НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

На правах рукопису
УДК 519.21

До захисту допущено
завідувач кафедри
__________ Клесов О. І.
«____» _____________ 2025 р.

Магістерська робота

на здобуття ступеня магістр
за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»
спеціальності 111 «Математика»
на тему: «Застосування стохастичних диференціальних рівнянь для моделювання динаміки популяції»

Виконав:
студент II курсу, групи ОМ-31мн
Панічек Олексій Володимирович

Керівник:
доцент, к.ф-м.н. Тимошенко Олена Анатоліївна

Рецензент:
доцент, д.ф.-м.н. Сливка-Тилищак Ганна Іванівна

Засвідчую, що у цій дипломній роботі
немає запозичень з праць інших авторів
без відповідних посилань.
Студент: Панічек Олексій Володимирович

Київ – 2025 року

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти — другий (магістерський).

Спеціальність — 111 «Математика».

Освітньо-наукова програма – «Страхова та фінансова математика».

ЗАТВЕРДЖУЮ
завідувач кафедри
__________ Клесов О. І.
«____» _____________ 2025 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську роботу студенту
Панічеку Олексію Володимировичу

1. Тема роботи: «Застосування стохастичних диференціальних рівнянь для моделювання динаміки популяції». Керівник роботи: доцент, к.ф-м.н. Тимошенко Олена Анатоліївна.
2. Термін подання студентом роботи: 15 травня 2025 р.
3. Об’єкт дослідження: SIRV-модель на основі системи стохастичних диференціальних рівнянь.
4. Предмет дослідження: додатність розв’язків досліджуваної системи стохастичних рівнянь, асимптотична поведінка розв’язків досліджуваної системи.
5. Перелік завдань, які необхідно розробити:
    1) Дослідити наявні підходи щодо застосування стохастичних диференціальних рівнянь та звичайних диференціальних рівнянь в задачах епідеміології.
    2) Узагальнити SIRV-модель на випадок часозмінних параметрів.
    3) Перевірити отриману модель на адекватність.
    4) Провести чисельне моделювання траєкторій розв’язків.
    5) Дослідити асимптотичну поведінку розв’язків та сформулювати умови затухання інфекції.

6) Провести чисельне моделювання асимптотичної поведінки кількості інфікованих.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: 20 слайдів.
7. Орієнтовний перелік публікацій:
   1) Стаття в науковому журналі «Науковий вісник Ужгородського університету» на тему: «Математичне моделювання динаміки передачі туберкульозу з використанням диференціальних рівнянь збурених за допомогою вінерівських процесів».
   2) Тези доповіді X Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університет» на тему «Математичне моделювання динаміки передачі інфекційних захворювань з використанням СДР».
   3) Тези доповіді XII Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків на тему «Застосування стохастичних диференціальних рівнянь для моделювання динаміки популяції».
8. Дата видачі завдання: 04 лютого 2025 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапу виконання дипломної роботи	Термін виконання етапу роботи	Примітка
1.	Огляд літератури	04.02.25-11.02.25	Виконано
2.	Узагальнення SIRV-моделі	11.02.25-16.02.25	Виконано
3.	Перевірка моделі на додатню визначеність	16.02.25-28.02.25	Виконано
4.	Чисельне моделювання траєкторій	01.03.25-12.03.25	Виконано
5.	Дослідження асимптотичної поведінки розв’язків системи	12.03.25-04.04.25	Виконано
6.	Чисельне моделювання асимптотичної поведінки класу інфікованих	04.04.25-16.04.25	Виконано
7.	Оформлення дипломної роботи	16.04.25-15.05.25	Виконано

Студент Олексій ПАНІЧЕК

Керівник Олена ТИМОШЕНКО

РЕФЕРАТ

Магістерська робота: 58 сторінок, 16 рисунків, 1 додаток, 28 джерел.

СТОХАСТИЧНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ФОРМУЛА ІТО, SIR-МОДЕЛЬ, ВІНЕРІВСЬКИЙ ПРОЦЕС, РЕПРОДУКТИВНЕ ЧИСЛО, ФУНКЦІЇ ЛЯПУНОВА, СТОХАСТИЧНІ ПРОЦЕСИ, SIRV-МОДЕЛЬ, АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА

Об'єкт дослідження — **моделі прогнозування захворюваності на основі стохастичних диференційних рівнянь.**

Мета роботи — **розробка та перевірка на додатню визначеність запропонованої моделі на основі системи стохастичних диференційних рівнянь, дослідження поведінки розв'язків.**

Методи дослідження — **синтез та аналіз інформації, моделювання процесів, класифікація та формалізація об'єкту дослідження.**

Результат роботи — **узагальнена SIRV модель на основі стохастичних диференціальних рівнянь, теорема про асимптотичну поведінку розв'язків.**

ABSTRACT

Thesis work: 58 pages, 16 figures, 1 appendix, 28 references.

STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS, ITO FORMULA, SIR MODEL, WIENER PROCESS, REPRODUCTIVE NUMBER, LYAPUNOV FUNCTION, STOCHASTIC PROCESSES, SIRV MODEL, ASYMPTOTIC BEHAVIOR

The object of the research is **infection prediction models based on stochastic differential equations.**

The purpose of the work is to **develop and verify proposed model based on a system of stochastic differential equations, study behavior of solutions.**

Research methods are based on **synthesis and analysis of information, modeling, classification and formalization of the object of research.**

As a result, **introduced generalized SIRV model based on stochastic differential equations, theorem of solution asymptotic behavior.**

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

СДР – стохастичні диференціальні рівняння.

ЗДР – звичайні диференціальні рівняння.

$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел.

$\mathbb{R}_+$ – множина додатніх дійсних чисел.

м.н. – майже напевно.

Ω — простір елементарних подій.

$\mathbb{F}$ — σ-алгебра вимірних подій.

P — ймовірнісна міра.

$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ — потік σ-алгебр, тобто зростаюча сім'я σ-алгебр.

E$[X]$ – математичне сподівання випадкової величини X.

$\mathbb{I}_A$ – індикаторна функція

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \omega \in A, \\ 0, & \text{якщо } \omega \notin A. \end{cases}$$

S – кількість сприйнятливих індивідів в популяції.

I – кількість інфікованих індивідів в популяції.

R – кількість вилікуваних або усунутих індивідів в популяції.

V – кількість вакцинованих індивідів в популяції.

$\mathcal{R}_0$ – репродуктивне число.

min$\{a, b\}$ – мінімальне з двох чисел a та b.

max$\{a, b\}$ – максимальне з двох чисел a та b.

MAPE – середня відсоткова похибка.

τ_m – момент зупинки.

$f \sim \phi$ – асимптотична еквівалентність f і ϕ при $x \to \infty$.

$f(t) \sim o(t)$ – функція $f(t)$ зростає повільніше, ніж t, при $t \to \infty$.

ВСТУП

Звичайні диференціальні рівняння (ЗДР) так само важливі, як і стохастичні диференціальні рівняння (СДР) при моделюванні багатьох процесів у науці та інженерії. ЗДР використовуються для опису детермінованих систем, динаміка яких залежить від початкових умов і законів взаємодії. Такі моделі широко використовуються у фізиці, хімії, економіці та біології, де випадковість не має впливу або нею можна знехтувати.

Однак багато реальних процесів мають значну частку випадковостей, зумовлених зовнішніми або внутрішніми факторами. У таких випадках СДР дають змогу здійснити більш точне математичне моделювання. СДР враховують випадкові збурення, які можуть впливати на динаміку системи, наприклад, у вигляді білого шуму або випадкових змін параметрів. Це особливо важливо в фінансах (для моделювання цін на ринку), біології (для опису генетичних дрейфів) та епідеміології (для врахування випадкових спалахів і поширення інфекцій).

За допомогою інструментарію СДР розв'язують низку важливих задач фізики (наприклад, рівняння Лажевена див. [1]), математики (наприклад, рівняння Фокера-Планка див. [2]), зокрема у таких напрямках математики, як фінансова математика, теорія марківських процесів, математична епідеміологія.

Застосування СДР дозволяє отримати більш наближену до реальності модель фізичних та математичних процесів, у яких важливу роль відіграють невизначеність та непередбачуваність факторів. Це особливо актуально в тих випадках, коли досліджувані явища не можна описати детермінованими рівняннями.

У своїй роботі ми вирішили перевірити, як теорія СДР може бути використана для моделювання епідемічних процесів. Наразі одним з популярних та успішних напрямків є використання СДР для моделювання поширення інфекційних захворювань. У рамках цієї роботи ми зосереджуємось на актуальному питанні для сучасної України — моделюванні поширення туберкульозу з урахуванням випадкових чинників.

Туберкульоз є одним із найбільш поширених інфекційних захворювань у світі: за оцінками, близько двох мільярдів людей інфіковані мікобактерією туберкульозу. Щороку реєструється близько дев'яти мільйонів нових випадків активної форми захворювання, що призводить до двох мільйонів смертей, переважно у країнах, що розвиваються. На сьогодні для України ця проблема є особливо актуальною.

Результати моделювання є важливою основою для задач керування епідеміологічною ситуацією, оцінки кількості інфікованих та інших статистичних даних перебігу інфекції. Крім того, темпи розповсюдження захворювання, які можна отримати за допомогою цих моделей, можуть допомогти визначити, скільки коштів потрібно виділити для боротьби з хворобою. Це може включати фінансування на боротьбу з інфекцією, лікування пацієнтів, профілактичні заходи та вакцинацію. За допомогою математичних моделей можна визначати найбільш економічно ефективні стратегії для зупинки захворювання. Математичний підхід гарантує принципово інший рівень аргументації рішень, що може застосовуватися державними органами для визначення потенційно більш ефективних дій.

Структура магістерської дисертації включає три розділи. У Розділі 1 розглядаються теоретичні основи моделей математичної епідеміології та теорії стохастичних диференціальних рівнянь. У Розділі 2 визначено випадкову SIRV-модель з коефіцієнтами-функціями та перевірено додатню визначеність її розв’язків. У Розділі 3 розглянуто асимпототичну поведінку розв’язків запропонованої моделі та чисельне моделювання на основі отриманих теоретичних результатів.

РОЗДІЛ 1
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ

1.1. Основи SIR-моделей

Одним із найбільш базових підходів до моделювання динаміки інфікування є SIR-модель, яка вперше була запропонована Кермаком і Маккендріком у 1927 році (див. [3]). Ця робота поклала початок систематичному застосуванню математичних моделей в епідеміології, зокрема для опису поширення інфекційних захворювань за допомогою ЗДР. Найперша SIR-модель представляла собою систему рівнянь наступного вигляду:

$$\begin{cases} dS(t) = -\beta S(t)I(t)dt, \\ dI(t) = (\beta S(t)I(t) - \gamma I(t))\,dt, \\ dR(t) = \gamma I(t)dt. \end{cases} \tag{1.1}$$

Параметри моделі (1.1) визначаються на основі історичних даних, шляхом експертної оцінки. У системі рівнянь (1.1) особи популяції поділяються на три неперетинні класи (S, I, R):

- S – сприйнятливі до хвороби особи;
- I – інфіковані особи;
- R – особи, які одужали.

Коефіцієнти мають наступне тлумачення: $\beta > 0$ – швидкість передачі інфекції від інфікованих I до сприйнятливих S; $\gamma > 0$ – швидкість одужання (переходу з класу інфікованих I до класу одужалих R). Загальна чисельність популяції залишається у даній моделі сталою:

$$\forall t \geq 0 : S(t) + I(t) + R(t) = N = const.$$

Систему можна зобразити у вигляді блок-схеми (див. Рис. 1.1):

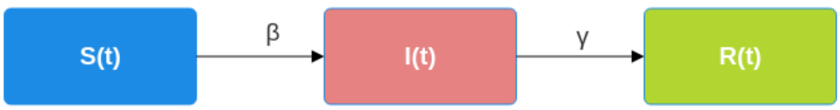

Рисунок 1.1 – Схема переходів між основними класами SIR-моделі.

Для задач епідеміології особливо важливим є дослідження умов зникнення інфекції та знаходження базового репродуктивного числа $\mathcal{R}_0$. Величина $\mathcal{R}_0$ позначає середню кількість інфікованих осіб, уражених хворобою, на одну заражену людину у популяції, яка не має імунітету до інфекції, тобто $N = S$. Відносна величина репродуктивного числа дозволяє свідчити про тяжкість епідеміологічної ситуації. Наприклад, $\mathcal{R}_0 > 1$ означає тенденцію на збільшення кількості інфікованих, тоді як зворотня ситуація $\mathcal{R}_0 \leq 1$ – навпаки, означає тенденцію до затухання інфекції або досягнення стабільного рівня інфікування (при $\mathcal{R}_0 = 1$). Наприклад, для SIR-моделі (1.1) базове репродуктивне число задається виразом $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\gamma}$ – є прямо пропорційним до інтенсивності передачі хвороби та обернено пропорційним до інтенсивності одужання.

SIR-модель широко застосовували для моделювання перебігу таких захворювань, як COVID-19 [4], ебола [5], віспа [6], малярія [7] тощо.

SIR-модель у базовій формі є лише спрощеним наближенням до реальної динаміки інфекційного процесу. Вона в наведеному вище визначенні не враховує зміну загальної кількості осіб в результаті природної смертності, народжуваності, надлишкової смертності через хворобу. Також лишаються поза увагою питання вакцинації, впливу мутацій захворювань, впливу карантинних заходів тощо.

Для більш чіткого опису реальних епідеміологічних процесів SIR-модель розширюють шляхом додавання нових класів та модифікації вже наявних.

Наприклад, вищенаведена SIR-модель (1.1) може бути змінена так, щоб враховувати смертність в популяції. Подібна модель розглянута, наприклад, в [8], [9].

Оновлена модель матиме наступний вигляд:

$$\begin{cases} dS(t) = \alpha N(t)dt - \beta S(t)I(t)dt - \mu S(t), \\ dI(t) = \left(\beta S(t)I(t) - \gamma I(t) - \mu I(t)\right)dt, \\ dR(t) = \gamma I(t)dt - \mu R(t)dt, \end{cases} \tag{1.2}$$

У системі (1.2) коефіцієнт народжуваності $\alpha : \alpha > 0$, а коефіцієнт смертності $\mu : \mu > 0$. Новонароджені не отримують імунітету до хвороби (переходять у клас S), смертність однакова в усіх класах. Коефіцієнти α, μ як і інші, як правило, визначають на основі історичних даних. Відношення між класами представлено у вигляді блок-схеми на Рис. 1.2.

Наведена вище архітектура SIR-моделі не є загальноприйнятим стандартом та може змінюватися залежно від властивостей об'єкту вивчення. У деяких випад-

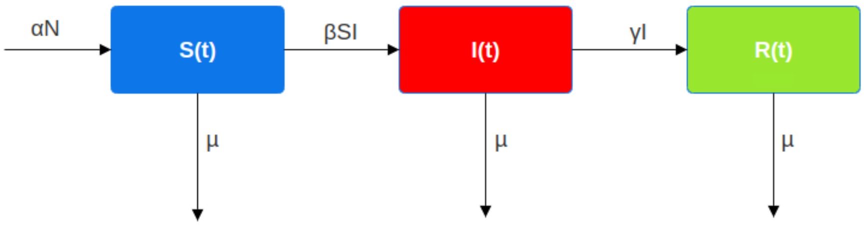

Рисунок 1.2 – Схема переходів між основними класами SIR-моделі з смертністю.

ках допускається наявність часткового імунітету у новонароджених (тобто клас R збільшується з інтенсивністю α_r, а клас S – з інтенсивністю α_s, де $\alpha_s + \alpha_r = \alpha$), або ж передачі хвороби безпосередньо при народженні (аналогічно збільшення класу I за рахунок народження нових осіб від інфікованих – $\alpha_i I(t)$). Інші аспекти популяції можуть так само значущо видозмінювати архітектуру моделі.

Наприклад, для підкреслення впливу інфекції на смертність вводять додаткову інтенсивність смертності через хворобу $\mu_i : \mu_i > 0$. Через це клас інфікованих I додатково зменшується з інтенсивністю μ_i. У такому випадку, відношення між класами S, I, R дещо зміниться. Інтенсивність депопуляції класу у випадку врахування смертності від хвороби складатиме $\mu + \mu_i$.

Окрім вже розглянутого впливу смертності та народжуваності популяції, вводять також змінні в часі коефіцієнти $\beta = \beta(t), \gamma = \gamma(t)$ або ж додають до розгляду стохастичні компоненти. Це зумовлено тим, що у реальному світі динаміка популяції неминуче зазнає впливу шуму середовища, який є важливою компонентою екосистеми. Відповідно, припущення про сталість параметрів у довгостроковій перспективі є нереалістичним.

1.2. Основи SIRV-моделей

У деяких випадках додають також новий клас вакцинованих – V. У такому випадку можна досліджувати ефективність вакцинації населення. Такі моделі мають загальну назву SIRV-моделі. SIRV-модель є системою чотирьох диференційних рівнянь:

$$\begin{cases} dS(t) = -\frac{\beta S(t)I(t)}{N(t)}dt - \nu S(t)dt, \\ dI(t) = \left(\beta\frac{S(t)I(t)}{N(t)} - \gamma I(t) - \alpha\frac{V(t)I(t)}{N(t)}\right)dt, \\ dR(t) = \gamma I(t)dt, \\ dV(t) = \nu S(t)dt - \alpha\frac{V(t)I(t)}{N(t)}dt. \end{cases} \tag{1.3}$$

У системі рівнянь (1.3) до вже визначених залежностей між класами S, I, R додаються взаємозалежності між класами сприйнятливих та інфікованих (S, I) та класом вакцинованих V. Перехід з класу вакцинованих до класу I залежить від значення α, а перехід до класу вакцинованих з класу сприйнятливих $S \to V$ відбувається пропорційно значенню ν. Залежно від природи модельованого явища в популяції вводять й інші залежності між класами, а також модифікують деякі наявні.

Як і для моделі (1.1), для SIRV-моделі справедливо, що $\forall t \geq 0 : S(t) + I(t) + R(t) + V(t) = N(t) = const$.

Процеси, які відбуваються між класами S, I, R, V у зазначеному формулюванні (1.3) можна зобразити за допомогою блок-схеми (див. Рис. 1.3).

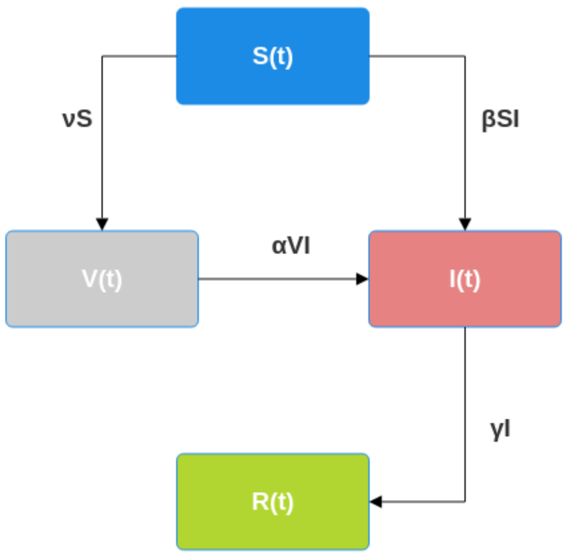

Рисунок 1.3 – Приклад схеми переходів між основними класами SIRV-моделі.

Попереднє визначення не є загальним для SIRV-моделей. Залежно від припущень стосовно інфекції та умов можуть додаватися чи вилучатися певні зв'язки між класами. Якщо необхідно, то до розгляду вводять також природну зміну чисельності населення, особливо якщо захворювання перебігає повільно.

Загалом, додавання до розгляду смертності, смертності через хворобу та народжуваності популяції відбувається аналогічно до розглянутого вище для SIR-моделі зі смертністю (1.2).

На основі підходів моделі (1.3) у цій магістерській роботі буде запропоновано більш загальну SIRV-модель, яка враховуватиме не тільки демографічну зміну популяції, а також зачіпатиме питання змінної поведінки захворювання, врахування випадковостей на її перебіг та часозмінних коефіцієнтів.

Архітектура SIRV-моделей не раз доводила свою ефективність на практиці, наприклад, в прогнозуванні динаміки перебігу COVID-19 (див. [10]).

1.3. Загальна теорія СДР

Для дослідження поставлених у роботі задач у межах стохастичної епідеміологічної моделі нам знадобляться ключові поняття та результати з теорії СДР. У цьому підрозділі наведено огляд основних означень, тверджень і властивостей, які використовуються надалі.

Розгляд теорії СДР почнемо з визначення вінерівського процесу.

Нехай задано ймовірнісний простір $(\Omega, F, \mathbb{P})$, де Ω – простір елементарних подій, $F = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ – потік σ-алгебр подій, $\mathbb{P}$ (або P) – ймовірнісна міра, визначена на F.

Випадковий (або стохастичний) процес X - це функція, визначена на ймовірнісному просторі $(\Omega, F, \mathbb{P})$ така, що $X : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$ та $\forall t \in [0, T] : X(t)$ – вимірна випадкова величина на алгебрі подій $\mathcal{F}$.

Означення 1 (Вінерівський процес [11]). Вінерівський процес W – випадковий процес, визначений на ймовірнісному просторі $(\Omega, F, \mathbb{P})$, який є однорідним гаусівським процесом з незалежними приростами, для якого:

$$W(0) = 0, E[W(t)] = 0, D[W(t)] = t.$$

Часто корисним є застосування закону великих чисел (ЗВЧ) до вінерівського процесу.

Розглянемо вінерівський процес $W(t)$ на ймовірнісному просторі $(\Omega, F, \mathbb{P})$. Його прирости $(W(t_1) - W(t_2))$ для довільних значень $t_1, t_2 (t_2 < t_1 \leq t)$ розподілені за нормальним законом з математичним сподіванням $E[W(t_1) - W(t_2)] = 0$ та дисперсією $D[W(t_1) - W(t_2)] = t_1 - t_2$.

Розіб'ємо $[0, t]$ на N інтервалів $[0, \Delta t), [\Delta t, 2\Delta t), ..., [(N-1)\Delta t, t = N\Delta t]$, кожен довжиною $\Delta t = \frac{t}{N}$.

Виразимо $W(t)$ як $W(t) = \sum_{i=0}^{N-1} (W((i+1)\Delta t) - W(i\Delta t)$.

Тоді за ЗВЧ для однаково розподілених випадкових величин $\xi_i = W((i+1)\Delta t) - W(i\Delta t), (\forall i : D\xi_i = \Delta t, E\xi_i = 0)$ отримаємо, що:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W(t)}{t} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} [W((i+1)\Delta t) - W(i\Delta t)] = 0.$$

Нескладно узагальнити визначення випадкового процесу на багатовимірний випадок ($X : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^m$). Такі випадкові процеси називають m-вимірними.

Інакше кажучи, m-вимірним випадковим процесом X є m – вимірний вектор випадкових процесів $X_1, X_2, ..., X_m$:

$$X(\omega, t) = (X_1(\omega, t), X_2(\omega, t), ..., X_m(\omega, t))^T.$$

Означення 2 (СДР). Стохастичне диференціальне рівняння (СДР) визначається в загальному випадку рівнянням (1.4):

$$dX(t) = a(X(t), t)dt + b(X(t), t)dW(t), \tag{1.4}$$

де $X(t)$ - випадковий процес, визначений на ймовірнісному просторі $(\Omega, F, \mathbb{P})$; a та b – деякі визначені функції ($a : \mathbb{R}^m \times [0, T] \to \mathbb{R}^m, b : \mathbb{R}^m \times [0, T] \to \mathbb{R}^m$), $W(t)$ - вінерівський процес тієї ж вимірності, що і $X(t)$, визначений на спільному ймовірнісному просторі $(\Omega, F, \mathbb{P})$.

Якщо в рівнянні (1.4) випадковий процес m-вимірний, то тоді (1.4) називають системою з m стохастичних диференціальних рівнянь. Загальним розв'язком СДР є сімейство випадкових процесів $X(t)$, що задовольняють рівнянню (1.4).

Частинним (або частковим) розв'язком називають довільний випадковий процес $X(t)$, що задовольняє рівняння (1.4).

Задачею Коші називають задачу знаходження розв'язку системи з СДР (1.4) та початкової умови на процес $X(t) = X_0, X_0 \in \mathbb{R}^m$:

$$\begin{cases} dX(t) = a(X(t), t)dt + b(X(t), t)dW(t), \\ X(0) = X_0. \end{cases} \tag{1.5}$$

В процесі знаходження розв'язків СДР часто виникає необхідність у диференціюванні та інтегруванні. Саме тому логічно звернутися до поняття інтегралу Іто та його властивостей

Розглянемо розбиття $(0, \tau)$ на N інтервалів $(\tau_0 = 0, \tau_1], (\tau_1, \tau_2], ..., (\tau_{N-1}, \tau_N)$. Тоді для процесу $X(t)$, визначеного на $(0, \tau)$ як:

$$X(t) = X_k(W(\tau_k) - W(\tau_{k-1})), t \in (\tau_{k-1}, \tau_k),$$

де X_k - випадкова величина на алгебрі подій F_{τ_k}, визначено інтеграл Іто:

$$I(X) = \int_0^\tau X(t)dW(t) = \sum_{i=1}^{N} X_i(W(\tau_i) - W(\tau_{i-1})). \quad (1.6)$$

Визначення (1.6) може бути узагальнене на випадок більш складних процесів $X(t)$.

Інтеграл Іто має деякі важливі властивості, що часто застосовуються на практиці:

- Лінійність:
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : I(\alpha X + \beta Y) = \alpha I(X) + \beta I(Y),$$
де X, Y – деякі випадкові процеси.
- Ізометрія Іто:
$$E[I^2(X)] = \int_0^\tau E[X^2(s)]ds.$$
- $E[I(X)] = 0$.

Теорема 1 (Багатовимірна формула Іто [11]). *Нехай функція* $f(t, x_1, x_2, ..., x_m)$: $f : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ *має неперервні похідні:* $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x_i}(i = 1, ..., m), \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(i, j = 1, ..., m)$.

Причому $X(t) = (X_1(t), ..., X_m(t))$ *–* m*-вимірний випадковий процес на* $(\Omega, F, \mathbb{P})$, *який задовольняє наступному рівнянню:*

$$\forall i = 1, ..., m : dX_i(t) = a_i(t, X(t))dt + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(t, X(t))dW_k(t),$$

де $a_i(t, x_1, ..., x_m), b_{ik}(t, x_1, ..., x_m), i = 1, ..., m, k = 1, ..., n$ *– деякі функції* $a_i : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}(i = 1, ..., m), b_{ik} : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}(i = 1, ..., m, k = 1, ..., n)$*, а* $W_k(k = 1, ..., n)$ *– незалежні вінерівські процеси.*

Тоді $df(t, X(t))$ *– диференціал від випадкового процесу* $f(t, X(t))$*, задається рівнянням* (1.7)*:*

$$
\begin{aligned}
df(t,X(t)) = \frac{\partial f(t,X(t))}{\partial t}dt + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f(t,X(t))}{\partial x_i}a_i(t)dt+ \\
+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f(t,X(t))}{\partial x_j}\sum_{k=1}^{n}b_{ik}(t)dW_k(t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 f(t,X(t))}{\partial x_i \partial x_j}\sum_{k=1}^{n}b_{ik}(t)b_{jk}(t)dt.
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

В теорії стохастичних диференціальних рівнянь, як і у випадку теорії звичайних диференціальних рівнянь, важливими питаннями є не тільки знаходження розв'язку, а і питання його існування та єдиності для задачі Коші (1.5).

Теорема 2 (Єдність розв'язку [11]). *СДР* (1.5) *має єдиний розв'язок* $X(t)$*, якщо виконуються наступні умови:*

(i) Функції $a(x,t), b(x,t)$ *- визначені та вимірні при* $t \in [0,T], x \in \mathbb{R}$.

(ii) Для деякої сталої $C > 0$ *справедливі нерівності:*

$$
\forall x,y \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,T] : |a(x,t) - a(y,t)| + |b(x,t) - b(y,t)| \leq C|x-y|,
$$

$$
\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,T] : |a(x,t)|^2 + |b(x,t)|^2 \leq C^2(1+|x|^2).
$$

(iii) Для розв'язку СДР (1.5) $X(t)$ *справедливо, що* $X(0)$ *не залежить від* $W(t)$ *та* $E[X^2(0)] < \infty$.

Також для доведення специфічних теорем застосовується нерівність Дуба:

Теорема 3 (Нерівність Дуба [11]). *Нехай задано функцію* $f(t)$*, визначену на* $[0,T]$*, таку, що* $\int_0^\infty E[f^2(s)]ds < \infty$ *та* $\int_0^\infty f^2(s)ds < \infty$

Тоді:

$$
\forall \epsilon > 0 : P\{\sup_{0\leq t\leq T}|\int_0^T f(s)dW(s)| > \epsilon\} < \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^T E[f^2(s)]ds.
$$

1.4. Стохастичні диференційні рівняння в моделях епідеміології

Розглянемо, як можна врахувати випадковість подій, що впливають на захворюваність, на прикладі базової SIR-моделі. Для цього до диференціальних рівнянь додаються випадкові компоненти у вигляді диференціалів Вінерівського процесу, які вносять збурення в систему.

Такі випадкові доданки відображають непередбачувані фактори, що можуть впливати на процес поширення інфекції, наприклад, такі, як зміни в поведінці населення, мутації вірусу чи інші зовнішні обставини.

Отже, для системи (1.1) врахування випадкових компонент матиме наступний вигляд:

$$\begin{cases} dS(t) = -\beta S(t)I(t)dt + \sigma_S S(t)dW_S(t); \\ dI(t) = (\beta S(t)I(t) - \gamma I(t))\, dt + \sigma_I I(t)dW_I(t); \\ dR(t) = \gamma I(t)dt + \sigma_R R(t)dW_R(t), \end{cases} \tag{1.8}$$

У системі (1.8) коефіцієнти $\sigma_S, \sigma_I, \sigma_R$ відповідають за волатильності для відповідних класів популяції, а W_S, W_I, W_R – є незалежними вінерівськими процесами.

Для системи (1.3) врахування стохастичних впливів матиме наступний вигляд (1.9):

$$\begin{cases} dS(t) = -\frac{\beta S(t)I(t)}{N(t)}dt - \nu S(t)dt + \sigma_S S(t)dW_S(t), \\ dI(t) = \left(\beta \frac{S(t)I(t)}{N(t)} - \gamma I(t) - \alpha \frac{V(t)I(t)}{N(t)}\right) dt + \sigma_I I(t)dW_I, \\ dR(t) = \gamma I(t)dt + \sigma_R R(t)dW_R, \\ dV(t) = \nu S(t)dt - \alpha \frac{V(t)I(t)}{N(t)}dt + \sigma_V V(t)dW_V. \end{cases} \tag{1.9}$$

Тут в (1.9), окрім вже введених в (1.8) вінерівських процесів (W_S, W_R, W_I) додається процес W_V – незалежний Вінерівський процес для класу вакцинованих – V.

В загальному випадку, для довільної детермінованої системи (системи ЗДР) можна визначити її «стохастичний еквівалент» за наступною процедурою:

Для кожного з рівнянь системи вигляду $dX(t) = A(t, X(t))dt$ додаємо компоненту $B(t, X(t))dW_X$, де $W_X(t)$ – Вінерівський процес.

Отримаємо тоді рівняння наступного вигляду (1.10).

$$dX(t) = \underbrace{A(t, X(t))dt}_{\textit{детермінована компонента}} + \underbrace{B(t, X(t))dW_X}_{\textit{стохастична компонента}} \tag{1.10}$$

Стохастична компонента кожного рівняння системи (1.10) вводить в систему рівнянь шуми, величина яких залежить від величини $B(t, X(t))$ – функції волатильності. Як правило, функцію волатильності обирають залежною від процесу $X(t)$: $B(t, X(t)) = \sigma_X(t)X(t)$.

Функцію $\sigma_X(t)$ нерідко беруть сталою в часі ($\forall t \geq 0 : \sigma_X(t) = \sigma_X \in \mathbb{R}_+$), рідше - обмеженою ($\forall t \geq 0 : \sigma_X(t) \leq C = \sup\limits_{t \geq 0} \sigma_X(t)$). У наступних розділах ми розглянемо умови на функцію $\sigma_X(t)$, за яких можна прогнозувати асимптотичну поведінку СДР.

1.5. Висновки

У цьому розділі ми розглянули найбільш популярні моделі прогнозування з використанням як ЗДР так і СДР.

Диференційні рівняння виступають основним інструментом моделі та симулюють правила поведінки системи. Використання ЗДР випливає природньо з постановки задачі так само як це відбувається, наприклад, в моделі хижак-жертва [12].

Ми розглянули традиційні для епідеміології моделі на основі систем ЗДР, як от класична SIR-модель [3] та SIRV-модель. SIR-модель, попри її простоту, досі застосовується на практиці (див. [4]). Прості моделі прогнозування дозволяють отримати базовий прогноз.

Для покращення точності постає необхідність в модифікації моделей або ж зміни її архітектури (наприклад, додавання смертності та народжуваності популяції в SIR-модель (1.2)). У цьому розділі було показано як саме вводяться зміни до моделей для врахування більш складної динаміки явища, що описується. Важливо зауважити, що додавання додаткових компонент до розгляду може зумовити збільшення складності моделі та зменшення точності її прогнозу, особливо за умови некоректного визначення значень параметрів.

Одним з важливих в подальшому розгляді моментів є додавання функціональних залежностей замість чисельних коефіцієнтів - узагальнення моделі на випадок, якщо відома оцінка залежності параметрів від часу. У наступних розділах ми зосередимо свою увагу саме на цій більш загальній постановці задачі та визначимо умови на функції параметрів.

В останній частині Розділу 1 розглянуто загальний принцип введення стохастичних компонент до розгляду в модель на основі ЗДР. Описану процедуру буде застосовано до запропонованої моделі в наступному розділі.

Стохастичні диференціні рівняння відкривають нові можливості прогнозування з врахуванням випадквих впливів, що теоретично підвищує точність за умови коректного вибору волатильностей.

Швидкий огляд різних архітектур моделей з використанням СДР показує популярність таких методів прогнозування. Стохастичність моделей (наприклад, SIRV-модель задана рівнянням (1.9)) дозволяє точніше описувати природу модельованого процесу. У контексті динаміки розвитку інфекційних хвороб такими впливами є, наприклад, мутації захворювання, непрогнозовані зростання кількості контактів між особами популяції тощо.

Отже, розгляд моделі на основі СДР з змінними у часі параметрами є максимально узагальненим випадком, дослідженння якого має на меті поглибити розуміння традиціних SIR- та SIRV- моделей, а також запропонувати найбільш загальне рішення для прогнозування динаміки інфекційних хвороб в епідеміології.

РОЗДІЛ 2
СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ ПОШИРЕННЯ ТУБЕРКУЛЬОЗУ: ТЕОРЕТИЧНИЙ ТА ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ КОРЕКТНОСТІ

2.1. Визначення моделі

Однією з головних цілей цієї роботи є побудова математичної моделі, здатної з високою точністю відображати реальну динаміку інфекційного процесу. У цьому розділі ми розглянемо модель, що базується на розширеній стохастичній SIRV-структурі з часово-залежними коефіцієнтами. Враховуючи стохастичну природу епідемічних процесів, до системи диференціальних рівнянь додано випадкові збурення у вигляді Вінерівських процесів, що дозволяє моделювати вплив непередбачуваних чинників. На відміну від класичних моделей, коефіцієнти системи є функціями, що залежать від часу, а не константами. Це значно ускладнює аналіз, але дозволяє краще відобразити реальні зміни в популяції та адаптувати модель до динамічних умов, зокрема змін у рівні вакцинації, ефективності лікування та різних соціальних факторів. Такий підхід робить модель гнучкішою та ближчою до реальних епідемічних процесів.

Зазначимо, що формулювання та перевірка моделі включає кілька ключових етапів:

- математичний опис рівнянь, що визначають динаміку захворювання, з урахуванням параметрів, що залежать від часу;
- аналіз адекватності моделі, тобто перевірка невід'ємності популяційних змінних $I(t)$, $S(t)$, $R(t)$, $V(t)$ для будь-яких початкових умов;
- чисельний аналіз траєкторій розв'язків рівнянь моделі.

Запропонована модель передбачатиме поділ популяції на чотири класи: $S(t)$ – особи, сприйнятливі до інфекції; $I(t)$ – інфіковані особи, які можуть передавати захворювання; $R(t)$ – особи, що перехворіли і мають частковий природний імунітет; $V(t)$ – вакциновані особи, які отримали штучний імунітет. Загальна чисельність популяції змінюється в часі та визначається як:

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t) + V(t).$$

Розробка моделі ґрунтується на кількох ключових припущеннях. По-перше, існує вакцина проти інфекційного захворювання, що зумовлює введення окремого класу вакцинованих осіб ($V(t)$). У разі відсутності вакцинації модель вироджується до SIR-моделі. По-друге, вважається, що всі популяційні класи є неперетинними, тобто

$$\forall t \geq 0 : I \cap S \cap V \cap R = \emptyset.$$

До того ж, вважається, що інші хвороби не мають суттєвого впливу на популяцію, а отже смертність залежить винятково від природних причин та причин, пов'язаних з інфекцією, що розглядається. Розглядається однорідна популяція, тобто кожна особа має однакову ймовірність контакту з іншою.

За основу визначення візьмемо детерміновану модель (1.3) та додамо до рівнянь стохастичні компоненти, що позначатимуть випадкові збурення популяції. Окрім того, змінимо правила взаємодії між класами. Також припустимо, що коефіцієнти моделі залежать від часу.

В результаті отримаємо модель, визначену системою рівнянь (2.1):

$$\begin{cases} dS(t) & = [(1-p)\theta(t) + b(t)V(t) + \alpha(t)R(t) - \mu_1(t)S(t) \\ & -\frac{\beta c(t)I(t)}{N(t)}S(t)]dt + \sigma_1(t)S(t)dW_1(t), \\ dV(t) & = \left[p\theta(t) - \frac{\gamma\beta c(t)I(t)}{N(t)}V(t) - (b(t)+\mu_1(t))V(t)\right]dt \\ & +\sigma_2(t)V(t)dW_2(t), \\ dI(t) & = \left[\frac{\beta c(t)I(t)}{N(t)}S(t) + \frac{\gamma\beta c(t)I(t)}{N(t)}V(t) - (\mu_1(t)+\mu_2(t)+r(t))I(t)\right]dt \\ & +\sigma_3(t)I(t)dW_3(t), \\ dR(t) & = [r(t)I(t) - \alpha(t)R(t) - \mu_1(t)R(t)]\,dt + \sigma_4(t)R(t)dW_4(t). \end{cases} \tag{2.1}$$

Згідно з рівняннями системи частина популяції, уразливої до хвороби S збільшується внаслідок народжуваності $(1-p)\theta(t)$, спадання класу вакцинованих в результаті послаблення дії вакцини у часі $b(t)V(t)$, послаблення природного імунітету проти інфекції у класі одужалих $\alpha(t)R(t)$. Зменшення класу сприйнятливих відбувається внаслідок природної смертності $\mu_1(t)S(t)$ та захворюваності $\beta\frac{c(t)I(t)S(t)}{N(t)}$ з переходом у клас хворих $I(t)$.

Клас вакцинованих збільшується в результаті вакцинації новонародженого населення $p\theta(t)$ та зменшується з переходом у клас інфікованих $\gamma\beta\frac{c(t)I(t)V(t)}{N(t)}$та з причин втрати імунітету $b(t)V(t)$ або смертності $\mu_1(t)V(t)$.

Клас хворих $I(t)$, як вже було зазначено, поповнюється за рахунок захворюваності серед сприйнятливого та вакцинованого населення, зменшується ж у результаті одужання з інтенсивністю $r(t)$, смертності від хвороби $\mu_2(t)I(t)$ та, звісно, природної смертності з інтенсивністю $\mu_1(t)$. Одужалі особи (клас R) поповнюється винятково через одужання хворих осіб популяції $r(t)I(t)$ та зменшується через втрату імунітету (з переходом у клас сприйнятливих) з інтенсивністю $\alpha(t)$, а також через природну смертність в популяції, інтенсивність якої – $\mu_1(t)$. Значення параметрів системи подано у наступній таблиці:

Табл. 2.1 – Опис параметрів моделі

Параметр	**Опис**
p	Ймовірність вакцинації
θ	Інтенсивність народжуваності
α	Інтенсивність втрати тимчасового імунітету
β	Інтенсивність передачі хвороби
γ	Ефективність вакцинації
b	Інтенсивність втрати штучного імунітету
r	Інтенсивність одужання
c	Частота контактів
μ_1	Інтенсивність природної смертності
μ_2	Інтенсивність смертності від хвороби

Для кожного класу визначено випадкову складову, що агрегує в собі випадкові впливи динаміки популяції. Для S – це $\sigma_1(t)S(t)dW_1(t)$, для V – це $\sigma_1(t)V(t)dW_2(t)$, I – це $\sigma_3(t)I(t)dW_3(t)$, R – це $\sigma_4(t)R(t)dW_4(t)$, де $W_i(t)$, $i = 1, ..., 4$, – взаємно незалежні стандартні вінерівські процеси, які визначені на ймовірнісному просторі (Ω, F, P), $\sigma_i, i = 1, 2, 3, 4$ – волатильності цих процесів. У подальшому позначатимемо як $(S(0), V(0), I(0), R(0)) \in \mathbb{R}^4_+$ – початкові значення системи. Зв'язки між класами можна зобразити графічно блок-схемою (див. Рис. 2.1).

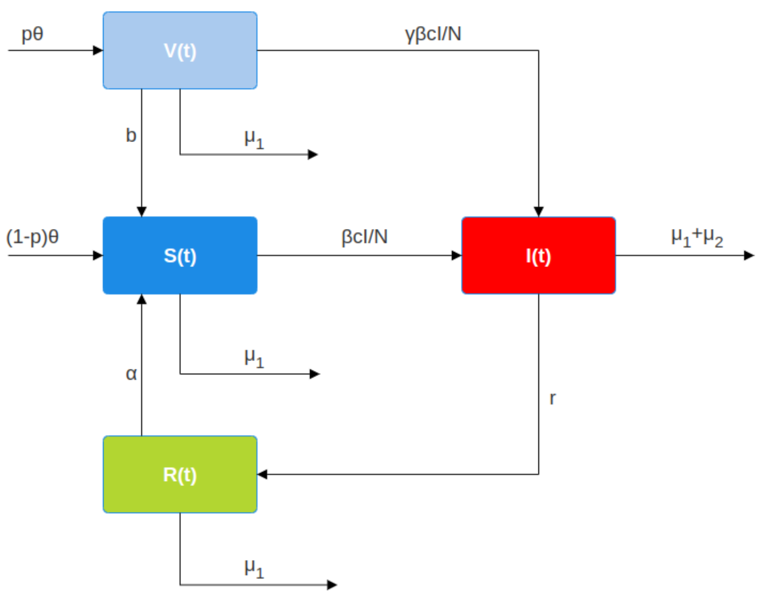

Рисунок 2.1 – Блок-схема зв'язків запропонованої моделі

2.2. Теорема про невід'ємність розв'язку

Для запропонованої моделі (2.1) важливим є коректність визначення розв'язку, тобто:

- Невід'ємність розв'язку:

$$\forall t \geq 0 : S(t) \geq 0, I(t) \geq 0, R(t) \geq 0, V(t) \geq 0.$$

- Єдиність розв'язку:

$$\forall t \geq 0 : \exists!(S(t), I(t), R(t), V(t)) \in \mathbb{R}_+^4.$$

Необхідною умовою існування єдиного глобального розв'язку СДР є те, що коефіцієнти повинні задовольняти умову лінійного росту та ліпшецивість (див. [13], [11]).

Однак, хоч коефіцієнти системи (2.1) не задовольняють умову лінійного зростання через білінійну форму зараження, вони є локально ліпшецивими. Наступне твердження показує, що розв'язок системи (2.1) існує глобально, є єдиним та невід'ємним.

Теорема 4. *Нехай система СДР* (2.1) *має єдиний розв'язок* $(S(t), V(t), I(t), R(t))$, *а початкової умови* $(S(0), V(0), I(0), R(0)) \in \mathbb{R}_+^4$ *при* $t \geq 0$.

Тоді розв'язок $(S(t), V(t), I(t), R(t))$ *залишається додатнім з ймовірністю 1 (майже напевно), тобто:*

$$\forall t \geq 0 : S(t) \geq 0, V(t) \geq 0, I(t) \geq 0, R(t) \geq 0, \quad \textit{майже напевно} \quad \textit{(м. н.)}\ ,$$

якщо $\sigma_i, i = 1, 2, 3, 4; \mu_j, j = 1, 2; r, \alpha, \beta, c$ *є обмеженими функціями.*

Доведення. Оскільки коефіцієнти рівняння є локально ліпшицевими для будь-якого заданого початкового значення $(S(0), V(0), I(0), R(0)) \in \mathbb{R}_+^4$, то існує єдиний локальний розв'язок $(S(t), V(t), I(t), R(t))$ на $t \in [0, \tau_e)$, де τ_e – момент, за якого розв'язок досягає нескінченності (див. [13]). Для того, щоб довести, що цей розв'язок є глобальним, треба показати, що $\tau_\infty = \infty$ м.н.

Для цього задамо достатньо велике значення для $m_0 \geq 0$, таке, що

$$(S(t), V(t), I(t), R(t)) \in \left[\frac{1}{m_0}, m_0\right]^{\times 4}.$$

Далі визначимо час зупинки для кожного цілого $m \geq m_0$:

$$\tau_m = \inf\left\{t \in [0, \tau_e) : (S(t), V(t), I(t), R(t)) \notin \left(\frac{1}{m}, m\right)^{\times 4}\right\}.$$

За означенням τ_m зростає, при $m \to \infty$. Тоді $\tau_\infty = \lim_{m\to\infty} \tau_m \leq \tau_e$ м.н.

Для завершення доведення треба показати, що $\tau_\infty = \infty$ м.н. Якщо це твердження хибне, то можна знайти $T > 0$ і $\varepsilon \in (0, 1)$ такі, що: $\mathrm{P}\{\tau_\infty \leq T\} > \varepsilon$. Отже, існує ціле число $m_1 \geq m_0$ таке, що:

$$\mathrm{P}\{\tau_m \leq T\} \geq \varepsilon \text{ для всіх } m \geq m_1. \tag{2.2}$$

Далі застосуємо формулу Іто (див. [11]) до функції Ляпунова $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1-1-\ln x_1)+(x_2-1-\ln x_2)+(x_3-1-\ln x_3)+(x_4-1-\ln x_4),$$

до того ж $f'_{x_i} = 1 - \frac{1}{x_i}$ та $f''_{x_i x_i} = \frac{1}{x_i^2}$, при $i = 1, 2, 3, 4$. Відмітимо, що функція f є невід'ємною, оскільки $x_i - 1 - \ln x_i \geq 0$ для всіх $x_i > 0, i = 1, 2, 3, 4$. Тоді,

$$\begin{aligned} df(S, V, I, R) = &\left(1 - \frac{1}{S(t)}\right) dS(t) + \left(1 - \frac{1}{V(t)}\right) dV(t) + \left(1 - \frac{1}{I(t)}\right) dI(t) \\ &+ \left(1 - \frac{1}{R(t)}\right) dR(t) + \frac{1}{2S^2(t)}\sigma_1^2(t)S^2(t)dt + \frac{1}{2V^2(t)}\sigma_2^2(t)V^2(t)dt \\ &+ \frac{1}{2I^2(t)}\sigma_3^2(t)I^2(t)dt + \frac{1}{2R^2(t)}\sigma_4^2(t)R^2(t)dt. \end{aligned}$$

Звідки маємо,

$$\begin{aligned} df(S, V, I, R) = &[\theta(t) + 4\mu_1(t) + \mu_2(t) + r(t) + \alpha(t) + b(t)]dt \\ &- [\mu_1(t)(S(t) + V(t) + I(t) + R(t)) + \mu_2(t)I(t)]dt+ \\ &\Big((1+\gamma)\frac{\beta c(t)I(t)}{N(t)} - \frac{(1-p)\theta(t)}{S(t)} - \frac{b(t)V(t)}{S(t)} \\ &- \frac{\alpha(t)R(t)}{S(t)} - \frac{p\theta(t)}{V(t)} - \frac{\beta c(t)S(t)}{N(t)} - \gamma\frac{\beta c(t)V(t)}{N(t)} \\ &- \frac{r(t)I(t)}{R(t)}\Big)dt + \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2(t) + \sigma_2^2(t) + \sigma_3^2(t) + \sigma_4^2(t)\right) dt \\ &+ \sigma_1(t)\left(S(t) - 1)\right) dW_1(t) + \sigma_2(t)\left(V(t) - 1\right) dW_2(t) \\ &+ \sigma_3(t)\left(I(t) - 1\right) dW_3(t) + \sigma_4(t)\left(R(t) - 1\right) dW_4(t). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Позначимо у останньому співвідношенні коефіцієнт при dt через $Lf : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

та оцінимо його. Тоді, оскільки функції $\sigma_i, i = 1,2,3,4$, $\mu_j, j = 1,2$, r, α, β, c є обмеженими та $\frac{I}{N} < 1$, то

$$\begin{aligned} & Lf(S(t), V(t), I(t), R(t)) \\ & \le \hat{\theta} + 4\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2 + \hat{r} + \hat{\alpha} + \hat{b} + (1+\gamma)\beta\hat{c} + \frac{1}{2}\left(\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + \hat{\sigma}_3^2 + \hat{\sigma}_4^2\right), \end{aligned}$$

де $\hat{\theta} = \sup\limits_{t\ge0}\theta(t)$, $\hat{\mu}_j = \sup\limits_{t\ge0}\mu_j(t), j = 1,2$, $\hat{r} = \sup\limits_{t\ge0} r(t)$, $\hat{\alpha} = \sup\limits_{t\ge0}\alpha(t)$, $\hat{b} = \sup\limits_{t\ge0} b(t)$, $\hat{c} = \sup\limits_{t\ge0} c(t)$, $\hat{\sigma}_i = \sup\limits_{t\ge0}\sigma_i(t), i = 1,2,3,4$. Покладемо

$$K = \hat{\theta} + 4\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2 + \hat{r} + \hat{\alpha} + \hat{b} + (1+\gamma)\beta\hat{c} + \frac{1}{2}\left(\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + \hat{\sigma}_3^2 + \hat{\sigma}_4^2\right).$$

Проінтегруємо обидві частини співвідношення (2.3) на проміжку від 0 до $\tau = \min\{\tau_m, t\}$. На цьому кроці з урахуванням оцінки $dLf(S(t), V(t), I(t), R(t)) \le K$ отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau df(S(s), V(s), I(s), R(s)) = \int_0^\tau dLf(S(s), V(s), I(s), R(s)) \\ & + \int_0^\tau \sigma_1(s)(S(s)-1)dW_1(s) + \int_0^\tau \sigma_2(s)(V(s)-1)dW_2(s) \\ & + \int_0^\tau \sigma_3(s)(I(s)-1)dW_3(s) + \int_0^\tau \sigma_4(s)(R(s)-1)dW_4(s) \\ & \le K\tau + \int_0^\tau \sigma_1(s)(S(s)-1)dW_1(s) + \int_0^\tau \sigma_2(s)(V(s)-1)dW_2(s) \\ & + \int_0^\tau \sigma_3(s)(I(s)-1)dW_3(s) + \int_0^\tau \sigma_4(s)(R(s)-1)dW_4(s). \end{aligned}$$

Візьмемо математичне сподівання від обох частин попередньої нерівності:

$$\begin{aligned} & \mathrm{E}[\int_0^\tau df(S(s), V(s), I(s), R(s))] \le K\mathrm{E}[\tau] + \mathrm{E}[\int_0^\tau \sigma_1(s)(S(s)-1)dW_1(s)] + \\ & + \mathrm{E}[\int_0^\tau \sigma_2(s)(V(s)-1)dW_2(s)] + \mathrm{E}[\int_0^\tau \sigma_3(s)(I(s)-1)dW_3(s)] + \\ & + \mathrm{E}[\int_0^\tau \sigma_4(s)(R(s)-1)dW_4(s)]. \end{aligned}$$

Оскільки $t \in [0, T]$, то $\tau = \min\{\tau_m, t\} \leq T$. Також необхідно врахувати, що

$$\mathrm{E}[\int_0^\tau \sigma_1(s)(S(s)-1)dW_1(s)] = 0, \ \mathrm{E}[\int_0^\tau \sigma_2(s)(V(s)-1)dW_2(s)] = 0,$$

$$\mathrm{E}[\int_0^\tau \sigma_3(s)(I(s)-1)dW_3(s)] = 0, \ \mathrm{E}[\int_0^\tau \sigma_4(s)(R(s)-1)dW_4(s)] = 0.$$

Отримаємо наступну нерівність:

$$\mathrm{E}[f(S(\tau), V(\tau), I(\tau), R(\tau))] \leq KT + f(S(0), V(0), I(0), R(0)). \qquad (2.4)$$

Введемо множину $A_m = \{\tau_m \leq t\}, m > m_1$, для якої згідно з (2.2) справедливо, що $\mathrm{P}(A_m) \geq \epsilon$. Принаймні одне зі значень $S(\tau), V(\tau), I(\tau), R(\tau)$ рівне $\frac{1}{m}$ або m, а тому справедливою є оцінка:

$$\mathrm{E}[f(S(\tau), V(\tau), I(\tau), R(\tau))] \geq \min\left\{(m-1-\ln m), \left(\frac{1}{m}-1-\ln\frac{1}{m}\right)\right\}. \qquad (2.5)$$

Враховуючи результат (2.4) та (2.5), отримаємо наступну нерівність:

$$KT + f(S(0), V(0), I(0), R(0)) \geq \mathrm{E}[f(S(\tau), V(\tau), I(\tau), R(\tau))]$$

$$\geq \mathrm{E}[\mathbb{I}_{A_m} f(S(\tau_m), V(\tau_m), I(\tau_m), R(\tau_m))]$$

$$\geq \epsilon \min\left\{(m-1-\ln m), \left(\frac{1}{m}-1-\ln\frac{1}{m}\right)\right\}.$$

Якщо взяти границю при $m \to \infty$ від обох частин нерівності вище, отримаємо, що:

$$K \lim_{m\to\infty} T + f(S(0), V(0), I(0), R(0)) \geq$$

$$\lim_{m\to\infty}\left[\min\left\{(m-1-\ln m), (\frac{1}{m}-1-\ln\frac{1}{m})\right\}\right] = \infty.$$

Звідки випливає, що $T \to \infty$ при $m \to \infty$. Отже, отримуємо суперечність, оскільки неможливо знайти таке $T > 0$, щоб виконувалася нерівність за припущенням: $P\{\tau_m \leq T\} \geq \epsilon$. Таким чином, теорему доведено. $\square$

2.3. Чисельне моделювання стохастичної динаміки

Після перевірки коректності побудованої моделі ми можемо перейти до моделювання поведінки випадкових процесів, використовуючи їх динаміку. Перевірка за допомогою чисельних методів пошуку розв'язку СДР є підтвердженням теоретичних даних, отриманих у попередньому розділі. Моделювання розв'язку виконаємо на прикладі поширення туберкульозу в Україні 2019-2021 років.

Чисельне моделювання розв'язків СДР можна здійснювати за допомогою низки методів, таких як, наприклад, метод Ейлера-Маруями, метод Мільштейна та методи Рунге-Кутта (див. [14], [15], [16], [17]). У своєму дослідженні для чисельного моделювання траєкторій випадкових процесів системи СДР (2.1) застосуємо метод Ейлера-Маруяма.

Метод Ейлера-Маруяма є аналогом методу Ейлера для ЗДР. Суть методу полягає в розбитті інтервалу симуляції $[0, T]$ на N відрізків $[0, t_1), [t_2, t_2], ..., [t_{N-1}, T]$ та розрахунку значень цільового випадкового процесу $X(t)$ у вузлових точках $t_1, t_2, ..., t_{N-1}$ за допомогою заміни диференціалів скінченними різницями. Для розрахунку значення випадкового процесу $X(t_{n+1})$ у наступному вузлі t_{n+1} використовується попереднє значення $X(t_n)$ за рахунок наступних наближень:

$$X_i(t_{n+1}) \approx X_i(t_n) + a_i(t_n, X(t_n))(t_{n+1} - t_n) + b_i(t_n, X(t_n))(W_i(t_{n+1}) - W_i(t_n)),$$

де $a_i(t, X(t))$ – коефіцієнт зсуву, $b_i(t, X(t))$ – коефіцієнт дифузії , $X_i(t), i = 1, 2, 3, 4$ – випадкові процеси $S(t), I(t), R(t), V(t)$.

Використання такої схеми допомагає змоделювати розв'язки СДР (2.1).

Для системи рівнянь (2.1) ми обираємо випадок, коли всі коефіцієнти є константами. Такий підхід дозволяє значно спростити чисельну реалізацію та отримати розв'язки системи СДР досить швидко, при цьому переконатись на практиці в коректності моделі, підсиливши теоретичний результат (див. Теорема 4).

Отже, у межах цієї роботи припускаємо, що значення функцій-параметрів залишаються сталими для довільного моменту часу t.

Початкові значення $(S(0), R(0), V(0), I(0)) \in \mathbb{R}^4_+$, використані в моделюванні, визначено на основі доступних статистичних даних. Загальна чисельність населення становить $N(0) = 42153200$, що відповідає офіційній кількості жителів України на початок 2019 року (див. [18]).

Кількість осіб із природним імунітетом до туберкульозу приймається рівною нулю ($R(0) = 0$), оскільки ефективний природний імунітет до цього захворювання в Україні є малоймовірним з огляду на поширеність хвороби.

Кількість інфікованих в початковий момент часу визначено на основі офіційної статистики (див. [19]) та встановлено на рівні $I(0) = 21132$.

Оцінка частки вакцинованих складає приблизно 70%, що узгоджується з офіційними даними щодо рівня обов'язкової вакцинації БЦЖ.

Для моделювання візьмемо параметри волатильності кожного класу наступного вигляду:

$$\sigma_1 = 0.05, \quad \sigma_2 = 0.03, \quad \sigma_3 = 0.01, \quad \sigma_4 = 0.05.$$

Період моделювання - три роки (з січня 2019 року до грудня 2021 року), тобто $T = 3$. Інші параметри моделі наведено у Таблиці 2.2.

Табл. 2.2 – Значенння параметрів моделі

Параметр	p	θ	α	β	γ	b	c	r	μ_1	μ_2
Значення	0.5	0.71	0.4	0.5	0.7	0.1	0.1	0.005	0.185	0.0053

Як видно з Рис. 2.2–2.4, результати чисельного моделювання підтверджують результати Теореми 4 про невід'ємність процесів $S(t), I(t), R(t), V(t)$.

На Рис. 2.3 видно, що кількість осіб з імунітетом $R(t)$ зростає через процес одужання. Однак чисельність вакцинованих поступово скорочується через в першу чергу через низьку народжуваність і високу смертність в популяції.

На Рис. 2.5 показано, що з часом кількість інфікованих зменшується. Це пояснюється тим, що вакцинація сповільнює поширення хвороби, а частина інфікованих переходить у латентну (приховану) фазу.

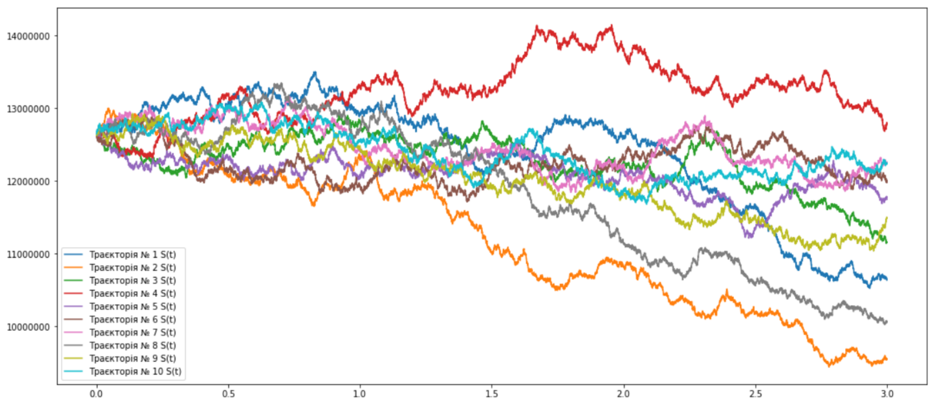

Рисунок 2.2 – Зміна популяції сприйнятливих осіб (S).

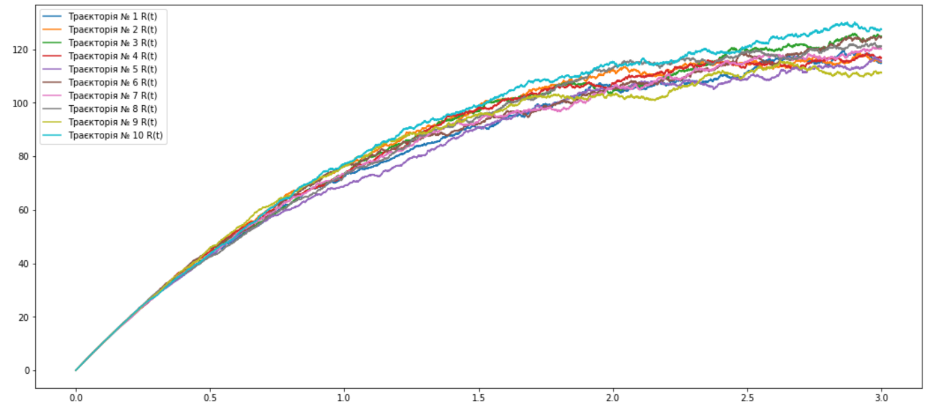

Рисунок 2.3 – Зміна кількості одужалих осіб (R).

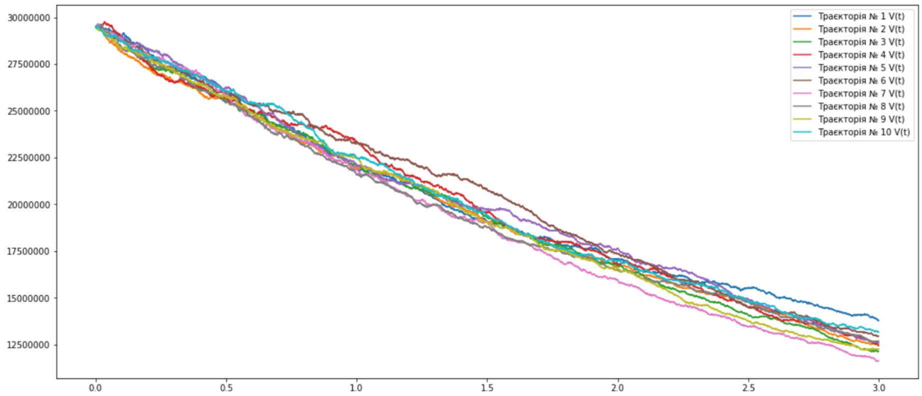

Рисунок 2.4 – Зміна кількості вакцинованих осіб (V).

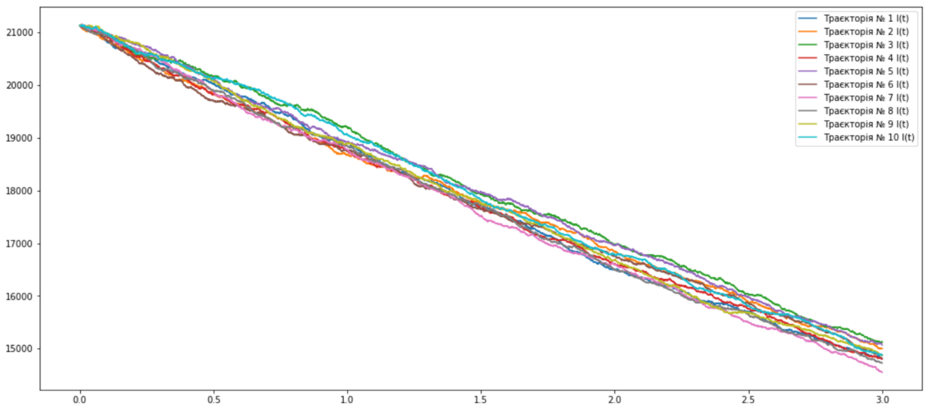

Рисунок 2.5 – Зміна кількості інфікованих осіб (I).

Порівняємо результати моделі (2.1) з сталими коефіцієнтами з реальними даними. Для порівняння використаємо офіційну статистику кількості хворих на туберкульоз (див. [19]) за період від січня 2019 року до кінця 2020 року, інфографіка якої наведена на Рис. 2.6.

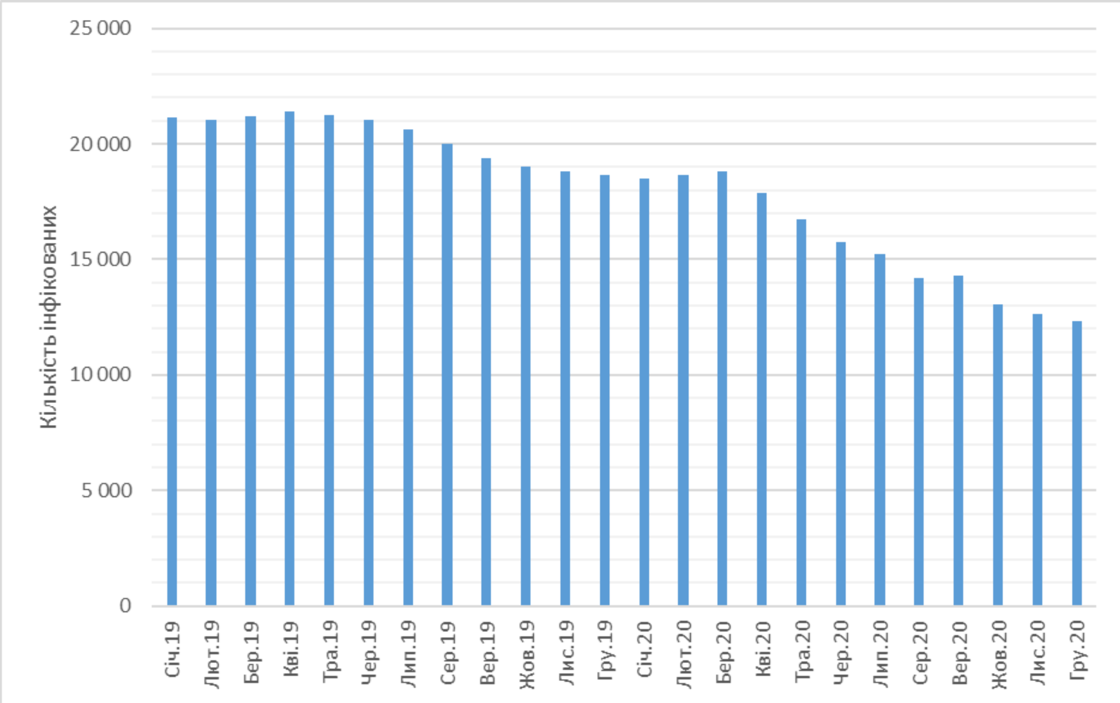

Рисунок 2.6 – Динаміка захворюваності на туберкульоз в період з 2019 до 2020

На основі моделі (2.1) за початковими демографічними даними популяції станом на січень 2019 року та параметрами, використаними для симуляції траєкторії, зображених на Рис. 2.2 - 2.5, проведено прогнозування кількості інфікованих до початку 2020 року. Прогнозована кількість інфікованих кожного місяця є середнім значенням кількості інфікованих для кожної згенерованої траєкторії. Загалом використано дані десяти згенерованих траєкторій процесу $I(t)$ для кожного місяця періоду симуляції. Чисельні результати цієї симуляції представлені на Рис. 2.7.

На графіку Рис. 2.7 представлено прогнозовані значення $I(t)$ у порівнянні з фактичними даними. На Рисунку 2.8 представлено абсолютні різниці між прогнозованими та фактичними щомісячними значеннями кількості хворих.

На основі даних графіків (див. Рис. 2.8 та Рис. 2.7) видно, що розбіжність між фактичними та прогнозованими значеннями зростає зі збільшенням часу симуляції. Це підкреслює важливість вивчення моделей із часозмінними коефіцієнтами. У довготривалій перспективі моделі зі сталими коефіцієнтами (наприклад, (1.1) та (1.3)) дають неточні результати. Для забезпечення кращої точності моделі її параметри потрібно періодично коригувати. Використання параметрів у вигляді аналітично заданих функцій краще відображає реальні процеси.

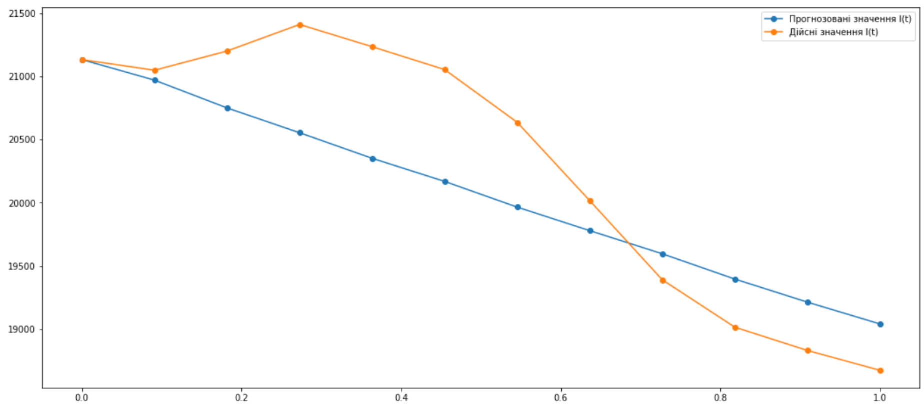

Рисунок 2.7 – Значення $I(t)$ (блакитна) в порівнянні з дійсними даними захворюваності на туберкульоз за 2019 рік (помаранчева).

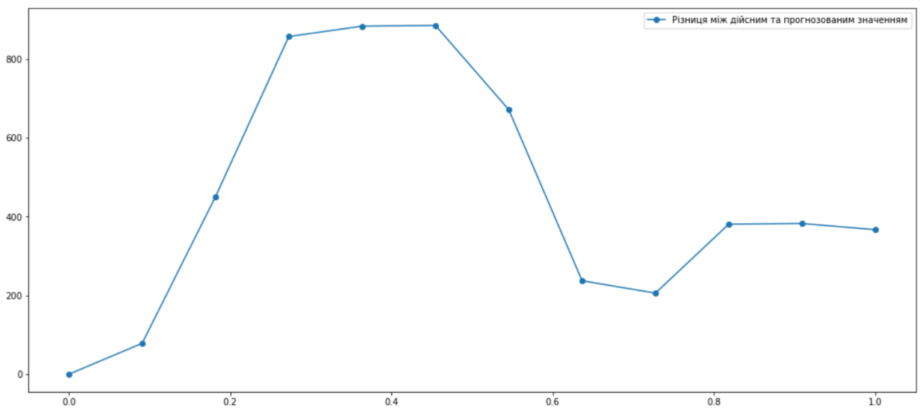

Рисунок 2.8 – Абсолютні різниці дійсних та прогнозованих величин кількості хворих за 2019 рік.

Для чисельної оцінки близькості значень нашого прогнозу та фактичних значень застосуємо середню відсоткову похибку (скорочено: *MAPE*):

$$MAPE = \frac{100}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{a_i - f_i}{a_i} \right|,$$

де a_i – актуальне значення в i-ому вузлі (i-ого місяця), f_i – прогнозоване значення, а n – загальна кількість інтервалів (місяців), що розглядаються. Тут значення похибки *MAPE* задано у відсотках $[MAPE] = \%$.

Більше відомостей про метрики, що застосовуються для оцінки якості прогнозу, можна знайти в [20].

Середня відсоткова похибка (MAPE) рівна 2.2% для інфікованих осіб. Це достатньо непогана точність, але для досягнення такого результату необхідно визначити оптимальні параметри, що не завжди можливо. Отже, для досягнення кращих результатів необхідно вводити до розгляду часозмінні коефіцієнти.

2.4. Висновки

У цьому розділі побудовано математичну модель поширення туберкульозної інфекції з урахуванням вакцинації при народженні. Ця модель базується на схемі SIRV та має стохастичну складову.

На відміну від аналогічної SIRV-моделі з випадковими впливами, модель (2.1) допускає використання функціональних залежностей для інтенсивностей переходів між класами, що робить такий підхід більш загальним. Для параметрів наведено вичерпні обмеження, в межах яких гарантована коректність прогнозу.

Було доведено адекватність моделі за допомогою використання теорії функцій Ляпунова, формули Іто та властивостей стохастичних інтегралів. В результаті для запропонованої моделі доведено додатність випадкових процесів, що є розв'язками системи СДР, які зображують інфекційну модель. Додатність розв'язків є важливим етапом, оскільки за відсутності гарантії невід'ємності процесів при $t \geq 0$, система СДР не може відображати природу опусуваного явища. Наявність від'ємних процесів суперечить визначенню класів S, I, R, V - як груп осіб у певному стані: сприйнятливий до хвороби, інфікований, резистентний, вакцинований.

За допомогою схеми Ейлера-Маруями проведено чисельне моделювання процесів. Для чисельного моделювання застосовано офіційні дані Центру громадського здоров'я України (див. [19]) за 2019-2020 роки. Важливо зауважити, оскільки дані за останні роки не є репрезентативними з огляду на неможливість достатньо повно зібрати дані з огляду на складну ситуацію в країні, то для моделювання логічно було обрати дані за попередні роки.

Результати моделювання підтвердили правильність теоретичного результату, для жодної траєкторії значення процесів не були від'ємними, що відповідає твердженню теореми 4.

Окрім основного результату про невід'ємність розв'язків, проведено порівняльний аналіз результатів симуляції з доступними реальними даними. Незначна похибка є підтвердженням коректності моделі. Результати розділу були опубліковані в статті [21] та доповідалися на X Міжнародній науково-практичній конференції «Математика в сучасному технічному університеті» [22].

РОЗДІЛ 3
АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ МОДЕЛІ

У цьому розділі ми опишемо асимптотичну поведінку системи (2.1) та умови, які забезпечують зникнення епідемії. Це питання є актуальним та вчені продовжують проводити дослідження для різних узагальнених SIR-моделей з точки зору їхньої довготривалої поведінки. Наприклад, у роботі [23] розглядається SIR-модель, у якій коефіцієнти передавання хвороби змінюються під впливом випадкових факторів. Для цієї моделі визначено, як швидко система стабілізується при $t \to \infty$. Показано, що ця швидкість близька до експоненційної, хоча її можна описати поліноміальною функцією будь-якого степеня.

У роботах [24], [25] вивчається, як змінюється розподіл можливих станів системи у стохастичній SIR-моделі з часом. Це дає змогу краще зрозуміти, як випадкові чинники впливають на поширення хвороби.

Розглянемо випадковий процес $I(t)$ та його асимптотичну поведінку $\lim\limits_{t\to\infty} I(t)$ у сенсі майже напевно.

3.1. Теоретичний розгляд асимптотичної поведінки процесу I

Перейдемо до розгляду основної теореми розділу, яка стосується умов, за яких:

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = 0 \quad \textit{м.н.}$$

Теорема 5. *Нехай* $(S(0), I(0), R(0), V(0)) \in \mathbb{R}_+^4$ *– довільні початкові значення. Розглянемо* $(S(t), I(t), R(t), V(t)) \in \mathbb{R}_+^4, t \geq 0$ *- розв'язок системи* (2.1) *на момент часу* t *та припустимо, що виконуються наступні умови:*

(i) Обмеженість інтегральної волатильності:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^{k-1}} \int_0^{2^{k+1}} \sigma_3^2(s)\, ds < \infty.$$

(ii) Асимптотична рівновага параметрів:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left[\beta(1+\gamma)c(s) - \mu_1(s) - \mu_2(s) - r(s)\right] ds = 0.$$

Тоді:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln I(t)}{t} = 0 \, \textit{м.н.}$$

Доведення. Розглянемо СДР, яке описує зміну кількості інфікованих осіб у моделі:

$$dI(t) = \left[\frac{\beta c(t)I(t)}{N(t)}S(t) + \frac{\gamma\beta c(t)I(t)}{N(t)}V(t) - (\mu_1(t) + \mu_2(t) + r(t))I(t)\right] dt$$

$$+\sigma_3(t)I(t)dW_3(t).$$

Щоб отримати оцінку поведінки $I(t)$ у часі, застосуємо формулу Іто до функції $f(x) = \ln x$ взявши $x := I(t)$. Використовуючи класичний вигляд цієї формули:

$$df(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}a(t,x) + \frac{1}{2}b^2(t,x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}\right) dt + b(t,x)dW_3(t).$$

знайдемо відповідні коефіцієнти. Коефіцієнт зсуву $a(t, I(t))$ має вигляд:

$$a(t, I(t)) = \frac{\beta c(t)I(t)}{N(t)}S(t) + \frac{\gamma\beta c(t)I(t)}{N(t)}V(t) - (\mu_1(t) + \mu_2(t) + r(t))I(t).$$

Коефіцієнт дифузії $b(t, I(t))$записується як:

$$b(t, I(t)) = \sigma_3(t)I(t).$$

Підставляючи знайдені вирази у формулу Іто, отримуємо рівняння для функції $\ln I(t)$ у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} &d\ln I(t) \\ &= \left[\frac{\beta c(t)S(t)}{N(t)} + \frac{\gamma\beta c(t)V(t)}{N(t)} - (\mu_1(t) + \mu_2(t) + r(t)) - \frac{1}{2}\sigma_3^2(t)\right] dt \\ &+ \sigma_3(t)dW_3(t). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Позначимо вираз у квадратних дужках рівності (3.1) як лінійну частину $L(\ln I(t))$:

$$L(\ln I(t)) = \frac{\beta c(t)S(t)}{N(t)} + \frac{\gamma\beta c(t)V(t)}{N(t)} - (\mu_1(t) + \mu_2(t) + r(t)) - \frac{1}{2}\sigma_3^2(t).$$

Диференціальне рівняння (3.1) тоді можна записати як:

$$d\ln I(t) = L(\ln I(t))dt + \sigma_3(t)dW_3(t). \tag{3.2}$$

Лінійну частину $L(\ln I(t))$ оцінимо згори за допомогою нерівностей $\frac{V}{N} \leq 1$ та

$\frac{S}{N} \leq 1$. Тоді можна записати наступну оцінку

$$L(\ln I(t)) \leq \beta(1+\gamma)c(t) - \mu_1(t) - \mu_2(t) - r(t) - \frac{1}{2}\sigma_3^2(t).$$

Оскільки репродуктивне число не враховує стохастичну компоненту та в силу того, що $0.5\sigma_3^2(t) \geq 0$, маємо оцінку:

$$L(\ln I(t)) \leq \beta(1+\gamma)c(t) - \mu_1(t) - \mu_2(t) - r(t). \tag{3.3}$$

Перепишемо диференціальне рівняння (3.2) в інтегральній формі на інтервалі $[0, t]$:

$$\int_0^t d\ln I(s) = \int_0^t L\ln I(s)ds + \int_0^t \sigma_3(s)dW_3(s). \tag{3.4}$$

Оскільки $\int_0^t d\ln I(s) = \ln I(t) - \ln I(0)$ і в силу оцінки для лінійної частини $L\ln I(t)$ з нерівності (3.3), отримаємо оцінку інтегрального рівняння (3.4):

$$\begin{aligned} \ln I((t) \leq \ln(I(0)) \\ + \int_0^t \left[\beta(1+\gamma)c(s) - \mu_1(s) - \mu_2(s) - r(s)\right] ds + \int_0^t \sigma_3(s)dW_3(s). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Поділимо обидві частини нерівності (3.5) на t та перейдемо до границі в сенсі майже напевно:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{\ln I(t)}{t} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{\ln I(0)}{t} + \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left[\beta(1+\gamma)c(s) - \mu_1(s) - \mu_2(s) - r(s)\right] ds \\ + \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_3(s)dW_3(s). \end{aligned}$$

Очевидно, що $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\ln I(0)}{t} = 0$, оскільки $I(0) > 0$.

Розглянемо останній доданок нерівності $\mathcal{I}(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_3(s)dW_3(s)$ та покажемо з використанням техніки з робіт [26] та [27], що за заданими припущеннями в умові Теореми 5, цей доданок прямує до нуля.

Спочатку доведемо, що для послідовності $t_n = 2^n$ маємо:

$$\mathcal{I}(t_n) = \mathcal{I}(2^n) \longrightarrow 0, \quad \text{при } n \to \infty, \quad \textit{м.н.}$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Використовуючи нерівність Дуба (див. [11]), ми оцінюємо ймовірність супремума для $\mathcal{I}(2^k)$ для $k \geq n$:

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{k\geq n} \mathcal{I}(2^k) > \varepsilon\right\} \leq \mathrm{P}\left\{\sup_{t\geq 2^n} \mathcal{I}(t) > \varepsilon\right\} = \mathbb{P}\left\{\sup_{t\geq 2^n} \frac{1}{t}\left|\int_0^t \sigma_3(s)W_3(s)\right| > \varepsilon\right\}$$
$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} \mathrm{P}\left\{\sup_{t\in[2^k,2^{k+1}]} \frac{1}{t}\left|\int_0^t \sigma_3(s)W_3(s)\right| > \varepsilon\right\} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^2 4^{k-1}} \int_0^{2^{k+1}} \sigma_3^2(s)\, ds < \infty.$$

Згідно з припущенням *(i)* Теореми 5, ряд у правій частині збігається і прямує до нуля при $n \to \infty$. Отже,

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{k\geq n} \mathcal{I}(2^k) > \varepsilon\right\} \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Це означає, що $\mathcal{I}(2^n) \to 0$, при $n \to \infty$ м. н. Оскільки послідовність $\sup_{t\geq 2^n} \mathcal{I}(t)$ є монотонно спадною, збіжність $\mathcal{I}(2^n) \to 0$ гарантує, що $\sup_{t\geq 2^n} \mathcal{I}(t) \longrightarrow 0$, при $n \to \infty$ м.н.

Нехай $t \geq 2$, і виберемо $n \in \mathbb{N}$ так, що $2^n \leq t < 2^{n+1}$. Тоді

$$|\mathcal{I}(t)| \leq |\mathcal{I}(t) - \mathcal{I}(2^n)| + |\mathcal{I}(2^n)|.$$

Вже відомо, що $\mathcal{I}(2^n) \to 0$ при $n \to \infty$. Отже, достатньо довести, що

$$\sup_{t\in[2^n,2^{n+1}]} |\mathcal{I}(t) - \mathcal{I}(2^n)| \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty, \quad \text{м. н.}$$

Розпишемо:

$$\mathcal{I}(t) - \mathcal{I}(2^n) = \frac{1}{t}\int_0^t \sigma_3(s)dW_3(s) - \frac{1}{2^n}\int_0^{2^n} \sigma_3(s)dW_3(s).$$

Розкриваючи цей вираз, отримуємо:

$$\mathcal{I}(t) - \mathcal{I}(2^n) = \underbrace{\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2^n}\right)\int_0^{2^n} \sigma_3(s)dW_3(s)}_{\text{Доданок 1}} + \underbrace{\frac{1}{t}\int_{2^n}^t \sigma_3(s)dW_3(s)}_{\text{Доданок 2}}.$$

Оцінюємо кожен доданок окремо. Використовуючи монотонність t, для Доданка 1 маємо

$$\sup_{t\in[2^n,2^{n+1}]} \left|\frac{1}{t} - \frac{1}{2^n}\right| \cdot |\mathcal{I}(2^n)| \leq \frac{2^{n+1} - 2^n}{2^{2n+1}}|\mathcal{I}(2^n)| \leq (M-1)\cdot|\mathcal{I}(2^n)|,$$

що прямує до нуля при $n \to \infty$. Для Доданка 2, застосовуючи нерівність Дуба, отримуємо

$$\sup_{t\in[2^n,2^{n+1}]} \frac{1}{t}\left|\int_{2^n}^t \sigma_3(s)dW_3(s)\right| \le \sup_{t\ge 2^n} \frac{1}{t}\left|\int_0^t \sigma_3(s)dW_3(s)\right| = \sup_{t\ge 2^n} \mathcal{I}(t),$$

що також прямує до нуля при $n \to \infty$.

Отже, об’єднуючи ці результати, маємо:

$$\sup_{t\in[2^n,2^{n+1}]} |\mathcal{I}(t) - \mathcal{I}(2^n)| \to 0, \quad \text{при } n \to \infty, \quad \text{м.н.}$$

Використовуючи розклад $|\mathcal{I}(t)| \le |\mathcal{I}(t) - \mathcal{I}(2^n)| + |\mathcal{I}(2^n)|$, і той факт, що обидва члени зникають при $n \to \infty$, ми робимо висновок:

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{I}(t) = 0 \quad \text{м.н.} \tag{3.6}$$

Отже, в силу умови *(ii)* Теореми 5 та (3.6), з нерівності (3.1) маємо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln I(t)}{t} = 0 \; \textit{м.н.}$$

□

Зауваження 1. У випадку, коли σ_3 є обмеженою функцією, Теорема 5 залишається справедливою. Дійсно, в силу нерівності $\tilde{C} = \sup_{t\ge 0} \sigma_3(t) < \infty$ за законом великих чисел для вінерівського процесу маємо наступну оцінку:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \sigma_3(s)dW_3(s) \le \lim_{t\to\infty} \frac{\tilde{C}}{t}\int_0^t dW_3(s) = \lim_{t\to\infty} \frac{\tilde{C}W_3(t)}{t} = 0.$$

Звідки,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \sigma_3(s)dW_3(s) = 0.$$

Наслідок 1. *Розглянемо систему* (2.1)*, у якій всі коефіцієнти є сталими. Тоді існує додатний розв’язок* $(S(t), I(t), R(t), V(t))$ *та визначається репродуктивне число*

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta(1+\gamma)c}{\mu_1 + \mu_2 + r}.$$

Якщо $\mathcal{R}_0 < 1$*, то кількість інфікованих осіб майже напевно прямує до нуля, тобто*

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = 0 \;\; \text{м.н.} \tag{3.7}$$

Доведення. Додатність розв'язку випливає з Теореми 4.

Розглянемо рівняння для $\ln I(t)$:

$$d\ln I(t) = \left[\frac{\beta c(S(t) + \gamma V(t))}{N(t)} - (\mu_1 + \mu_2 + r) - \frac{1}{2}\sigma_3^2\right] dt + \sigma_3 dW_3(t).$$

Згідно із законом великих чисел для вінерівського процесу, маємо:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_3(t)}{t} = 0 \text{ м.н.}$$

Тоді:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln I(t)}{t} \leq (\mathcal{R}_0 - 1)(\mu_1 + \mu_2 + r) < 0 \text{ м.н.}$$

що безпосередньо приводить до (3.7). □

Зазначимо, що якщо значення $\mathcal{R}_0$ перевищує одиницю, то поведінка системи кардинально змінюється. У цьому випадку інфекція не зникає, а натомість може стійко зберігатися в популяції. Навіть за умови стохастичної обмеженості траєкторій, система однозначно не демонструватимуть збіжності до нульового рівня інфікованих осіб.

Зокрема, може спостерігатися відсутність стабілізації при $\mathcal{R}_0 > 1$, а це означає, що в довгостроковій перспективі кількість інфікованих осіб може залишатися на високому рівні або навіть зростати, якщо не застосовуються додаткові заходи контролю. Це підтверджує критичну роль зовнішніх чинників, таких як карантин, ізоляція або вакцинація, які можуть змінювати структуру передавання хвороби та впливати на значення $\mathcal{R}_0$.

Таким чином, отримані результати свідчать про те, що динаміка системи значною мірою залежить від наявності або відсутності обмежувальних заходів. Якщо такі заходи не запроваджуються, можливе збереження інфекції в популяції на невизначено довгий час, що підкреслює важливість керованих стратегій боротьби із захворюванням.

3.2. Аналіз умов на коефіцієнт волатильності

Однією з ключових умов дослідження є умова (i), тому важливо визначити клас функцій, що її задовольняють. Це дозволить гарантувати зменшення впливу стохастичної компоненти з плином часу. Крім того, варто розглянути можливість послаблення обмежень на коефіцієнт волатильності $\sigma_3(t)$.

У теоремі 5 припускалося, що повинна виконуватись збіжність ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^{k-1}} \int_0^{2^{k+1}} \sigma_3^2(s)\, ds < \infty. \tag{3.8}$$

Завдяки цьому, використовуючи нерівність Дуба, можна отримати наступну границю

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_3(s) dW_3(s) = 0 \;\; \text{м.н.}$$

Розглянемо наступну теорему:

Наслідок 2. *Нехай функція σ_3 задовольняє наступні умови:*

1. Необхідна умова:

$$\sigma_3(t) = o(\sqrt{t}), \quad t \to \infty.$$

2. Необхідна та достатня умова:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sigma_3^2(2^{n+2})}{\sigma_3^2(2^{n+1})} \right) < 2.$$

Тоді виконується гранична рівність:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_3(s) dW_3(s) = 0 \quad \text{м.н.}.$$

Доведення. Доведемо необхідну умову

Розглянемо загальний член ряду (3.8):

$$a_n = \frac{1}{2^{2n}} \int_0^{2^{n+1}} \sigma_3^2(s) ds,$$

та обчислимо його границю:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{2n}} \int_0^{2^{n+1}} \sigma_3^2(s) ds = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sigma_3^2(2^{n+1}) = 2 \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sigma_3^2(m) = 0.$$

Це можливо лише за умови:

$$\sigma_3(t) = o(\sqrt{t}), \quad t \to \infty,$$

що і треба було довести.

Перейдемо до доведення необхідної та достатньої умови. Для дослідження збіжності ряду (3.8) застосуємо ознаку Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{2^{n+2}}\sigma_3^2(s)ds}{4\int_0^{2^{n+1}}\sigma_3^2(s)ds}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}\ln 2\cdot\sigma_3^2(2^{n+2})}{2^{n+1}4\ln 2\cdot\sigma_3^2(2^{n+1})}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma_3^2(2^{n+2})}{2\sigma_3^2(2^{n+1})}<1.$$

Звідси випливає умова:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sigma_3^2(2^{n+2})}{\sigma_3^2(2^{n+1})}\right)<2.$$

Це завершує доведення необхідної та достатньої умови. □

Щоб продемонструвати застосування цієї леми, розглянемо конкретні приклади функцій, які можуть відповідати її умовам.

3.2.1. Приклад 1: функція $\sigma_3(t)=\sqrt[4]{t}$

Очевидно, що ця функція не задовольняє умову $\sup\limits_{t\geq 0}\sigma_3(t)<\infty$. Однак перевіримо, чи виконує вона необхідні та достатні умови теореми 2.

Перевірка необхідної умови. Перевіримо асимптотичну поведінку відношення $\sigma_3(t)$ до $\sqrt{t}$ при $t\to\infty$:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{t}}=0.$$

Отже, необхідна умова виконується.

Перевірка достатньої умови.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sigma_3^2(2^{n+2})}{\sigma_3^2(2^{n+1})}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{n+2}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}}}=\sqrt{2}<2.$$

Отже, функція $t^{\frac{1}{4}}$ задовольняє умови Теореми 2.

3.2.2. Приклад 2: узагальнений клас степеневих функцій

Розглянемо загальніший клас функцій виду $p(t)=t^{\frac{1}{2}-\delta},\delta>0$, тобто клас степеневих функцій, які задовольняють умову $p(t)\sim o(\sqrt{t}),t\to\infty$.

Необхідна умова. Очевидно, що всі функції з цього класу виконують необхідну умову.

Достатня умова.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sigma_3^2(2^{n+2})}{\sigma_3^2(2^{n+1})}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2-2\delta(n+2)}}{2^{n+1-2\delta(n+1)}} = 2^{1-2\delta} < 2.$$

Таким чином, послаблення обмежень на вибір функції $\sigma_3(t)$ дозволяє моделювати ширший клас ситуацій, що може бути корисним у практичних застосуваннях.

3.3. Чисельне моделювання асимптотичної поведінки процесу I

Перейдемо до чисельного моделювання теоретичних результатів. На основі Теореми 5 та її наслідків, змоделюємо динаміку процесу $I(t)$ при різних значеннях репродуктивного числа $\mathcal{R}_0$.

Чисельне моделювання теоретично отриманих результатів є важливим кроком, оскільки підтверджує правильність теорії на практиці.

Репродуктивне число $\mathcal{R}_0$ відповідно до результатів попереднього розділу задається наступним відношенням:

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta(1+\gamma)c}{\mu_1+\mu_2+r}. \tag{3.9}$$

Для дослідження впливу різних параметрів на значення репродуктивного числа $\mathcal{R}_0$ побудовано тривимірний графік та відповідний контурний графік (Рис. 3.1).

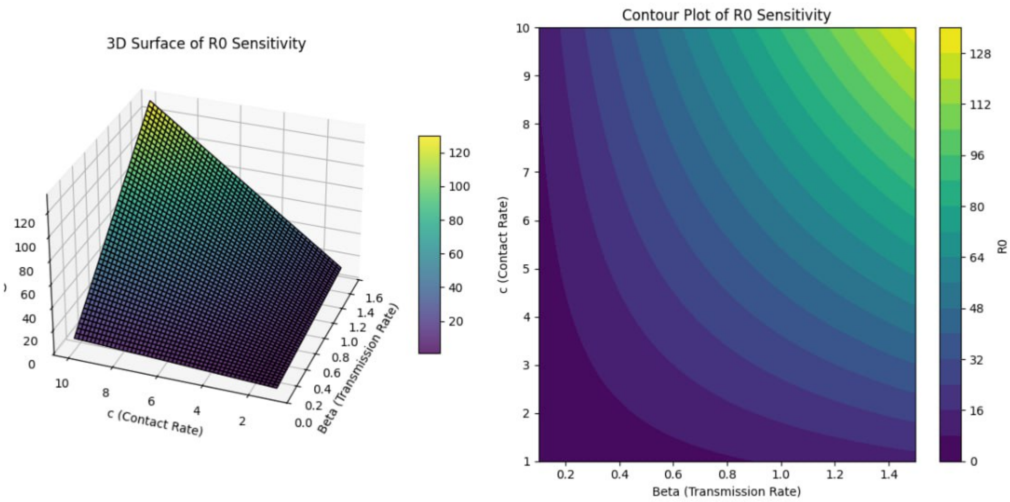

Рисунок 3.1 – Графіки, що ілюструють чутливість репродуктивного числа $\mathcal{R}_0$ до різних епідеміологічних параметрів. Ліворуч – тривимірне зображення залежності $\mathcal{R}_0$ від c та β, праворуч – контурний графік.

Ліва частина (3D-графік) ілюструє залежність $\mathcal{R}_0$ від інтенсивності контактів

c та рівня передачі інфекції β. Видно, що збільшення обох параметрів сприяє зростанню $\mathcal{R}_0$, що узгоджується з теоретичними передбаченнями.

Контурний графік справа дає змогу оцінити рівні $\mathcal{R}_0$ у площині параметрів β та c, що допомагає визначити критичні області, в яких можливий спалах епідемії.

Обидва графіки є важливими інструментами для аналізу ефективності заходів контролю епідемії, таких як зниження контактності населення або зменшення ймовірності передачі хвороби.

Аналогічно, розглянемо зміну репродуктивного числа залежно від інших двох параметрів, а саме від частоти контактів c та інтенсивності природної смертності μ_1. Відповідні результати представлено на Рис. 3.2.

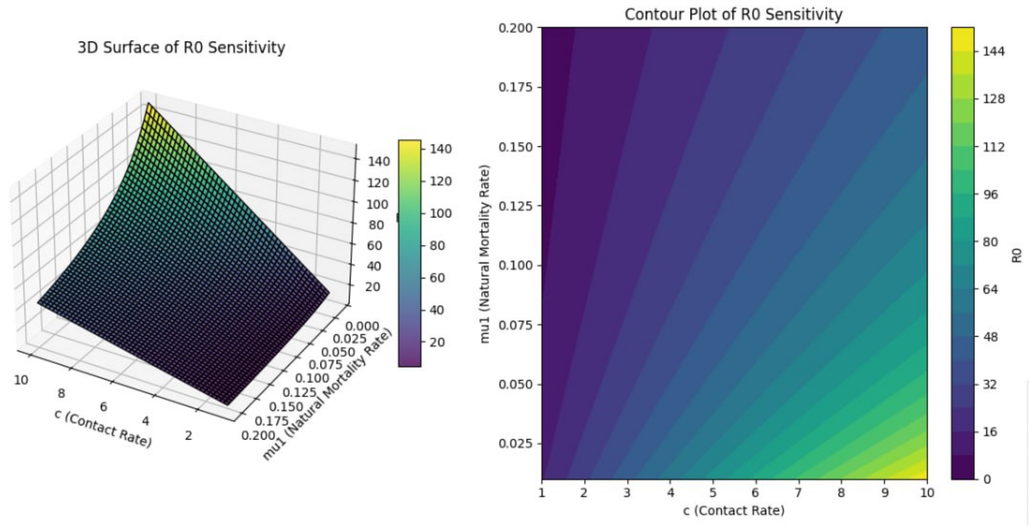

Рисунок 3.2 – Значення репродуктивного числа залежно від частоти контактів c та інтенсивності природньої смертності μ_1

З графіків на Рис. 3.2 видно, що зі збільшенням частоти контактів c значення репродуктивного числа $\mathcal{R}_0$ також зростає, що узгоджується з теоретичними очікуваннями: чим більше контактів між людьми, тим вища ймовірність поширення інфекції. Водночас збільшення інтенсивності природної смертності μ_1 спричиняє зменшення $\mathcal{R}_0$, оскільки швидша природна втрата населення зменшує кількість інфікованих та потенційних носіїв вірусу. Таким чином, найбільші значення $\mathcal{R}_0$ спостерігаються при високих значеннях c та низьких μ_1, що свідчить про важливість контролю соціальних контактів для зменшення ризику епідемії. Навпаки, при низьких значеннях c та високих μ_1 ризик поширення інфекції суттєво знижується.

Перейдемо до моделювання траєкторії процесу, що описує динаміку інфікованого класу. Спершу проведемо моделювання для випадку сталих коефіцієнтів на основі статистичних даних, використаних для перевірки моделі (2.1) на коректність.

Тобто, $S(0) = 12\,645\,960$, $V(0) = 29\,507\,240$, $I(0) = 21\,132$, $R(0) = 0$ – початкові значення, $(S(0), R(0), V(0), I(0))$.

Волатильності стохастичних компонент в межах цієї симуляції обираємо сталими: $\forall t \geq 0 : \sigma_1(t) = \sigma_4(t) = 0.05, \sigma_2(t) = 0.03, \sigma_3(t) = 0.01$.

Інші параметри моделі обираємо константами з Таблиці 2.2.

З формули (3.9) отримаємо значення репродуктивного числа для симуляції $\mathcal{R}_0 \approx 0.435 < 1$.

Отже, згідно з наслідком 1, що $\lim_{n\to\infty} I(t) = 0$*м.н.* Цей результат який підтверджується результатом симуляції, який графічно зображено на Рис. 2.5.

Для розгляду асимптотичної поведінки процесу необхідно провести симуляцію, використовуючи досить великі значення T, наприклад, $T = 60$. Оскільки процес $I(t)$ – стохастичний, то слід згенерувати декілька траєкторій з різними згенерованими вінерівськими процесами, для цієї задачі оберемо кількість траєкторій $n = 10$. Результати симуляції для процесу $I(t)$ показані на Рис. 3.3.

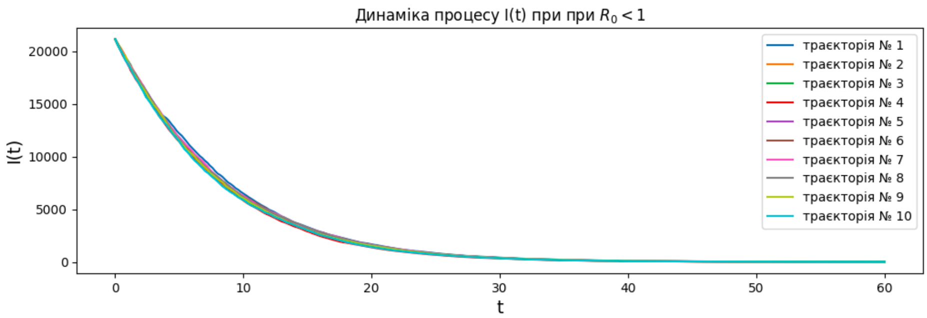

Рисунок 3.3 – Динаміка процесу I при $\mathcal{R}_0 < 1$ при сталих коефіцієнтах.

Як видно з Рис. 3.3, кількість інфікованих прямує до 0, як і очікувалося згідно з твердженням Теореми 5.

Тепер оберемо сталі так, щоб $\mathcal{R}_0 \geq 1$. Значення, за яких це досягається, наведені в Таблиці 3.1.

Табл. 3.1 – Значення параметрів моделі, при яких $\mathcal{R}_0 \geq 1$

Параметр	p	θ	α	β	γ	b	c	r	μ_1	μ_2
Значення	0.5	0.71	0.4	0.5	0.7	0.1	0.25	0.005	0.185	0.0053

Відмінність значень з Таблиці 3.1 від параметрів з Таблиці 2.2 полягає у збільшенні у 2.5 разів значення параметру c, тобто у збільшенні інтенсивності контактів в популяції. Початкові значення $(S(0), V(0), I(0), R(0)) \in \mathbb{R}_+$ та волатильності $\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t), \sigma_4(t)$ лишаються без змін відносно попереднього випадку.

Значення $\mathcal{R}_0$ за таких параметрів з Таблиці 3.1 буде більшим від одиниці $\mathcal{R}_0 \approx 1.0875 > 1$, а траєкторії $(n = 10)$ $I(t)$ матимуть вигляд:

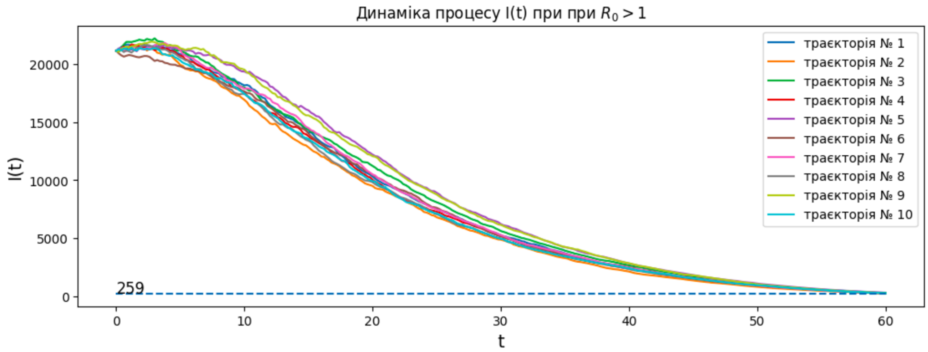

Рисунок 3.4 – Динаміка процесу I при $\mathcal{R}_0 > 1$.

З Рисунку 3.4 можна зробити висновок, що кількість інфікованих на проміжку $[0, T]$ спадає до 259, не до нуля, як в минулому прикладі.

Тепер покажемо також, що при різних значеннях параметру c кількість інфікованих при $t = T = 60$ збільшується при збільшенні $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0(c)$.

Перевіримо також, застосовуючи такі ж параметри, як в Таблиці 2.2, чи за умови змінної волатильності вінерівського процесу $W_3(t)$ - стохастичної компоненти $I(t)$, виконуватиметься твердження $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0,$ *м.н.*.

Візьмемо, наприклад, $\sigma_3(t) = 0.001 + 0.001t^{0.2}$

Отримаємо криву $I(t)$, яка зображена на Рисунку 3.5.

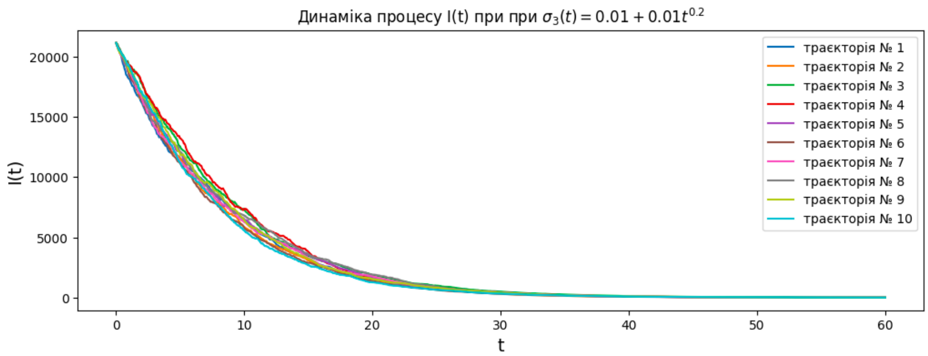

Рисунок 3.5 – Динаміка процесу I для випадку $\sigma_3(t) = 0.001 + 0.001t^{0.2}$

3.4. Висновки

У Розділі 3 розглянуто питання асимптотичної поведінки системи та умов, за яких кількість інфікованих майже напевно прямує до нуля.

Основною теоремою розділу є теорема 5, основним наслідком якої є умова на згасання інфекції - умова асимптотичної рівноваги параметрів.

З умови асимптотичної рівноваги параметрів випливає оцінка репродуктивного числа $\mathcal{R}_0$, що дозволяє провести оцінку динаміки інфекції.

У поточному розділі було отримано важливі наслідки, зокрема стосовно волатильностей (див. Наслідок 1), що дозволяє використовувати функціональні залежності, які відповідають вимогам, для $\sigma_i, i = 1, 2, 3, 4$, розширюючи клас функцій, які можливо застосувати для моделювання.

Чисельне моделювання підтвердило коректність теоретичних результатів. Для моделювання, як і в минулому розділі, обрано дані з Центру громадського здоров'я України (див. [19]).

Результати симуляції показують, що $\lim\limits_{t\to\infty} I(t) = 0, \textit{м.н.}$ при $\mathcal{R}_0 < 1$, як і прогнозувалося. Для випадку $\mathcal{R}_0 \geq 1$, як і очікувалося, симуляція показала наявність стабільної популяції заражених при $t \to \infty$.

Було проведено серію симуляцій для різних функцій $\sigma_3(t)$, що доводить твердження Наслідку 1. Результати цього розділу доповідалися на XIII Всеукраїнській науковій конференції молодих математиків за темою «Застосування стохастичних диференціальних рівнянь для моделювання динаміки популяції» [28].

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ford G. W., Lewis J. T., O'Connell R. F. Quantum Langevin equation // Phys. Rev. A. — 1988. — Vol. 37. — P. 4419–4428.
2. Risken Dr. Hannes. Fokker-Planck Equation // Springer Nature Link. — 1996. — Vol. 474. — P. 63–95.
3. Kermack W.O., McKendrick. Cotributions to the Mathematical Theory of Epidemics-I. Proceedings of the Royal Society. — 1927.
4. Ian Cooper Argha Mondal Chris G. Antonopoulos. A SIR model assumption for the spread of COVID-19 in different communities. Chaos, Solitons Fractals. — 2020. — 14 p.
5. G Vetrivel. Susceptibility Inference and Response on Transmission Dynamics of Ebola Virus in Fuzzy Environments. International Journal on Robotics Automation and Sciences. — 2024.
6. Rahman ur Gh. Tymoshenko O. & Di Nunno G. Insights on Stochastic Dynamics for Transmission of Monkeypox. Biological and Probabilistic Behaviour // arXiv. — 2024.
7. J. Tumwiine J.Y.T. Mugisha L.S. Luboob. A mathematical model for the dynamics of malaria in a human host and mosquito vector with temporary immunity. Applied Mathematics and Computation. — Elsevier, 2007. — 12 p.
8. Mohajan Haradhan. Mathematical Analysis of SIR Model for COVID-19 Transmission // MPRA. — 2022. — Vol. 36.
9. Simon Cory. The SIR dynamic model of infectious disease transmission and its analogy with chemical kinetics // PeerJ Physical Chemistry. — 2020. — Vol. 18.
10. Wen Siyan. A Modified SIRV Model for COVID-19. International Journal on Robotics Automation and Sciences. — 2022. — 11 p.
11. Гіхман Й. І. Скороход А. В. Стохастичні диференціальные рівняння. — Наукова думка, 1968. — 356 p.
12. Smale S. On the differential equations of species in competition // Springer Nature Link. — 1976. — P. 5–7.
13. L. Arnold. Stochastic, Differential Equations: Theory and Applications. — Wiley, 1972.
14. Asmussen S. Glynn P. W. Stochastic Modelling and Applied Probability. — Springer, 2007. — 476 p.
15. Kloeden P. E. Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. —

Springer, 1992. — 326 p.

16. T. Mitsui. Stability analysis of numerical solution of stochastic differential equations // Res. Inst. Math.Sci.Kyoto Univ. — 1995. — P. 124–138.
17. Tocino A. Ardanuy R. Runge-Kutta methods for numerical solution of stochastic differential equations // Journal of Comp. and App. Mathematics. — 2002. — Vol. 138. — P. 219–241.
18. Міністерство Фінансів України. Дані про населення України. — Access mode: `https://index.minfin.com.ua/ua/reference/people/2019/`.
19. Центр громадського здоров'я України. Статистика з туберкульозу. — Access mode: `https://phc.org.ua/kontrol-zakhvoryuvan/tuberkuloz/statistika-z-tb`.
20. Ummul Khair Hasanul Fahmi Sarudin Al Hakim, Rahim Robbi. Forecasting Error Calculation with Mean Absolute Deviation and Mean Absolute Percentage Error // Journal of Physics: Conference Series. — 2017. — Vol. 930.
21. Млавець Ю. Ю. Панічек О. В. Тимошенко О. А. Математичне моделювання динаміки передачі туберкульозу з використанням диференціальних рівнянь збурених за допомогою вінерівських процесів // Науковий вісник Ужгородського університету. — 2024.
22. Панічек О. В. Тимошенко О.А. Математичне моделювання динаміки передачі інфекційних захворювань з використанням СДР // X Міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті». — 2025. — P. 119–122.
23. Dieu N.T. Nguyen D H. Du N.H. & Yin G. Classification of Asymptotic Behaviour in a Stochastic SIR Model. // SIAM Journal on Applied Dynamical System. — 2016. — Vol. 15. — P. 1062–1084.
24. D. Jiang C. Ji N. Shi J. Yu. The long time behaviour of DI SIR epidemic model with stochastic perturbation. // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2010. — no. 372. — P. 162–180.
25. Lin Y. G., Jiang D. Q. Long-time behaviour of a perturbed SIR model by white noise // Discrete Continuous Dynamical System Series B. — 2013. — no. 18. — P. 1873–1887.
26. Buldygin V. V. Tymoshenko O. A. On the exact order of growth of solutions of stochastic differential equations with time-dependent coefficients // Theory of stochastic processes. — 2010. — Vol. 16.2. — P. 12–22.

27. Тимошенко О. А. Точний порядок росту розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі знакозмінним коефіцієнтом зсуву // Наукові вісті НТУУ«КПІ». — 2009. — Vol. 5. — P. 145–152.
28. Панічек О. В. Тимошенко О.А. Стохастичні диференціальні рівняння в моделюванні динаміки популяцій // XIII Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків. — 2025. — P. 46–47.

ДОДАТОК А

Код мовою програмування Python для генерації траєкторій процесів S, I, V, R моделі (2.1):

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.interpolate import make_interp_spline
from matplotlib import cm
from matplotlib.ticker import LinearLocator

plt.rcParams["figure.figsize"] = [16, 6]

# Enter n, T
T = float(input("Enter T ([0,T]):"))
n = int(input("Enter number of partitions"))

# Starting values S,R,V,I:
startS = int(input("Enter initial value S:"))
startV = int(input("Enter initial value V:"))
startI = int(input("Enter initial value I:"))
startR = int(input("Enter initial value R:"))

valuesList = [startS, startV, startI, startR]

# Parameters
p = float(input("Enter p:"))
beta = float(input("Enter beta:"))
gamma = float(input("Enter gamma:"))

numericalDict = {'p': p, 'beta': beta, 'gamma': gamma}

#Entering parameters (functions if needed)
#For instance to enter 0.01t you need to have function, by default #functions are
    assumed to be constants for all t

alphaV = float(input("Enter alpha (function assumed to be constant for all t):"))
bV = float(input("Enter b (function assumed to be constant for all t):"))
cV = float(input("Enter c (function assumed to be constant for all t):"))
thetaV = float(input("Enter theta (function assumed to be constant for all t):"))
mu_1v = float(input("Enter mu_1 (function assumed to be constant for all t):"))
mu_2v = float(input("Enter mu_2 (function assumed to be constant for all t):"))
rV = float(input("Enter r (function assumed to be constant for all t):"))

sigma_1v = float(input("Enter sigma_1 (function assumed to be constant for all t):
    "))
sigma_2v = float(input("Enter sigma_2 (function assumed to be constant for all t):
    "))
```

```
sigma_3v = float(input("Enter sigma_3 (function assumed to be constant for all t):
    "))
sigma_4v = float(input("Enter sigma_4 (function assumed to be constant for all t):
    "))

def alpha(x):
    return alphaV

def b(x):
    return bV

def c(x):
    return cV

def theta(x):
    return thetaV

def mu_1(x):
    return mu_1v

def mu_2(x):
    return mu_2v

def r(x):
    return rV

def sigma_1(x):
    return sigma_1v

def sigma_2(x):
    return sigma_2v

def sigma_3(x):
    return sigma_3v

def sigma_4(x):
    return sigma_4v

functionsDict = {
    'alpha': alpha,
    'b': b,
    'c': c,
    'theta': theta,
    'mu_1': mu_1,
    'mu_2': mu_2,
    'r': r,
    'sigma_1': sigma_1,
    'sigma_2': sigma_2,
```

```
    'sigma_3': sigma_3,
    'sigma_4': sigma_4
}

# Simulation class
class Simulator:
    def __init__(self, n, T, startValues, functionsDict, numericalDict):

        assert type(n) == int, "Number of partitions should be an integer"
        assert n>0, "Number of partitions should be positive"
        self.n = n

        assert type(T) == float, "Endpoint of simulation (T) should be a number"
        assert T>0, "Endpoint can't be less than starting point - zero"
        self.T = T

        self.t = np.linspace(0, self.T, self.n+1) # interval of simulation [0,T]
    with n+1 points: 0, T/n, 2T/n, ... T

        assert type(startValues) == list or type(startValues) == numpy.ndarray, "
    Start values should be list or numpy array object"
        assert len(startValues) == 4, "Start values list should contain strictly 4
     values (S, V, R, I)"

        self.S = [int(startValues[0])]
        self.V = [int(startValues[1])]
        self.I = [int(startValues[2])]
        self.R = [int(startValues[3])]

        self.N = [startValues[0]+ startValues[1] + startValues[2]+ startValues[3]]

        self.minVal = self.N[0]

        assert type(functionsDict) == dict, "Functions of SDE should form
    dictonary"

        #for now we assume functions are just constants
        self.alpha = functionsDict['alpha']
        self.b = functionsDict['b']
        self.c = functionsDict['c']
        self.theta = functionsDict['theta']
        self.mu_1 = functionsDict['mu_1']
        self.mu_2 = functionsDict['mu_2']
        self.r = functionsDict['r']

        self.sigma_1 = functionsDict['sigma_1']
        self.sigma_2 = functionsDict['sigma_2']
        self.sigma_3 = functionsDict['sigma_3']
```

```
        self.sigma_4 = functionsDict['sigma_4']

        assert type(numericalDict) == dict, "Numerical parameters of SDE should form dictonary"

        self.p = numericalDict['p']

        assert self.p <= 1, "Probability p should be less or equal than 1"
        assert self.p >= 0, "Probability p should be greater or equal than 0"

        self.beta = numericalDict['beta']
        self.gamma = numericalDict['gamma']

    def __generateWiener(self):
        z = np.random.normal(size = self.n)
        w = [0] # старт з нуля
        for i in range(1, len(self.t)):
            w_current = w[i-1] + np.sqrt(self.t[i] - self.t[i-1])*z[i-1]
            w.append(w_current)
        return w

    def generateWienerProcesses(self):

        self.W_1 = self.__generateWiener()
        self.W_2 = self.__generateWiener()
        self.W_3 = self.__generateWiener()
        self.W_4 = self.__generateWiener()

    def generateSVIR(self):
        for i in range(self.n):
            time = self.t[i]
            dt = self.t[i+1] - self.t[i]

            dW_1 = self.W_1[i+1] - self.W_1[i]
            dW_2 = self.W_2[i+1] - self.W_2[i]
            dW_3 = self.W_3[i+1] - self.W_3[i]
            dW_4 = self.W_4[i+1] - self.W_4[i]

            currentS = self.S[i]
            currentS += ((1-p)*theta(time) + b(time)*self.V[i] + alpha(time)*self.R[i]  - mu_1(time)*self.S[i] - beta*c(time)*self.S[i]*self.I[i]/self.N[i])*dt
            currentS += sigma_1(time)*self.S[i]*dW_1

            currentV = self.V[i]
            currentV += (p*theta(time) - gamma*beta*c(time)*self.V[i]*self.I[i]/self.N[i] -  (b(time) + mu_1(time))*self.V[i])*dt
            currentV += sigma_2(time)*self.V[i]*dW_2

```

```
         currentI = self.I[i]
         currentI += (beta*c(time)*self.S[i]*self.I[i]/self.N[i] + c(time)*self.V[i]*self.I[i]/self.N[i] - (mu_1(time) + mu_2(time)+r(time))*self.I[i])*dt
         currentI += sigma_3(time)*self.I[i]*dW_3

         currentR = self.R[i]
         currentR += (r(time)*self.I[i]- alpha(time)*self.R[i] - mu_1(time)*self.R[i])*dt
         currentS += sigma_4(time)*self.R[i]*dW_4

         self.S.append(currentS)
         self.R.append(currentR)
         self.I.append(currentI)
         self.V.append(currentV)

         self.N.append(currentS + currentR + currentI + currentV)


 def computeR(self):
     R_0 = 1
     R_0*=self.beta
     R_0*=(self.gamma + 1)

     maxC = max([self.c(elem) for elem in self.t])
     minMu = min([self.mu_1(elem) for elem in self.t])
     minMu2 = min([self.mu_2(elem) for elem in self.t])
     minR = min([self.r(elem) for elem in self.t])

     R_0*=maxC
     R_0/=(minR + minMu + minMu2)

     return R_0

 def resetSVIR(self):
   self.R = [self.R[0]]
   self.S = [self.S[0]]
   self.V = [self.V[0]]
   self.I = [self.I[0]]
   self.N = [self.N[0]]
   self.minVal - self.N[0]

 def plotTrajectories(self, option, number = 10, specific_message=None, highlight_min_value = False):

   minVal = self.minVal

   if specific_message:
```

```
      plt.title("Dynamics of process {}(t) when {}".format(option, specific_message))
    else:
      plt.title("Dynamics of process {}(t)".format(option))
    plt.xlabel("t", fontsize = 14)
    plt.ylabel("{}(t)".format(option),fontsize = 14)
    for i in range(number):
      self.generateWienerProcesses()
      self.generateSVIR()

      self.plotTrajectory(option, show = False, index = i+1)

      if minVal > self.minVal:
        minVal = self.minVal


      self.resetSVIR()


    plt.plot(self.t, [minVal]*(self.n+1), '--', visible = highlight_min_value)
    if highlight_min_value:
      plt.text(self.t[0], minVal, "{}".format(str(minVal)), fontsize = 'large' )
    plt.show()

  def plotTrajectory(self, option, interpolate = False, show = True, index = 1):
      if option == 'S':

          if interpolate:
              spline = make_interp_spline(self.t, self.S)
              t_changed = np.linspace(self.t.min(), self.t.max(), 100*self.n)
              self.S = spline(self.t)

          self.minVal = int(min(self.S))

          plt.plot(self.t, self.S, label = "trajectory № {}".format(index))
      elif option == 'I':

          if interpolate:
              spline = make_interp_spline(self.t, self.I)
              t_changed = np.linspace(self.t.min(), self.t.max(), 100*self.n)
              self.I = spline(self.t)

          self.minVal = int(min(self.I))

          plt.plot(self.t, self.I, label = "trajectory № {}".format(index))
      elif option == 'R':

          if interpolate:
```

```
                spline = make_interp_spline(self.t, self.R)
                t_changed = np.linspace(self.t.min(), self.t.max(), 100⋆self.n)
                self.R = spline(self.t)

            self.minVal = int(min(self.R))

            plt.plot(self.t, self.R, label = ”trajectory № {}”.format(index))
        else:

            if interpolate:
                spline = make_interp_spline(self.t, self.V)
                t_changed = np.linspace(self.t.min(), self.t.max(), 100⋆self.n)
                self.V = spline(self.t)

            self.minVal = int(min(self.V))

            plt.plot(self.t, self.V, label = ”trajectory № {}”.format(index))

        plt.legend()
        if show:
          plt.show()

    @staticmethod
    def calculateR(beta, gamma, c, mu_1, mu_2, r):

        R_0 = 1
        R_0⋆=beta
        R_0⋆=(gamma + 1)

        R_0⋆=c
        R_0/=(r + mu_1 + mu_2)

        return R_0

    def plotR0versusInfected(self, arguments = [’beta’, ’c’], boundaries_1 = [0.01, 0.6], boundaries_2 = [0.003, 0.82], partition_number = 1000, z_max = 2):

        fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={”projection”: ”3d”})

        assert type(boundaries_1) == list, TypeError
        assert len(boundaries_1) == 2, ValueError

        assert type(boundaries_2) == list, TypeError
        assert len(boundaries_2) == 2, ValueError

        assert type(partition_number) == int, TypeError

        # arguments x, y generation
```

```
    _x = np.linspace(boundaries_1[0], boundaries_1[-1], partition_number) # x
    span_x = boundaries_1[-1] - boundaries_1[0]
    _y = np.linspace(boundaries_2[0], boundaries_2[-1], partition_number) # y
    span_y = boundaries_2[-1] - boundaries_2[0]
    X, Y = np.meshgrid(_x, _y)
    Args = [X,Y]

    low_span = min([span_x, span_y])

    arguments_names = ['beta', 'gamma', 'c', 'mu_1', 'mu_2', 'r']

    arguments_enabled = [elem in arguments for elem in arguments_names]

    arguments_to_pass = [self.beta, self.gamma, self.c(0), self.mu_1(0), self.mu_2(0), self.r(0)]

    j=0
    for i in range(len(arguments_enabled)):
      if arguments_enabled[i]:
        arguments_to_pass[i] = Args[j]
        j+=1


    Z = Simulator.calculateR(*arguments_to_pass)


    # Plot the surface.
    surf = ax.plot_surface(X, Y, Z, edgecolor='royalblue', lw=0.2, rstride=12, cstride=12,
            alpha=0.001*low_span)

    # Customize the z axis.
    ax.set_zlim(0, z_max)

    ax.zaxis.set_major_formatter('{x:.02f}')

    if arguments[0] in ['r', 'c']:
      ax.set_xlabel(r"$x = {}$ ".format(arguments[0]))
    else:
      ax.set_xlabel(r"$x = \{}$ ".format(arguments[0]))

    if arguments[1] in ['r', 'c']:
      ax.set_ylabel(r"$y = {}$".format(arguments[1]))
    else:
      ax.set_ylabel(r"$y = \{}$".format(arguments[1]))

    plt.title(r"Value of $\mathcal{R}_0$ with respect to arguments")

```

```
        plt.show()

# instance of class to be used
sim = Simulator(n, T, valuesList, functionsDict, numericalDict)
```