

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»**

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»

УДК 517.9

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

_____ Олег КЛЕСОВ

«__» _____ 2025 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

**за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова
математика»**

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Функціональні рівняння Коші для комплекснозначних функцій»

Виконав:

студент II курсу магістратури, групи ОМ-31мн

Манаєнко Ігор Віторович _____

Науковий керівник:

Кандидат фізико-математичних наук

Павленков Володимир Володимирович _____

Рецензент:

Заступник декана факультету радіофізики,

електроніки та комп'ютерних систем

Київського національного

університету ім. Т. Шевченка,

кандидат фізико-математичних наук, доцент

Єфіменко Світлана Володимирівна _____

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних
посилань.

Студент _____

Київ – 2025 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-науковою програмою

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Олег КЛЕСОВ

«__» _____ 20__ р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Манаєнку Ігорю Вікторовичу

1. Тема дисертації «Функціональні рівняння Коші для комплекснозначних функцій», науковий керівник дисертації кандидат фізико-математичних наук Павленков Володимир Володимирович, затверджені наказом по університету №1276-с від 21.03.2025
2. Термін подання студентом дисертації 15 травня 2025
3. Об'єктом дослідження є узагальнене функціональне рівняння Коші для комплекснозначних функцій.
4. Предметом дослідження є лінійні та нелінійні розв'язки функціонального рівняння Коші для комплекснозначних функцій.
5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

- 1) Провести пошук та ознайомлення з літературою.
- 2) Розв'язання задач, котрі ілюструють використання функціонального рівняння Коші.
- 3) Побудова розв'язків функціонального рівняння Коші для комплекснозначних функцій $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.
- 4) Побудова розв'язків функціонального рівняння Коші для комплекснозначних функцій $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу 16 слайдів.

7. Дата видачі завдання 04 лютого 2025 року.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомлення з літературою.	20.03.2025 - 27.03.2025	виконано
2.	Розв'язання задач, розв'язки яких зводяться до функціонального рівняння Коші.	27.03.2025 - 04.05.2025	виконано
3.	Розбір відомих результатів про розв'язки функціонального рівняння Коші для комплекснозначних функцій.	27.03.2025 - 04.05.2025	виконано
4.	Оформлення магістерської дисертації.	04.05.2025 - 12.05.2025	виконано

Студент

Ігор МАНАЄНКО

Науковий керівник

Володимир ПАВЛЕНКОВ

Реферат

Магістерська дисертація: 51 сторінок, 16 слайдів для проектора, 37 першоджерел.

У роботі розглядається класичне функціональне рівняння Коші та його узагальнення на множині дійснозначних і комплекснозначних функцій.

Наведені логарифмічні, експоненціальні та степеневі узагальнення, а також умови збереження адитивності та поведінку розв'язків за слабких умов регулярності. Особливу увагу приділено аналізу розв'язків без припущень про неперервність, що дає змогу виявити фундаментальні структурні властивості, включаючи нелінійні та комплекснозначні адитивні функції.

Також розглянуті комплекснозначні правильно змінні функції, котрі, на відміну від дійснозначного випадку, мають два індекси – основний та спряжений.

Наведено повний опис усіх розв'язків, зокрема в контексті обмежень на продовження функцій поза межі первинної області визначення.

Також в роботі подані відомі результати щодо побудови та класифікації розв'язків у комплексній області, які розширюють класичні уявлення про структуру функціональних рівнянь.

Розглянуті результати мають значення для теорії функціональних рівнянь, математичного аналізу та суміжних галузей.

Ключові слова: функціональне рівняння Коші, адитивні функції, комплекснозначні адитивні функції, нелінійні адитивні функції.

Abstract

Master degree thesis contains 51 pages, 16 slides for projector, 37 primary Sources

The thesis investigates the classical Cauchy functional equation and its generalisations on classes of real- and complex-valued functions. Logarithmic, exponential, and power-type extensions are presented together with conditions guaranteeing the preservation of additivity and describing the behaviour of solutions under weak regularity assumptions. Particular attention is paid to solutions obtained without assuming continuity, which reveals fundamental structural properties, including nonlinear and complex-valued additive functions.

The study also treats complex-valued regularly varying functions which, unlike their real-valued counterparts, are characterised by two indices—the principal and the conjugate. A complete description of all solutions is provided, especially in the context of constraints on extending functions beyond their original domains.

An illustrative example shows how a functional equation can be used to justify the logarithmic formula for the quantity of information derived from natural axiomatic assumptions. The resulting unique dependence underscores the practical relevance of the general theoretical framework.

In addition, the thesis summarises known results on the construction and classification of solutions in the complex domain, thereby broadening the classical view of the structure of functional equations. The findings are pertinent to the theory of functional equations, mathematical analysis, and allied disciplines.

Keywords: Cauchy functional equation; additive functions; complex-valued additive functions; nonlinear additive functions.

ЗМІСТ

Скорочення та умовні позначки	7
ВСТУП	8
1. ФУНКЦІОНАЛЬНЕ РІВНЯННЯ КОШІ	10
1.1 Функціональне рівняння Коші	11
1.2 Функціональне рівняння Коші на множині раціональних чисел	15
1.3 Нелінійні розв'язки рівняння Коші	17
1.4 Приклади використання функціонального рівняння Коші	19
1.5 Задачі, розв'язки яких зводяться до функціонального рівняння Коші ..	21
2. РІВНЯННЯ ЗВІДНІ ДО РІВНЯННЯ КОШІ	27
2.1 Логарифмічне рівняння Коші	27
2.2 Експоненціальне рівняння Коші	33
2.3 Степеневе рівняння Коші	37
3. РІВНЯННЯ КОШІ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНИХ ФУНКЦІЙ	39
3.1 Звичайне рівняння Коші для комплекснозначних функцій	40
3.2 Експоненціальне рівняння Коші для комплекснозначних функцій	43
ВИСНОВКИ	48
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	49

Скорочення та умовні позначки

$\mathbb{R}$	множина дійсних чисел
$\mathbb{Q}$	множина раціональних чисел
$\mathbb{N}$	множина натуральних чисел
$\mathbb{C}$	множина комплексних чисел
$\bar{F}$	хвіст функції розподілу
$\mathbb{R}^2$	декартовий добуток $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, тобто площина
$\mathbb{Q}^2$	декартовий добуток $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, тобто площина з раціональними координатами
σ	коефіцієнт, що визначає знак функції, тобто $\{+1\}$ або $\{-1\}$
i	уявна одиниця, тобто $\sqrt{-1}$
$\mathbb{R}_+$	множина додатних дійсних чисел
$\bar{\mathbb{R}}_+$	закрита множина невід'ємних дійсних чисел
$\mathbb{R}^*$	множина всіх дійсних чисел, крім нуля: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

ВСТУП

Функціональне рівняння Коші є однією з найважливіших тем у теорії функцій, що обумовлено його істотним впливом на численні напрями сучасної математики та її застосувань. Це рівняння стало основою для розвитку багатьох математичних концепцій [1, 2, 6, 9, 20, 24]. Воно має численні приклади застосування в різних розділах фізики, економіки, статистики, інших науках, що підкреслює його практичну значущість.

Метою даної роботи є дослідження функціонального рівняння Коші та його аналогів у класі комплекснозначних функцій. Особлива увага приділяється аналізу умов, за яких ці рівняння мають розв'язки, опису структури таких розв'язків, а також порівнянню отриманих результатів із відповідними твердженнями для дійснозначних функцій.

Перший розділ присвячений огляду відомих фактів про класичне функціональне рівняння Коші, розглядаються його основні властивості та розв'язки. Особливу увагу приділено аналізу розв'язань цього рівняння на множині раціональних чисел, оскільки саме тут вони мають прості властивості. Лінійні розв'язки повністю описують поведінку адитивних функцій за додаткових умов регулярності. Неочікувано, за відсутності умов регулярності, а саме - монотонності, вимірності або неперервності - існують нелінійні розв'язки, що задовольняють рівняння Коші. Крім теоретичних аспектів, у цьому розділі наведені приклади практичного використання функціонального рівняння Коші.

У другому розділі розглядаються рівняння, які відомими замінами зводяться до функціонального рівняння Коші. Вони описують логарифмічні, степеневі та показникові функції. Всі отримані результати даного розділу будуть використані при доведенні основних теорем третього розділу, які стосуються розв'язків функціонального рівняння Коші в множині комплекснозначних функцій.

Третій розділ присвячений розгляду рівняння Коші для комплекснозначних функцій, що відкриває нові можливості для вивчення

узагальненого рівняння Коші. Неочікувано, в комплекснозначному випадку лінійні розв'язки мають цікавішу структуру. Вивчення комплексних розв'язків забезпечує глибше розуміння адитивних структури функцій і їх поведінки в різних областях. Окрім звичайного рівняння Коші для комплекснозначних функцій, в цьому розділі розглянуто ще експоненціальне рівняння. Також показано, що його розв'язки можуть бути не лише аналітичними, а й вимірними, котрі на відміну від дійснозначного випадку – не є нескінченно диференційованими.

У завершальній частині дослідження сформульовано висновки та наведено перелік використаної літератури.

1. ФУНКЦІОНАЛЬНЕ РІВНЯННЯ КОШІ

Функціональне рівняння Коші є одним з найважливіших та найвідоміших рівнянь у теорії функцій. Воно описує адитивність функцій і має численні застосування в математиці, статистиці, фізиці та інших науках.

У цьому розділі буде розглянуто, як розв'язки функціонального рівняння Коші поводить на раціональних числах. З побудови розв'язку на множині раціональних чисел випливає, що при достатньо слабких умовах регулярності, лише лінійні функції можуть бути адитивними.

Без жодних умов регулярності існують нелінійні розв'язки рівняння Коші. Вони мають цікаві властивості, які також будуть описані в цьому розділі.

Також в даному розділі розглянемо приклади, котрі використовують рівняння Коші і задачі, котрі описують альтернативну умову адитивності. Знайдемо загальний розв'язок для адитивної функції з зсувом і експоненту від неї.

1.1 Функціональне рівняння Коші

Функціональне рівняння Коші, яке вперше було сформульоване французьким математиком Огюстеном-Луї Коші в 1821 році [9], стало важливим етапом у розвитку теорії функцій. Він досліджував властивості функцій, що задовольняють умову адитивності, що призвело до формулювання цього рівняння. Історично, Коші був одним з перших математиків, які систематично вивчали функції, їх властивості та поведінку в різних контекстах. Його роботи заклали основи для подальшого розвитку аналізу, алгебри та теорії чисел.

Означення 1.1. Функція f називається адитивною, якщо

$$f(x + y) = f(x) + f(y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

тобто виконано класичне рівняння Коші.

Приклад 1.1. Лінійні функції $f(x) = cx + d$ є адитивними тоді і тільки тоді, коли $d = 0$.

Дійсно, розглянувши рівність 1.1, підставимо $f(x)$ в його ліву частину функцію і отримаємо:

$$f(x + y) = c(x + y) + d = cx + cy + d.$$

Тепер підставимо $f(x)$ в праву частину рівність 1.1, отримаємо:

$$f(x) + f(y) = c(x + d) + c(y + d) = cx + cy + 2d.$$

Прирівняємо обидві частини:

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y), \\ cx + cy + d &= cx + cy + 2d, \\ d &= 2d, \\ d &= 0. \end{aligned}$$

З цього можна зробити висновок, що функції Прикладу 1.1 дійсно є адитивними тоді і тільки тоді, коли $d = 0$. В даному випадку вони матимуть вигляд:

$$f(x) = cx, x \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

Рівняння Коші, а також три його аналоги:

$$f(x + y) = f(x)f(y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},$$

$$f(xy) = f(x) + f(y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},$$

$$f(xy) = f(x)f(y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},$$

були введені Коші у його книзі [9] в 1821 року. Коші ретельно проаналізував (1.1) за умов, що невідома функція f є неперервною функцією з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, а змінні x і y можуть бути довільними дійсними числами.

Властивості адитивних функцій досліджувались і раніше. Гаусс [17] також розглядав певну версію (1.1) у своїй книзі 1809 року; (див. також [1]). Повертаючись ще далі, до 1794 року, можна знайти в книзі Лежандра [27] у розділі, присвяченому розгляду співвідношень площ прямокутників, як використання, так і аналіз [1]; (див. також [2]).

Рівняння Коші (1.1) має багато застосувань у функціональних рівняннях і в інших математичних і наукових сферах, включаючи геометрію, дійсний і комплексний аналіз, ймовірність, функціональний аналіз, динамічні системи, диференціальні рівняння, класичну та статистичну механіку, а також економіку [1, 6, 11, 12, 13, 20]. Тому природно, що воно привертає увагу багатьох авторів протягом тривалого часу. Формуючи цей факт у більш романтичних термінах [24], Каннапан написав: “Дослідники закохалися в ці рівняння (рівняння Коші (1.1) та три його аналоги), і романтика продовжиться, що призведе до багатьох інших цікавих результатів”.

Загальним шляхом дослідження (1.1) є накладення різних типів умов “регулярності” на невідому функцію. Виявляється, кожна з цих умов передбачає існування деякої сталої $c \in \mathbb{R}$ такої, що $f(x) = cx$ для всіх $x \in \mathbb{R}$ і цей факт було доведено різними способами. Тобто при достатньо слабких умовах регулярності на розв’язок, функціональне рівняння Коші (1.1) має лише лінійні розв’язки. Такими умовами регулярності є:

1. Неперервність (Коші [9]);

2. Монотонність або обмеженість на інтервалі (Дарбу [12, 13]);
3. Вимірність за Лебегом (Фреше [15], Блумберг [7], Банах [5], Серпінський [36], Как [23], Алексєвич-Орліц [3], Фігель [14]);
4. Обмеженість на вимірній множині додатної міри (Кормес [26]);
5. Обмеженість згори або знизу на вимірній множині додатної міри (Островський [31], Кестельман [25]);
6. Обмеженість зверху на множині другої категорії Бера (Мехді [28]);

при виконанні кожної з цих слабких умов регулярності, рівняння Коші має лише лінійні розв'язки.

З іншого боку, у 1905 році Гамель [19] досліджував (1.1) без додаткових умов регулярності на f . Використовуючи базис Гамеля, який був введений для цієї мети, він показав, що існують нелінійні розв'язки до (1.1) і знайшов їх усі.

Розглядалися також узагальнення функціонального рівняння (1.1). До них можна віднести роботи: Банаха [6], Петтіса [32], Хьюїтта-Росс [20], Монро [29], Фігеля [14], Іцковіца [21], Бейкера [4], Бждек [8], Христенсена [10], Гайдю [16], Гроссе-Ердмана [18], Жараї-Секеліді [22], Ніба [30] та Розендаля [34]. У деяких з цих узагальнень форма функціонального рівняння є більш загальною, ніж (1.1).

Інший шлях полягає в накладенні умов, відмінних від вимірності, наприклад, алгебраїчних; (див. Дейлеса [11]). Ще одним шляхом узагальнення / модифікації є зміна області визначення f так, щоб вона більше не мала обов'язково гарної алгебраїчної структури. Різновидом цього є зміна області визначення рівняння, наприклад, припустити, що f задовольняє (1.1) лише для пар (x, y) , які належать до підмножини $\mathbb{R}^{2n}$. В обох випадках можна зробити висновок про існування нелінійних розв'язків рівняння (1.1), навіть за умови наявності сильних припущень щодо регулярності функції, або про те, що у разі, коли функцію f визначено

на всьому просторі, вона повинна задовольняти рівняння (1.1) для всіх можливих пар (x, y) .

Функціональне рівняння Коші піднімає кілька важливих питань, які математики намагалися вирішити протягом століть. По-перше, це питання про те, які функції можуть задовольняти властивість адитивності. По-друге, про нелінійні розв'язки та їх властивості.

Актуальність дослідження функціонального рівняння Коші зумовлена його значенням у сучасній математиці. Це рівняння не лише відкриває можливості для аналізу комплекснозначних функцій, але й служить основою для вивчення більш складних математичних структур. В умовах швидкого розвитку технологій, знання про функціональні рівняння стає все більш важливим для оптимізації алгоритмів і моделей.

Варто розглянути основні властивості розв'язки рівняння Коші, а саме лінійні та нелінійні.

Як показує Приклад 1.1, лінійні розв'язки функціонального рівняння Коші мають форму (1.2).

Умови регулярності на адитивні функції f , з яких випливає лінійність:

1. Неперервність: якщо функція f є неперервною, то всі розв'язки будуть лійними.
2. Обмеженість: якщо f обмежена в околі нуля, то вона також буде лінійною.
3. Диференційованість: якщо f диференційована хоча б в одній точці, то вона буде лінійною на всій області визначення.
4. Монотонність: якщо f є монотонною на певному інтервалі, то вона обов'язково буде лінійною.
5. Збереження знаку: якщо $f(x) \geq 0$, для всіх $x \geq 0$, то f лінійна.
6. Вимірна за Лебегом: якщо f є вимірною за Лебегом, то вона є лінійною.

1.2 Функціональне рівняння Коші на множині раціональних чисел

Наступна теорема встановлює властивості адитивних функцій на множині $\mathbb{Q}$. Вперше вона була доведена в роботі Коші [9]. Для повноти викладу також буде наведено сучасне доведення цієї теореми.

Теорема 1.1. *Якщо функція f задовольняє (1.1), то вона також задовольняє:*

$$f\left(\sum_{k=1}^n r_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n r_k f(x_k), \quad (1.3)$$

для всіх $x_k \in \mathbb{R}$ та для всіх $r_k \in \mathbb{Q}$, де $k = 1, 2, \dots, n; n \geq 1$.

Доведення. Підставимо $y = 0$ в (1.1), отримуємо:

$$\begin{aligned} f(x + 0) &= f(x) + f(0), \\ f(x) &= f(x) + f(0), \\ f(0) &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Також підставимо $y = -x$ в (1.1), отримуємо:

$$\begin{aligned} f(x + (-x)) &= f(x) + f(-x), \\ f(0) &= f(x) + f(-x), \end{aligned}$$

Використаємо рівність (1.4), отримаємо:

$$f(-x) = -f(x). \quad (1.5)$$

Також, за індукцією:

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n), \quad (1.6)$$

для всіх $x_k \in \mathbb{R}$, де $k = 1, 2, \dots, n; n \geq 1$.

Підставимо $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$ в (1.6).

Ліва частина (1.6) дорівнює:

$$f(x + x + \dots + x) = f(nx), x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Права частина (1.6) дорівнює:

$$f(x) + f(x) + \dots + f(x) = nf(x), x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

З цього слідує:

$$f(nx) = nf(x), x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Тепер, нехай

$$r = \frac{m}{n}, r \in \mathbb{N}, (m, n \in \mathbb{N}), t \in \mathbb{R}.$$

Тоді для $x = rt = (\frac{m}{n})t$:

$$f(nx) = nf(x), x \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}.$$

З іншої сторони:

$$f(mt) = mf(t), m \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}.$$

Отримаємо:

$$nf(x) = mf(t), x \in \mathbb{R},$$

звідки випливає:

$$f(x) = \frac{m}{n}f(t) = rf(t), m, n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $x = rt$:

$$f(rx) = rf(t), x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{Q}.$$

За допомогою (1.5) та (1.4) те саме справедливе для від'ємних раціональних чисел і 0, так що можна стверджувати, що:

$$f(rt) = rf(t), t \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{Q}. \quad (1.7)$$

В поєднанні з (1.6) видно, що (1.3) виконується, і тому Теорема 1.1 доведена. ■

Наслідок 1.1. З (1.7) при $t = 1, f(1) = c$, отримаємо:

$$f(r) = rf(1) = cr \text{ для всіх } r \in \mathbb{Q}.$$

Множина $\mathbb{Q}$ є всюди щільною в $\mathbb{R}$, тому, якщо f додатково є неперервною, то вона має вигляд (1.2).

1.3 Нелінійні розв'язки рівняння Коші

Безсумнівно, усі функції, задані у формі (1.2), задовольняють рівняння (1.1). Як показав Гамель [19], існують розв'язки рівняння (1.1), які не мають форми (1.2), тобто є нелінійними. Подальші результати демонструють, що розв'язки рівняння (1.1), які не зводяться до форми (1.2), мають досить "нестандартний" характер. Це вказує на те, що більшість адитивних функцій, є лінійними, тоді як інші розв'язки можуть мати складні або навіть екзотичні властивості.

Означення 1.2. Графік функції f на множині S - це множина пар:

$$G = \{(x, y) | y = f(x), x \in S\}.$$

Для розв'язку f функціонального рівняння Коші $S = \mathbb{R}$ та

$$f(S) = \{f(x) | x \in S\} \subset \mathbb{R}.$$

Отже, графік є підмножиною $\mathbb{R}^2$:

$$G = \{(x, y) | y = f(x), x \in \mathbb{R}\}.$$

Наступне твердження встановлює властивості графіку нелінійної адитивної функції та показує його екзотичні властивості [19, 20].

Теорема 1.2. *Графік кожного нелінійного розв'язку (1.1) є всюди щільним в $\mathbb{R}^2$.*

Доведення. Нехай $x_1 \neq 0$. Якщо f не має вигляду (1.2), то існує відмінне від нуля дійсне число x_2 таке, що:

$$\frac{f(x_1)}{x_1} \neq \frac{f(x_2)}{x_2}. \quad (1.8)$$

Іншими словами:

$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) \\ x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \neq 0,$$

отже вектори $\bar{p}_1 = (x_1, f(x_1))$ та $\bar{p}_2 = (x_2, f(x_2))$ є лінійно незалежними і таким чином утворюють базис векторного простору $\mathbb{R}^2$. Це означає, що для будь-якого вектору $\bar{p} \in \mathbb{R}^2$ існують дійсні числа ρ_1 та ρ_2 :

$$\bar{p} = \rho_1 \bar{p}_1 + \rho_2 \bar{p}_2.$$

Оскільки $\mathbb{Q}$ щільна в $\mathbb{R}$ то будь-який вектор $\bar{p}$ можна як завгодно точно наблизити вектором:

$$r_1\bar{p}_1 + r_2\bar{p}_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}.$$

З Теорема 1.1 маємо:

$$\begin{aligned} r_1\bar{p}_1 + r_2\bar{p}_2 &= r_1(x_1, f(x_1)) + r_2(x_2, f(x_2)) = \\ &= (r_1x_1 + r_2x_2, r_1f(x_1) + r_2f(x_2)) = \\ &= (r_1x_1 + r_2x_2, f(r_1x_1 + r_2x_2)) = (x, f(x)), x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, \end{aligned}$$

де

$$x = r_1x_1 + r_2x_2,$$

тому

$$r_1\bar{p}_1 + r_2\bar{p}_2 \in Graf.$$

Таким чином для ненульових x_1 та x_2 , задовольняючи (1.8) отримаємо:

$$G_{1,2} = \{(x, y) | y = f(x), x = r_1x_1 + r_2x_2; (r_1, r_2) \in \mathbb{Q}^2\},$$

є всюди щільною в $\mathbb{R}^2$. Оскільки

$$G = \{(x, y) | y = f(x), x \in \mathbb{R}\},$$

то

$$G_{1,2} \subseteq G,$$

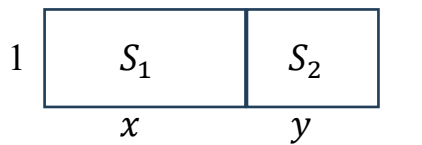
отже G теж є всюди щільною в $\mathbb{R}^2$. ■

Наслідок 1.2. з Теорема 1.2 випливає, що кожен нелінійний розв’язок функціонального рівняння Коші є необмеженим на будь-якому, як завгодно малому інтервалі.

1.4 Приклади використання функціонального рівняння Коші

Наступна серія прикладів показує застосування функціонального рівняння Коші в різних розділах математики та суміжних науках. Всі ці приклади обговорювалися в [37]. Але для повноти викладу вони наведені тут.

Приклад 1.2 (площа прямокутника). Розглянемо прямокутник зі сторонами x та 1 . Його площа позначена через $S(x)$. Якщо сторону x продовжити на величину y та на цій стороні побудувати прямокутник з одиничною другою стороною, то його площа рівна $S(x + y)$. Відомо, що площа прямокутника складена з фігур рівна сумі цих площі, тобто іншими словами $S(x)$ задовольняє умову (1.1).



The diagram shows a rectangle with a vertical height of 1 and a horizontal width divided into two segments, x and y . The left segment has width x and area S_1 . The right segment has width y and area S_2 . The total width is $x + y$.

$$S(x + y) = S(x) + S(y).$$

Зі збільшенням x - площа збільшується неперервно, тому з результатів Коші випливає $S(x) = x$.

Приклад 1.3 (прості відсотки). Прості відсотки при інвестуванні означають, що сума інвестиції збільшується на одну й ту ж величину на інтервалах часу $[t_1, t_2]$ та $[t'_1, t'_2]$ незалежно від того, якими є моменти t_1 та t_2 і t'_1 та t'_2 аби тільки виконувалась умова $t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1$. Позначимо через $f(x, t)$ величину капіталу, отриманого з початкової інвестиції x за час t . В самому простішому випадку процентна ставка банку не залежить від розміру інвестованого капіталу, тому в цьому випадку:

$$f(x + y, t) = f(x, t) + f(y, t).$$

Тобто функція f задовольняє рівняння Коші по першій змінній. З іншого боку, в силу формулювання вище зазначеного отримаємо:

$$f(x, s + t) = f(x, s) + f(x, t).$$

Тобто вона задовольняє рівняння Коші і по другій змінній.

При накладанні додаткових умов регулярності отримаємо:
фіксуємо t , функція $x \mapsto f(x, t)$ - лінійна по x :

$$f(x, t) = a(t)x,$$

для деякої функції $a(t)$.

Фіксуємо x , функція $t \mapsto f(x, t)$ - лінійна по t :

$$f(x, t) = b(x)t,$$

для деякої функції $b(x)$.

Оскільки обидва вирази мають бути тотожно рівними, то:

$$a(t)x = b(x)t.$$

Це можливо тільки тоді, коли існує стала $c \in \mathbb{R}$, така що:

$$a(t) = ct, b(x) = cx.$$

Отже:

$$f(x, t) = cxt.$$

Тому капітал зростає лінійно як по сумі, так і по часу, з фіксованою процентною ставкою c .

Приклад 1.4 (складні відсотки). Складні відсотки при інвестуванні означають, якщо в початковий момент інвестована величина x , то для будь-яких моментів $s < t$ капітал $f(x, t)$ в момент t розраховується по його значенню $f(x, s)$ по тій же формулі, по якій $f(x, s)$ розраховується по x . Іншими словами:

$$f(x, t) = f(f(x, s), t - s),$$

або

$$f(x, s + t) = f(f(x, s), t).$$

Зауважимо, що на відміну від простих відсотків, складні відсотки не зводяться до функціонального рівняння Коші.

1.5 Задачі, розв'язки яких зводяться до функціонального рівняння Коші

Задача 1.1 (альтернативна умова адитивності).

Нехай $n \geq 3$ - фіксоване ціле число. Потрібно охарактеризувати всі функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для яких з умови:

$$x_1 + \dots + x_n = 0, x_i \in \mathbb{R},$$

випливає:

$$f(x_1) + \dots + f(x_n) = 0.$$

Розв'язання.

Крок 1 (значення в нулі).

Припустимо $x_1 = \dots = x_n = 0$. Тоді з умови задачі маємо:

$$nf(0) = 0, \text{ отже } f(0) = 0.$$

Крок 2 (непарність).

Нехай

$$x_1 = x, x_2 = -x, x_3 = \dots = x_n = 0,$$

тоді $x_1 + \dots + x_n = 0$, а за умовою задачі:

$$f(x) + f(-x) = 0, \text{ тобто } f(-x) = -f(x).$$

Таким чином f - непарна функція.

Крок 3 (зведення до рівняння Коші).

Припустимо що:

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = -x - y, x_4 = \dots = x_n = 0,$$

тоді

$$f(x) + f(y) + f(-x - y) = 0 \Rightarrow f(-x - y) = -(f(x) + f(y)).$$

Крок 4 (адитивність).

Використовуючи непарність, маємо:

$$f(x + y) = -f(-(x + y)) = -f(-x - y) = f(x) + f(y),$$

отже функція задовольняє рівняння Коші (1.1)

Крок 5 (відповідь).

Кожна адитивна функція автоматично задовольняє початкову вимогу:

$$x_1 + \dots + x_n = 0 \Rightarrow f(x_1) + \dots + f(x_n) = f(x_1 + \dots + x_n) = f(0) = 0.$$

Навпаки, було показано, що умова задачі примушує функцію бути адитивною.

Зауваження про регулярність.

Без додаткових припущень (на кшталт неперервності, вимірності, обмеженості на відрізку, тощо) адитивні функції можуть бути «патологічними» та не є абсолютно неперервними. Якщо ж вимагати, наприклад, неперервність у бодай одній точці або функцію, що є вимірною за Лебегом, то розв'язок буде лінійним.

Задача 1.2 (адитивні функції з зсувом).

Знайти всі функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для яких виконується:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \text{ для всіх } x, y \in \mathbb{R}.$$

Крок 1 (формула середнього значення Йенсена).

Перепишемо як формулу середнього значення Йенсена. Позначимо:

$$x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}, \text{ (тобто } x+y = u, x-y = v \text{)}.$$

Тоді рівняння набуде вигляду:

$$f(u) + f(v) = 2f\left(\frac{u+v}{2}\right), (\forall u, v \in \mathbb{R}).$$

Крок 2 (зсув).

Позначимо $c := f(0)$ і введемо нову функцію:

$$g(x) = f(x) - c,$$

оскільки

$$f(0) = f(0) = 2f(0),$$

то функція g також задовольняє умову початкового рівняння

$$g(u) + g(v) = 2g\left(\frac{u+v}{2}\right).$$

Поділивши обидві частини на 2, отримаємо формулу середнього значення Йенсена:

$$g\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{g(u) + g(v)}{2}.$$

Крок 3 (перехід від рівняння Йенсена до рівняння Коші).

Позначимо:

$$h(x) = g(2x).$$

Підставимо $2u, 2v$ замість u, v відповідно в рівняння:

$$g(u) + g(v) = 2g\left(\frac{u+v}{2}\right),$$

отримаємо:

$$g(2u) + g(2v) = 2g(u+v) \Rightarrow h(u) + h(v) = h(u+v), (\forall u, v).$$

Отже, h є адитивною функцією, тобто

$$g(a+b) = g(a) + g(b), (\forall a, b \in \mathbb{R}).$$

Крок 4 (відповідь).

Кожен розв'язок має вигляд:

$$f(x) = A(x) + c,$$

де

$$A(x+y) = A(x) + A(y), (\forall x, y \in \mathbb{R}),$$

A - довільна адитивна функція.

Зауваження про регулярність.

Якщо A задовольняє хоча б якусь слабку умову регулярності - наприклад, неперервність хоча б у одній точці, вимірність або обмеженість на інтервалі - тоді $A(x) = kx$ для деякої сталої k .

У такому разі:

$$f(x) = kx + c, (k, c \in \mathbb{R}).$$

Задача 1.3 (експонента від адитивної функції).

Знайти всі функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для яких:

$$f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 \text{ для всіх } x, y \in \mathbb{R}.$$

Крок 1 (нульовий розв'язок).

Якщо $f \equiv 0$, то рівняння виконується тотожно, тому

$$f(x) \equiv 0 - \text{один клас розв'язків.}$$

Крок 2 (ненульові розв'язки).

Припустимо, що

$$f(x) \neq 0 \text{ для кожного } x \in \mathbb{R}.$$

Якщо б існував такий $x \in \mathbb{R}$, що $f(x) = 0$, то підставляючи його в початкове рівняння отримаємо:

$$f(y) = 0, y \in \mathbb{R},$$

а цей тривіальний розв'язок вже враховано.

Крок 2.1 (перехід до логарифмів).

Припустимо:

$$g(x) = \ln |f(x)|.$$

Тоді, беручи логарифм в абсолютному значення рівняння, одержуємо:

$$g(x+y) + g(x-y) = 2g(x), (\forall x, y).$$

Це рівняння вже розглянуто вище в попередньому прикладі.

Крок 2.2 (згадка про попередній результат).

Кожен розв'язок рівняння має вигляд

$$g(x) = A(x) + c,$$

де

$$A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \text{адитивна функція } A(x+y) = A(x) + A(y),$$

$$c \in \mathbb{R} - \text{стала.}$$

Звідси:

$$|f(x)| = e^{g(x)} = e^c e^{A(x)} =: K e^{A(x)}, K := e^c > 0.$$

Крок 2.3 (знак функції).

Нехай:

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} \in \{-1, 1\}.$$

Підставляючи

$$f(x) = \varepsilon(x)|f(x)|,$$

у початкове рівняння та скоротивши додатні множники отримаємо:

$$\varepsilon(x+y) \varepsilon(x-y) = \varepsilon(x)^2 = 1, (\forall x, y).$$

Лема 1.1. Функція $\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 1\}$ є сталою та задовольняє умову рівняння.

Доведення. Нехай $y = x$:

$$\varepsilon(2x)\varepsilon(0) = 1,$$

отже

$$\varepsilon(2x) = \varepsilon(0).$$

Для $x = 0$:

$$\varepsilon(y)\varepsilon(-y) = 1,$$

звідси слідує:

$$\varepsilon(-y) = \varepsilon(y).$$

Для довільних a, b припустимо:

$$x = \frac{a+b}{2}, y = \frac{a-b}{2},$$

тоді

$$x+y = a, x-y = b,$$

з даного рівняння випливає:

$$\varepsilon(a) = \varepsilon(b).$$

Отже ε стала. ■

Позначимо цю сталу через $\sigma \in \{-1, 1\}$.

Крок 2.4 (загальна форма ненульового розв'язку).

Поєднуючи

$$|f(x)| = e^{g(x)} = e^c e^{A(x)} =: K e^{A(x)},$$

зі сталим знаком σ маємо:

$$f(x) = \sigma K e^{A(x)}, (\sigma \in \{-1, 1\}, K > 0),$$

A - адитивна функція.

Крок 3 (відповідь).

$$\begin{cases} \text{(i)} & f(x) \equiv 0; \\ \text{(ii)} & f(x) = \sigma K e^{A(x)}, K > 0, \sigma \in \{-1, 1\}, \\ & A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \text{адитивна.} \end{cases}$$

Цю сім'ю функцій можна подати в більш простому вигляді:

$$f(x) = M e^{A(x)}, x \in \mathbb{R},$$

де $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - довільна адитивна функція, $M = f(0)$.

Зауваження про регулярність.

Якщо до f висунути будь-яку м'яку умову регулярності (неперервність у принаймні одній точці, вимірність, обмеженість на інтервалі, тощо), то $A(x) = kx$ для деякого $k \in \mathbb{R}$.

Тоді:

$$f(x) = Me^{kx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. РІВНЯННЯ ЗВІДНІ ДО РІВНЯННЯ КОШІ

Рівняння Коші на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ описує адитивну властивість функції. В цьому розділі буде розглянуто три аналоги рівняння (1.1), котрі за допомогою зручних заміन можна буде звести до класичного рівняння Коші.

2.1 Логарифмічне рівняння Коші

Перше з цих аналогів є рівняння Коші для логарифмічної функції:

$$g(xy) = g(x) + g(y), x > 0, y > 0. \quad (2.1)$$

Також обговоримо можливі розширення області визначення даного рівняння.

Теорема 2.1. *Загальний розв'язок $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ рівняння (2.1) задається формулою:*

$$g(x) = f(\ln x), x > 0, \quad (2.2)$$

де f є довільним розв'язком рівняння (1.1).

Доведення. Рівняння (2.1) зведемо до вигляду рівняння Коші за допомогою зручної заміни змінних і функцій. Нехай

$$x = e^u, y = e^v,$$

тобто

$$u = \ln x, v = \ln y,$$

Оскільки будь-яку пару додатних дійсних чисел $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, можна однозначно зіставити з парою довільних дійсних чисел $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ за допомогою логарифмічного перетворення, і навпаки.

Розглянемо функцію $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(u) = g(e^u), u \in \mathbb{R}.$$

Тоді рівняння (2.1) переходить до вигляду рівняння (1.1):

$$f(u + v) = g(e^{u+v}) = g(e^u e^v) = g(e^u) + g(e^v) = f(u) + f(v), u, v \in \mathbb{R}.$$

Тобто f задовольняє класичне рівняння Коші. Отже будь-який розв'язок g рівняння (2.1) на $\mathbb{R}_+$ задається (2.2).■

Беручи до уваги результати першого розділу, маємо:

Наслідок 2.1. Якщо функція $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ є розв'язком рівняння (2.1) і задовольняє хоча б одну з наступних умов:

1. Неперервна в хоча б одній точці.
2. Вимірна на $\mathbb{R}_+$.
3. Обмежена згори або знизу на підмножині додатної міри,

то вона має вигляд:

$$g(x) = c \ln x, x \in \mathbb{R}_+, c \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

де c - константа.

Зауваження 2.1. Рівняння (2.1) є прикладом рівняння, розв'язки якого не можуть бути розширені від $\mathbb{R}_+$ до $\overline{\mathbb{R}}_+$. Дійсно:

$$\bar{g}(xy) = \bar{g}(x) + \bar{g}(y), x, y \geq 0, \quad (2.4)$$

має розв'язком функцію, що всюди дорівнює нулю. Це можна перевірити, підставивши $y = 0$ в (2.4):

$$\bar{g}(0) = \bar{g}(x) + \bar{g}(0),$$

$$\bar{g}(x) = 0, x \geq 0.$$

тобто $\bar{g}(x) = 0$ для всіх невід'ємних x . Отже, розв'язок рівняння (2.1), заданий формулою (2.2), не може бути розширений до розв'язку рівняння (2.4).

Це свідчить про те, що для будь-якого розв'язку g рівняння (2.1), який не є тотожно нульовим, неможливо коректно визначити значення $g(0)$ так, щоб рівняння залишалось виконаним на множині $\overline{\mathbb{R}}_+$. Єдині формально допустимі значення $g(0)$, які не суперечать структурі рівняння – це $g(0) = \infty$ або $g(0) = (-\infty)$, однак вони не належать до множини дійсних чисел, і тому таке розширення втрачає сенс у межах дійснозначних функцій.

Зауваження 2.1 показує, що розв'язки не можуть бути розширені від $\mathbb{R}_+$ до $\overline{\mathbb{R}}_+$, але, як показує наступна теорема, вони можуть бути розширені до $\mathbb{R}^*$.

Теорема 2.2. Загальний розв'язок $h: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ рівняння

$$h(xy) = h(x) + h(y), x, y \in \mathbb{R}^*, \quad (2.5)$$

задається наступним чином:

$$h(x) = f(\ln |x|), x \in \mathbb{R}^*, \quad (2.6)$$

де f є довільним розв'язком рівняння (1.1). Зокрема, загальний розв'язок рівняння (2.5) в класі вимірних функцій, задається наступним чином:

$$h(x) = c \ln |x|, x \in \mathbb{R}^*, c \in \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

де c - константа.

Доведення. Нехай функція $h: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, задовольняє рівняння (2.5). Розглянемо звуження функції h на $\mathbb{R}_+$. Для цього звуження з (2.5) маємо

$$h(xy) = h(x) + h(y), x > 0, y > 0.$$

Звідси та з Теорема 2.1 отримуємо розв'язок рівняння (2.5) на $\mathbb{R}_+$:

$$h(x) = f(\ln x), x > 0,$$

де f є довільним розв'язком рівняння (1.1).

Цей розв'язок розширимо на всю множину $\mathbb{R}^*$. Для цього підставимо $x = 1$ в рівняння (2.5), отримаємо:

$$h(y) = h(1) + h(y),$$

$$h(1) = 0.$$

Тепер підставимо $x = y = -1$ в функціональне рівняння (2.5), отримаємо:

$$h(1) = 2h(-1),$$

$$h(-1) = \frac{1}{2} h(1).$$

Оскільки $h(1) = 0$, тоді $h(-1) = 0$.

Розглянемо тепер довільне $t \in \mathbb{R}^*, t \neq 0$. Нехай $x = |t|, y = \text{sign}(t)$.

Підставимо їх в (2.5), отримаємо:

$$h(t) = h(|t|\text{sign}(t)) = h(|t|) + h(\text{sign}(t)).$$

Оскільки $\text{sign}(t) \in \{-1, 1\}$ і $h(1) = h(-1) = 0$, то

$$h(\text{sign}(t)) = 0,$$

а отже:

$$h(t) = h(|t|), t \neq 0.$$

Це означає, що функція h є парною, тобто значення функції залежить лише від абсолютного значення аргументу. Звідси слідує (2.6).

Розглянемо випадок, коли h належить до класу вимірних функцій. У цьому разі отримаємо (2.7).■

Наслідок 2.2. Область визначення логарифмічного рівняння Коші може бути додатково обмежена. Розглянемо рівняння:

$$I(pq) = I(p) + I(q), p \in [0,1], q \in [0,1]. \quad (2.8)$$

Підставивши в нього

$$p = e^{-x}, q = e^{-y} \ (x \geq 0, y \geq 0), g(x) = I(e^{-x}),$$

воно набуває вигляду (1.1).

Загальний розв'язок: $I[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ рівняння (2.8) задається:

$$I(p) = g(-\ln p), p \in [0,1],$$

де g - довільний розв'язок рівняння (1.1). Зокрема, загальний невід'ємний розв'язок рівняння (2.8) задається:

$$I(p) = -c \ln p, p \in [0,1], c \in \mathbb{R}, \quad (2.9)$$

де c – константа.

Результат Наслідку 2.2 має важливе застосування (див. Реньї [33]).

Приклад 2.1. Припустимо, що кількість інформації, згенерованої випадковою подією, залежить лише від ймовірності цієї події. Припустимо також, що кількість інформації отриманої від двох незалежних подій, є сумою кількостей інформації, отриманих від них. Якщо кількість інформації, що належить ймовірності p , позначається як $I(p)$, тоді з припущень випливає, що $I(p)$ задовольняє рівняння (2.8), а отже її загальний розв'язок задається (2.9). Класичною одиницею інформації є один біт, йому відповідає чарунка з 0 або 1 в ній, тому

$$I\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \text{ (біт)}.$$

Тому $c = 1/\ln 2$ і:

$$I(p) = -\frac{\ln p}{\ln 2} = -\log_2 p,$$

є кількістю інформації, що надається подією з ймовірністю p .

Приклад 2.2 (див. більш детально [37]) (натуральний логарифм). В математичному аналізі добре відома формула:

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln(x), x > 0.$$

Покажемо, що дана формула задовольняє умову:

$$f(xy) = f(x) + f(y), x, y > 0.$$

Дійсно, для $x, y > 0$:

$$f(x) + f(y) = \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_1^y \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_x^{xy} \frac{1}{z} dz.$$

Після заміни $z = tx$, використовуючи властивість адитивності інтегралу, отримаємо рівняння:

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Якщо $x = e^x, y = e^y$ та $f(z) = f(e^z)$, то рівняння набуде вигляду (1.1).

Приклад 2.3 (відсутність пам'яті, [37]). Скажімо, що невід'ємна випадкова величина X володіє властивістю відсутності пам'яті, якщо:

$$P(X \geq s + t | X \geq t) = P(X \geq s), s, t \geq 0.$$

Якщо інтерпретувати X як час очікування деякої випадкової події, то ліва частина цього рівняння вказує на умовний розподіл, а права на безумовний. Тобто формула означає, що X ніби «забуває» про те, що тривалість очікування вже перевершила t , починає процес очікування з самого початку. Якщо позначити

$$\bar{F}(t) = P(X \geq t),$$

то будемо мати:

$$P(X \geq s + t | X \geq t) = \frac{P(X \geq s + t, X \geq t)}{P(X \geq t)} = \frac{P(X \geq s + t)}{P(X \geq t)} = P(X \geq s),$$

або

$$\bar{F}(s+t) = \bar{F}(s)\bar{F}(t).$$

Отримуємо, що $g(t) = \ln \bar{F}(t)$ є адитивною функцією. Зазначимо, що логарифмування допустимо, оскільки $\bar{F}(t) > 0$ для будь-якого $t \geq 0$. Особливістю властивості адитивності в цьому випадку є те, що воно виконується тільки для невід'ємних аргументів. Однак, якщо розглянути нову функцію:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \geq 0 \\ -g(-x), & x < 0 \end{cases}$$

то $\tilde{g}$ буде адитивною в області $\mathbb{R}$.

2.2 Експоненціальне рівняння Коші

Далі розглянемо експоненціальне рівняння Коші:

$$h(x + y) = h(x)h(y), \quad (2.10)$$

в трьох випадках:

$$x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, \quad (2.11)$$

$$x \in \mathbb{R}_+, y \in \mathbb{R}_+, \quad (2.12)$$

$$x \in \bar{\mathbb{R}}_+, y \in \bar{\mathbb{R}}_+. \quad (2.13)$$

Теорема 2.3. *Загальні розв'язки рівняння (2.10) на областях (2.11), (2.12) або (2.13) мають наступний вигляд:*

$$h(x) = 0, \text{ (для всіх } x \in \mathbb{R} \text{ або } x \in \mathbb{R}_+ \text{ або } x \in \bar{\mathbb{R}}_+), \quad (2.14)$$

та

$$h(x) = e^{f(x)},$$

де f задовольняє (1.1) на тих же областях;

у випадку (2.13) маємо додатковий розв'язок:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x > 0 \\ 1 & \text{для } x = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

але жодних інших. Зокрема, загальні розв'язки (2.10) в класі вимірних функцій задаються формулою (2.14), а також:

$$h(x) = e^{cx}, \text{ (для всіх } x \in \mathbb{R} \text{ або } x \in \mathbb{R}_+ \text{ або } x \in \bar{\mathbb{R}}_+), \quad (2.16)$$

і, у випадку (2.13), формулою (2.15).

Доведення. Оскільки функція h може набувати нульового значення в окремих точках, це призводить до певних труднощів. У випадках (2.11) і (2.12) буде доведено, що функція h , яка задовольняє (2.10), є всюди ненульовою або всюди нульовою.

Доведення є найпростішим у випадку (2.11).

Якщо існує x , для якого $h(x_1) = 0$, тоді в рівнянні (2.10) зробимо заміну: $x = x_1, y = t$, тоді отримуємо:

$$h(t) = h(x_1)h(t - x_1) = 0, t \in \mathbb{R}.$$

У випадку (2.12) це міркування доводить, що $h(t) = 0$ тільки при $t \geq x_1$. Тепер візьмемо довільне $x \in [0, x_1]$. Для достатньо великих

натуральних n виконана нерівність $nx > x_1$, тому $h(nx) = 0$. З іншого боку, за індукцією

$$0 = h(nx) = h(x)^n,$$

тому $h(x) = 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}_+$.

У випадку (2.13) наведений вище аргумент доводить, що $h(x) = 0$ для $x > 0$, але не для $x = 0$. З рівняння (2.10) виходить, що $h(0) = h(0)^2$ при $x = y = 0$, так що $h(0) = 0$ або $h(0) = 1$. Функція h , задана (2.15) задовольняє (2.10) на області (2.13) (але h , визначена як $h(x) = 0$ для $x \neq 0$, $h(0) = 1$, не задовольняє (2.10) на (2.11)). Також, звичайно (2.14) задовольняє (2.10) на областях (2.11), (2.12) та (2.13) відповідно. Для всіх інших розв'язків $h \neq 0$.

З рівняння (2.10), виконавши заміну $x = y = \frac{t}{2}$, отримаємо:

$$h(t) = h\left(\frac{t}{2}\right)^2 \geq 0.$$

За винятком розв'язків (2.14) та (2.15), всюди маємо:

$$h(t) > 0, \tag{2.17}$$

тоді візьмемо логарифми обох частин (2.10):

$$f(x) = \ln h(x),$$

і отримаємо (1.1).■

Обмеження на додатні нижні межі у формулах (2.10) виникають через те, що функція (2.6) визначена лише для $x > 0$. Зокрема, розв'язок, що породжується довільною функцією f , яка задовольняє функціональне рівняння Коші, але не має вигляду (1.2), тобто не є лінійною, також визначає функцію h , що задовольняє (2.10). Такий розв'язок може виконувати умову (2.17), проте він не має форми жодного з класичних прикладів (2.14), (2.15) чи (2.16), які описують добре контрольовані розв'язки. Таким чином, серед усіх можливих розв'язків (2.10) існують і такі, що не можуть бути представлені у вигляді відомих формул — вони

виходять за межі «регулярного» класу функцій і виявляють складнішу структуру, властиву загальним розв'язкам рівняння Коші.

Розв'язок (2.15) рівняння (2.10) на області (2.13) є ще одним прикладом, який не може бути розширений з $\bar{\mathbb{R}}_+$ до $\mathbb{R}$. Оскільки, ця функція є неперервною і обмеженою зверху на $\mathbb{R}_+$, тому будь-яке її розширення на $\mathbb{R}$ також повинно мати ці властивості на $\mathbb{R}_+$. Але всі розв'язки (2.10) на (2.11), які обмежені зверху на інтервалі, мають одну з форм (2.14) або (2.16), і (2.15) не є обмеженням жодної з них на $\mathbb{R}_+$.

Приклад 2.4 (узагальнене рівняння Pexider 1903 р.). Нехай функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє рівняння

$$f(x+t) = g(t)f(x), x, t \in \mathbb{R}, \quad (2.18)$$

де $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - деяка функція, що не залежить від x . Дане рівняння, очевидно, має нульовий (тотожно) розв'язок. Знайдемо ненульові розв'язки даного рівняння, тоді існує таке дійсне число x , що $f(x) \neq 0$.

Підставимо в (2.18) замість $x = x + s$:

$$f(x+s+t) = g(t)f(x+s). \quad (2.19)$$

Тоді виконаємо заміну в рівнянні (2.18): $t = s$:

$$f(x+s) = g(s)f(x). \quad (2.20)$$

Тоді підставимо (2.20) в рівняння (2.19):

$$f(x+s+t) = g(t)g(s)f(x). \quad (2.21)$$

Зведемо рівняння (2.19) до вигляду:

$$f(x+s+t) = f(x+(s+t)) = g(s+t)f(x). \quad (2.22)$$

Прирівняємо праві частини рівнянь (2.21) і (2.22):

$$g(s+t)f(x) = g(t)g(s)f(x).$$

Так як розглядається випадок, коли $x \in \mathbb{R}$ і $f(x) \neq 0$, то поділивши обидві частини рівняння на $f(x)$, отримаємо:

$$g(s+t) = g(t)g(s).$$

Дане рівняння є експоненціальним рівнянням Коші, а отже його класичний розв'язок має вигляд:

$$g(t) = e^{ct}, c \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

Тому рівняння (2.18) має вигляд:

$$f(x+t) = e^{ct}f(x), c \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

Нехай $x = 0$, тоді

$$f(t) = e^{ct}f(0), c \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

Позначимо $C := f(0)$, отримаємо:

$$f(t) = Ce^{ct}, c \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

Тому, загальний розв'язок рівняння (2.18) має вигляд:

$$f(x) = Ce^{cx}, c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

2.3 Степеневе рівняння Коші

Далі розглядаємо степеневе рівняння Коші.

Теорема 2.4. Загальні розв'язки $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ рівняння

$$g(xy) = g(x)g(y), x > 0, y > 0, \quad (2.23)$$

для (2.12) задаються наступним чином:

$$g(x) = 0, x > 0,$$

та

$$g(x) = \exp(f(\ln x)) \text{ для всіх } x > 0, \quad (2.24)$$

де f - довільна адитивна функція.

Доведення. Розглянемо рівняння (2.23). Виконаємо заміну:

$$x = e^u, y = e^v \quad h(u) = g(e^u),$$

отримаємо рівняння вигляду (2.10) по області (2.11). Далі за Теоремою 2.3 отримаємо (2.24).■

Наслідок 2.3. Загальні розв'язки рівняння (2.23) у класі функцій, що неперервні в точці або вимірні, задаються рівностями:

$$g(x) = 0 \text{ та } g(x) = x^c \text{ для всіх } x > 0 \text{ (} c - \text{довільна константа)}$$

Приклад 2.5. Функцію $f(x), x \in \mathbb{R}$, називають правильно змінною в слабкому розумінні, якщо вона додатна, та для кожного $\lambda > 0$ існує границя виду:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = g(\lambda) \in (0, +\infty), \lambda > 0,$$

де $g(\lambda)$ - гранична функція.

Тоді

$$g(\lambda\mu) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda\mu x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda\mu x)}{f(\lambda x)} \cdot \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = g(\mu)g(\lambda), \lambda, \mu > 0.$$

З цього слідує, що

$$g(\lambda\mu) = g(\mu)g(\lambda), \lambda, \mu > 0.$$

Тому гранична функція задовольняє степеневе рівняння Коші.

При слабких умовах регулярності функції g , гранична функція

$$g(\lambda) = \lambda^\rho, \lambda > 0,$$

де $\rho \in \mathbb{R}$ - індекс функції f .

3. РІВНЯННЯ КОШІ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНИХ ФУНКЦІЙ

Даний розділ присвячений розгляду рівняння Коші для комплекснозначних функцій, що відкриває нові можливості для вивчення узагальненого рівняння Коші. Неочікувано, в комплекснозначному випадку лінійні розв'язки мають цікавішу структуру. Вивчення комплексних розв'язків забезпечує глибше розуміння адитивних структури функцій і їх поведінки в різних областях. Окрім звичайного рівняння Коші для комплекснозначних функцій, в цьому розділі розглянуто ще експоненціальне рівняння. Також показано, що його розв'язки можуть бути не лише аналітичними, а й вимірними, котрі на відміну від дійснозначного випадку – не є нескінченно диференційованими.

Цілком природно досліджувати різні рівняння Коші в класичних полях, зокрема у комплексному полі $\mathbb{C}$. Чотири теореми, які будуть відображені в цьому розділі, демонструють загальні та регулярні розв'язки класичного та експоненціального рівнянь Коші для комплекснозначних функцій.

3.1 Звичайне рівняння Коші для комплекснозначних функцій

Означення 3.1. Довільну функцію $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ завжди можна подати у вигляді

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x), \quad (3.1)$$

де f_1 та f_2 – це функції з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

Функціональне рівняння Коші для функцій (3.1) має вигляд

$$f(x+y) = f(x) + f(y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

цю рівність слід розуміти наступним чином:

$$f_k(x+y) = f_k(x) + f_k(y), (k = 1, 2), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Теорема 3.1. Загальний розв'язок $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ рівняння (3.2) має вигляд (3.1), де f_1 та f_2 – довільні адитивні функції.

Доведення. Теорема 3.1 прямо слідує з Означення 1.1 та рівності (3.3).■

Наслідок 3.1. Зрозуміло, що загальний розв'язок $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ рівняння (3.2) у класі функцій, які неперервні в точці або вимірні, задається формулою:

$$f(x) = (c_1 + ic_2)x = cx, \quad (3.4)$$

де c - це довільна комплексна константа.

Нехай $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Тоді $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ має вигляд

$$f(z) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z), \quad (3.5)$$

тому (3.5) має вигляд

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (3.6)$$

Означення 3.2. Нехай $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ – два довільних комплексних числа. Функціональним рівнянням Коші для функції $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ називають рівняння виду

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2), z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}, \quad (3.7)$$

тобто

$$\begin{cases} u(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = u(x_1, y_1) + u(x_2, y_2) \\ v(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = v(x_1, y_1) + v(x_2, y_2) \end{cases}, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

Рівняння (3.8) – це функціональне рівняння Коші для функцій двох змінних.

Лема 3.1. Загальний розв’язок рівняння

$$u(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = u(x_1, y_1) + u(x_2, y_2), x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

має вигляд

$$u(x, y) = u_1(x) + u_2(y), \quad (3.9)$$

де u_1, u_2 – довільні адитивні функції.

Доведення. Нехай

$$u(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},$$

довільний розв’язок рівняння (3.8). Покладемо

$$u_1(x) = u(x, 0), x \in \mathbb{R},$$

$$u_2(y) = u(0, y), y \in \mathbb{R}.$$

Тоді з (3.8) при $y_1 = y_2 = 0$ маємо

$$u(x_1 + x_2, 0) = u(x_1, 0) + u(x_2, 0), x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Тому

$$u_1(x_1 + x_2) = u_1(x_1) + u_1(x_2), x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

отже u_1 – адитивна функція. Аналогічно u_2 – адитивна функція.

Знову ж таки з (3.8) при $y_1 = x_2 = 0$ маємо

$$u(x_1, y_2) = u(x_1, 0) + u(0, y_2), x_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Отже

$$u(x, y) = u_1(x) + u_2(y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},$$

тобто виконано (3.9). ■

Теорема 3.2. Загальний розв’язок функціонального рівняння Коші (3.7) в класі функцій $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ має вигляд (3.6), де

$$u(x, y) = u_1(x) + u_2(y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},$$

$$v(x, y) = v_1(x) + v_2(y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R},$$

u_1, u_2, v_1, v_2 – довільні адитивні функції.

Доведення. Доведення даної теореми слідує з Означення 3.2 і Лема 3.1. ■

Наслідок 3.2. За умов регулярності функції f , тобто функцій u та v , отримуємо що загальний розв'язок рівняння (3.7) має вигляд

$$f(z) = c_{11}x + c_{12}y + i(c_{21}x + c_{22}y),$$

де $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ – довільні дійсні числа.

Але даний випадок призводить до комплекснозначних функцій комплексної змінної, а саме, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Тоді з:

$$z = x + iy, f(z) = f_1(z) + if_2(z),$$

отримуємо за умови неперервності f в точці:

$$f(z) = c_{11}x + c_{12}y + i(c_{21}x + c_{22}y).$$

Оскільки $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$, отже,

$$f(z) = (c_{11} + ic_{21}) \frac{z + \bar{z}}{2} + (c_{22} - ic_{12}) \frac{z - \bar{z}}{2} = az + b\bar{z},$$

де

$$a = \frac{c_{11} + c_{22}}{2} + i \frac{c_{21} - c_{12}}{2}, b = \frac{c_{11} - c_{22}}{2} + i \frac{c_{21} + c_{12}}{2}.$$

і тому

$$f(z) = az + b\bar{z}, z \in \mathbb{C},$$

задовольняє (3.7) для довільних комплексних констант a, b .

3.2 Експоненціальне рівняння Коші для комплекснозначних функцій

Цей розділ буде присвячений експоненціальному рівнянню Коші для комплекснозначних функцій. Будь-яку комплекснозначну функцію $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ в даному розділі зручно записувати у показниковій формі:

$$h(x) = r(x) \exp(i\phi(x)), x \in \mathbb{R}, \quad (3.10)$$

де $r(x) \geq 0$ є комплексним модулем $h(x)$, а $\phi(x)$ також має дійсне значення, але визначається за модулем 2π , при $r(x) \neq 0$.

Означення 3.3. Експоненціальним функціональним рівнянням Коші для функцій h називається рівняння вигляду:

$$h(x+y) = h(x)h(y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}. \quad (3.11)$$

Наступна теорема встановлює структуру розв'язків цього рівняння.

Теорема 3.3. Загальний розв'язок $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ рівняння (3.11) задається формулою:

$$h(x) = 0, x \in \mathbb{R},$$

або

$$h(x) = \exp(f(x) + i\phi(x)), x \in \mathbb{R},$$

де $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – довільна адитивна функція, а ϕ – довільний розв'язок рівняння

$$\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y) \pmod{2\pi}, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}. \quad (3.12)$$

Доведення. Для доведення підставивимо (3.10) в (3.11), отримаємо:

$$r(x+y) \exp(i\phi(x+y)) = r(x)r(y) \exp(i[\phi(x) + \phi(y)]). \quad (3.13)$$

Оскільки модулі (3.13) з обох сторін рівні, то отримаємо рівняння для модуля комплекснозначної функції:

$$r(x+y) = r(x)r(y). \quad (3.14)$$

З результатів розділу 2 маємо: або $r = 0$, а отже $h = 0$ всюди, або $r \neq 0$, тоді маємо:

$$\exp(i\phi(x+y)) = \exp(i[\phi(x) + \phi(y)]), x, y \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

Тепер функціональне рівняння (3.14) має вигляд (2.10), за умови (2.11).

Далі за Теоремою 2.3 маємо:

$$r(x) = 0, x \in \mathbb{R},$$

або

$$r(x) = e^{f(x)}, x \in \mathbb{R},$$

де f - це адитивна функція.

Щодо рівняння (3.15), то воно еквівалентно (3.12), оскільки експоненціальна функція є періодичною з періодом $2\pi i$, отже ϕ визначається лише з точністю до кратності 2π .■

Наслідок 3.3. Тепер встановимо вимірні розв'язки рівняння (3.11). Це не така проста задача, але її розв'язання буде наведене нижче.

Оскільки h та r вимірні, то розв'язок рівняння (3.14) за Теоремою 2.3 буде мати вигляд:

$$r(x) \equiv 0, x \in \mathbb{R}, \text{ або } r(x) = e^{cx}, x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}. \quad (3.16)$$

З першого розв'язку слідує, що $h(x) = 0$ всюди.

Нехай ϕ – це довільний розв'язок рівняння (3.15). Розглянемо нову функцію $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ означену рівністю:

$$g(x) = \exp(i \phi(x)), \quad (3.17)$$

Оскільки функція ϕ вимірна, то функція g також буде вимірною.

$$g(x) = e^{-cx} h(x).$$

Окрім того маємо:

$$|g(x)| = 1, x \in \mathbb{R}, \quad (3.18)$$

g також обмежена і, отже інтегрована на тому ж інтервалі. Після заміни (3.17), рівняння (3.15) перепишеться у вигляді рівняння відносно функції g :

$$g(x+y) = g(x)g(y) \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (3.19)$$

g інтегровна на будь-якому скінченному інтервалі.

Існує число $b \in \mathbb{R}$ таке, що:

$$a = \int_0^b g(x) dx \neq 0. \quad (3.20)$$

Дійсно, від супротивного, якби для кожного $t \in \mathbb{R}_+$ виконувалась

$$\int_0^t g(y) dy = 0,$$

то функція $g(x) = 0$ майже всюди на $\mathbb{R}_+$, але це суперечить (3.19), згідно з теоремою Лебега (див., наприклад, [35]).

Інтегруємо обидві частини (3.19) по y на інтервалі $[0, b]$. Тоді, за допомогою (3.20), використовуючи заміну змінної $t = x + y$, отримаємо:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{a} \int_0^b g(x+y) dy = \frac{1}{a} \int_x^{x+b} g(t) dt, \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{x+b} g(t) dt - \frac{1}{a} \int_0^x g(t) dt. \end{aligned} \quad (3.21)$$

З (3.21) випливає, що $g(x)$ виражається через різницю двох функцій вигляду:

$$x \rightarrow \int_0^x g(t) dt,$$

які є неперервними, оскільки лебегівський інтеграл, як функція верхньої межі - неперервний. Отже g є неперервною.

Оскільки інтеграл неперервної функції за верхньою межею є диференційованим, то й права частина цієї рівності є диференційованою функцією змінної x , а тому й сама функція g є диференційованою.

Диференціюємо (3.19) по y , підставляємо $y = 0$, щоб отримати:

$$g(x)' = \delta g(x), x \in \mathbb{R},$$

де $\delta = g'(0)$. Інтегрування цього диференціального рівняння дає:

$$g(x) = \gamma e^{\delta x}, x \in \mathbb{R}, \quad (3.22)$$

де γ, δ комплексні константи.

Підставлення виразу (3.22) у рівняння (3.19) веде до двох можливостей: або $\gamma = 0$, що суперечить (3.18), або $\gamma = 1$ і тоді за (3.18), $\delta = di$, де d - дійсне число, тобто:

$$g(x) = e^{idx}, x \in \mathbb{R}.$$

Отже, загальний вимірний розв'язок рівняння (3.11) має вигляд:

$$h(x) = 0, x \in \mathbb{R},$$

або

$$h(x) = \exp((c + id)x) = e^{\alpha x}, x \in \mathbb{R},$$

де α – довільна комплексна стала.

Означення 3.4. Експоненціальним рівнянням Коші для функції $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ називають наступний вираз:

$$h(x + y) = h(x)h(y), x \in \mathbb{C}, y \in \mathbb{C}. \quad (3.23)$$

Загальні розв'язки експоненціального функціонального рівняння Коші (3.23) встановлені в наступній теоремі.

Теорема 3.4. Загальні розв'язки рівняння (3.23) задаються наступним чином:

$$h(x) = 0, x \in \mathbb{C}, \quad (3.24)$$

та

$$\begin{aligned} h(x) &= h(x_1 + ix_2) \\ &= \exp[f_1(x_1) + f_2(x_2) + i\phi_1(x_1) + i\phi_2(x_2)], x \in \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

де f_1 та f_2 - довільні адитивні функції, а ϕ_1 та ϕ_2 - довільні дійсні розв'язки (3.12). Зокрема, загальні вимірні розв'язки $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ рівняння (3.23) задаються рівностями

$$h(x) = 0, x \in \mathbb{C},$$

та

$$h(x) = \exp(\alpha x + \beta \bar{x}), x \in \mathbb{C},$$

де α, β - довільні сталі комплексні числа.

Доведення. Довільну функцію $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ можна подати у показниковій формі вигляду:

$$h(x) = r(x) \exp(i\phi(x)), x \in \mathbb{C},$$

де r та ϕ – дійснозначні функції.

Підставимо дану функцію в рівняння (3.23), отримаємо

$$r(x + y) = r(x)r(y), x, y \in \mathbb{C}$$

Оскільки існує два випадки, коли $r = 0$, а отже $h = 0$ всюди.

Якщо $r \neq 0$, отримаємо:

$$\exp(i\phi(x+y)) = \exp(i[\phi(x) + \phi(y)]), x, y \in \mathbb{C},$$

тому

$$\begin{cases} r(x) = r(x_1 + ix_2) = r(x_1)r(ix_2) \\ e^{i\phi(x)} = g(x) = g(x_1 + ix_2) = g(x_1)g(ix_2) \end{cases}, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Оскільки функції $x_1 \rightarrow g(x_1)$ і $x_2 \rightarrow g(ix_2)$ мають ті самі властивості, що (3.18) і (3.19), то, аналогічно до доведення Теорема 3.3, отримаємо загальні розв'язки (3.24) і (3.25). ■

Приклад 3.1. Комплекснозначну функцію $f(z), z \in \mathbb{C}$ називають правильно змінною в слабкому розумінні, якщо вона є ненульовою і для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$ - існує скінченна границя:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda + z)}{f(z)} = g(\lambda) \neq 0, \lambda \in \mathbb{C},$$

де $g(\lambda)$ - гранична функція.

Тоді

$$\begin{aligned} g(\lambda + \mu) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda + \mu + z)}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(\lambda + \mu + z)}{f(\lambda + z)} \cdot \frac{f(\lambda + z)}{f(z)} \\ &= g(\mu)g(\lambda), \lambda, \mu \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

З цього слідує, що

$$g(\lambda + \mu) = g(\mu)g(\lambda), \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Тому гранична функція задовольняє експоненціальне рівняння Коші. Якщо додати умову вимірності граничної функції g , то вона буде мати вигляд

$$g(\lambda) = e^{\zeta\lambda + \xi\bar{\lambda}}, \lambda \in \mathbb{C}, \zeta \in \mathbb{C}, \xi \in \mathbb{C}.$$

Важливо, що на відміну від дійснозначного випадку, такі комплекснозначні правильно змінні функції мають два індекси, прямий та спряжений (ζ та ξ).

ВИСНОВКИ

В даній роботі було розглянуто та проаналізовано задачі, що стосуються функціональних рівнянь, зокрема адитивності та рівняння Коші, а також його аналогів. Окрему увагу приділено розв'язкам, що виникають в умовах альтернативних умов адитивності, зсуву, середнього значення Йенсена та експоненціальних форм розв'язків.

Особливу роль у дослідженні відіграли узагальнені форми рівняння Коші для комплекснозначних функцій, що дозволяють не лише розширити теоретичну базу, але й значно збагачують методологічний підхід до розв'язання подібних задач. Використані методи, зокрема аналіз експоненціальних функцій та застосування середніх значень, дозволяють сформулювати нові висновки щодо типів можливих розв'язків таких рівнянь, а також їхніх особливостей у контексті обмежень на значення функцій.

Були розглянуті комплекснозначні правильно змінні функції, котрі, на відміну від дійснозначного випадку, мають два індекси – основний та спряжений.

Робота також включає практичне застосування теоретичних результатів до конкретних функціональних рівнянь, що показує універсальність і важливість зазначених підходів у математичній теорії функцій та їхніх застосуваннях. Отримані результати мають значення не тільки для теорії, але й для подальших досліджень у галузі математичного аналізу та його застосувань.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Aczél, J. *Lectures on Functional Equations and Their Applications* // Academic Press Inc., New York, 1966. – 510 p.
2. Aczél, J., and Dhombres, J. *Functional Equations in Several Variables* // Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1989. – 480 p.
3. Alexiewicz, A., and Orlicz, W. *Remarque sur l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$* // Fund. Math. 33 – 1945, 314–315.
4. Baker, J. A. *Regularity properties of functional equations* // Aequationes Math. 6 – 1971, 243–248.
5. Banach, S. *Sur l'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x) + f(y)$* // Fund. Math. 1 – 1920, 123–124.
6. Banach, S. *Théorie des opérations linéaires* // Monographie Mat. PWN, Warsaw, 1932. – 254 p.
7. Blumberg, H. *On convex functions* // Trans. Amer. Math. Soc. 20 – 1919, 40–44.
8. Brzdęk, J. *Continuity of measurable homomorphisms* // Bull. Aust. Math. Soc. 78 – 2008, 171–176.
9. Cauchy, A. *Cours d'analyse de l'École Polytechnique, Volume 1: Analyse algébrique* // De l'Imprimerie Royale, Paris, 1821. – 518 p.
10. Christensen, J. P. R. *Borel structures in groups and semigroups* // Math. Scand. 28 – 1971, 124–128.
11. Dales, H. G. *Banach Algebras and Automatic Continuity, Vol. 24 of London Mathematical Society Monographs. New Series* // Oxford University Press, New York, USA, 2000. – 907 p.
12. Darboux, G. *Sur la composition des forces en statique* // Bull. Sci. Math. 9 – 1875, 281–288.
13. Darboux, G. *Sur le théorème fondamental de la géométrie projective* // Math. Ann. 17 – 1880, 55–61.
14. Figiel, T. *O równaniu funkcyjnym $f(x + y) = f(x) + f(y)$* // Wiadomości Matematyczne 11 – 1969, 15–18.

15. Fréchet, M. *Pri la funkcia ekvacio $f(x+y) = f(x)+f(y)$* // Enseignement Mathématique 15 – 1913, 390–393.
16. Gajda, Z. *Christensen measurable solutions of generalized Cauchy functional equations* // Aequationes Math. 31 – 1986, 147–158.
17. Gauss, C. F. *Theoria motus corporum coelestium* // Perthes-Besser, Hamburg, 1809. (Also in: Werke, Vol. VII, 240–244. Teubner, Leipzig, 1906). – 272 p.
18. Grosse-Erdmann, K.-G. *Regularity properties of functional equations and inequalities* // Aequationes Math. 37 – 1989, 233–251.
19. Hamel, G. *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$* // Math. Ann. 60 – 1905, 459–462.
20. Hewitt, E., and Ross, K. A. *Abstract Harmonic Analysis. Vol. I: Structure of Topological Groups, Integration Theory, Group Representations* // Academic Press, New York; Springer-Verlag, Berlin, 1963. – 519 p.
21. Itzkowitz, G. L. *Measurability and continuity for a functional equation on a topological group* // Aequationes Math. 7 – 1971, 194–198.
22. Járαι, A., and Székelyhidi, L. *Regularization and general methods in the theory of functional equations* // Aequationes Math. 52 – 1996, 10–29.
23. Kac, M. *Une remarque sur les équations fonctionnelles* // Comment. Math. Helv. 9 – 1937, 170–171.
24. Kannappan, P. *Functional Equations and Inequalities with Applications* // Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2009. – 810 p.
25. Kestelman, H. *On the functional equation $f(x+y) = f(x)+f(y)$* // Fund. Math. 34 – 1947, 144–147.
26. Kormes, M. *On the functional equation $f(x+y) = f(x)+f(y)$* // Bull. Amer. Math. Soc. 32 – 1926, 689–693.
27. Legendre, A. M. *Elements de geometrie* // Didot, Paris, 1794. – 328 p.

28. Mehdi, M. R. *On convex functions* // J. London Math. Soc. 39 – 1964, 321–326.
29. Monroe, I. *On the generalized Cauchy equation* // Canad. J. Math. 19 – 1967, 1314–1318.
30. Neeb, K.-H. *On a theorem of S. Banach* // J. Lie Theory 8 – 1997, 293–300.
31. Ostrowski, A. *Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und verwandte Funktionalgleichungen* // Jber. Deutsch. Math. Verein. 38 – 1929, 54–62.
32. Pettis, B. J. *On continuity and openness of homomorphisms in topological groups* // Ann. of Math. 52 – 1950, 293–308.
33. Rényi, A. *On measures of entropy and information* // Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Statist. Probab. 1 – 1961, 547–561.
34. Rosendal, C. *Automatic continuity of group homomorphisms* // Bull. Symbolic Logic 15 – 2009, 184–214.
35. Rudin, W. *Real and Complex Analysis* // 3rd ed. – New York: McGraw-Hill, 1987. – 416 p.
36. Sierpiński, W. *Sur l'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x) + f(y)$* // Fund. Math. 1 – 1920, 116–122.
37. Клесов, О. І. *Застосування правильно змінних функцій у теорії ймовірностей* // (електронний конспект лекцій), 2016. – 90 с.