

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 519.21

До захисту допущено
Завідувач кафедри
Олег КЛЕСОВ

Магістерська дисертація
на здобуття ступеня магістра
за освітньо-науковою програмою
«Страхова та фінансова математика»
зі спеціальності 111 «Математика»
на тему: «Ймовірність банкрутства в моделях ризику з
 φ -субгауссовими випадковими величинами виплат»

Виконав:

студент II курсу магістратури, групи ОМ-31мн

Кравець Артем Юрійович

Керівник:

доктор фізико-математичних наук, доцент

Василик Ольга Іванівна

Рецензент:

канд. фіз.-мат. наук, заступник декана з наукової роботи
механіко-математичного факультету

Київського національного університету

імені Тараса Шевченка

Яневич Тетяна Олександрівна

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних
посилань

Студент

Київ – 2025 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Олег КЛЕСОВ

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Кравцю Артему Юрійовичу

1. **Тема дисертації** «Ймовірність банкрутства в моделях ризику з φ -субгауссовими випадковими величинами виплат», науковий керівник дисертації Василик Ольга Іванівна, доктор фізико-математичних наук, доцент, затверджені наказом по університету від «21» березня 2025 р. №1276-с.
2. **Термін подання** студентом дисертації «15» травня 2025 року.
3. **Об'єкт дослідження** процес ризику з φ -субгауссовими випадковими величинами виплат.
4. **Предмет дослідження** оцінка ймовірності банкрутства у процесі ризику з φ -субгауссовими випадковими величинами виплат.
5. **Перелік завдань, які потрібно розробити**
 - (а) Ознайомитись з літературою на тему φ -субгауссових випадкових процесів.
 - (б) Користуючись літературними джерелами, дослідити оцінку ймовірності виходу траєкторії φ -субгауссового випадкового процесу за рівень, заданий деякою неперервною функцією.

- (в) Знайти оцінку ймовірності банкрутства процесу ризику у вигляді біноміальної суми з φ -субгауссовими випадковими виплатами у випадку, коли функція φ має заздалегідь заданий вираз.
 - (г) Побудувати приклад процесу ризику у вигляді біноміальної суми $X(t)$ з φ -субгауссовими випадковими виплатами та, використовуючи знайдену оцінку, оцінити ймовірність банкрутства для процесу ризику $X(t)$ у випадку, коли функція φ має заздалегідь заданий вираз.
 - (д) Зробити висновки з отриманих результатів.
6. **Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу**
22 слайди.
7. **Дата видачі завдання** «04» лютого 2025 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомлення з темою магістерської роботи та літературою	04.02.2025 – 10.02.2025	Виконано
2.	Опрацювання першого та другого розділу монографії « φ -субгауссові випадкові процеси» О.І. Василик, Ю.В. Козаченко, Р.Є. Ямненко.	11.02.2025 – 24.02.2025	Виконано
3.	Вивчення необхідних означень та теорем для оцінки ймовірності виходу траєкторії φ -субгауссового випадкового процесу за рівень, заданий деякою неперервною функцією.	25.02.2025 – 15.03.2025	Виконано
4.	Знаходження оцінки ймовірності банкрутства процесу ризику у вигляді біноміальної суми з φ -субгауссовими випадковими виплатами у випадку, коли функція φ має заздалегідь заданий вираз.	16.03.2025 – 11.04.2025	Виконано
5.	Побудова прикладу процесу ризику у вигляді біноміальної суми $X(t)$ з субгауссовими випадковими величинами виплат. Знаходження оцінки ймовірності банкрутства для процесу ризику $X(t)$.	12.04.2025 – 22.04.2025	Виконано
6.	Оформлення дипломної роботи	23.04.2025 – 14.05.2025	Виконано

Студент

Артем КРАВЕЦЬ

Науковий керівник

Ольга ВАСИЛИК

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 30 сторінок, 22 слайди для проектора, 10 першоджерел.

Актуальність дослідження полягає в тому, що в сучасних умовах розвитку фінансових ринків зростає необхідність у точних математичних методах для аналізу та прогнозування поведінки різних фінансових інструментів та процесів. Використання класичних підходів, таких як застосування гауссових випадкових процесів, часто є недостатнім для моделювання складних фінансових явищ, що мають нестандартні розподіли або вимагають врахування складних залежностей.

У зв'язку з цим, дослідження сучасних підходів до аналізу випадкових величин, які виходять за рамки традиційних гауссових моделей, стає критично важливим для фінансових аналітиків, банків, страхових компаній та інших учасників фінансового ринку. Впровадження нових методів дозволить не тільки покращити точність прогнозів, але й забезпечити більш ефективне управління ризиками, що є ключовим чинником стабільності у фінансовій сфері.

Наразі відомо, що у таких прикладних галузях як фінанси і страхування спостерігаються випадкові процеси, які не можна вважати гауссовими, звідки випливає пряма необхідність у розвитку та застосуванні теорії φ -субгауссових випадкових процесів як розширення відповідної теорії гауссових випадкових процесів.

Мета і завдання роботи: оцінювання ймовірності банкрутства для процесу ризику, представленого у вигляді біноміальної суми з φ -субгауссовими випадковими величинами виплат, у випадку, коли функція φ має заздалегідь заданий вираз.

Об’єкт дослідження: Процес ризику з φ -субгауссовими випадковими величинами виплат.

Предмет дослідження: оцінка ймовірності банкрутства у процесі ризику з φ -субгауссовими випадковими величинами виплат.

Для отримання вказаних результатів використано основні поняття та деякі результати з теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів, теорії φ -субгауссових випадкових процесів.

В магістерській дисертації отримано оцінки ймовірності банкрутства для біноміально- φ -субгауссової моделі ризику у субгауссовому випадку ($\varphi(x) = \frac{|x|^2}{2}$, $x \in R$) та у випадку $\varphi(x) = \frac{|x|^\omega}{\omega}$, $x \in \mathbb{R}$, $1 < \omega \leq 2$, при цьому потік премій є монотонно зростаючою неперервною функцією.

Ключові слова: N-функції Орліча, біноміальний розподіл, ймовірність банкрутства, процес ризику, φ -субгауссові випадкові величини, строго φ -субгауссові випадкові процеси.

ABSTRACT

Master's thesis: 30 pages, 22 slides for a projector, 10 primary sources.

The relevance of the study lies in the fact that in the current conditions of financial market development, there is a growing need for accurate mathematical methods for analyzing and predicting the behavior of various financial instruments and processes. The use of classical approaches, such as the use of Gaussian random processes, is often insufficient for modeling complex financial phenomena that have non-standard distributions or require taking into account complex dependencies.

In this regard, the study of modern approaches to the analysis of random variables that go beyond traditional Gaussian models is becoming critically important for financial analysts, banks, insurance companies and other financial market participants. The introduction of new methods will not only improve the accuracy of forecasts, but also ensure more effective risk management, which is a key factor in stability in the financial sector.

It is currently known that in such applied fields as finance and insurance, random processes are observed that cannot be considered Gaussian, which leads to a direct need to develop and apply the theory of φ -sub-Gaussian random processes as an extension of the corresponding theory of Gaussian random processes.

Purpose and objectives of the work: estimating the ruin probability for a risk process represented as a binomial sum with φ -sub-Gaussian random variables of claims, in the case where the function φ has some given expression.

Object of research: Risk process with φ -sub-Gaussian random claims.

Subject of research: Estimating the ruin probability for a risk process with φ -sub-Gaussian random claims.

To obtain the specified results, the basic concepts and some results from probability theory, the theory of random processes, and the theory of φ -sub-Gaussian random processes were used.

In the master's thesis, there are found estimates of the ruin probability for the binomial- φ -sub-Gaussian risk model in the sub-Gaussian case ($\varphi(x) = \frac{|x|^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$) and in the case $\varphi(x) = \frac{|x|^\omega}{\omega}$, $x \in \mathbb{R}$, $1 < \omega \leq 2$, with the premium flow being a monotonically increasing continuous function.

Keywords: Orlicz N-functions, binomial distribution, risk process, ruin probability, φ -sub-Gaussian random variables, strictly φ -sub-Gaussian random processes.

Зміст

Вступ	10
1 φ -субгауссові випадкові величини та процеси з просторів $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$...	14
2 Процес ризику з φ -субгауссовими величинами виплат	19
3 Оцінювання ймовірності банкрутства	22
Висновки	28
Список використаних джерел	29

Вступ

Актуальність дослідження полягає в тому, що в сучасних умовах розвитку фінансових ринків зростає необхідність у точних математичних методах для аналізу та прогнозування поведінки різних фінансових інструментів та процесів. Використання класичних підходів, таких як застосування гауссових випадкових процесів, часто є недостатнім для моделювання складних фінансових явищ, що мають нестандартні розподіли або вимагають врахування складних залежностей.

У зв'язку з цим, дослідження сучасних підходів до аналізу випадкових величин, які виходять за рамки традиційних гауссових моделей, стає критично важливим для фінансових аналітиків, банків, страхових компаній та інших учасників фінансового ринку. Впровадження нових методів дозволить не тільки покращити точність прогнозів, але й забезпечити більш ефективне управління ризиками, що є ключовим чинником стабільності у фінансовій сфері.

Наразі відомо, що у таких прикладних галузях як фінанси і страхування спостерігаються випадкові процеси, які не можна вважати гауссовими, звідки впливає пряма необхідність у розвитку та застосуванні теорії φ -субгауссових випадкових процесів як розширення відповідної теорії гауссових випадкових процесів.

Мета і завдання дослідження: оцінювання ймовірності банкрутства для процесу ризику, представленого у вигляді біноміальної суми з φ -субгауссовими випадковими величинами виплат, у випадку, коли функція φ має

заздалегідь заданий вираз.

Наукова новизна дослідження полягає у виведенні оцінки ймовірності банкрутства для процесу ризику, який утворений біноміальною сумою строго φ -субгауссових випадкових виплат у випадку певного більш загального виду функції φ .

Простори $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$, або простори φ -субгауссових випадкових величин, – це простори центрованих випадкових величин з певними експоненціальними моментами [1, 2]. Такі простори є підпросторами просторів Орліча експоненціального типу. Класи φ -субгауссових випадкових процесів, тобто, процесів з просторів $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$, є більш широкими, ніж класи гауссових та субгауссових випадкових процесів, тому дають можливість краще моделювати реальні випадкові процеси. В.В. Булдигін та Ю.В. Козаченко [1] досліджували властивості сум незалежних випадкових величин з таких просторів і деякі властивості випадкових процесів з просторів $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$, отримали умови обмеженості та оцінки розподілів супремумів таких процесів для випадку, коли процес визначений на просторі з псевдометрикою, породженою цим процесом. Подальший розвиток теорія φ -субгауссових випадкових процесів отримала в роботах Ю.В. Козаченка та його учнів (див., наприклад, [2–4, 6–8]).

До класу φ -субгауссових випадкових процесів належать, зокрема, процеси дробового броунівського руху, які широко використовуються для моделювання випадкових явищ у фінансовій математиці, а це означає, що до них можна застосувати отримані для φ -субгауссових випадкових процесів теоретичні результати.

У роботі [6] автори Василик О.І. та Ямненко Р.Є. застосували теорію φ -субгауссових випадкових процесів для дослідження властивостей випадкових пуассонівських сум із φ -субгауссовими доданками, а в статті [7] її застосовано для оцінювання ймовірності банкрутства у моделі з узагальненим φ -субгауссовим дробовим броунівським рухом. Подальший розвиток досліджень моделей ризику з φ -субгауссовими випадковими величинами виплат наведено у роботі [8], в якій отримано оцінки ймовірності банкрутства процесу ризику, що описується сумою випадкового біноміально розподіленого числа доданків, які є φ -субгауссовими випадковими величинами позовів, а інтенсивність надходження премій є монотонно зростаючою неперервною функцією.

У магістерській дисертації Селіванова В.В. [5] розглядається задача оцінювання ймовірності банкрутства у класичній моделі ризику з φ -субгауссовими випадковими величинами позовів. Досліджується випадок пуассонівських сум із φ -субгауссовими доданками та отримано оцінку ймовірності банкрутства для процесу ризику з φ -субгауссовими випадковими величинами виплат для деякої заданої функції φ , яка узагальнює випадок гауссових, субгауссових випадкових величин позовів та випадкових величин, які мають двосторонній розподіл Вейбулла.

Ми продовжуємо дослідження ймовірності банкрутства в моделях ризику з φ -субгауссовими випадковими величинами виплат, а саме, на основі результатів роботи [8] виводимо оцінки ймовірності банкрутства для біноміально- φ -субгауссової моделі ризику у субгауссовому випадку ($\varphi(x) = \frac{|x|^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$) та у більш загальному випадку $\varphi(x) = \frac{|x|^\omega}{\omega}$, $x \in \mathbb{R}$, $1 < \omega \leq 2$.

Магістерська дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаної літератури. У першому розділі наведено необхідні означення, приклади та властивості φ -субгауссових випадкових величин і процесів з просторів $Sub_{\varphi}(\Omega)$, що є теоретичною основою подальших досліджень. У другому розділі розглянуто процес ризику з φ -субгауссовими величинами виплат і побудовано відповідну стохастичну модель для портфеля страхової компанії. У третьому розділі доведено дві теореми про оцінки ймовірності банкрутства для запропонованої моделі в окремих випадках функції φ та наведено приклад застосування отриманих оцінок для аналізу конкретного портфеля страхової компанії. Всі основні результати дисертаційної роботи отримано автором самостійно.

За результатами магістерської дисертації підготовлено статтю у фаховому виданні категорії Б «Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика» [9] (прийнято до друку в том 46, №1, 2025 р.), а також автор зробив доповідь на XIII Всеукраїнській науковій конференції молодих математиків (м. Київ, 9–10 травня 2025 р.) [10].

1 φ -субгауссові випадкові величини та процеси з просторів $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$

У цьому розділі наведені необхідні в подальшому означення та твердження з теорії φ -субгауссових випадкових величин та процесів [1, 2].

Означення 1. Неперервна парна опукла функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ називається N -функцією Орліча, якщо $\varphi(0) = 0$ та $\varphi(x) > 0$, коли $x \neq 0$, та мають місце такі умови

$$(A_0) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0, \quad (A_\infty) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty.$$

Приклад 1. [2] Такі функції є N -функціями:

$$\varphi(x) = C|x|^\alpha, \quad C > 0, \quad \alpha > 1;$$

$$\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1;$$

$$\varphi(x) = \exp\{a|x|^\alpha\} - 1, \quad a > 0, \quad \alpha > 1;$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \left(\frac{e\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} x^2, & \text{коли } |x| \leq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}; \\ \exp\{|x|^\alpha\}, & \text{коли } |x| > \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Лема 1. [2] Для будь-якої N -функції φ мають місце такі твердження:

- $\varphi(\alpha x) \leq \alpha \varphi(x)$, коли $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \alpha \leq 1$;
- $\varphi(\alpha x) \geq \alpha \varphi(x)$, коли $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$;
- $\varphi(|x| + |y|) \geq \varphi(x) + \varphi(y)$, коли $x, y \in \mathbb{R}$;
- існує така стала $c > 0$, що $\varphi(x) > c|x|$, коли $|x| > 1$;
- функція $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$ є монотонно неспадною при $x > 0$;
- $\varphi(x) = \int_0^{|x|} p(t) dt$, де функція $p = \{p(t), t \geq 0\}$ неспадна неперервна

справа функція така, що $p(0) = 0$ та $p(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ — N -функція Орліча.

Умова Q. Для N -функції φ виконується умова Q, якщо $\liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = c > 0$.
Можливо, що $c = +\infty$.

Приклад 2. [2] Для N -функції $\varphi(x) = c|x|^\alpha$, коли $c > 0$, $1 < \alpha \leq 2$, виконується умова Q. Для N -функції $\{c|x|^\alpha, x \in \mathbb{R}\}$ при $c > 0$, $\alpha > 2$ умова Q не виконується, але для функції

$$\varphi(x) = \begin{cases} |x|^2, & |x| \leq 1, \\ |x|^\alpha, & |x| > 1, \end{cases} \quad \text{коли } \alpha > 2,$$

умова Q виконується.

Приклад 3. [5] Функція $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$, яка задається виразом

$$\varphi(x) = \begin{cases} \begin{cases} \frac{|x|^\omega}{\omega}, & \text{якщо } |x| \geq 1, \\ \frac{x^2}{\omega}, & \text{якщо } |x| < 1; \end{cases} & \text{якщо } 2 < \omega < 3, \\ \frac{|x|^\omega}{\omega}, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad \text{якщо } 1 < \omega \leq 2.$$

є N -функцією, яка задовольняє умову Q.

Нехай $\{\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P}\}$ — стандартний імовірнісний простір.

Означення 2. [1, 2] Нехай φ — N -функція, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$, якщо $E\xi = 0$, $E \exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $E \exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda a)\}$. Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, то простір $\text{Sub}_{\frac{x^2}{2}}(\Omega) = \text{Sub}(\Omega)$ називається субгауссовим.

Теорема 1. [1, 2] Простір $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ є банаховим простором з нормою

$$\tau_\varphi(\xi) = \sup_{\lambda > 0} \frac{\varphi^{(-1)}(\ln E \exp\{\lambda \xi\})}{\lambda},$$

де $\varphi^{(-1)}$ — обернена до φ функція, також для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $E \exp\{\lambda \xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda \tau_\varphi(\xi))\}$, а також існує така стала $c_\varphi > 0$, що $(E \xi^2)^{\frac{1}{2}} \leq c_\varphi \tau_\varphi(\xi)$.

Означення 3. [1, 2] Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ називається φ -субгауссовим процесом, якщо він задовольняє такі умови при всіх $t \in T$:

$$X(t) \in \text{Sub}_\varphi(\Omega), \quad \sup_{t \in T} X(t) < +\infty.$$

Якщо $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, то випадковий процес $X(t)$ називається субгауссовим.

Означення 4. [1, 2] Сім'я Δ випадкових величин з простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ називається строго φ -субгауссовою, якщо існує стала $C_\Delta > 0$ така, що для будь-якої скінченної множини I , $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$ та для будь-яких $\lambda_i \in \mathbb{R}$ має місце нерівність

$$\tau_\varphi\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i\right) \leq C_\Delta \left(E\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Сталу C_Δ будемо називати визначальною сталою сім'ї Δ . Простір строго φ -субгауссових випадкових величин позначають $\text{SSub}_\varphi(\Omega)$.

Означення 5. [1, 2] Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ називається строго φ -субгауссовим, якщо сім'я випадкових величин $\{X(t), t \in T\}$ є строго φ -субгауссовою. Визначальна стала цієї сім'ї називається визначальною сталою процесу та позначається C_X .

Приклад 4. [2] Нехай $X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t)$, $t \in T$, де сім'я випадкових величин $\{\xi_k, k = 1, \infty\}$ є строго φ -субгауссовою з визначальною сталою C_ξ та ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t)$ збігається в середньому квадратичному.

Тоді випадковий процес $X(t)$ є строго φ -субгауссовим випадковим процесом з визначальною сталою $C_X = C_\xi$.

Нехай (T, ρ) — псевдометричний (метричний) сепарабельний простір з псевдометрикою (метрикою) ρ , $X = \{X(t), t \in T\}$ — сепарабельний φ -субгауссовий випадковий процес. Припустимо, що існує неперервна монотонно зростаюча функція $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$ така, що $\sigma(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ та має місце нерівність

$$\sup_{\rho(t;s) \leq h} \tau_\varphi(X(t) - X(s)) \leq \sigma(h). \quad (1)$$

Зауважимо, що таку властивість має функція $\sigma(h) = \sup_{\rho(t;s) \leq h} \tau_\varphi(X(t) - X(s))$, якщо процес $X(t)$ є неперервним у нормі $\tau_\varphi(\cdot)$.

Нехай B — компактна множина, причому $B \subset T$. Введемо $\beta > 0$ — деяке число таке, що $\beta \leq \sigma \left(\inf_{s \in B} \sup_{t \in B} \rho(t; s) \right)$. Надалі розглядаємо $B = [0, 1]$, яку інтерпретуємо як інтервал часу в один рік.

Означення 6. [1] Якщо існує скінчене ε -покриття множини T , то $N_{(T, \rho)}(\varepsilon)$ означає кількість елементів в найменшому ε -покритті цієї множини. Крім того, якщо не існує скінченного ε -покриття множини T , то покладемо $N_{(T, \rho)}(\varepsilon) = +\infty$. Функцію $N_{(T, \rho)}(\varepsilon), \varepsilon > 0$, будемо називати метричною масивністю множини T відносно псевдометрики (метрики) ρ або просто метричною масивністю.

Означення 7. [1] Метричною ентропією відносно псевдометрики (метрики) ρ або просто метричною ентропією називається функція

$$H_{(T,\rho)}(u) := \begin{cases} \ln N_{(T,\rho)}(u), & \text{якщо } N_{(T,\rho)}(\varepsilon) < +\infty \\ +\infty, & \text{якщо } N_{(T,\rho)}(\varepsilon) = +\infty \end{cases}$$

де $N_{(T,\rho)}(u)$ — метрична масивність множини T .

2 Процес ризику з φ -субгауссовими величинами виплат

Як і в роботі [8], розглянемо портфель страхової компанії із n незалежних однорідних ризиків, кожен з яких може викликати не більше однієї страхової події. Зобразимо відповідну модель ризику в такому вигляді:

$$X(t) = u + (C - \alpha\mu)t - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

де u — початковий капітал страхової компанії, $C > 0$ — інтенсивність надходження страхових внесків, α — середній розмір страхової виплати, $c = C - \alpha\mu > 0$ та

1. N_t — випадковий процес, що описує кількість страхових подій, які сталися на інтервалі від 0 до t відповідно до біноміального розподілу

$$P(N_t = k) = \binom{n}{k} \theta(t)^k (1 - \theta(t))^{n-k},$$

де $0 \leq k \leq n$, $\theta(t)$ — неперервна функція, що описує ймовірність настання страхової події протягом часу $[0, t]$, тобто $\theta(0) = 0$, $\theta(+\infty) = 1$, $\theta(t_1) \leq \theta(t_2)$ для довільних $t_1 < t_2$. Нехай також ймовірність події $\theta(t)$ задовольняє припущення, що $|\theta(t) - \theta(s)| \leq \mu|t - s|$ для деякого $\mu > 0$.

Крім того, вважатимемо, що кількості подій, які сталися на неперетинних часових інтервалах, є незалежними випадковими величинами,

2. Y_i є незалежними між собою випадковими величинами, що мають однаковий закон розподілу, $E(Y_i) = 0$,
3. N_t та послідовність випадкових величин $(Y_1, Y_2, \dots)$ є незалежними,

4. випадкові величини Y_i належать простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Надалі розглядаються властивості сум

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad (3)$$

для яких виконуються вищевказані умови 1)–4).

Наведемо деякі результати, отримані в роботі [8] для сум випадкової кількості φ -субгауссових виплат вигляду (3).

Лема 2. [8] Нехай $S(t) = \sum_{i=1}^{N_t}$, $t \geq 0$ – випадковий процес, для якого виконуються припущення 1)–4). Тоді для всіх $t, s > 0$ та $\lambda \in \mathbb{R}$ виконуються такі нерівності:

$$\mathbb{E} \exp \{ \lambda S(t) \} \leq (\theta(t) \exp \{ \varphi(\lambda \tau_\varphi(Y_1)) \} + 1 - \theta(t))^n,$$

$$\mathbb{E} \exp \{ \lambda (S(t) - S(s)) \} \leq ((\theta(t) - \theta(s)) \exp \{ \varphi(\lambda \tau_\varphi(Y_1)) \} + 1 - \theta(t) + \theta(s))^n$$

$$\text{та } \mathbb{D}(S(t) - S(s)) = n(\theta(t) - \theta(s)) \mathbb{E} Y_1^2.$$

Зауваження 1. З леми 2 випливає, що випадковий процес $S(t) = \sum_{i=1}^{N_t}$, $t \geq 0$, задовольняє умову (1) з функцією $\sigma(h) = (nh \mathbb{E} Y_1^2)^{\frac{1}{2}}$, $h > 0$.

Теорема 2. [8] Нехай $X(t) = S(t) - f(t)$, де $\left\{ S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, t \in B \right\}$ – випадковий процес, для якого виконуються припущення 1)–4). Нехай $|\theta(t) - \theta(s)| \leq \mu |t - s|$ для деякого $\mu > 0$; та для деякої неперервної функції $f = \{f(t), t \geq 0\}$ маємо $|f(u) - f(v)| \leq \delta(\rho(u; v))$, де $\delta = \{\delta(s), s > 0\}$ – обмежена монотонно зростаюча функція, а $r = \{r(u), u \geq 1\}$ – така неспадна неперервна функція, що $r(u) > 0$ при $u > 1$, причому

$s(t) = r(\exp\{t\})$, $t \geq 0$ є опуклою функцією. Тоді якщо

$$\int_0^\beta r \left(N_B \left(\frac{u^2}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E} Y_1^2} \right) \right) du < +\infty, \quad (4)$$

то для всіх $0 < \beta \leq \left(\frac{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E} Y_1^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$ та $x > 0$ справджуються нерівності:

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{t \in B} (S(t) - f(t)) > x \right\} &\leq Z_r(\beta; x), \\ P \left\{ \sup_{t \in B} (S(t) - f(t)) < -x \right\} &\leq Z_r(\beta; x), \\ P \left\{ \sup_{t \in B} |S(t) - f(t)| > x \right\} &\leq 2Z_r(\beta; x), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} Z_r(\beta; x) &= \inf_{p \in (0,1)} r^{(-1)} \left(\frac{n+1}{\beta p} \int_0^{\beta p^2} r \left(N_B \left(\frac{u^2}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E} Y_1^2} \right) \right) du \right) \times \\ &\times \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ W(\lambda; p; \beta) + \frac{n\beta^2(1-p)}{\mathbb{E} Y_1^2} \sum_{k=2}^{+\infty} p^{3k-1} \varphi \left(\frac{\lambda \tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda \sum_{k=2}^{+\infty} \delta \left(\frac{\beta^2 p^{2k}}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E} Y_1^2} \right) - \lambda x \right\}, \\ W(\lambda; p; \beta) &= \inf_{\nu \geq (1-p)^{-1}} \left(\frac{1}{\nu} H_B \left(\frac{(\beta p)^2}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E} Y_1^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{u \in B} \left[\frac{n}{\nu} \ln (\theta(u) \exp \{ \varphi(\lambda \tau_\varphi(Y_1)) \} + 1 - \theta(u)) - \lambda f(u) \right] \right). \end{aligned}$$

3 Оцінювання ймовірності банкрутства

У даному розділі знайдено оцінку ймовірності банкрутства для моделі ризику зі сталою інтенсивністю надходження премій, у якій процес ризику задано у вигляді біноміальної суми з субгауссовими розмірами виплат та φ -субгауссовими виплатами з функцією $\varphi(x) = \frac{|x|^\omega}{\omega}$, $x \in \mathbb{R}$, $1 < \omega \leq 2$.

Теорема 3. Нехай $\left\{ S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, t \in [0; 1] \right\}$ — випадковий процес з властивостями 1)–4), $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, та виконується умова (4). Тоді для довільних $c > 0$, $x > 0$ та $0 < \beta \leq \left(\frac{n\mathbb{E}Y_1^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$ справджуються нерівності:

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{t \in [0,1]} (S(t) - ct) > x \right\} &\leq Z_1(\beta; x), \\ P \left\{ \inf_{t \in [0,1]} (S(t) - ct) < -x \right\} &\leq Z_1(\beta; x), \\ P \left\{ \sup_{t \in [0,1]} |S(t) - ct| > x \right\} &\leq 2Z_1(\beta; x), \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} Z_1(\beta; x) &= \inf_{p \in (0,1)} n(n+1)^{\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E}Y_1^2 \beta^2 p^{\frac{1}{\alpha}-4} \cdot (1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} \times \\ &\times \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ W(\lambda; p; \beta) + \frac{n\beta^2 (\lambda \tau_\varphi(Y_1))^2 p^3}{2\mathbb{E}Y_1^2 (1-p)^2} + \frac{\lambda \beta^2 p^4}{(1-p^2)n\mathbb{E}Y_1^2} - \lambda x \right\}, \\ W(\lambda; p; \beta) &= \inf_{\nu \geq (1-p)^{-1}} \left(\frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{n\mathbb{E}Y_1^2}{(\beta p)^2} \right) + \right. \\ &\left. + \sup_{u \in [0,1]} \left[\frac{n}{\nu} \ln \left(u \cdot \exp \left\{ \frac{(\lambda \tau_\varphi(Y_1))^2}{2} \right\} + 1 - u \right) - \lambda c u \right] \right). \end{aligned}$$

Доведення. Для доведення твердження використаємо теорему 2, поклавши $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $f(t) = ct$, $c = C - \alpha\mu$, $\delta(t) = t$, $r(s) = s^\alpha$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, $p \in (0, 1)$,

$$\rho(t; s) = |t - s|, \quad t, s \in [0; 1], \quad C_\Delta = 1, \quad \theta(u) = u, \quad u \in [0, 1], \quad \theta(u) = 1, \quad u \in (1, +\infty), \quad \mu = 1, \quad \sigma(h) = (nh\mathbb{E}Y_1^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma^{(-1)}(h) = \frac{h^2}{n\mathbb{E}Y_1^2}, \quad h > 0, \quad 0 < \beta \leq \left(\frac{n\mathbb{E}Y_1^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

При таких умовах матимемо:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{+\infty} \delta \left(\frac{\beta^2 p^{2k}}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E}Y_1^2} \right) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\beta^2 p^{2k}}{n\mathbb{E}Y_1^2} = \frac{\beta^2}{n\mathbb{E}Y_1^2} \cdot \frac{p^4}{1-p^2} = \frac{\beta^2 p^4}{(1-p^2)n\mathbb{E}Y_1^2}; \\ \sum_{k=2}^{+\infty} p^{3k-1} \varphi \left(\frac{\lambda \tau_\varphi(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda \tau_\varphi(Y_1)}{1-p} \right)^2 \cdot \sum_{k=2}^{+\infty} p^{k+1} = \frac{1}{2} (\lambda \tau_\varphi(Y_1))^2 \cdot \left(\frac{p}{1-p} \right)^3; \\ N_B \left(\frac{u^2}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E}Y_1^2} \right) &= N_{[0,1]}(\sigma^{(-1)}(u)) \leq \frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \leq \frac{n\mathbb{E}Y_1^2}{u^2}; \\ r^{(-1)} \left(\frac{n+1}{\beta p} \int_0^{\beta p^2} r \left(N_B \left(\frac{u^2}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E}Y_1^2} \right) \right) du \right) &\leq n\mathbb{E}Y_1^2 \left(\frac{n+1}{\beta p} \int_0^{\beta p^2} u^{-2\alpha} du \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \\ &= n(n+1)^{\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E}Y_1^2 \beta^2 p^{\frac{1}{\alpha}-4} \cdot (1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}; \\ H_B \left(\frac{(\beta p)^2}{C_\Delta^2 n \mu \mathbb{E}Y_1^2} \right) &= H_{[0,1]} \left(\sigma^{(-1)}(\beta p) \right) = \ln \left(N_B \left(\sigma^{(-1)}(\beta p) \right) \right) \leq \ln \left(\frac{n\mathbb{E}Y_1^2}{(\beta p)^2} \right). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} Z_r(\beta; x) &\leq \inf_{p \in (0,1)} n(n+1)^{\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E}Y_1^2 \beta^2 p^{\frac{1}{\alpha}-4} \cdot (1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} \times \\ &\times \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ W(\lambda; p; \beta) + \frac{n\beta^2 (\lambda \tau_\varphi(Y_1))^2 p^3}{2\mathbb{E}Y_1^2 (1-p)^2} + \frac{\lambda \beta^2 p^4}{(1-p^2)n\mathbb{E}Y_1^2} - \lambda x \right\} =: Z_1(\beta; x), \\ W(\lambda; p; \beta) &= \inf_{\nu \geq (1-p)^{-1}} \left(\frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{n\mathbb{E}Y_1^2}{(\beta p)^2} \right) + \right. \\ &\left. + \sup_{u \in [0,1]} \left[\frac{n}{\nu} \ln \left(u \cdot \exp \left\{ \frac{(\lambda \tau_\varphi(Y_1))^2}{2} \right\} + 1 - u \right) - \lambda c u \right] \right), \end{aligned}$$

звідки випливає твердження теореми. ■

Теорема 4. Нехай $\left\{S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, t \in [0; 1]\right\}$ – випадковий процес з властивостями 1)–4), $\varphi(x) = \frac{|x|^\omega}{\omega}, x \in \mathbb{R}, 1 < \omega \leq 2$ та виконується умова (4). Тоді для довільних $c > 0, x > 0$ та $0 < \beta \leq \left(\frac{n\mathbb{E}Y_1^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ справджуються нерівності:

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{t \in [0,1]} (S(t) - ct) > x \right\} &\leq Z_2(\beta; x), \\ P \left\{ \inf_{t \in [0,1]} (S(t) - ct) < -x \right\} &\leq Z_2(\beta; x), \\ P \left\{ \sup_{t \in [0,1]} |S(t) - ct| > x \right\} &\leq 2Z_2(\beta; x), \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} Z_2(\beta; x) &= \inf_{p \in (0,1)} n(n+1)^{\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E}Y_1^2 \beta^2 p^{\frac{1}{\alpha}-4} \cdot (1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} \times \\ &\times \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ W(\lambda; p; \beta) + \frac{n\beta^2(\lambda|\tau_\varphi(Y_1)|)^\omega}{\omega \mathbb{E}Y_1^2} \frac{p^{5-\omega}}{(1-p^{3-\omega})(1-p)^{\omega-1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda\beta^2 p^4}{(1-p^2)n\mathbb{E}Y_1^2} - \lambda x \right\}, \\ W(\lambda; p; \beta) &= \inf_{\nu \geq (1-p)^{-1}} \left(\frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{n\mathbb{E}Y_1^2}{(\beta p)^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{u \in [0,1]} \left[\frac{n}{\nu} \ln \left(u \cdot \exp \left\{ \frac{(\lambda|\tau_\varphi(Y_1)|)^\omega}{\omega} \right\} + 1 - u \right) - \lambda c u \right] \right). \end{aligned}$$

Доведення. Для доведення твердження використаємо теорему 2, поклавши $\varphi(x) = \frac{|x|^\omega}{\omega}, f(t) = ct, \delta(t) = t, r(s) = s^\alpha, \alpha \in (0, \frac{1}{2}), p \in (0, 1), \rho(t; s) = |t - s|, t, s \in [0; 1] C_\Delta = 1, \theta(u) = u, u \in [0, 1], \theta(u) = 1, u \in (1, +\infty), \mu = 1, \sigma(h) = (nh\mathbb{E}Y_1^2)^{\frac{1}{2}}, \sigma^{(-1)}(h) = \frac{h^2}{n\mathbb{E}Y_1^2}, h > 0, 0 < \beta \leq \left(\frac{n\mathbb{E}Y_1^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$

При таких умовах матимемо:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \delta \left(\frac{\beta^2 p^{2k}}{C_{\Delta}^2 n \mu \mathbb{E} Y_1^2} \right) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\beta^2 p^{2k}}{n \mathbb{E} Y_1^2} = \frac{\beta^2}{n \mathbb{E} Y_1^2} \cdot \frac{p^4}{1-p^2} = \frac{\beta^2 p^4}{(1-p^2) n \mathbb{E} Y_1^2};$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{+\infty} p^{3k-1} \varphi \left(\frac{\lambda \tau_{\varphi}(Y_1)}{(1-p)p^{k-1}} \right) &= \frac{1}{\omega} \left(\frac{\lambda |\tau_{\varphi}(Y_1)|}{1-p} \right)^{\omega} \cdot \sum_{k=2}^{+\infty} p^{3k-1-\omega(k-1)} = \\ &= \frac{1}{\omega} \left(\frac{\lambda |\tau_{\varphi}(Y_1)|}{1-p} \right)^{\omega} \frac{p^{5-\omega}}{1-p^{3-\omega}}; \end{aligned}$$

$$N_B \left(\frac{u^2}{C_{\Delta}^2 n \mu \mathbb{E} Y_1^2} \right) = N_{[0,1]}(\sigma^{(-1)}(u)) \leq \frac{1}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \leq \frac{n \mathbb{E} Y_1^2}{u^2};$$

$$\begin{aligned} r^{(-1)} \left(\frac{n+1}{\beta p} \int_0^{\beta p^2} r \left(N_B \left(\frac{u^2}{C_{\Delta}^2 n \mu \mathbb{E} Y_1^2} \right) \right) du \right) &\leq n \mathbb{E} Y_1^2 \left(\frac{n+1}{\beta p} \int_0^{\beta p^2} u^{-2\alpha} du \right)^{\frac{1}{\alpha}} = \\ &= n(n+1)^{\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E} Y_1^2 \beta^2 p^{\frac{1}{\alpha}-4} \cdot (1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}; \end{aligned}$$

$$H_B \left(\frac{(\beta p)^2}{C_{\Delta}^2 n \mu \mathbb{E} Y_1^2} \right) = H_{[0,1]} \left(\sigma^{(-1)}(\beta p) \right) = \ln \left(N_B \left(\sigma^{(-1)}(\beta p) \right) \right) \leq \ln \left(\frac{n \mathbb{E} Y_1^2}{(\beta p)^2} \right).$$

Отже,

$$\begin{aligned} Z_r(\beta; x) &\leq \inf_{p \in (0,1)} n(n+1)^{\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E} Y_1^2 \beta^2 p^{\frac{1}{\alpha}-4} \cdot (1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} \times \\ &\times \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ W(\lambda; p; \beta) + \frac{n \beta^2 (\lambda |\tau_{\varphi}(Y_1)|)^{\omega}}{\omega \mathbb{E} Y_1^2} \frac{p^{5-\omega}}{(1-p^{3-\omega})(1-p)^{\omega-1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda \beta^2 p^4}{(1-p^2) n \mathbb{E} Y_1^2} - \lambda x \right\} =: Z_2(\beta, x), \\ W(\lambda; p; \beta) &= \inf_{\nu \geq (1-p)^{-1}} \left(\frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{n \mathbb{E} Y_1^2}{(\beta p)^2} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \sup_{u \in [0,1]} \left[\frac{n}{\nu} \ln \left(u \cdot \exp \left\{ \frac{(\lambda |\tau_\varphi(Y_1)|)^\omega}{\omega} \right\} + 1 - u \right) - \lambda c u \right] \right),$$

звідки випливає твердження теореми. ■

Зауваження 2. Нерівності (5) та (6), доведені у цих теоремах, дають оцінки ймовірності банкрутства для відповідної біноміально- φ -субгауссової моделі ризику при початковому капіталі $x > 0$.

Приклад 5. Розглянемо оцінку, отриману у Теоремі 3, на прикладі.

Нехай $n = 50$, $\alpha = \frac{1}{4}$, $EY_1^2 = 1 = \tau_\varphi(Y_1)$, $\beta = 1$, $p = 0.2$

Розглянемо вирази у правій частині оцінки (5):

$$\begin{aligned} Z_1(\beta; x) &= \inf_{p \in (0,1)} n(n+1)^{\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E}Y_1^2 \beta^2 p^{\frac{1}{\alpha}-4} \cdot (1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} \times \\ &\times \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ W(\lambda; p; \beta) + \frac{n\beta^2 (\lambda \tau_\varphi(Y_1))^2 p^3}{2\mathbb{E}Y_1^2 (1-p)^2} + \frac{\lambda \beta^2 p^4}{(1-p^2)n\mathbb{E}Y_1^2} - \lambda x \right\}, \\ W(\lambda; p; \beta) &= \inf_{\nu \geq (1-p)^{-1}} \left(\frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{n\mathbb{E}Y_1^2}{(\beta p)^2} \right) + \right. \\ &\left. + \sup_{u \in [0,1]} \left[\frac{n}{\nu} \ln \left(u \cdot \exp \left\{ \frac{(\lambda \tau_\varphi(Y_1))^2}{2} \right\} + 1 - u \right) - \lambda c u \right] \right). \end{aligned}$$

Тоді:

$$\inf_{p \in (0,1)} n(n+1)^{\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E}Y_1^2 \beta^2 p^{\frac{1}{\alpha}-4} \cdot (1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} = 50 \times 51^4 \times 16$$

Далі розглянемо

$$\sup_{u \in [0,1]} \left[\frac{n}{\nu} \ln \left(u \cdot \exp \left\{ \frac{(\lambda \tau_\varphi(Y_1))^2}{2} \right\} + 1 - u \right) - \lambda c u \right].$$

Максимум досягається при $u = \frac{50}{\nu c \lambda} - \frac{1}{e^{\frac{\lambda^2}{2}} - 1}$.

Інфімум

$$W(\lambda; p; \beta) = \inf_{\nu \geq (1-p)^{-1}} \left(\frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{n \mathbb{E} Y_1^2}{(\beta p)^2} \right) + \right. \\ \left. + \sup_{u \in [0,1]} \left[\frac{n}{\nu} \ln \left(u \cdot \exp \left\{ \frac{(\lambda \tau_\varphi(Y_1))^2}{2} \right\} + 1 - u \right) - \lambda c u \right] \right).$$

потрібно додатково досліджувати.

Розглянемо тепер

$$\exp \left\{ W(\lambda; p; \beta) + \frac{n \beta^2 (\lambda \tau_\varphi(Y_1))^2 p^3}{2 \mathbb{E} Y_1^2 (1-p)^2} + \frac{\lambda \beta^2 p^4}{(1-p^2) n \mathbb{E} Y_1^2} - \lambda x \right\}.$$

Найменше значення, яке приймає вираз

$$\frac{n \beta^2 (\lambda \tau_\varphi(Y_1))^2 p^3}{2 \mathbb{E} Y_1^2 (1-p)^2} + \frac{\lambda \beta^2 p^4}{(1-p^2) n \mathbb{E} Y_1^2} - \lambda x,$$

дорівнює $\approx -0.8 \cdot x^2$, яке досягається при $\lambda = \frac{x-0.0000(3)}{0.625}$.

Тобто весь інфімум наближено має вигляд $e^{W-0.8 \cdot x^2}$, а весь вираз приблизно дорівнює $50 \cdot 51^4 \cdot 16 \cdot e^{W-0.8 \cdot x^2}$.

Залежно від значення W , цей вираз буде набувати значень в проміжку $(0; 1)$ навіть при не надто великих значеннях x .

Висновки

У роботі наведено результати оцінювання ймовірності банкрутства для біноміально- φ -субгауссової моделі ризику у субгауссовому випадку ($\varphi(x) = \frac{|x|^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$) та у випадку $\varphi(x) = \frac{|x|^\omega}{\omega}$, $x \in \mathbb{R}$, $1 < \omega \leq 2$, при цьому потік премій є монотонно зростаючою неперервною функцією.

Напрямки подальших досліджень таких моделей включають як виведення оцінок ймовірності банкрутства для інших N -функцій Орліча φ , так і конкретизацію оцінок для певних заданих значень параметрів моделі.

Результати дослідження можуть бути використані актуаріями та фінансовими аналітиками для оцінювання ризиків та забезпечення платоспроможності страхових компаній.

Список використаних джерел

- [1] Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V. Metric characterization of random variables and random processes. American Mathematical Society : Providence RI, 2000.
- [2] Василик О. І., Козаченко Ю. В., Ямненко Р. Є. φ -субгауссові випадкові процеси. Монографія. К.: ВПЦ «Київський університет», 2008. 232 с.
- [3] Kozachenko Yu.V., Vasilik O.I. On the distribution of suprema of $\mathbf{Sub}_\varphi(\Omega)$ random processes // *Theory of Stochastic Processes*. 1998. Vol. 4(20), issue 1–2. P. 147–160.
- [4] Kozachenko Yu.V., Vasilik O.I. Stochastic processes of the classes $V(\varphi, \psi)$ // *Theory of Probability and Mathematical Statistics*. 2001. No. 63. P. 109–121.
- [5] Селіванов, В. В. Оцінювання ймовірності банкрутства для процесу ризику з φ -субгауссовими величинами позовів : магістерська дис. : 111 “Математика” / Селіванов Віктор Васильович. – Київ, 2024. – 34 с.
- [6] Ямненко Р. Є., Василик О. І. Деякі властивості випадкових пуассонівських сум із φ -субгауссовими доданками. *Прикладна статистика, актуарна та фінансова математика*. 2007. Вип. 1. С. 133–148.
- [7] Yamnenko R. Ruin probability for generalized φ -sub-Gaussian fractional Brownian motion. *Theory of Stochastic Processes*. 2006. Т. 12(28), № 3–4. С. 261–275.

- [8] Yamnenko R., Lamin A. Estimation of ruin probability for binomially distributed number of φ -sub-Gaussian claims. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physical and Mathematical Sciences*. 2022. № 2. P. 20—27. DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/2.2>
- [9] Кравець, А. Ю., Василик, О. І. (2025). Оцінювання ймовірності банкрутства для біноміально- φ -субгауссової моделі ризику. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*. [прийнято до друку]
- [10] Кравець, А. Ю. Оцінювання ймовірності банкрутства для біноміально- φ -субгауссової моделі ризику. *Матеріали XIII Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків. м. Київ. 9–10 травня 2025 р. С. 28–29.*