних множин, а саме положень рівноваги, може бути підтверджено за допомогою аналітичних або чисельних методів. Саме тому дослідження автономних систем зазвичай розпочинається з аналізу їхніх положень рівноваги. Подальші дослідження поведінки системи здійснюються через вивчення околиць цих точок.

Аттрактори можна класифікувати наступним чином:[5]:

Означення 6. *Самозбуджуваний атрактор – це атрактор, для якого існує положення рівноваги, околиці якого перетинаються з басейном притягання цього атрактора.*

Означення 7. *Прихований атрактор – це атрактор, який не є самозбуджуваним.*

Оскільки методів знаходження всіх атракторів не існує, для виявлення самозбуджуваних атракторів досліджуються всі положення рівноваги та їх околиці. Проте не всі атрактори систем є самозбуджуваними. Вихід траєкторії на приховані граничні множини може мати непередбачувані наслідки, оскільки про поведінку таких множин немає жодних даних. Найкращою стратегією пошуку прихованих атракторів є вибір початкових умов випадковим чином. Крім того, атрактори розподіляють на рідкісні, які мають невеликий басейн притягання, і інші.

2.5 Типи стійкості траєкторій

Означення 8. *Розв'язок* $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0)$ *системи диференціальниї рівнянь* (1) *називається стійким за Лагранжем, якщо*

$$\exists M > 0 : \forall t \geq 0 ||\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0)|| < M.$$

Тобто траєкторія $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0)$ *залишається в межах обмеженої області фазового простору.*

Для наявності атрактора у дисипативній динамічній системі достатньо існування множини B, *з якої будь-яка траєкторія залишатиметься стійкою за Лагранжем.*

Означення 9. *Траєкторія $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0)$ називається стійкою за Ляпуновим, якщо* $\forall \varepsilon > 9 \quad \exists \delta > 0:$

$$\forall \boldsymbol{x}_0' ||\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_0'|| < \delta \Longrightarrow$$
$$\forall t > 0 ||\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0')|| < \varepsilon.$$

Встановлено, що будь-яка траєкторія, яка належить до одного з регулярних атракторів (положення рівноваги, граничні цикли та квазіперіодичні атрактори), є стійкою за Ляпуновим. У той же час усі хаотичні атрактори динамічних систем є нестійкими за Ляпуновим.

Означення 10. *Траєкторія $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0)$ називається асимптотично стійкою, якщо вона стійка за Ляпуновим та* $\lim\limits_{t \to +\infty} ||\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_0'|| = 0.$

В подальшому будемо припускати, що система диференціальних рівнянь (1) є дисипативною, а кожна розглянута траєкторія є стійкою за Лагранжем.

2.6 Теорема Ляпунова та ЛХП

Розглянемо динамічну систему у вигляді системи диференціальних рівнянь (1). Нехай $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ — деякий розв'язок цієї системи, який ми будемо називати незбуреним.

Збуреним ми будеми називати розв'язок системи (1) $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0 + \tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) + \tilde{\mathbf{x}}$, де $||\tilde{\mathbf{x}}(0)|| < \varepsilon$.

За даних позначень еволюція збурення $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ у лінійному наближенні описується рівнянням першого наближення:

$$\tilde{\mathbf{x}} = F(t)\tilde{\mathbf{x}}, \tag{2}$$

де матриця коефіцієнтів $F(t)$ визначається наступним чином:

$$\left.\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(y_1,y_2,\ldots,y_n)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1(y_1,y_2,\ldots,y_n)}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(y_1,y_2,\ldots,y_n)}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2(y_1,y_2,\ldots,y_n)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2(y_1,y_2,\ldots,y_n)}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(y_1,y_2,\ldots,y_n)}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(y_1,y_2,\ldots,y_n)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n(y_1,y_2,\ldots,y_n)}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(y_1,y_2,\ldots,y_n)}{\partial y_n} \end{pmatrix}\right|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)}$$

Для системи (2) є вірною наступна теорема [11, 15, 16 ,18]:

Теорема. *(Ляпунова). Нехай існує така константа M, що для всії еле-*

ментів F_{ij} *і для довільного* T,

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T |F_{ij}(t)|\,dt \le M,$$

тоді

1. *Для будь-якого нетривіального розв'язку* $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ *рівняння* (2) *існує ляпуновський характеристичний показник — скінченне дійсне число, яке визначається за формулою:*
$$\lambda_{\tilde{\boldsymbol{x}}(t)} = \lim_{T\to\infty}\sup\frac{1}{T}\ln||\tilde{\boldsymbol{x}}(T)||; \qquad (3)$$
2. *Якщо розв'язок помножити на сталу* C, *то значення ляпуновського показника не змінюється:*
$$\lambda_{\mathcal{C}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)} = \lambda_{\tilde{\boldsymbol{x}}(t)}; \qquad (4)$$
3. *Ляпуновський показник лінійної комбінації двох розв'язків не перевищує максимального з показників цих розв'язків:*
$$\lambda_{\mathcal{C}_1\tilde{\boldsymbol{x}}_1(t)+\mathcal{C}_2\tilde{\boldsymbol{x}}_2(t)} \le \max(\lambda_{\tilde{\boldsymbol{x}}_1(t)}, \lambda_{\tilde{\boldsymbol{x}}_2(t)}); \qquad (5)$$
4. *Для рівняння* (2) *існує* n *лінійно незалежних розв'язків* $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ *які утворюють фундаментальну систему. Для цих розв'язків визначається* n *ляпуновських характеристичних показників, що впорядковуються за спаданням:* $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n$.

Набір чисел $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ *називається спектром Ляпуновських характеристичних показників (ЛХП). Найбільше з цих чисел* λ_1 *визначається як старший Ляпуновський показник. Спектр ЛХП слід розглядати як характеристику всієї лінійної системи рівнянь* (2) *а не окремого розв'язку* $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$, *оскільки розв'язок не залежить від вибору фундаментальної системи* $\{\tilde{\boldsymbol{x}}_i(t).\}$ *З урахуванням властивостей* (4), (5) *можна зробити висновок, що для будь-якого розв'язку* $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ *його ляпуновський характеристичний показник завжди дорівнює одному з чисел із набору* $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$.

Спектр Ляпуновських характеристичних показників (ЛХП) для аттрактора дисипативної динамічної системи має відповідати таким умовам:

1. Сума всіх n показників повинна бути від'ємною:

$$\sum_{k=1}^{n} < 0.$$

Це гарантує, що атрактор є притягувальною граничною множиною нульової міри у фазовому просторі.

2. У спектрі ЛХП будь-якого аттрактора, за винятком положення рівноваги, обов'язково має бути хоча б один нульовий показник.

Розглянемо траєкторію $\mathbf{x}(t)$, яка знаходиться на аттракторі, що не є положенням рівноваги. Візьмемо іншу траєкторію $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{x}(t + \Delta t)$, де Δt — малий часовий зсув. Обидві траєкторії належать одному аттрактору, адже вони відрізняються лише часовим зсувом. Тоді:

$$\mathbf{x}'(t) - \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t) \approx \dot{\mathbf{x}}(t)\Delta t = f(\mathbf{x})\Delta t).$$

Оскільки кожна траєкторія рівнянн (1) є стійкою за Лагранжем, існує таке число $M > 0$, що $||f(\mathbf{x})|| < M$, а тому $||f(\mathbf{x})\Delta t|| < M|\Delta t|$. Це дозволяє обчислити Ляпуновський характеристичний показник для такого збурення:

$$\lim_{T\to+\infty} \sup \frac{1}{T} \ln ||\mathbf{x}'(t) - \mathbf{x}(t)|| = \lim_{T\to+\infty} \sup \frac{1}{T} \ln M|\Delta t| = 0.$$

2.7 Неідеальна динамічна система

Важливим та актуальним науковим напрямом сучасної теорії динамічних систем і вивчення систем з обмеженим збудженням або неідеальних динамічних систем. Дослідження динамічних систем з обмеженим збудженням розпочалось з експериментів німецького фізика А.Соммерфельда на початку двадцятого століття [A. Sommerfeld. Beitrage zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre, Physikalische Zeitschrift, 3, 266-271, 1902.], але як усталений науковий напрямок така дана теорія сформувалась з опублікуванням монографії українського вченого В.О.Кононенка, в якій було введено основні поняття та означення та побудовані математичні моделі для різноманітних задач математики та механіки [Kononenko, V.O: Vibrating system with a limited power-supply, Iliffe, London, 1969.]

Теорія систем з обмеженим збудженням досліджує взаємодію коливальних систем із джерелами збудження їх коливань. У рамках цієї теорії передбачається, що джерела збудження коливань мають потужність, порівнянну з потужністю, що споживається коливальним навантаженням. При такій умові функціонування джерела енергії залежить від режиму руху коливального навантаження. Вплив джерела енергії не може бути записаний за допомогою явної функції від часу заздалегідь заданого виду. Тоді як при традиційному математичному моделюванні коливальної системи розглядаються ідеалізовані джерела порушення необмеженої потужності. У багатьох випадках неідеальний підхід є принципово невірним, що на практиці призводить до грубих помилок в описі динаміки як до коливальної системи, так і джерела збудження. Це більш актуальним застосування моделей обмеженого збудження став в наш час, коли перед людством на виникають проблеми глобального енергозбереження, що змушує максимально мінімізувати потужності застосовуваних джерел збудження.

Відкриття детермінованого хаосу стимулювало появу нового розділу теорії систем з обмеженим збудженням, пов'язаного з вивченням хаотичних режимів взаємодії коливальних систем з джералами збуджених коливань. Причому особливий інтерес викликають хаотичні режими, виникнення яких пов'язано з нелінійною взаємодією між коливальною системою та джерелом збудження, а не з їхніми автономними властивостями. Останнім часом в теорії неідеальних систем були отримані цікаві наукові результати, огляду яких присвячена ця робота.

3 Огляд наукових праць

3.1 Маятникові системи

Маятникові системи привертають увагу дослідників у різних галузях математики, механіки та фізики, оскільки вони є класичними прикладами коливальних динамічних систем. Саме в таких системах уперше були виявлені важливі явища, як-от параметричний резонанс, високочастотна стабілізація нестійких положень рівноваги тощо. Крім того, маятникові системи слугували експериментальним полем для перевірки абстрактних теоретичних результатів із якісної теорії динамічних систем.

Простота маятникових систем із фізичної точки зору дозволяє легко проводити експериментальну перевірку теоретично передбачених коливальних ефектів. Особливий інтерес до них пояснюється тим, що багато явищ, спочатку відкритих у маятникових системах, згодом було виявлено і в значно складніших фізичних системах, таких як кільця, оболонки, пластини чи середовища в циліндричних і сферичних порожнинах. Ба більше, маятникові системи успішно використовуються для спрощеного математичного моделювання динаміки цих складних об'єктів. Хоча при цьому спрощуються диференціальні рівняння, опис динаміки залишається досить точним.

Сьогодні маятникові моделі широко застосовуються для опису коливальних процесів у таких різноманітних сферах, як біологія, медицина, економіка та соціологія. Проте більшість досліджень нехтують обмеженістю потужності джерела збудження коливань, ідеалізуючи його як необмежено потужне. Такий підхід виключає зворотний вплив коливальної системи на джерело, що дозволяє спростити моделі, але іноді призводить до значних помилок у якісному й кількісному описі режимів. Наприклад, стійкі за Ляпуновим режими можуть виявитися нестійкими в експериментах.

Відкриття детермінованого хаосу суттєво розширило уявлення про можливі режими коливань у маятникових системах. Воно продемонструвало обмеженість методів редукції, які часто спрощують вихідну систему до окремих підсистем, зменшуючи розмірність фазових просторів. Але це може призвести до втрати інформації про хаотичні атрактори вихідної системи.

Зокрема, нехтування взаємодією між маятниковою системою і джерелом збудження може приховати існування хаотичних режимів. Відтак, відкриття детермінованого хаосу спонукає відмовлятися від методів редукції, якщо необхідно дослідити повну картину динамічної поведінки коливальних систем.

Хаотичні режими взаємодії в системі «маятник-джерело енергії [7]

Стаття [**7**] присвячена хаотичній динаміці в системі «маятник-джерело енергії», зокрема умовам виникнення детермінованого хаосу. Автори розробляють математичну модель такої системи, вводячи всі основні параметри, які враховують власну частоту маятника та обмеженість потужності джерела збудження коливань.

Аналітичний і чисельний підходи передбачають залежність динамічної поведінки системи від малих змін початкових умов і значень параметрів. Проаналізовано, як врахування обмеженості потужності джерела збуджень приводять до нестійкісті і хаотичних режимів динаміки; такі системи є важливими прототипами для вивчення явищ складної динаміки. Однією з найяскравіших сторін статті є те, що вона вказує на конкретну ситуацію, за якої виникає детермінований хаос.

Переходи розв'язків від регулярних коливальних режимів до хаотичних автори досліджували в термінах біфуркаційного аналізу. Було виявлено, що для таких систем з обмеженою потужністю джерела збуджень ця робота може сформувати базову основу для вивчення хаотичних взаємодій у коливальних системах. Окрім поглиблення теоретичних уявлень, результати дослідження надають інструменти, які можуть бути використані як для прогнозування, так і для контролю хаотичної поведінки у споріднених системах.

Хаотичні коливання сферичного маятника як ефект взаємодії з джерелом збудження коливань [8]

У статті [**8**] розглядається хаотична динаміка взаємодії сферичного маятника з джерелом збудження. Підхід авторів поєднує теоретичні висновки та чисельне моделювання, пропонуючи комплексний погляд на те, як зовнішнє збудження впливає на динаміку маятника. Це означає, що в рамках таких досліджень дуже важливо отримати сценарії переходу до хаосу, тобто послідовності біфуркацій які переводять систему з регулярних станів у хаотичні.

Використовуючи фазові портрети, показники Ляпунова та перерізи Пуанкаре, автори переконливо представили докази умов виникнення хаосу. Ці результати виявили чутливість системи до різних змін параметрів збудження.

У цій роботі сферичний маятник представлено як цінну модель хаотичних взаємодій у динамічних системах. Дослідження робить внесок не тільки в теоретичний розвиток нелінійних коливань, але й у практичне керування хаосом у системах, де пристрої збудження можуть відігравати вирішальну роль. Це робить його важливим внеском у галузі фізики та прикладної механіки.

Хаотичні коливання сферичного маятника як приклад взаємодії з джерелом енергії [9]

Статтю [**9**] присвячено дослідженню хаотичних коливань сферичного маятника, який взаємодіє з джерелом енергії скінченної потужності. Проведено аналіз переходу від регулярних до хаотичних коливань і зроблено зауваження про важливість цих явищ для вивчення динаміки систем з розподіленими параметрами. Найважливішим моментом у цій роботі є використання усереднених рівнянь руху.

Показано, що хаотичні коливання виникають не через внутрішні властивості маятника, а внаслідок взаємодії з джерелом збудження коливань. Автори зазначають, що в ідеальному випадку, якщо джерело енергії має нескінченну потужність, система має регулярний характер динаміки. В чисельних експериментах досліджено перехід від регулярного до хаотичного режиму динаміки.

Автори використовували методи Рунге-Кутти четвертого порядку, перерізи Пуанкаре та алгоритми обчислення показників Ляпунова.

Залежно від параметрів системи виявлено біфуркації подвоєння періоду та зміни типу хаотичного атрактора. Отримані результати показують, що нехтування взаємодією між джерелом енергії та коливальною системою може призвести до великих помилок у прогнозуванні динаміки системи. Ці результати ще раз підкреслюють важливість врахування взаємодії як в експериментальних, так і в теоретичних дослідженнях.

Детермінований хаос сферичного маятника з обмеженим збудженням [10]

Стаття [10] присвячена дослідженню виникнення, еволюції та зникнення детермінованого хаосу в системі «сферичний маятник - електродвигун обмеженої потужності». Автор вважає, що нехтування зворотнім впливом коливальної системи на джерело збудження коливань може призвести до суттєвих помилок у моделюванні та розумінні динамічних систем, таких як маятники та інші коливальні установки.

Сферичний маятник є нелінійною коливальною системою з двома ступенями свободи з рівними частотами і є основою багатьох складних систем. Хаотичні атрактори можуть бути знайдені в широкому діапазоні параметрів системи. Перехід до хаосу відбувається за сценарієм Фейґенбаума. Результати демонструють, що сильне нехтування збудженням скінченної потужності суттєво спотворює динамічну поведінку систем і призводить до хибних уявлень про стійкість і характеру динаміки коливань.

Ця робота є чудовим доказом того, наскільки важливим є якісне моделювання для розрахунку хаотичних режимів, що розширює застосування до багатьох класів фізичних систем.

Хаотичні коливання неідеальних плоских маятникових систем [11]

У статті [**11**] розглядається динаміка маятникової системи, з'єднаної з електродвигуном. Це дослідження вказує на неадекватність звичайних моделей і підкреслює важливість обмеження потужності джерела збудження коливань.

Дослідники намагаються надати більш точні описи неідеальних систем. Увагу зосереджено на аналізі карт динамічних режимів. Такі карти були отримані для різних співвідношень параметрів, що відображають всі типи можливої поведінки - від положення рівноваги до хаотичних атракторів, що показує важливість врахування неідеальності системи. Далі в роботі розглядаються сценарії переходів до хаосу.

Таким чином, ця стаття зробить крок вперед у розумінні таких неідеальних динамічних систем, використовуючи аналітичні та чисельні методи для можливих майбутніх досліджень у галузі моделювання динамічних систем.

Фактори запізнення та хаотизація неідеальних маятникових систем [12]

У статті [**12**] розглянуто динамічну поведінку неідеальних маятникових систем під впливом різних факторів запізнювання. За даними О.Ю. Швеця та О.М. Макасєєва було проведено експеримент, спрямований на дослідження ефектів, що виникають під впливом запізнення. Було проведено експеримент, спрямований на аналіз ефектів, спричинених затримками в передачі сигналу та реакціями середовища в таких системах.

Основну увагу приділено системі, в якій маятник являє собою збудження електродвигуна з обмеженою потужністю. Автори пояснюють значення факторів запізнення для виникнення детермінованого хаосу. Центральна частина роботи присвячена математичному моделюванню експериментальної установки, ключовим параметром якої є запізнення. Автори застосовують чисельні методи для аналізу динамічних режимів, включаючи карти, які показують переходи між регулярними і хаотичним режимами динаміки.

Карти наочно показують, як збільшення значень запізнення впливає на появу хаотичних атракторів. Конкретні приклади стаціонарних режимів та їх переходів до хаосу розглядаються більш детально.

За допомогою теорії біфуркацій та чисельного моделювання автори ідентифікують різні сценарії, такі як каскад біфуркацій подвоєння Фейгенбаума та переміжність Помо-Манневіля.

Моделювання впливу запізнювання на коливання маятників при обмеженому збудженні [13]

У статті [**13**] досліджується динаміка неідеальної системи, що складається з маятника та електродвигуна. Враховуються два фактори запізнення: реакції електродвигуна на коливання маятника і реакція середовища відносно динамічного стану маятника. У вступі зроблено огляд широкого застосування моделей маятника для дослідження складних систем в інженерній, біологічній та фінансовій галузях.

У статті зазначено, що в протяжних системах затримки в передачі сигналів або реакції середовища стають важливими для аналізу стійкості. Автори порівнюють тривимірні та дев'ятивимірні моделі, виявляючи, що для малих запізнень достатньо простих моделей, тоді як для більших запізнень потрібні складніші апроксимації. Чисельні дослідження були проведені за допомогою таких інструментів, як спектр показників Ляпунова і біфуркаційні дерева. Ці методи показали існування хаотичних атракторів для певних величин запцізнювання і визначили два сценарія переходу до хаосу, а саме подвоєння періоду Фейгенбаума та переміжність Помо-Манневіля.

У підсумку, отримані результати дадуть змогу зрозуміти, як фактори затримки, залежно від величини та взаємодії, можуть дестабілізувати системи та шляхи до хаотичних атракторів. Рекомендації також охоплюють використання моделей вищої розмірності як таких, що можуть запропонувати краще представлення моделей зі значними затримками; найкраще їх представляти візуально за допомогою фазово-параметричних характеристик і спектрів показників Ляпунова.

Стаття поглибила розуміння запізнілих взаємодій у маятниково-моторних системах і запропонувала практичні підходи до їх моделювання.

Хаос у маятникових системах з обмеженим збудженням за наявності запізнення [14]

У статті [**14**] враховано фактори запізнення, але в умовах обмеженого збудження системи «маятник - електродвигун». Запропоновано дві моделі - тривимірну та п'ятнадцятивимірну, які описують різні величини запізнення цієї системи.

Підкреслено, що малі запізнення дозволяють використовувати простішу модель, тоді як великі вимагають більш складних систем для адекватного представлення. У роботі досліджено виникнення детермінованого хаосу в таких системах, визначено, як затримки реакції коливальної системи та реакції середовища впливають на перехід від регулярних до хаотичних режимів.

Карти динамічних режимів, фазові портрети та перерізи Пуанкаре побудовані чисельно, що дає наочне уявлення про складну поведінку таких систем. Ці інструменти підкреслюють, що затримка може бути рушійною силою для хаотичних атракторів, а також ілюструють різні шляхи до хаосу, включаючи подвоєння періоду Фейгенбаума і переміжність Помо-Манневіля. Результати підтверджують, що динаміка системи для малих значень запізнення добре відтворюється тривимірною моделлю, тоді як для більших значень п'ятнадцятивимірна модель стає фундаментальною для коректного опису. Важливим наслідком цього є значне розходження між двома моделями в межах більших запізнень, що дійсно підкреслює важливість масштабування розмірності разом з інтенсивністю запізнення.

Стаття робить значний внесок у розуміння динаміки запізнення в маятникових системах. Вона окреслює напрямки вибору правильних підходів до моделювання залежно від величини запізнення і відкриває нові можливості для точнішого аналізу як регулярних, так і хаотичних коливань у подібних системах.

Нові типи граничних множин у динамічній системі «сферичний маятник - електродвигун» [15]

У статті [**15**] розглянуто динамічну поведінку системи «сферичний маятник - електродвигун». Автори розробляють вдосконалену математичну модель нелінійної взаємодії між маятником і джерелом збудження. Автори застосовують цю модель до дослідження нових типів атракторів і граничних множин: нерегулярних і мультистабільних.

За допомогою таких інструментів, як фазові портрети, експоненти Ляпунова та біфуркаційний аналіз, вони виявляють переходи між регулярними та хаотичними станами в цій системі, які раніше не спостерігалися. Це дає низку умов для встановлення нових граничних множин, що виникають внаслідок цих двох явищ. Варіації параметрів системи, таких як величина крутного моменту двигуна або величина демпфування, можуть стабілізувати або нестабілізувати систему, що призводить до наслідків, включаючи складну динамічну поведінку.

У цій статті представлено ідеї, які можуть дати певне уявлення про стабільність і керування зв'язаними механічними системами. Ця стаття представляє нові явища, що спостерігаються в системі «сферичний маятник-електричний двигун», і робить дуже цінний внесок у нелінійну динаміку. Ці висновки мають значення для проектування механічних систем зі зв'язаними коливальними компонентами.

Огляд сценаріїв переходу до хаосу в неідеальних динамічних системах [16]

У статті [**16**] глибоко аналізуються механізми та сценарії переходу до хаосу в неідеальних динамічних системах. Увагу зосереджено на тих системах, які мають обмежену енергію або інші обмеження, що роблять їхню поведінку далекою від ідеалізованої моделі. Підкреслюється ключова роль нелінійностей і зовнішніх збурень у динаміці цих систем. Автор спочатку представляє теоретичне підґрунтя хаосу в динамічних системах, розглядаючи класичні сценарії переходу до хаосу, такі як каскад подвоєння періоду Фейгенбаума, переміжність Помо-Манневіля. Конкретні приклади неідеальних систем, що розглядаються як аналітично, так і чисельно, включають коливальні та зв'язані механічні пристрої.

Аналіз показує, як варіації параметрів - таких як частота збудження, демпфування і сила взаємодії - можуть спровокувати хаотичну поведінку. Детальна візуалізація показана у фазових портретах, біфуркаційних дерева та аналізі спектра характеристичних показників Ляпунова. Одним з головних внесків у цю роботу є дослідження незвичайних або гібридних випадків переходу до хаосу, що виникають лише в неідеальних системах. У зв'язку з цим він розглядає, як деякі з класичних сценаріїв переходу до хаосу можуть комбінуватися або навіть накладатися один на одного, тим самим даючи абсолютно нові форми динамічної поведінки, не досліджені до цього часу.

Ці уявлення розширюють наші знання про те, як хаос може виникати в практичній інженерії та природних системах. Таким чином, ця стаття є оглядом і розширенням теорії хаосу в неідеальних системах. Поєднуючи теоретичні поняття з практичними застосуваннями, автори надають необхідні рекомендації для тих дослідників і практиків, які зацікавлені в аналізі, прогнозуванні або контролі хаотичної поведінки в обмежених динамічних системах.

Біфуркації максимальних атракторів неідеальних маятникових систем. [17]

Ця доповідь [**17**] показує місце досліджуваної тематики в ширшій парадигмі - парадигмі динамічних систем, у тому числі, взагалі кажучи, нелінійних і суттєво залежних від зовнішніх параметрів. Звідси випливає актуальність таких матеріалів для певних структур машинобудування, робототехніки, фізики тощо. Автори надають вичерпне математичне підґрунтя для дослідження біфуркацій в неідеальних маятникових системах, де важливу роль відіграє джерело збудження коливань. Вони детально розглядають, як еволюціонують атрактори при зміні параметрів, як аналітично, так і чисельно.

Розглянуті в цій статті біфуркації представляють складні динамічні сценарії: переходи між періодичними і хаотичними станами пояснюють багато явищ, які часто трапляються в реальних механічних системах. Однією з сильних сторін цієї роботи є детальне пояснення механізмів біфуркацій, підкріплене чіткими діаграмами та результатами обчислень.

Автори ефективно пов'язують теоретичні висновки з практичним застосуванням, демонструючи, як неідеальні фактори, такі як тертя та втрата енергії системою, призводять до якісних змін у динаміці системи.

Зокрема, цей аспект є дуже корисним для проектування більш стабільних та ефективних механічних систем. У статті також представлено наслідки їхніх висновків для майбутніх досліджень, підкреслюючи, що подальші дослідження неідеальних систем можуть сприяти кращому прогнозуванню моделей в інженерії та інших сферах застосування. Поєднуючи теоретичні ідеї з практичними результатами, внесок Донецького і Швеця є просвітницьким у галузі прикладної математики і динамічних систем.

Типові та узагальнені переходи до детермінованого хаосу нетипових атракторів неідеальних динамічних систем [18]

У статті [**18**] автор продовжує розвивати складну динаміку неідеальних систем у термінах максимальних атракторів. Він зосереджує увагу на нелінійних системах п'ятого порядку, які знаходять застосування в моделюванні коливань сферичного маятника та гідродинамічних систем. Це дослідження робить великий внесок у розуміння детермінованого хаосу та механізмів переходу до нього в неідеальних динамічних системах.

Основним результатом статті є приклад реалізації сценарію узагальненої переміжності. Сценарій такого типу може пояснити переходи між хаотичними атракторами, які включають настільки тонкі та складні шляхи, що виходять далеко за межі класичної моделі. Результати, отримані на основі фазо-параметричних характеристик, аналізу спектру характеристичних показників Ляпунова та фазових портретів, розширюють уявлення про динамічну поведінку системи. Унікальною особливістю цієї роботи є спрямованість на прикладне застосування. Зокрема, саме при розгляді таких систем, як баки з рідиною та сферичні маятники, з'являються практичні наслідки для інженерної та прикладної фізики.

Розуміння переходів до хаосу дає змогу вдосконалити проектування стабільних систем з керованою динамікою. Результати не тільки розвивають розуміння переходів між різними типами хаотичних атракторів, але й відкривають багатообіцяючі перспективи для майбутніх досліджень складної динамічної поведінки в прикладних задачах.

Дослідження коливань вільної поверхні рідини в циліндричних баках має велике прикладне значення, оскільки багато сучасних машин і механізмів оснащені баками, частково заповненими рідиною. Важливим аспектом у вивченні динаміки таких систем є врахування зворотного впливу коливальної системи на джерело збудження коливань. Цей підхід виправданий лише у випадках, коли потужність джерела значно перевищує потужність, яку поглинає коливальна система. Такі ситуації прийнято вважати ідеальними за Зоммерфельдом-Кононенком.

У реальних випадках потужність джерела збудження часто може бути співставною з потужністю, яку поглинає коливальна система. У таких неідеальних випадках ігнорування зворотного впливу коливальної системи на джерело збудження може призвести до суттєвих помилок в оцінці динаміки системи. Це особливо важливо, оскільки може бути втрачена інформація про наявність хаотичних режимів, що має велике значення для точного моделювання та прогнозування поведінки цих систем.

3.2 Гідродинамічні системи

Дослідження коливань вільної поверхні рідини у циліндричних баках має велике прикладне значення, оскільки багато сучасних машин і механізмів містять циліндричні баки, частково заповнені рідиною. Важливим аспектом у вивченні таких гідродинамічних систем є врахування неідеальності джерела збурення коливань бака з рідиною. Однак у більшості досліджень динаміки таких систем нехтується зворотним впливом бака з рідиною на джерело збурення. Такий підхід є виправданим лише тоді, коли потужність джерела значно перевищує потужність, що поглинається баком із рідиною. Такі випадки називаються "ідеальними".

Проте у багатьох сучасних машинах і механізмах потужність джерела збурення є співставною з потужністю, яку споживає коливальне навантаження, тобто бак із рідиною. У таких "неідеальних"випадках нехтування зворотним впливом коливального навантаження на роботу джерела збурення може призвести до серйозних помилок у дослідженні динаміки системи. Зокрема, це може спричинити втрату інформації про наявність у системі детермінованих хаотичних режимів.

Хаос в динаміці механізмів з обмеженим джерелом збудже-

ння [19]

У статті [**19**] аналізується динамічна поведінка неідеальних систем, зокрема виникнення хаотичних режимів. Автори розглядають, як врахування взаємодії між джерелом збудження і коливальною системою при побудові моделі може призвести до змін у висновках про характер її динаміки. Вони підкреслюють, що в реальних технічних системах потужність джерела збудження часто є порівнянною з потужністю, яку поглинає сама система, що робить динамічну поведінку більш складною.

Автори відзначають, що традиційні підходи до побудови моделей динамічних систем, які ігнорують зворотний вплив між системою і джерелом збудження, можуть призвести до значних помилок. Це підкреслює важливість більш точного підходу до дослідження динаміки таких механізмів, зокрема у випадках, коли в системі виникають складні хаотичні режими.

Властивості хаотичних коливань рідини в циліндричних баках [**20**]

Стаття [**20**] присвячена дослідженню хаотичних коливань рідини в циліндричних баках. Основна увага приділяється умовам виникнення таких коливань і впливу різних параметрів системи на її динамічну поведінку. Автори аналізують динамічну систему за допомогою широкого спектру чисельних методів, серед яких метод чисельного інтегрування Рунге-Кутти для побудови фазових траєкторій системи, метод Беннетіна для обчислення характеристичних показників Ляпунова, метод Ено для побудови перерізів Пуанкаре та інші.

Додатково використовується спектральний аналіз для обчислення характеристик хаотичних режимів. Стаття підкреслює важливість розуміння та передбачення хаотичних процесів для ефективного управління динамікою рідин у промислових системах, де використовуються циліндричні баки.

Параметричний резонанс в системі: Рідина в баку + електродвигун [**21**]

У роботі [**21**] досліджується явище параметричного резонансу в системах, що включають рідину в баку і електродвигун. Автори розглядають взаємодію між коливаннями рідини та динамічною поведінкою електродвигуна, що може призвести до нелінійних ефектів, зокрема в умовах резонансу.

Для цієї системи побудовано математичну модель, яка враховує основні параметри, що визначають рух рідини та роботу двигуна. Аналіз рівнянь системи дозволяє виявити умови параметричного резонансу, які залежать від таких факторів, як частота обертання валу двигуна та власні частоти коливань рідини в баку. Для демонстрації динамічних відгуків системи використовуються чисельне моделювання та експериментальні перевірки. За допомогою фазових портретів і перерізів Пуанкаре автори показують, як відбуваються переходи від стабільного руху до параметричної нестабільності. Результати дослідження підкреслюють чутливість системи до змін робочих параметрів і пропонують можливі способи пом'якшення небажаних резонансних ефектів.

Ця робота є важливим внеском у розуміння параметричного резонансу в зв'язаних механіко-рідинних системах. Застосований підхід дозволяє з'єднати теоретичне моделювання з практичними рекомендаціями для проектування систем, що включають взаємодію рідини та механічних структур, таких як резервуари й коливальні пристрої, що приводяться в рух електродвигунами. Робота також створює основу для подальших досліджень у галузі складної зв'язаної динаміки.

Хаотичні коливання вільної поверхні рідини при коливаннях циліндричного баку з обмеженою потужністю збудження [22]

Стаття [**22**] досліджує хаотичні коливання поверхні рідини в циліндричних баках, коли коливання збуджуються джерелом з обмеженою потужністю. Автори вивчають умови, за яких регулярні коливання поверхні рідини можуть переходити в хаотичні динамічні режими. Особливу увагу приділено впливу обмеженої потужності на динамічну поведінку системи.

Автори показують, як коливання поверхні рідини можуть ставати хаотичними, коли потужність збудження не є достатньою для стабільного підтримання коливань, що призводить до виникнення нелінійних ефектів. Вони використовують математичні моделі для опису динаміки системи та чисельні методи для вирішення рівнянь, що описують коливання поверхні рідини в таких умовах. Для вивчення динаміки системи використовуються чисельні алгоритми та аналіз результатів за допомогою фазових діаграм і спектрального аналізу, що дозволяє виявити умови виникнення хаотичних коливань.

У статті також наведено області значень параметрів, за яких хаотичні коливання стають основним режимом системи. Ці результати важливі для розуміння складної поведінки рідин в технічних системах, де важливо контролювати резонансні і хаотичні ефекти. Автори також пропонують методи для пом'якшення небажаних хаотичних ефектів у таких системах.

Дослідження має велике значення для проектування механізмів, що включають взаємодію рідини та механічних структур, таких як резервуари з рідиною, де збудження коливань може бути обмежене.

Динамічний хаос при обмеженій потужності джерела збудження для коливань рідини в циліндричних баках [23]

Стаття [**23**] досліджує вплив обмеженої потужності джерела збудження на коливання рідини в циліндричних резервуарах, зокрема на можливість виникнення динамічного хаосу. Автори зосереджуються на тому, як потужність джерела збудження може бути недостатньою для підтримки регулярних коливань рідини, що призводить до переходу в хаотичні режими. Це дослідження має важливе значення для розуміння поведінки рідин у технічних системах, де енергетичні ресурси обмежені.

Для моделювання динаміки системи було розроблено математичну модель, яка враховує ключові параметри, що впливають на коливання рідини, а також характеристики джерела збудження. Чисельне моделювання показує, що при певних умовах навіть незначні зміни в параметрах збудження можуть призвести до виникнення хаотичних коливань. Автори використовують різні методи аналізу, зокрема фазові діаграми та спектральні техніки, для вивчення переходів між стабільними і хаотичними режимами. Дослідження також висвітлює області значень параметрів, де хаотичні коливання можуть бути основним режимом, і вказує на важливість контролю цих параметрів для уникнення небажаних ефектів.

Результати можуть бути корисними для проектування технічних систем, що включають рідинні резервуари, де існує потреба у контролі коливань при обмеженій потужності збудження.

Автори пропонують способи пом'якшення хаотичних ефектів, що дозволяє підвищити стабільність та ефективність таких систем.

Особливості переходу до хаосу в неідеальних гідродинамічних системах [24]

Стаття [**24**] аналізує особливості переходу до хаосу в гідродинамічних системах, що характеризуються неідеальністю. Автори зосереджуються на вивченні динамічної поведінки рідин в системах, де існують складні нелінійні взаємодії, що можуть спричиняти хаотичні явища. Вони розглядають умови, при яких стійкі, регулярні коливання переходять у хаотичні режими, підкреслюючи роль неідеальних факторів, таких як тертя та дисипативні процеси. Стаття містить математичний опис таких систем.

Дослідження показує, що навіть при незначних змінах параметрів системи можна спостерігати перехід до хаосу, що робить систему чутливою до зовнішніх впливів. Окремо вивчаються методи аналізу, включаючи чисельне моделювання та аналіз фазових портретів, що дозволяє детальніше розглядати поведінку системи за різних значень параметрів. Автори також зосереджуються на впливі дисипативних процесів на виникнення хаотичних режимів, що дозволяє краще зрозуміти механізм переходу до хаосу. Вони наводять приклади, де навіть невеликі зміни у внутрішніх параметрах можуть спричинити значні зміни в поведінці системи. Ці результати мають важливе значення для розробки методів контролю та оптимізації роботи гідродинамічних систем в технічних додатках, де важливо уникати хаотичних режимів.

Стаття робить важливий внесок у теоретичне розуміння переходу до хаосу в неідеальних гідродинамічних системах і відкриває можливості для подальших досліджень у цій галузі.

Нові сценарії переходу до детермінованого хаосу в неідеальних коливальних системах [25]

Стаття [**25**] розглядає нові підходи до дослідження сценаріїв переходу до детермінованого хаосу в неідеальних коливальних системах. Автори фокусуються на вивченні нелінійних систем. Вони аналізують умови, за яких системи, що мають регулярний характер динаміки, можуть переходити в хаос, навіть коли зовнішнє збудження залишається сталим. Для цього автори розробляють математичні моделі, які враховують як параметри збудження, так і внутрішні нелінійні взаємодії.

Результати чисельного моделювання показують, як варіації в параметрах системи можуть спричинити різкий перехід від регулярних коливань до хаотичних режимів. Використовуються фазові портрети та спектральний аналіз для виявлення областей параметрів, де хаос стає основним режимом роботи системи. Автори підкреслюють важливість врахування дисипативних ефектів і внутрішніх взаємодій при аналізі таких систем, оскільки ці фактори можуть істотно змінювати динаміку коливань. Зокрема, досліджуються випадок, коли в системі присутні симетричні атрактори, які переходять до хаосу за сценарієм Фейгенбаума. Також наведений приклад реалізації сценарію узагальненої переміжності типу "хаос-хаос".

Робота дає нове розуміння динаміки неідеальних коливальних систем і розширює можливості для контролю та оптимізації таких систем у технічних застосуваннях, де хаотична поведінка може бути небажаною.

Нелінійна динаміка-2016: матеріали 5-ї Міжнародної конференції [26]

У статті [**26**] викладено результати дослідження поведінки нелінійних динамічних систем із врахуванням специфічних впливів зовнішніх збурень. Основна увага зосереджена на розробці методів розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь, що описують нестійкі режими у механічних і технічних системах. Автори детально аналізують умови стабільності таких систем, застосовуючи підхід, що базується на багатополярних функціях Рвачова. Зокрема, вони демонструють, як цей метод дозволяє знизити складність обчислень і підвищити точність моделювання динамічних процесів.

У статті наведено приклади чисельного розв'язання задач для систем із коливаннями різної природи, включно з нелінійними автоколиваннями. Одним із ключових результатів є запропонований алгоритм оцінки стійкості руху за наявності нерегулярних збурень. Автори також показують, що використання їх підходу дозволяє прогнозувати переходи між режимами руху, які можуть мати критичне значення для технічних систем. Стаття містить конкретні приклади інженерного застосування отриманих методів, зокрема в аналізі вібраційних систем і механізмів із змінними характеристиками.

Ці результати мають практичну цінність для вдосконалення конструкцій машин і механізмів, а також підвищення їхньої надійності.

Гіперхаос у коливальних системах з обмеженим збудженням [27]

У статті [**27**] досліджуються режими гіперхаосу в коливальних системах з обмеженим збудженням. Основна увага приділена демонстрації існування таких режимів та аналізу їхніх властивостей. Автори розглядають системи з нелінійними взаємодіями, у яких поєднання обмеженої енергії збудження і специфічних параметрів може призводити до складної динаміки. Використовуючи чисельне моделювання, автори демонструють наявність гіперхоаотичних режимів, які характеризуються кількома додатніми показниками Ляпунова.

У статті наведено приклади поведінки таких систем у фазовому просторі, а також проведено аналіз спектрів Ляпунова для виявлення відмінностей між хаотичними і гіперхоаотичними станами. Окрему увагу приділено впливу параметрів системи на динамічні режими, зокрема на умови переходу від регулярного руху до гіперхаосу. Результати роботи показують, що навіть у системах із простими конструкціями можливе виникнення складної поведінки, що має значення для прикладних задач.

Стаття є важливим внеском у дослідження динамічних систем і може бути корисною для вивчення складних коливальних процесів у технічних і фізичних об'єктах. Висновки авторів підкреслюють перспективність аналізу гіперхаотичних режимів для розуміння нелінійних явищ у різних системах.

Сценарії переходів до гіперхаосу в неідеальних коливальних системах [28]

У статті [**28**] досліджено механізми виникнення гіперхоаосу в неідеальних коливальних системах. Основна увага приділяється аналізу сценаріїв переходу від регулярної динаміки до гіперхоаотичних режимів, які характеризуються кількома додатними показниками Ляпунова. Автори проводять аналіз різних типів нелінійностей, що впливають на динамічну поведінку систем, та показують, як взаємодія цих факторів може призводити до складних режимів.

У роботі використано чисельні методи для вивчення фазових переходів, що супроводжують зміну динамічних станів. Зокрема, розглянуто вплив параметрів зовнішнього збудження, дисипації та нелінійного зворотного зв'язку на появу гіперхоаосу. Одним із ключових результатів є виявлення специфічних сценаріїв переходу, таких як послідовність біфуркацій Хопфа чи каскади подвоєння періоду, що зрештою призводять до гіперхоаотичних станів. Автори також вказують на умови, за яких такі переходи можуть бути керованими, що має значення для практичного застосування. Робота є вагомим внеском у дослідження нелінійних динамічних систем, демонструючи можливості прогнозування та контролю складної динаміки.

Отримані результати можуть знайти застосування у фізиці, техніці та інших галузях, де важливим є розуміння механізмів виникнення складних режимів.

3.3 Система генератор — випромінювач

Одним із ключових компонентів сучасного навігаційного обладнання є п'єзокерамічні випромінювачі. Різні типи таких випромінювачів широко застосовуються у глибиномірах, далекомірах, пристроях для сканування підводного простору, а також у системах передачі та прийому інформації під водою. Останнім часом для збудження коливань п'єзокерамічних випромінювачів знову почали використовувати електролампові LC-генератори.

Це пов'язано з відродженням популярності аналогових лампових генераторів, які забезпечують значно кращі метрологічні характеристики вихідних сигналів порівняно з цифровими пристроями.

Хаотичні режими взаємодії в детермінованій системі «генератор - п'єзокерамічний випромінювач [29]

У статті [**29**] розглядається нелінійна динаміка детермінованої системи "генератор – п'єзокерамічний випромінювач"із акцентом на виникнення і характеристики хаотичних режимів. Ця система має велике практичне значення у технологіях, пов'язаних із використанням ультразвукових випромінювачів. У роботі систематизовано режими роботи системи залежно від параметрів і початкових умов.

Виявлено дивні атрактори, які є ключовою характеристикою хаотичних систем. На фазових портретах дивні атрактори мають фрактальну структуру, що вказує на складну динамічну поведінку системи. Чисельно визначено спектри показників Ляпунова, які включають додатні значення. Додатні показники свідчать про наявність хаотичної поведінки. Зворотний зв'язок між генератором і п'єзокерамічним елементом виявився критичним для виникнення хаосу.

Детермінований хаос у системі генератор - п'єзокерамічний випромінювач [30]

Стаття [**30**] присвячена аналізу хаотичних режимів у системі "генератор – п'єзокерамічний перетворювач"(GPC-система), що є типовою нелінійною електромеханічною системою. Авторами розглянуто механізми виникнення хаосу, його динамічні характеристики, а також сценарії переходу до хаотичного стану.

Авторами сформульовано математичну модель, що враховує нелінійні електричні характеристики генератора, резонансні властивості та демпфування п'єзокерамічного елемента., а також зворотний зв'язок між електричними і механічними частинами.

У моделі враховано вплив таких параметрів, як частота генератора, демпфування, і нелінійність механічного відгуку.

Аналіз траєкторій у фазовому просторі підтвердив існування хаотичних режимів, що виникають через нелінійність і зворотній зв'язок в системі. Визначено показники Ляпунова для різних режимів роботи системи:

1. У регулярних режимах всі показники були недатніми, що свідчило про стійкість траєкторій.

2. У хаотичних режимах наявність одного або кількох додатних показників підтверджувала чутливість системи до початкових умов і характерну ознаку хаосу.

Динамічний хаос у п'єзокерамічних системах з обмеженим збудженням [31]

У статті [**31**] досліджено явище детермінованого хаосу в п'єзокерамічних системах із обмеженою потужністю. Автори зосереджуються на аналізі динамічної поведінки таких систем і визначенні умов виникнення хаотичних режимів.

У статті використовуються диференціальні рівняння, що враховують нелінійність електромеханічного перетворення в п'єзокерамічних елементах, енергетичні обмеження генератора, зворотні зв'язки між механічними та електричними коливаннями.

Виявлено, що при зміні частоти або амплітуди сигналу генератора система переходить у хаотичні режими. В хаотичних режимах коливання стають непередбачуваними, але їх динаміка залишається детермінованою.

У фазовому просторі хаотичні режими відповідають дивним атракторам, які мають фрактальну структуру. Замість регулярних замкнених траєкторій спостерігаються складні неперіодичні траєкторії, що відображають нерегулярність руху. Додатні показники Ляпунова підтверджують чутливість до початкових умов і наявність детермінованого хаосу.

Найбільш типовим сценарієм переходу до хаосу є каскад біфуркацій подвоєння періоду, коли стійкі періодичні розв'язки поступово переходять до більш складних режимів із періодом у два, чотири і т.д., аж до хаосу. Також в цій системі можливі інші сценарії переходу до хаосу, зокрема через сценарій переміжності переміжності за Маневілем-Помо.

В статті детально досліджено вплив параметрів системи на її динаміку.

Обмеження потужності генератора є ключовим фактором, що визначає стійкість системи. У разі недостатньої потужності система не здатна підтримувати регулярні коливання, що може сприяти переходу до хаотичних режимів.

Зміна частоти генератора призводить до зміни резонансних характеристик системи, що може призводити до хаосу. Амплітуда сигналу впливає на енергію коливань і, відповідно, на характер їх динаміки. Робота демонструє, що обмеження потужності генератора є критичним фактором для динаміки п'єзокерамічних систем. Детермінований хаос може бути як загрозою для стійкості системи, так і корисним інструментом для практичних застосувань. Отримані результати мають важливе значення для оптимізації роботи п'єзокерамічних пристроїв і відкривають перспективи для подальших досліджень у цій сфері.

Про нелінійну та неідеальну взаємодію у двох задачах про коливання [32]

У статті [**32**] розглянуто нелінійні та неідеальні взаємодії у двох механічних системах, що піддаються вібраціям. Автори аналізують динамічну поведінку цих систем у контексті взаємодії між джерелом живлення (неідеальним) і механічними коливаннями, приділяючи особливу увагу явищам резонансу, хаосу та стійкості. Умови стабільності систем суттєво залежать від потужності джерела енергії - низька потужність може спричиняти нестабільність, нелінійності зворотного зв'язку - сильний зворотний зв'язок підвищує ймовірність переходу до хаосу.

Робота розширює розуміння взаємодії між неідеальними джерелами енергії та механічними системами з нелінійною динамікою. Обидві розглянуті системи демонструють широкий спектр поведінки — від регулярних коливань до хаотичних режимів.

Гіперхаос у п'єзокерамічних системах з обмеженим збудженням [33]

У статті [**33**] досліджено явище гіперхаосу в п'єзокерамічних системах, що живляться від джерел з обмеженою потужністю. Основна увага приділяється вивченню динамічної поведінки системи, умовам виникнення гіперхаосу та його характеристикам.

Гіперхаос визначено як стан, у якому система має більше ніж один додатний показник Ляпунова, що свідчить про наявність множинної чутливості до початкових умов.

У п'єзокерамічній системі гіперхаос виникає при певних параметрах джерела енергії, таких як обмеження потужності і нелінійність електромеханічного зв'язку. Перехід від регулярних або хаотичних режимів до гіперхаотичних пов'язаний із зростанням потужності нелінійностей і нестачею енергії через обмеження джерела живлення.

Фазові портрети демонструють складні багатовимірні структури, характерні для гіперхаотичних систем. Спостерігаються каскадні біфуркації подвоєння періоду, які переходять у стан гіперхаосу.

Нелінійні взаємодії в п'єзокерамічному стрижневому випромінювачі, що живиться від вакуумної трубки з неідеальним джерелом [34]

У статті [34] досліджено динамічну поведінку п'єзокерамічного стрижневого перетворювача, живленого від електровакуумної лампи, яка виступає як неідеальне джерело енергії. Основна увага приділяється нелінійній взаємодії між компонентами системи та їх впливу на стійкість і динамічні режими.

За низького рівня нелінійності та стабільного живлення система демонструє періодичні коливання, що відповідають стандартній роботі перетворювача. При підвищенні рівня нелінійності або зміні параметрів джерела енергії система переходить до складних режимів, включаючи подвоєння періоду і квазіперіодичні коливання.

Визначено умови, за яких система демонструє детермінований хаос через взаємодію нелінійних елементів і коливань, індукованих джерелом.

Система чутлива до характеристик електровакуумної лампи: Обмежена потужність джерела впливає на стійкість сигналу, знижуючи ефективність роботи перетворювача.

Автори підкреслюють, що взаємодія між джерелом і перетворювачем є ключовим фактором, який визначає загальну динаміку системи.

Дослідження показало, що динаміка п'єзокерамічного стрижневого перетворювача суттєво залежить від неідеальностей джерела живлення. Система демонструє широкий спектр режимів, включаючи регулярні, резонансні, квазіперіодичні та хаотичні.

Перехід до детермінованого хаосу в деяких електропружних системах [35]

У статті [**35**] досліджується явище переходу до детермінованого хаосу в електропружних системах. Основна увага зосереджена на аналізі умов, за яких регулярна поведінка таких систем змінюється на хаотичну, а також на методах ідентифікації та опису хаотичних режимів. Визначено ключові параметри, які впливають на перехід до хаосу: сила зворотного зв'язку - сильніший зв'язок сприяє нелінійній динаміці, зовнішнє збудження: частота та амплітуда мають значний вплив на стійкість системи, енергія джерела живлення - обмеження на потужність прискорюють перехід до хаосу.

Стаття надає глибокий аналіз переходу до хаосу в електропружних системах. Автори показали, що такі системи можуть демонструвати широкий спектр поведінки, від регулярних коливань до складних хаотичних режимів.

Ідентифікація прихованих і рідкісних атракторів у деяких електропружних системах з обмеженим збудженням [36]

У статті [**36**] розглядається питання виявлення прихованих і рідкісних атракторів у електропружних системах з обмеженим збудженням. Зокрема, акцент зроблено на методах ідентифікації таких атракторів та їхніх особливостях у контексті складних нелінійних систем. Показано, що електропружні системи можуть демонструвати приховані атрактори, які не проявляються в стандартних дослідженнях динаміки.

Виявлено рідкісні атрактори, що виникають лише за певних умов, таких як обмежене збудження або специфічні параметри нелінійності. Підтверджено наявність прихованих атракторів за допомогою побудови фазових портретів і відображень Пуанкаре.

Ідентифікація прихованих та рідкісних атракторів у деяких електропружних системах з обмеженим збудженням [37]

У статті [**37**] розглядається ідентифікація прихованих та рідкісних атракторів у електропружних системах, що працюють під умовами обмеженого зовнішнього збудження. Основна увага зосереджена на вивченні динамічної поведінки систем і методах їх аналізу для виявлення рідкісних атракторів. Описано електропружну систему за допомогою нелінійних диференціальних рівнянь, що включають як електричні, так і механічні аспекти.

У моделі враховано зворотний зв'язок між електричними та механічними характеристиками системи, а також обмеження на зовнішнє збудження. Підтверджено, що електропружні системи з обмеженим збудженням можуть демонструвати приховані атрактори, які не видно при звичайному аналізі системи.

Виявлено, що приховані атрактори часто мають складну структуру та не проявляються за стандартних умов збудження. Показано, що значення таких параметрів, як рівень зовнішнього збудження, частота збудження та нелінійні характеристики матеріалу, суттєво впливають на наявність і поведінку атракторів.

Зміни параметрів можуть призводити до переходу від регулярної динаміки до хаотичних і навіть до прихованих атракторів. Дослідження показало, що електропружні системи можуть демонструвати приховані та рідкісні атрактори, що мають значний вплив на їхню динаміку.

Запропоновані методи чисельного аналізу є ефективними для виявлення таких атракторів і можуть бути використані для подальших досліджень та практичного застосування у розробці систем з високою чутливістю та стабільністю.

Цикл-хаос-гіперхаос у деяких неідеальних електропружних системах[38]

У статті [38] розглядаються біфуркації у нелінійних електропружних системах, що працюють під обмеженим збудженням, з особливою увагою на переходи між регулярною, хаотичною та гіперхаотичною динамікою. Автори досліджують, як зміни параметрів системи можуть спричинити зміни у типах динамічних режимів, що виникають у системах.

Зміни параметрів, такі як рівень зовнішнього збудження або нелінійні характеристики матеріалу, викликають біфуркації, що приводять до зміни типу атракторів у фазовому просторі. Обмежене збудження впливає на характеристики переходу між режимами, змінюючи умови для виникнення хаосу та гіперхаосу.

Показано, що в умовах обмеженого збудження біфуркації між циклами, хаосом і гіперхаосом відбуваються за більш вузьких діапазонів параметрів.

Дослідження показало, що електропружні системи можуть демонструвати складні біфуркації між циклічними, хаотичними та гіперхаотичними режимами. Автори розробили чисельні методи для виявлення та аналізу таких переходів і продемонстрували вплив обмеженого збудження на динамічну поведінку систем.

4 Висновок

У даній дипломній роботі було проведено огляд результатів наукових досліджень теорії неідеальних динамічних систем.

Розглянувши теоритичні відомості, досягнення науковців та результати їх досліджень, а також проаналізувавши основні підходи до їх дослідження та перспективи для їх подальшого розвитку у застосуванні, можна зробити висновок про те, що роль теорії неідельних динамічних систем є актуальною для подальших досліджень.

Удосконалення теорії неідеальних динамічних систем відкриє широкі перспективи для розв’язання багатьох прикладних задач і забезпечення більш глибокого розуміння складних процесів, які відбуваються у будь-якій галузі.

5 Бібліографія

Література

[1] Швець О.Ю., Детермінований хаос, Київ: НТУУ "КПІ".-2010.-93 с.

[2] J. Lichtenberg, M. A. Lieberman, Regular and Chaotic Dynamics, AMS, volume 38, Springer Sciences Media 1992, 693 p

[3] V. Afraimovich, S.B. Hsu., Lectures on chaotic dynamical systems, Sommerville, International Press, 2003.

[4] T.S. Krasnopolskaya and A.Yu. Shvets, Regular and chaotic dynamics of systems with limited excitation. M.: Research Center Regular and Chaotic Dynamics, 2008, 280 p.

[5] Handbook of Applications of Chaos Theory; Edited By C.H. Skiadas and Char. Skiadas. Chapman and Hall, CRC, 2016, 952 p.

[6] Швець О.Ю. Динамічні системи, Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021, 345 с.

[7] Краснопольская Т.С., Швец А.Ю. Хаотические режимы взаимодействия в системе "маятник—источник энергии Прикл. мех. -1990. - Т. 26, №5. - с. 90-96.

[8] Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu. Chaotic oscillations of a spherical pendulum as the effect of interaction with excitation device, Complexity in Physics and Technology., Singapore: World Scientific. - 1992. - p. 77-89.

[9] Краснопольская Т.С., Швец А.Ю. Хаотические колебания сферического маятника как эффект взаимодействия с источником энергии, Прикл. мех. - 1992. - Т. 28, №10. - с. 61-68.

[10] Швец А.Ю, Детерминированный хаос сферического маятника при ограниченном возбуждении, Укр. мат. журн. - 2007. - Т. 59, № 4. - с. 534-548.

[11] Shvets A.Yu., Makaseyev A.M. Chaotic Oscillations of Nonideal Plane Pendulum Systems, Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal, 2012, № 1. – pp. 195-204.

[12] Shvets A.Yu., Makaseyev A.M. Delay Factors and Chaotization of Non-ideal Pendulum Systems, Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM), Journal, 2012, № 4. – pp. 633-642.

[13] Макасєєв О.М., Швець О.Ю., Моделювання впливу запізнювання на коливання маятників при обмеженому збудженні , Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2013. - № 5. – с. 40-45.

[14] Shvets A.Yu., Makasyeyev A.M. Chaos in Pendulum Systems with Limited Excitation in the Presence of Delay, Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM),Journal, 2014, № 3, pp. 233 – 241.

[15] Shvets A. Yu., Donetskyi S.V. New Types of Limit Sets in the Dynamic System "Spherical Pendulum—Electric Motor"Nonlinear Mechanics of Complex Structures., Advanced Structured Materials, vol 157. Springer, Cham. 2021, pp. 443-455.

[16] Shvets A. Overview of Scenarios of Transition to Chaos in Nonideal Dynamic Systems, Springer Proceedings in Complexity. 4

[17] С.В. Донецький, О.Ю. Швець, Біфуркації максимальних атракторів неідеальних маятникових систем. Допов. Нац. акад. наук Укр. 2022. No 3. с. 13—19

[18] О.Ю. Швець, Типові та узагальнені переходи до детермінованого хаосу нетипових атракторів неідеальних динамічних систем.Системні дослідження та інформаційні технології, 2022, № 4, с.141-150.

[19] Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu. Chaos in dynamics of machines with a limited power-supply, 8-th World Congr. on the Theory of Machines and Mechanisms., Eds. M. Okrolnick, L. Pust. Prague: Czechoslovak Acad. Sci., Vol. 1- pp. 181-184, 1991.

[20] Краснопольская Т.С., Швец А.Ю. Свойства хаотических колебаний жидкости в цилиндрических баках, Прикл. мех. - 1992. - Т. 28, № 6. - С. 52-61.

[21] T.S. Krasnopol'skaya and A.Y. Shvets, Parametric resonance in the system: Liquid in tanks +electric motor, Int. Appl. Mech., 29(9), № 6. pp. 722–730, 1993.

[22] T.S. Krasnopolskaya and A.Yu. Shvets, Chaotic surface waves in limited power—supply cylindrical tank vibrations, J. Fluids Struct.,8(1), pp. 1–18, 1994.

[23] T. S. Krasnopol'skaya and A. Yu. Shvets, Dynamical chaos for a limited power supply for fluid oscillations in cylindrical tanks, J.Sound Vibrat., 322, No. 3, 532–553,2009.

[24] Shvets A.Yu., Sirenko V.O. Peculiarities of Transition to Chaos in Nonideal Hydrodynamics Systems, Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) Journal, 2012, № 2. – pp. 303-310.

[25] A.Yu. Shvets, V.O. Sirenko, New Ways of Transitions To Deterministic Chaos In Non Ideal Oscilallating Systems, Research Bulletin of National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute". — 2015, № 1(99). – p. 45 – 51.

[26] Aleksandr Yu. Shvets, Vasiliy Sirenko Nonlinear Dynamics–2016 (ND-KhPI2016): proceedings of 5th International Conference, dedicated to the 90th anniversary of Academician V. L. Rvachev, September 27-30, 2016. – Kharkov : NTU "KhPI 2016. – pp. 222-229.

[27] Shvets A., Sirenko V. O. Hyperchaos in Oscillating Systems with Limited Excitation, Springer Proceedings in Complexity, Springer Cham, p. 265 – 273, 2019.

[28] A.Yu. Shvets and V.A. Sirenko, Scenarios of transitions to hyperchaos in nonideal oscillating systems, J. Math. Sci., 243(2), pp. 338–346, 2019.

[29] Швец А.Ю., Хаотические режимы взаимодействия в детерминированной системе "генератор - пьезокерамический излучатель Вопросы аналитической механики и ее применений: Праці Ін-ту математики НАН України. - 1999. - Т. 26. - с. 407-419.

[30] Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu. Deterministic chaos in a system generator - piezoceramic transducer, Nonlinear Dynamics and Systems Theory — 2006. - Vol. 6, № 4. – pp. 367-387.

[31] Швець О.Ю., Краснопольська Т.С. Динамічний хаос в п'єзокерамічних системах обмеженої потужності. Частина 2,

Наукові вісті Нац. тех. ун-ту України "КПІ". - 2006, № 3. - с. 147-154.

[32] Palasios Felix J.L., Balthazar J.M et al., On Non-Linear and Non-Ideal Interaction In Two Vibrating Problems, Proc. of ASME IDET/CIE.- 2007. —- Las Vegas, Nevada, USA. — DETC 2007. - pp. 1-10.

[33] A.Yu. Shvets and T.S. Krasnopolskaya, Hyperchaos in piezoceramic systems with limited power supply, Solid Mechanics and its Applications , 6, pp. 313–322, 2008.

[34] Balthazar J.M., Palasios Felix J.L. et al. Nonlinear Interactions in a Piezoceramic Bar Transducer Powered by Vacuum Tube Generated by a Nonideal Source, Journal of Computational and Nonlinear Dynamics.- 2009.-Vol. 4, № 1.-011013.-p. 1-6.

[35] Shvets A. Yu., Donetskyi S.V. Identification of Hidden and Rare Attractors in Some Electroelastic Systems with Limited Excitation, Proceedings of the 13th Chaotic Modeling and Simulation International Conference (9-12 June, 2020), 2020 – pp. 819 – 832.

[36] Shvets A. Yu., Donetskyi S.V. Identification of Hidden and Rare Attractors in Some Electroelastic Systems with Limited Excitation, Proceedings of the 13th Chaotic Modeling and Simulation International Conference (9-12 June, 2020), 2020 – pp. 819 – 832.

[37] Shvets A., Donetskyi S. Identification of Hidden and Rare Attractors in Some Electroelastic Systems with Limited Excitation. Springer Proceedings in Complexity. Springer, Cham. pp. 865-878, 2021.

[38] Donetskyi, S.V., Shvets, A.Y. Bifurcations "Cycle–Chaos–Hyperchaos" in Some Nonideal Electroelastic Systems. In: Balthazar, J.M. (eds) Nonlinear Vibrations Excited by Limited Power Sources. Mechanisms and Machine Science, vol 116. Springer, Cham, 2022