Математичний бій для студентів 1-2 курсів до дня числа π

8 березня 2025 р.

I раунд

1. Для кожної неперервної функції $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, позначимо

$$I(f) = \int\limits_0^1 x^2 f(x)\,dx, \qquad J(f) = \int\limits_0^1 x\,(f(x))^2\,dx.$$

   Знайти максимум виразу $I(f) - J(f)$ по всім неперервним функціям f.

2. Нехай

$$V = \{f(x) \in C[0,1] \quad | \quad f(0) = 0, f(1) = 1, \quad \forall x \in (0,1) \quad \exists f'(x)\}$$

   Знайти усі $\alpha \in \mathbb{R}$, що для кожної $f \in V$ існує $\xi \in (0,1)$, для якого $f(\xi) + \alpha = f'(\xi)$.

3. Симетричний кубик зі сторонами $(0,1,2,3,4,5)$ підкидають до появи комбінації "2025". Скільки в середньому знадобиться підкидань?

4. Нехай $a_i \in \mathbb{N}$ для всіх цілих $i \geq 0$ і функція $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ така, що $f(n) = a_n$ і $f(f(n)) = n + 4, \forall n \in \mathbb{N}$. Знайти:

$$a_{2025} + a_{2026} + a_{2027} + a_{2028}.$$

5. Про многолчен P з цілими коефіцієнтами відомо, що

$$P(i) = P(j) = P(k) = P(l) = P(m) = 2025$$

   для деяких різних цілих i, j, k, l, m. Скільки існує таких цілих n, що $P(n) = 2028$

6. Восьмикутник $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ вписано в коло, з вершинами вздовж кола в даному порядку. Враховуючи, що многокутник $P_1P_3P_5P_7$ є квадратом площа якого рівна 5, а многокутник $P_2P_4P_6P_8$ є прямокутником з площею 4, знайти максимально можливу площу восьмикутника.

II раунд

7. Нехай G та V - це множина всіх натуральних чисел, менших за 10^{2025}, сума цифр яких є парною та непарною відповідно. Наприклад, число 2025 належить до V, оскільки сума його цифр, 9, є непарною.

   Визначити, яка з сум більша $\sum\limits_{g\in G} g^2$ чи $\sum\limits_{v\in V} v^2$?

8. Довести, що для будь-яких додатних чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$:

$$a_1^{a_1}a_2^{a_2}\ldots a_n^{a_n} \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{\sum_{k=1}^{n} a_k}$$

9. Нехай A — дійсна матриця 3×3, така що вектори Au та u ортогональні для кожного вектора-стовпця $u \in \mathbb{R}^3$.

   Довести, що:

   а) $A^T = -A$, де A^T позначає транспоновану матрицю A;

   б) Існує вектор $v \in \mathbb{R}^3$ такий, що $Au = v \times u, \forall u \in \mathbb{R}^3$ (де $v \times u$ позначає векторний добуток у $\mathbb{R}^3$).

10. Нехай дійсні числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ та x з інтервалу $(0;1)$, зодовольняють наступну рівність:

$$\frac{a_0}{1-x} + \frac{a_1}{1-x^2} + \ldots + \frac{a_n}{1-x^{n-1}} = 0.$$

   Довести, що існує таке дійсне число y з інтервалу $(0;1)$, що задовольняє наступній рівності:

$$a_0 + a_1 y + \ldots + a_n y^n = 0.$$