

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей**

«На правах рукопису»
УДК 519.8 Математична теорія та
методи дослідження операцій

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
_____ Клесов О.І.
«__» _____ 20__ р.

**Магістерська дисертація
на здобуття ступеня магістра
за освітньо-професійною програмою
«Страхова та фінансова математика»
зі спеціальності 111 «Математика»
на тему: «Оптимізаційні методи в фінансах»
Виконала:**

студентка II курсу, групи ОМ-41мп
Малєєва Ольга Вікторівна _____

Науковий керівник:
Кандидат фізико-математичних наук, доцент
Крошко Наталія Віталіївна _____

Рецензент:
Доцент Спеціальної кафедри №1
Інституту спеціального зв'язку та захисту інформації
«КПІ ім. Ігоря Сікорського»,
кандидат фізико-математичних наук
Білий Валерій Олександрович _____

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації
немає запозичень з праць інших авторів без
відповідних посилань.
Студент (-ка) _____

Київ – 2025 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-професійна програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Олег КЛЕСОВ

«__» _____ 20__ р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Малєєвій Ользі Вікторівні

1. Тема дисертації «Оптимізаційні методи в фінансах», науковий керівник дисертації Крошко Наталія Віталіївна, доцент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей, затверджені наказом по університету від «6» листопада 2025 р. № 4843-с
2. Термін подання студентом дисертації 18 грудня 2025 р.
3. Об'єкт дослідження: валютний ринок та ринок облігацій.
4. Вихідні дані: валютні курси АТ КБ «ПриватБанк» та інформаційного порталу «Мінфін»; дані щодо гривневих облігацій внутрішньої державної позики АТ КБ «ПриватБанк».
5. Перелік завдань, які потрібно розробити:
 - 1) Проаналізувати теоретичні засади валютного ринку, валютного арбітражу та ринку облігацій.

- 2) Дослідити основні підходи до математичного й оптимізаційного моделювання фінансових інструментів.
 - 3) Зібрати та опрацювати вихідні дані для дослідження валютних курсів і облігацій.
 - 4) Побудувати математичні та оптимізаційні моделі валютного арбітражу.
 - 5) Сформулювати та розв'язати оптимізаційну задачу формування портфеля облігацій.
 - 6) Проаналізувати отримані результати та сформулювати висновки.
6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: 21 слайд.
7. Орієнтовний перелік публікацій: тези доповіді І науково-практичної конференції магістрантів ФМФ (за результатами дисертаційних досліджень магістрантів) на тему «Оцінка арбітражної можливості на валютному ринку».
8. Дата видачі завдання: 03 вересня 2025 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Пошук та опрацювання наукової літератури.	03.09.2025-30.09.2025	Виконано
2	Вивчення теоретичних засад валютного ринку та ринку облігацій.	01.10.2025-15.10.2025	Виконано
3	Збір і аналіз даних для побудови математичних моделей.	16.10.2025-04.11.2025	Виконано
4	Побудова оптимізаційних моделей валютного арбітражу та формування оптимального портфеля облігацій.	05.11.2025-20.11.2025	Виконано
6	Аналіз результатів моделювання.	21.11.2025-27.11.2025	Виконано
7	Написання висновків і оформлення результатів магістерської дисертації	28.11.2025-17.12.2025	Виконано

Студент

Ольга МАЛЄЄВА

Науковий керівник

Наталія КРОШКО

РЕФЕРАТ

Магістерська робота містить 55 сторінок, 21 слайд презентації, 11 джерел.

Об'єктом дослідження є валютний ринок та ринок облігацій.

Метою роботи є застосування оптимізаційних методів для виявлення арбітражних можливостей на валютному ринку та формування оптимального портфеля облігацій.

У роботі досліджено валютний арбітраж і формування портфеля облігацій на основі теоретичних положень, їх математичної формалізації та оптимізаційних постановок. Побудовано оптимізаційні моделі для виявлення наявності або відсутності арбітражних можливостей на валютному ринку. Також розглянуто задачу формування портфеля облігацій, що мінімізує початковий обсяг інвестицій за заданих майбутніх фінансових зобов'язань.

Ключові слова: валютний ринок, валютні котирування, ефективність ринку, валютний арбітраж, облігація з нульовим купоном, купонні облігації.

ABSTRACT

The master's thesis contains 55 pages, 21 presentation slides, 11 sources.

The object of the study is the foreign exchange market and the bond market.

The method of work is the application of optimized methods to identify arbitrage opportunities in the foreign exchange market and the formation of the optimal market portfolio of obligations.

The work investigates foreign exchange arbitrage and the formation of a bond portfolio based on theoretical provisions, their mathematical formalization and optimization statements. Optimization models are built for the appearance on the website or list of arbitrage opportunities in the foreign exchange market. Also important is the task of forming a bond portfolio that minimizes the initial investment volume for given future financial obligations.

Keywords: foreign exchange market, currency quotation, market efficiency, currency arbitrage, zero-coupon bonds, coupon bonds.

ЗМІСТ

Вступ.....	7
Розділ 1. Теоретичні засади валютного ринку та математичного моделювання арбітражу.....	8
1.1. Сутність валютного ринку.....	8
1.2. Валютні цінності	10
1.3. Валютне котирування	10
1.4 Ефективні валютні курси та оцінка конкурентоспроможності національної валюти.	11
1.5. Валютний арбітраж	16
Розділ 2. Застосування оптимізаційної моделі для виявлення арбітражних можливостей на валютному ринку.....	23
Розділ 3. Теоретичні засади моделювання облігацій	31
3.1. Сутність та види облігацій	31
3.2. Фінансові інструменти та грошові потоки	32
3.3. Коректність ціноутворення та дисконтні множники.....	33
3.4. Облігація з нульовим купоном та структура відсоткових ставок	36
3.5 Облігації з купонами та їх грошові потоки	39
Розділ 4. Застосування оптимізаційної моделі для формування портфеля облігацій	43
Висновки	53
Список використаних джерел.....	54

Вступ

Сучасний фінансовий ринок України перебуває під впливом значних зовнішніх та внутрішніх потрясінь, які спричинені війною та подальшими структурними змінами в економіці. Тому доцільно звернути увагу на оптимізаційні методи, які можуть бути корисними для аналізу українського фінансового ринку. Використання таких підходів дозволяє упорядкувати наявні дані та робити обґрунтовані висновки щодо його поточного стану та можливих напрямів розвитку.

Першим напрямом дослідження є аналіз валютного ринку України, зокрема виявлення арбітражу. Нині валютний ринок залишається надзвичайно чутливим до економічних, політичних та регуляторних змін, що підвищує ризик короткострокових неточностей у курсоутворенні. Подібні коливання можуть мати негативні наслідки для бізнесу та населення. Виявлення арбітражних можливостей у цьому контексті дозволяє оцінити ступінь ринкової ефективності та визначити, наскільки узгоджено функціонують сегменти валютного ринку. Застосування оптимізаційних підходів дає змогу формально описати структуру валютних курсів, визначити умови виникнення безризикового прибутку та оцінити ступінь ефективності ринку.

У формуванні та розвитку фінансового ринку помітний вплив мають боргові інструменти, зокрема облігації. Вони використовуються не лише для залучення фінансових ресурсів, а й можуть розглядатися як показник рівня довіри інвесторів і населення до держави та фінансової системи в цілому. Дослідження облігацій дає змогу проаналізувати особливості їх ціноутворення, структуру грошових потоків та підходи до формування інвестиційних стратегій. Цей інструмент широко використовують в задачах математичного моделювання та оптимізації інвестиційних рішень.

Таким чином, робота поєднує теоретичні положення фінансової математики з оптимізаційними методами для отримання ефективних рішень.

Розділ 1. Теоретичні засади валютного ринку та математичного моделювання арбітражу

1.1. Сутність валютного ринку

З розвитком торгівлі та міжнародних зв'язків у людства з'явилася потреба у здійсненні операцій у національній та іноземній валюті, що й стало фундаментом для подальшого розвитку валютного ринку.

Валютний ринок – це сукупність економічних відносин, які виникають між економічними агентами (центральною та комерційними банками, валютними біржами, підприємствами, приватними особами тощо) під час здійснення операцій щодо купівлі-продажу іноземної валюти та операцій пов'язаних з переміщенням валютних капіталів. [1]

Ключові функції валютного ринку:

- створення умов для вчасного проведення міжнародних платежів;
- забезпечення можливості мінімізувати валютні ризики;
- створення механізмів для здійснення державою валютної політики;
- забезпечення процесу формування попиту та пропозиції на іноземні валюти;
- надання можливості диверсифікації валютних резервів;
- підтримання стабільності валютних курсів за допомогою ринкових механізмів і державного контролю.

До другорядних функцій можна віднести:

- забезпечення взаємодії між валютними, кредитними і фінансовими ринками у межах країни та на світовому рівні;
- підтримка розвитку сучасних методів міжнародних розрахунків та оптимізація руху платіжних потоків між країнами.

Валютні ринки можна класифікувати за багатьма ознаками: за сферою розповсюдження, по відношенню до валютних обмежень, за видами валютних курсів, за ступенем організованості та ін. [1] Розглянемо детальніше основні з них.

Відповідно до сфери поширення, що визначає широту охоплення валютних операцій, виділяють внутрішній та міжнародний валютні ринки.

За критерієм наявності валютних обмежень виділяють вільні та регламентовані валютні ринки. Вільні валютні ринки функціонують без економічних або адміністративних обмежень з боку держави, що забезпечує вільний рух капіталів і валютних операцій. Натомість на ринках з обмеженнями держава застосовує певні регуляторні заходи, спрямовані на встановлення порядку здійснення операцій з валютою та контролю за валютними потоками.

За видами застосування валютних курсів валютні ринки поділяють на такі, що функціонують з одним режимом валютного курсу, та ті, де застосовуються два режими. У першому випадку використовується єдиний офіційний курс національної валюти, тоді як у другому — існує подвійна система курсів, що передбачає відмінність між офіційним і ринковим (або комерційним) курсом.

За ступенем організованості валютні операції поділяються на біржові та позабіржові. На біржовому сегменті валютного ринку операції здійснюються через спеціалізовані валютні біржі або валютні відділи товарних і фондових бірж, зокрема шляхом торгівлі деривативами — похідними фінансовими інструментами. Водночас переважна частина операцій (приблизно 90%) припадає на позабіржовий, або міжбанківський ринок, де угоди укладаються безпосередньо між фінансовими установами за допомогою сучасних електронних і супутникових засобів зв'язку.

1.2. Валютні цінності

Валютні цінності — матеріальні об'єкти, визначені як засоби валютно-фінансових відносин. [2] Валютні цінності включають національну та іноземну валюти, дорогоцінні метали, що застосовуються у банківській діяльності, а також різноманітні платіжні документи та цінні папери, номіновані у гривнях, іноземній валюті або у вартості банківських металів.

За обсягами операцій на валютному ринку виділяють три основні групи валют:

1. Основні — це валюти, які вільно обертаються на всіх сегментах валютного ринку без будь-яких обмежень, повністю конвертовані та використовуються у значних масштабах для всіх типів фінансових операцій.
2. Другорядні — валюти, що також перебувають у вільному обігу, однак іноді пов'язані з додатковими ризиками, наприклад через нижчу ліквідність або менші обсяги торгівлі.
3. Екзотичні — це валюти, які мають обмежену конвертованість і застосовуються здебільшого в межах національних ринків. Для них можуть установлюватися певні обмеження щодо операцій, розмірів лімітів.

1.3. Валютне котирування

Валютне котирування — зареєстрований у чисельних величинах валютний курс.

Валютний курс — ціна грошової одиниці однієї країни, виражена в грошових одиницях іншої країни.[2]

На валютному ринку розрізняють три типи котирувань:

1. Пряме котирування — це спосіб визначення курсу, за якого вказується, скільки одиниць національної валюти необхідно для придбання одного долара США.

2. Зворотне котирування — це визначення валютного курсу, яке показує, скільки доларів США міститься в одній одиниці національної валюти.

3. Крос-курс — це співвідношення між двома іноземними валютами, яке визначається без урахування долара США. Зазвичай такий курс розраховується на основі курсів цих валют відносно долара США.

1.4 Ефективні валютні курси та оцінка конкурентоспроможності національної валюти.

Конкурентоспроможність національної економіки визначається спроможністю вітчизняних виробників успішно змагатися за споживача як на внутрішньому, так і на зовнішніх ринках. Валютний курс відіграє важливу роль у формуванні відносної цінової привабливості національних товарів порівняно з іноземними аналогами.

При зміцненні курсу національної валюти вітчизняна продукція стає дорожчою на міжнародному ринку, а іноземна — більш доступною. Як наслідок маємо зниження конкурентоспроможності експортних товарів. І навпаки, якщо відбувається знецінення державної валюти, то імпортовані товари для населення стають надто дорогими, тому попит на місцеві товари зростає. Це означає, що збільшується конкурентоспроможність.

Для оцінки зміни вартості гривні порівняно з валютами інших країн використовується методологія, розроблена Банком міжнародних розрахунків, Європейським центральним банком та Міжнародним валютним фондом.

Індекси базуються на середньомісячних прямих котируваннях міжбанківського обмінного курсу гривні, які надає Національний банк України, а також на ринкових курсах іноземних валют до долара США за даними Міжнародного валютного фонду.

У якості показника інфляції використовується індекс споживчих цін.

Для того, щоб результати розрахунків максимально відображали реальність торговельної структури, у моделі використовуються нормовані вагові коефіцієнти. Вони визначаються як середні частки країн — основних партнерів України у зовнішньоторговельному обороті за останні три роки. Такий підхід дає змогу гнучко реагувати на зміни в напрямках торгівлі, оскільки ваги оновлюються щорічно.

Країни СНД	Країни Європи		Країни Азії	Країни Америки	Країни Африки
Азербайджан Грузія Казахстан Молдова	Австрія Бельгія Болгарія Великобританія Греція Данія Естонія Ірландія Іспанія Італія Латвія Литва Люксембург Нідерланди	Німеччина Польща Португалія Румунія Словацька Республіка Словенія Угорщина Фінляндія Франція Чеська Республіка Швейцарія Швеція	Індія Китай Республіка Корея Туреччина Японія	США	Єгипет

Таблиця 1.1. Країни світу – основні торговельні партнери України за географічними напрямками [3]

Розрахунок вагових коефіцієнтів, приведених до нормованої форми:

$$W_i = \frac{X^i + M^i}{\sum_{i=1}^n X^i + \sum_{i=1}^n M^i},$$

W_i — нормалізована частка країни i що є одним із головних торговельних партнерів України, у загальному обсязі її зовнішньоторговельного обороту. Сума всіх вагових коефіцієнтів дорівнює одиниці: $\sum_{i=1}^n W_i = 1$;

X^i — величина експорту товарів і послуг, спрямованих з України до країни i ;

M^i — величина імпорту товарів і послуг, що надходять з країни i до України.

Для оцінки динаміки валютного ринку використовується поняття двостороннього номінального валютного курсу.

Двосторонній номінальний валютний курс — це вираження вартості однієї валюти в одиницях іншої. Його зміни дають змогу простежити динаміку вартості національної валюти відносно валют інших країн. Такий аналіз дозволяє визначити тенденцію національної валюти до зміцнення або знецінення.

Для оцінки динаміки валютного ринку визначається зміна номінального курсу іноземної валюти до гривні, яка розраховується за такою формулою:

$$dER_t^i = \frac{ER_t^i}{ER_{t-1}^i},$$

де d — місячна зміна;

ER_t^i — курс іноземної валюти i до національної у поточному періоді t ;

ER_{t-1}^i – курс цієї валюти до національної у попередньому періоді $t - 1$.

Показник номінального ефективного валютного курсу (НЕОК) розраховується як зважене середнє індексованих двосторонніх курсів обміну. Він характеризує динаміку вартості національної валюти у порівнянні з валютами основних партнерів у зовнішній торгівлі. Його можна розрахувати за формулою:

$$NEER = \prod_{t=1}^T \left(\prod_{i=1}^n (dER_t^i)^{W_i} \right) \cdot 100\%.$$

Добуток $\prod_{i=1}^n (dER_t^i)^{W_i}$ відображає сукупну зміну обмінних курсів іноземних валют відносно гривні dER_t^i , з урахуванням вагових коефіцієнтів W_i , які характеризують частку кожної країни у зовнішньоторговельному обороті України.

У розрахунках базовим періодом приймається грудень 1999 року, значення якого умовно прирівнюється до одиниці. Під час обчислення номінального ефективного обмінного курсу часто використовують співвідношення номінальних курсів до базового періоду $\frac{ER_t^i}{ER_0^i}$, піднесене до степеня відповідної ваги W_i . Водночас застосування змінних (динамічних) ваг може призводити до підвищення волатильності результатів через їх щорічне коригування, зазвичай у січні. Щоб уникнути таких спотворень, індекс доцільно розраховувати на основі місячних змін курсів. Обидва підходи забезпечують однаковий результат для місячної динаміки НЕОК у разі фіксованих ваг.

Зміни номінального ефективного валютного курсу є не завжди реальним показником стану конкурентоспроможності країни. Тому що НЕОК відображає зміну вартості національної валюти без врахування динаміки заробітної плати чи коливання цін. Попри це, показник залишається корисним

аналітичним інструментом для загальної оцінки змін у валютній політиці та зовнішньоекономічних умовах.

Ключовим показником у дослідженні є відносний темп інфляції, який використовується для аналізу тенденцій зміни валютного курсу. Він відображає різницю у динаміці зростання цін між Україною та її основними торговельними партнерами. Його можна розрахувати за формулою:

$$dP_t^i = \frac{\pi_t^i}{\pi_t^{UA}},$$

де d – місячна зміна;

P_t^i – відношення індексу споживчих цін у країні i до індексу споживчих цін в Україні;

π_t^i – інфляція у країні i ;

π_t^{UA} – інфляція в Україні.

Індекс реального ефективного обмінного курсу (РЕОК) є одним із ключових показників оцінки цінової конкурентоспроможності національної економіки. Він відображає зміну реальної вартості гривні відносно валют країн, основних торговельних партнерів, з урахуванням різниці в темпах інфляції.

Якщо номінальне знецінення національної валюти супроводжується вищими темпами інфляції, ніж у партнерів, реальна конкурентоспроможність може не покращитися. Саме тому індекс РЕОК є більш показовим, ніж номінальний курс, адже враховує як зміну валютного курсу, так і інфляційні відмінності між країнами.

Розрахунок показника здійснюється за формулою:

$$REER = \prod_{t=1}^T \left(\prod_{i=1}^n \left(\frac{dER_t^i}{dP_t^i} \right)^{w_i} \right) \cdot 100\%.$$

Добуток $\prod_{i=1}^n \left(\frac{dER_t^i}{dP_t^i} \right)^{W_i}$ відображає сукупну зміну курсів іноземних валют до гривні, скориговану на різницю в темпах інфляції між Україною та її торговельними партнерами, з урахуванням їхніх вагових часток у торгівлі.

Базовим періодом ($t=0$) приймається грудень 1999 року, для якого значення індексу прирівнюється до одиниці. Подібно до номінального ефективного обмінного курсу, для обчислення REER можна використовувати співвідношення обмінних курсів та індексів споживчих цін у базовому періоді:

$$\frac{dER_t^i}{dER_0^i} \cdot \frac{dP_t^i}{dP_0^i},$$

яке згодом підноситься до степеня W_i . Однак, зміна вагових коефіцієнтів у часі може впливати на точність такого підходу, тому в дослідженні перевага надається розрахунку через послідовні зміни показників.

1.5. Валютний арбітраж

Валютний арбітраж — особливий вид валютних угод, основною метою проведення якого є отримання прибутку і уникнення можливих валютних втрат шляхом використання сприятливої кон'юнктури валютних ринків. [4] Головна стратегія арбітражера полягає в тому, щоб придбати валюту за нижчою ціною, а потім реалізувати її за вищою, отримуючи прибуток із різниці курсів.

Математичне моделювання арбітражу часто базується на поданні валютної системи у вигляді мережі обміну, де вузли графу відповідають валютам, а дуги графу — курсам обміну між ними. Якщо для двох валют X_i і X_j задано курс $X_i X_j$, то існує і зворотний курс $X_j X_i$, тобто ринок вважається двостороннім і без нульових курсів.

Система, у якій усі курси є взаємно оберненими, називається чистою мережею обміну і описується співвідношенням:

$$X_i X_j X_i = 1.$$

Мережа називається повною, якщо ж курси визначені для всіх пар валют.

Послідовність обмінів між валютами утворює ланцюг, а якщо обмін починається й закінчується тією самою валютою — цикл. Добуток курсів уздовж циклу відображає зміну вартості після послідовних операцій. Якщо цей добуток перевищує одиницю, виникає арбітражна можливість, тобто можливість отримати прибуток без ризику. Мережа вважається в рівновазі, якщо в ній неможливо здійснити арбітраж.

Твердження 1.1.

У повній чистій мережі валютного обміну значення будь-якого ланцюга транзакцій не змінюється, якщо в нього вводиться проміжна валюта. Інакше кажучи, загальний курс між початковою та кінцевою валютами залишається незмінним, незалежно від того, чи здійснюється обмін безпосередньо, чи через додаткові етапи конверсії.

Оскільки в чистій мережі кожна пара валют має взаємно обернені курси, то вставлення проміжної операції не вплине на добуток курсів усього ланцюга. Отже, система перебуває у рівновазі та не допускає можливості арбітражу.

Твердження 1.2.

У межах чистої мережі обміну виконується така тотожність:

$$X_1 X_1 X_2 \dots X_{p-1} X_p X_j \cdot X_j X_p X_{p-1} \dots X_2 X_1 X_1 = 1.$$

Як наслідок, для спеціального випадку $j = 1$ впливає, що проходження одного й того самого циклу обмінних операцій у двох протилежних напрямках приводить до взаємно обернених результатів. Іншими словами, якщо здійснення певного циклу в прямому напрямку несе втрати, то виконання цього циклу у зворотному напрямку, навпаки, забезпечує прибуток.

Теорема 1.1.

Нехай X_0 — це будь-яка валюта, яка була обрана у повній чистій мережі S . Мережа S перебуває у стані нерівноваги тоді й лише тоді, коли існує арбітражна можливість, тобто змога здійснити цикл, який починається в X_0 , проходить через дві інші валюти та закінчується в X_0 . Формально, умова нерівноваги має вигляд:

$$X_0 X_i X_j X_0 > 1.$$

Доведення: Припустимо, що в мережі наявний арбітраж, тобто виконується нерівність: $X_a X_b X_c X_d X_1 \dots X_p X_a > 1$.

Розглянемо цикл, який починається та завершується в X_0 :

$$X_0 X_a X_b X_c X_d X_1 \dots X_p X_a X_0.$$

Даний цикл перевищує одиницю. Спробуємо подати його у вигляді добутку коротших циклів.

Нехай $a \neq 0$,

$$X_0 X_a X_b X_c X_d X_1 \dots X_p X_a X_0 > 1;$$

і можемо переписати даний цикл у вигляді

$$X_0 X_a X_b X_0 \cdot X_0 X_c X_d X_1 \dots X_p X_a X_0.$$

a) $b \neq 0, c \neq 0$

$$X_0 X_a X_b X_0 \cdot X_0 X_c X_d X_1 \dots X_p X_a X_0.$$

b) $b = 0, c \neq 0$

$$X_0 X_a X_0 \cdot X_0 X_c X_d X_1 \dots X_p X_a X_0 = X_0 X_c X_d X_1 \dots X_p X_a X_0.$$

c) $b \neq 0, c = 0$

$$X_0 X_a X_b X_0 \cdot X_0 X_d X_1 \dots X_p X_a X_0.$$

Нехай $a = 0$, тоді цикл має вигляд:

$$X_0 X_b X_0 \cdot X_0 X_d X_1 \dots X_p X_0.$$

Отже, будь-який арбітражний цикл у повній чистій мережі обміну можна розкласти на сукупність трикутних циклів, причому значення кожного перетворення зберігається.

Розглянемо приклад графа довгого арбітражного циклу для семи валют, що починається у X_0 .

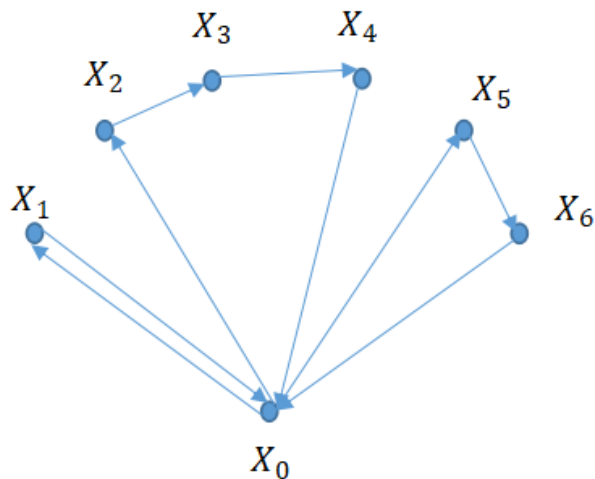


Рис. 1.1 Граф довгого арбітражного циклу для семи валют

Застосуємо процедуру розкладання, щоб подати арбітражний цикл у вигляді сукупності трикутних циклів.

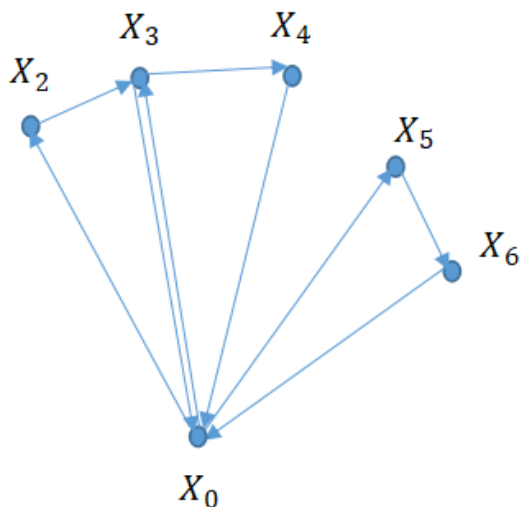


Рис. 1.2 Граф довгого арбітражного циклу для семи валют після розкладання

У повній чистій валютній мережі, що складається з n країн, для перевірки наявності арбітражу достатньо проаналізувати $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ циклів. Це число відповідає кількості трикутних циклів у системі. Як наслідок, будь-який арбітраж, який може існувати у мережі, обов'язково проявиться в одному з цих трикутних циклів.

Цілком логічно виникає запитання: чи можна переконатися в тому, що валютна мережа перебуває у стані рівноваги, розглянувши меншу кількість циклів, ніж $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Теорема 1.2.

Для повної чистої мережі обміну, що охоплює n валют, встановити відсутність арбітражу не вдасться, якщо перевірити менше, ніж $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

циклів. Саме ця кількість є мінімально необхідною для підтвердження рівноважного стану системи.

Доведення:

Розглянемо всі трикутні цикли, що проходять через фіксовану країну X_0 , та пронумеруємо їх у певній послідовності. Позначимо через y_i значення i -го трикутника, обчислене у певному фіксованому напрямі, де $i = 1, 2, \dots, \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Спочатку покажемо, що величини $\{y_i\}$ є незалежними, тобто для будь-якого набору додатних чисел $\{y_i^0\}$ існує відповідна валютна мережа, у якій кожен трикутник матиме задане значення.

Нехай X_0X_j будь-які фіксовані додатні числа, а y_1^0 — задане бажане значення першого трикутника. Визначимо курс між країнами X_{11} та X_{12} , що входять до першого трикутника:

$$X_{11}X_{12} = y_1^0 \cdot X_{11}X_0 \cdot X_0X_{12}.$$

Оскільки курс $X_{11}X_{12}$ входить лише до першого з розглянутих трикутників, наведена вище формула однозначно визначає його значення. Легко виконати перевірку того, що при такому означенні добуток курсів уздовж цього трикутника дорівнює саме заданому числу y_1^0 .

Отже, можемо зробити висновок, що для будь-якого набору додатних чисел $\{y_i\}$, де $i = 1, 2, \dots, \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ можна побудувати відповідну мережу обмінних курсів.

Далі ми покажемо, що, якщо розглядати лише деякий набір циклів $C_k, k = 1, 2, \dots, k_0, k_0 < \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ існує мережа, яка не перебуває в рівновазі, але має такі курси, що ці цикли набувають заданих значень. Це означає, що

лише за цими циклами неможливо встановити, чи перебуває система в рівновазі.

Відповідно до попереднього результату, кожен цикл можна розкласти на набір трикутних циклів із початковою точкою у X_0 , причому добуток цих трикутників збігається зі значенням початкового циклу, яке рівне 1.

Таким чином, задані цикли задають систему рівнянь вигляду

$$\prod_{i=1}^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} y_i^{a_{ik}} = 1, k = 1, 2, \dots, k_0,$$

де показники a_{ik} — це цілі числа. Оскільки $k_0 < \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ маємо більше невідомих y_i , ніж рівнянь. Це означає, що деякі з y_i можна вибирати вільно, і зокрема хоча б одне з них можна взяти не рівним одиниці. Інші значення підбираються так, щоб одночасно виконувати умови системи та залишатися додатними.

Той факт, що змінні y_i можна незалежно задавати, гарантує існування валютної мережі, яка реалізує знайдений набір значень. У такій мережі всі розглянуті цикли дійсно дорівнюватимуть одиниці. Однак присутність хоча б одного трикутного циклу з іншим значенням означає, що мережа все ж не знаходиться у стані рівноваги.

Отже, навіть якщо $C_k, k = 1, 2, \dots, k_0$ дорівнює одиниці, це не дає достатніх підстав вважати, що вся мережа є рівноважною.

Розділ 2. Застосування оптимізаційної моделі для виявлення арбітражних можливостей на валютному ринку

У цьому розділі розглянемо приклади виявлення арбітражної можливості на валютному ринку України.

Для реалізації пошуку арбітражної можливості необхідно здійснювати придбання певної кількості однієї грошової одиниці за рахунок іншої. В Україні обміняти валюту можна у відділеннях банків чи фінансових установах, які мають ліцензію НБУ, у валютно-обмінних пунктах, організованими банками або суб'єктами надання фінансових послуг. При купівлі чи продажу іноземних грошей у відповідних інституціях комісійні платежі не передбачені. Але основні витрати клієнта присутні неявно у вигляді спреду, тобто різниці між курсом купівлі та продажу. Це і є джерелом прибутку для банків та фінансових установ.

Отже, наша задача полягає встановити існування арбітражу у заданих умовах та максимізації прибутку. Нехай початковий капітал дорівнює 10000 гривень. Перейдемо до побудови математичної моделі задачі. Оскільки нам потрібно знайти оптимальний результат за наявності певних обмежень, доречно звернутися до методів лінійного програмування.

Позначимо x_{ij} — кількість валюти i , що конвертується у валюту j (вимірюється в одиницях валюти i). Нехай f_k — кінцева чиста сума валюти k , тобто це загальна сума, конвертована у валюту k , мінус загальна сума, конвертована з валюти k в інші валюти. Визначимо f_1 як чистий кінцевий прибуток у гривнях.

Побудуємо модель для п'яти різних валют: гривні, долара США, євро, польського злотого, чеської крони. Для подальших розрахунків створимо таблицю крос-курсів на основі даних ПриватБанку (24.10.2025). Рядки таблиці відповідають валюті, з якої здійснюється обмін, а стовпці — валюті призначення.

	Гривня	Долар США	Євро	Чеська крона	Злотий
Гривня	1	0,02	0,02	0,5	0,09
Долар США	41,39	1	0,85	20,89	3,61
Євро	47,90	1,14	1	24,18	4,18
Чеська крона	1,60	0,04	0,03	1	0,14
Злотий	10,70	0,25	0,22	5,40	1

Табл. 2.1. Крос-курси для обраних валют

Можемо записати кінцеві чисті суми, тобто прибуток, для кожної грошової одиниці:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= 41,39x_{21} + 47,9x_{31} + 1,6x_{41} + 10,7x_{51} - (x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15}) \\
 f_2 &= 0,02x_{12} + 1,14x_{32} + 0,04x_{42} + 0,25x_{52} - (x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25}) \\
 f_3 &= 0,02x_{13} + 0,85x_{23} + 0,03x_{43} + 0,22x_{53} - (x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35}) \\
 f_4 &= 0,5x_{14} + 20,89x_{24} + 24,18x_{34} + 5,4x_{54} - (x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45}) \\
 f_5 &= 0,5x_{15} + 20,89x_{25} + 24,18x_{35} + 5,4x_{45} - (x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54})
 \end{aligned}$$

Модель лінійного програмування валютного арбітражу матиме вигляд:

$$f_1 = 41,39x_{21} + 47,9x_{31} + 1,6x_{41} + 10,7x_{51} - (x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15}) \rightarrow \max$$

Обмеження:

$$\begin{aligned}
 41,39x_{21} + 47,9x_{31} + 1,6x_{41} + 10,7x_{51} - (x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15}) &\geq 0 \\
 0,02x_{12} + 1,14x_{32} + 0,04x_{42} + 0,25x_{52} - (x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25}) &= 0 \\
 0,02x_{13} + 0,85x_{23} + 0,03x_{43} + 0,22x_{53} - (x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35}) &= 0 \\
 0,5x_{14} + 20,89x_{24} + 24,18x_{34} + 5,4x_{54} - (x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45}) &= 0 \\
 0,5x_{15} + 20,89x_{25} + 24,18x_{35} + 5,4x_{45} - (x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54}) &= 0 \\
 x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 10000 \\
 x_{ij} &\geq 0, \text{ де } i = \overline{1,5}, j = \overline{1,5}.
 \end{aligned}$$

Для розв'язання заданої задачі скористаємося Microsoft Excel. Створимо таблицю, у якій задано кількість кожної валюти, яку потрібно конвертувати. У таблиці для кожної валюти додамо два підсумкові показники, «всього витрачено» та «всього отримано». Стовпчик «всього витрачено» відображає обсяг відповідної валюти, що був використаний у процесі обміну. Кожен елемент стовпця обчислюється як суму всіх елементів рядка, тобто всіх операцій, у яких дана валюта була вихідною. Рядок «всього отримано» показує

обсяг валюти, який формується після завершення всіх обмінних операцій. Значення елементів рядка розраховується як сума добутків кількості валюти, отриманої внаслідок обміну, на відповідний курс. Прибуток визначається як різниця між «всього витрачено» та «всього отримано», що дозволяє оцінити ефективність виконаного циклу обміну. Додатково перевіряємо виконання умови невід'ємності всіх значень у таблиці, щоб коректно виконувалися обрахунки в Excel.

Розв'яжемо задану задачу за допомогою надбудови Solver. Попередньо налаштуємо всі необхідні умови для належної роботи інструмента. Для розв'язання оберемо симплекс-метод. Даний підхід належить до фундаментальних методів лінійного програмування та характеризується високою ефективністю за наявності значної кількості змінних та лінійних обмежень. Метод ґрунтується на припущенні, що оптимальне значення цільової функції досягається в одній із вершин багатогранника допустимих рішень. Процес полягає у послідовному переході між суміжними вершинами цього багатогранника таким чином, щоб щоразу покращувати значення цільової функції. Пошук триває доти, доки не буде знайдено вершину, в якій подальше покращення є неможливим, що й відповідає оптимальному розв'язанню задачі.

У вікні Solver (рис. 2.1.) використовуються такі діапазони комірок моделі:

- D45 — значення цільової функції.
- D39:D43 — комірки, що містять значення змінних моделі, тобто обсяги конвертацій між валютами.
- $D45 \geq 0$ — обмеження, що забезпечує недопущення збитковості.
- $E33 = 10000$ — обмеження, яке задає фіксований початковий обсяг коштів у національній валюті.

- $E45:H45 = 0$ — система балансових рівнянь для валют, що забезпечує узгодженість грошових потоків і нульовий чистий залишок по кожній валюті після здійснення всіх обмінів.

Рис. 2.1. Параметри Solver для першого набору валют

Перейдемо до результатів, які були отримані за допомогою надбудови Solver.

	Гривня	Долар США	Євро	Чеська крона	Злотий	Всього витрачено
Гривня	0	0	0	0	0	0
Долар США	0	0	0	0	0	0
Євро	0	0	0	0	0	0
Чеська крона	0	0	0	0	0	0
Злотий	0	0	0	0	0	0
Всього отримано	0	0	0	0	0	
Прибуток	0	0	0	0	0	
Невід'ємність	Так	Так	Так	Так	Так	

Табл. 2.2. Результат оптимізації валютного обміну

Таким чином, за заданого набору валют та їхніх курсів, арбітражна можливість не виявлена. Це означає, що ПриватБанк у аналізований період мав узгоджене співвідношення між курсами різних валют. Тобто, банк проводить ефективну роботу по ціноутворенню та котируванню курсів. Для клієнтів, безумовно, це є позитивний факт, тому що користувачі можуть бути впевнені у прозорості та справедливості роботи валютного обміну.

Спробуємо підібрати наступний набір валют для виявлення арбітражної можливості. Використаємо такі валюти: гривню, польський злотий, чеську крону, турецьку ліру, єну. Турецьку ліру та єну неможливо обміняти в українських банках, але деякі обмінники працюють з даними валютами. Тому для побудови таблиці крос-курсів було використано усереднені значення курсів, сформовані на основі даних обмінників. Зазначені показники взято з ресурсу «Мінфін».

	Гривня	Злотий	Чеська корона	Турецька ліра	Єна
Гривня	1	0,09	0,5	0,88	3,64
Злотий	11,47	1	5,74	11,49	41,78
Чеська корона	2	0,17	1	2	7,28
Турецька ліра	1	0,09	0,50	1	3,64
Єна	0,27	0,02	0,14	0,27	1

Табл. 2.3. Крос-курси для наступних обраних валют

Запишемо кінцеві чисті суми, тобто прибуток для кожної грошової одиниці:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= 11,47x_{21} + 2x_{31} + x_{41} + 0,27x_{51} - (x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15}) \\
 f_2 &= 0,09x_{12} + 0,17x_{32} + 0,09x_{42} + 0,02x_{52} - (x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25}) \\
 f_3 &= 0,5x_{13} + 5,47x_{23} + 0,5x_{43} + 0,14x_{53} - (x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35}) \\
 f_4 &= 0,88x_{14} + 11,49x_{24} + 2x_{34} + 0,27x_{54} - (x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45}) \\
 f_5 &= 3,64x_{15} + 41,78x_{25} + 7,28x_{35} + 3,64x_{45} - (x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54})
 \end{aligned}$$

Модель лінійного програмування валютного арбітражу матиме вигляд:

$$f_1 = 11,47x_{21} + 2x_{31} + x_{41} + 0,27x_{51} - (x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15}) \rightarrow \max$$

Задамо обмеження:

$$\begin{aligned}
 11,47x_{21} + 2x_{31} + x_{41} + 0,27x_{51} - (x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15}) &\geq 0 \\
 0,09x_{12} + 0,17x_{32} + 0,09x_{42} + 0,02x_{52} - (x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25}) &= 0 \\
 0,5x_{13} + 5,47x_{23} + 0,5x_{43} + 0,14x_{53} - (x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35}) &= 0 \\
 0,88x_{14} + 11,49x_{24} + 2x_{34} + 0,27x_{54} - (x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45}) &= 0 \\
 3,64x_{15} + 41,78x_{25} + 7,28x_{35} + 3,64x_{45} - (x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54}) &= 0 \\
 x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 10000 \\
 x_{ij} &\geq 0, \text{ де } i = \overline{1,5}, j = \overline{1,5}.
 \end{aligned}$$

Аналогічно до попереднього прикладу, розв'яжемо дану задачу за допомогою надбудови Solver із застосуванням симплекс-методу.

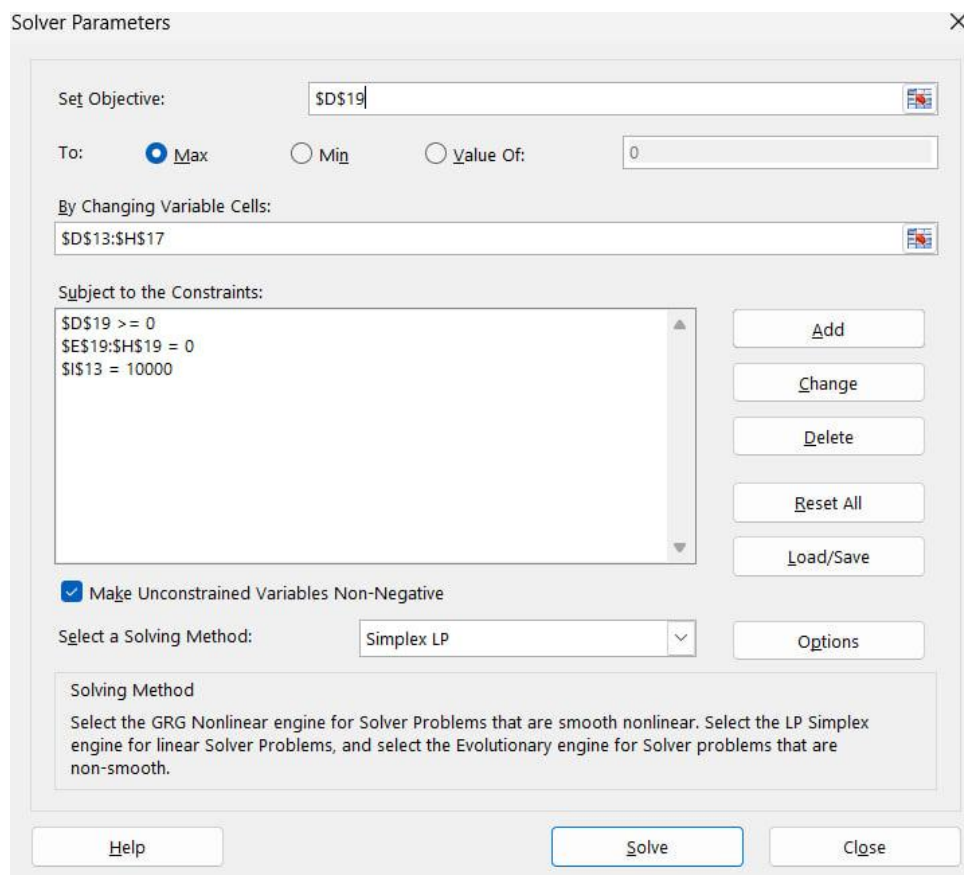


Рис. 2.2. Параметри Solver для другого набору валют

Оскільки структура моделі відповідає попередньому прикладу, під час налаштування використовувалася та сама послідовність дій, однак комірки з вхідними курсами, змінними та балансами були оновлені відповідно до нового набору валют. На основі заданої цільової функції та системи обмежень Solver

формує лінійну модель, після чого симплекс-методом визначає оптимальний розподіл обсягів конвертації. Застосування цього інструмента дає змогу оцінити, чи допускає нова система крос-курсів виникнення арбітражної можливості.

	Гривня	Злотий	Чеська крона	Турецька ліра	Єна	Всього витрачено
Гривня	0	10000	0	0	0	10000
Злотий	0	0	0	900	0	900
Чеська крона	0	0	0	0	0	0
Турецька ліра	10341	0	0	0	0	10341
Єна	0	0	0	0	0	0
Всього отримано	10341	900	0	10341	0	
Прибуток	341	0	0	0	0	
Невід'ємність	Так	Так	Так	Так	Так	

Табл. 2.4. Результат оптимізації валютного обміну

Отже, при заданому наборі валют присутня арбітражна можливість. Якщо ми вкладемо 10000 гривень, то можемо отримати прибуток у 341 гривню.

Побудуємо граф, де вершини представляють валюти, а ребра — можливі обміни між ними.

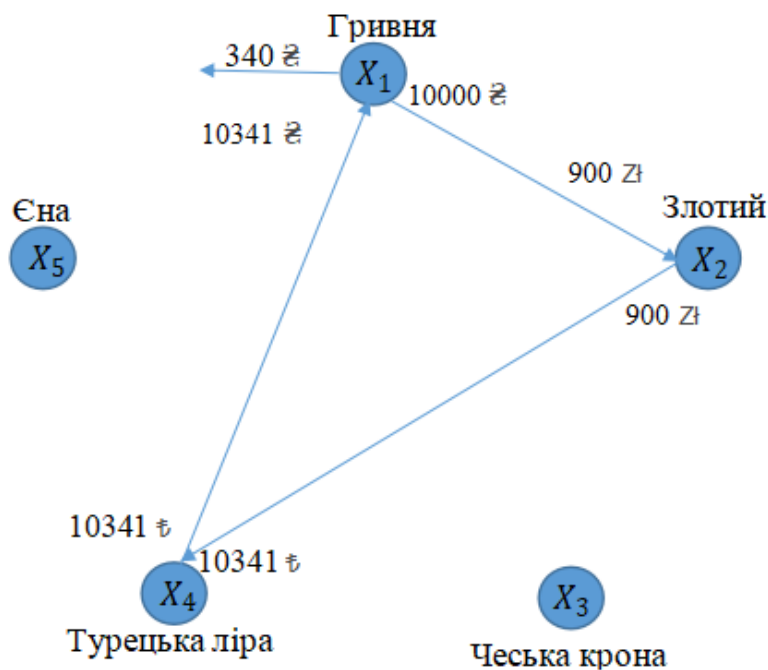


Рис. 2.1 Граф валютного арбітражу

На побудованому графі можемо простежити трикутний арбітражний цикл. Тому, ми можемо зробити висновок, що існує неточність котирувань. Ці розбіжності можуть виникати через несвоєчасне оновлення цін та різницю у попиті та пропозиції.

Отже, валютний арбітраж виникає у ситуаціях, де присутні неточності в ціноутворенні або розбіжності, які були спричинені різними ситуаціями. Валюти, які перебувають в активному обігу, можна легко обміняти в українських банках. Такі грошові одиниці зазвичай не мають проблем з вірним узгодженням, тому імовірність виникнення арбітражу є низькою.

Проте, серед менш популярних валют спостерігається потенційна можливість арбітражу, тому що можуть існувати певні затримки в коригуванні курсів, які зумовлені різницею у часі, обмеженістю ринку та нижчою реакцією на зовнішні зміни. За наявності таких факторів виникає імовірність короткострокових відхилень від рівноважного курсоутворення, а це, у свою чергу, відкриває можливості для арбітражних операцій.

Тобто, на українському валютному ринку все ж може виникати арбітражна можливість за певних умов. Найчастіше такі можливості пов'язані з тимчасовими ціновими розривами у курсах менш поширених валют.

Розділ 3. Теоретичні засади моделювання облігацій

3.1. Сутність та види облігацій

Облігація – цінний папір, що засвідчує внесення її власником грошових коштів і підтверджує зобов’язання відшкодувати йому номінальну вартість цього цінного паперу в передбачений в ньому строк з виплатою фіксованого проценту (якщо інше не передбачено умовами випуску). [5] Тобто емітент офіційно декларує, що потребує залучення коштів; фіксує період, протягом якого ці ресурси необхідні; зобов’язується повністю погасити борг у зазначений термін; встановлює винагороду за користування коштами.

Облігації можна класифікувати за емітентами:

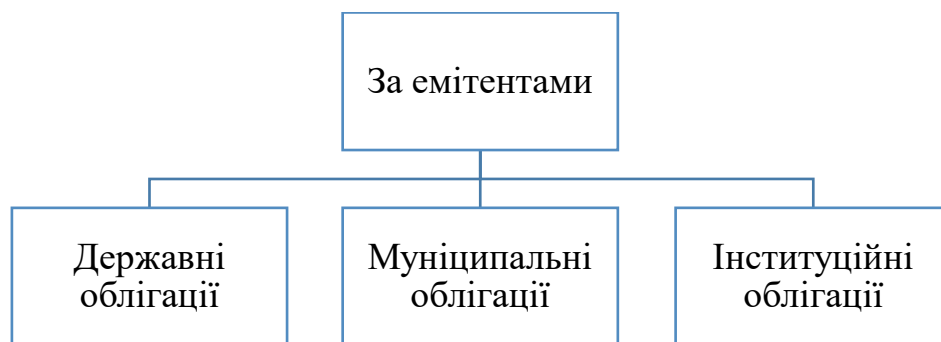


Рис. 3.1. Класифікація облігацій за емітентами

Облігації, які були випущені від імені держави або уповноважених державних органів і засвідчують залучення коштів до бюджету на визначених умовах називають державними облігаціями.

Муніципальні облігації використовуються для покриття місцевих потреб та фінансування регіональних проєктів. Ці облігації випускають органи місцевого самоврядування всіх рівнів.

Інституційні облігації емітуються юридичними особами, зазвичай вони займаються підприємницькою діяльністю. Їхнє розміщення має на меті залучення капіталу, потрібного для фінансування певних потреб бізнесу.

Строковими вважаються облігації, випущені на конкретно визначений строк, після настання якого емітент зобов’язується їх погасити. [6]

Також облігації можна поділяти і за тривалістю періоду до їх погашення:



Рис. 3.2. Класифікація облігацій за строком погашення

Довгостроковими вважаються облігації, які мають термін обігу понад п'ять років, середньострокові – від одного до п'яти років, короткострокові – до одного року. Емітент, випускаючи безстрокові облігації, не бере зобов'язання по їх погашенню.

3.2. Фінансові інструменти та грошові потоки

Для зручності розглядаємо модель фінансового ринку, яка має $T + 1$ моментів часу: $0, 1, \dots, T$ і не містить невизначеності.

Означення 3.1

Фінансовий ринок описується парою $(\pi; C)$, де $\pi \in \mathbb{R}^N$ – вектор поточних цін N фінансових інструментів; C — матриця розмірності $N \times T$, рядки якої визначають майбутні платежі цих інструментів.

Інвестор сплачуючи ціну π_i у момент часу 0 отримує наперед визначений потік платежів $(c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{iT})$ у моменти $1, \dots, T$. Від'ємні значення цих платежів означають необхідні виплати, а додатні — надходження.

Означення 3.2

Портфель цінних паперів задається вектором $\theta \in \mathbb{R}^N$. Структура грошових потоків визначається матрицею C , тому потік платежів, створений

портфелем θ , дорівнює $C^T \theta \in \mathbb{R}^T$. Ціна портфеля в момент часу 0 становить $\pi \cdot \theta$.

Якщо $\theta > 0$, то це означає довгу позицію (закупівля та утримання цінних паперів). Відповідно, $\theta < 0$ – коротка позиція (продати цінні папери, а потім викупити).

Означення 3.3

Портфель θ називається арбітражною можливістю, якщо виконується одна з умов:

- 1) $\pi \cdot \theta = 0$ та $C^T \theta > 0$;
- 2) $\pi \cdot \theta < 0$ та $C^T \theta \geq 0$.

Тобто портфель має нульову або від’ємну початкову вартість та генерує невід’ємні.

Еквівалентно умову арбітражу можна записати як $(-\pi \cdot \theta; C^T \theta) > 0$.

Отже, ринок цінних паперів є вільним від арбітражу, якщо він не містить арбітражних можливостей.

3.3. Коректність ціноутворення та дисконтні множники

Лема 3.1 (Лема Стімке)

Нехай A — матриця розміру $n \times m$. Тоді точно одне з наступних двох тверджень є істинним:

- I. Існує вектор $x \in \mathbb{R}_{++}^m$ такий, що $Ax = 0$.
- II. Існує вектор $y \in \mathbb{R}^n$ такий, що $y^T A > 0$. [7]

Теорема 3.1

Фінансовий ринок $(\pi; C)$ є вільним від арбітражу тоді й лише тоді, коли існує строго додатний вектор $d = (d_1, d_2, \dots, d_T) \in \mathbb{R}_{++}^T$ для якого $\pi = Cd$.

Доведення:

Розглянемо матрицю A

$$A = \begin{pmatrix} -\pi_1 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1T} \\ -\pi_2 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2T} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\pi_N & c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{NT} \end{pmatrix}$$

Нехай справджується перша альтернатива леми Стімке, тоді можемо ввести величини:

$$d_i = \frac{x_i}{x_0}, i = 1, \dots, T,$$

які є додатними. Із рівняння $Ax = 0$ безпосередньо випливає співвідношення $\pi = Cd$. Отже, в цьому випадку існує вектор позитивних дисконтних множників, що узгоджує всі ціни, і ринок не містить арбітражу.

Якщо справджується друга альтернатива леми Стімке, то у цьому випадку вектор u з властивістю $u^T A > 0$ задає комбінацію цінних паперів, яка не потребує початкових витрат і забезпечує невід'ємні майбутні платежі, причому хоча б один з них строго додатний. Це означає можливість арбітражної операції.

Таким чином, наявність або відсутність арбітражу повністю відповідає двом альтернативам леми Стімке, що й доводить твердження теореми.

Означення 3.4

Ринок цінних паперів називають повним, якщо для будь-якого заданого потоку майбутніх платежів $y \in \mathbb{R}^T$ можна знайти такий портфель $\theta \in \mathbb{R}^N$ що його грошові виплати точно відтворюють цей потік, тобто виконано рівність:

$$C^T \theta = y.$$

Це означає, що будь-який бажаний потік платежів може бути згенерований відповідним вибором портфеля.

Теорема 3.2

Нехай ринок $(\pi; C)$ є безарбітражним. Тоді ринок є повним тоді й лише тоді, коли існує єдиний вектор дисконтних множників.

Доведення:

Оскільки ринок вважається безарбітражним, то існує деякий невід'ємний вектор дисконтних множників $d > 0$ для якого виконується співвідношення $\pi = Cd$. Якщо модель є повною, то простір $\mathbb{R}^T$ породжується стовпцями матриці C^T , тобто — рядками матриці C , яких є N . Інакше кажучи, якщо серед рядків матриці C можна виділити T незалежних один від одного, то ранг матриці дорівнює T . А оскільки ранг визначається однаково як за рядками, так і за стовпцями, то й серед стовпців міститься T незалежних. Це означає, що жоден зі стовпців не можна подати як комбінацію інших — усі вони незалежні. Тому зазначені стовпці утворюють базис деякого T -вимірного лінійного підпростору простору $\mathbb{R}^N$ (умова повноти ринку передбачає $N \geq T$). Відповідно, кожний вектор цього підпростору може бути поданий як лінійна комбінація цих базисних стовпців. Рівняння $Cx = u$ має один розв'язок. А у випадку, коли $u = \pi$, ми знаємо, що такий є, через відсутність арбітражу.

Припустимо, що ринок не є повним. За такої умови стовпці матриці C не можуть бути лінійно незалежними. Отже, існує ненульовий вектор $\tilde{d}$, для якого виконується $C\tilde{d} = 0$. Оскільки $d > 0$, можна підібрати таке мале число $\varepsilon > 0$, щоб $d + \varepsilon\tilde{d}$ вектор також залишався додатним. Таким чином формується новий вектор дисконтів, відмінний від початкового d .

3.4. Облігація з нульовим купоном та структура відсоткових ставок

Облігація з нульовим купоном передбачає виплату один раз, у момент її реалізації, після чого облігація припиняє своє існування. [8]

Вважатимемо, що модель $(\pi; C)$ описує повний ринок і не допускає арбітражних можливостей. Позначимо через $d^T = (d_1, d_2, \dots, d_T)$ вектор дисконтних множників, який за відсутності арбітражу визначається однозначно. Для того щоб ринок був повним, кількість цінних паперів має бути не меншою за T , тому матриця грошових потоків C повинна містити щонайменше T рядків. Якщо ці рядки є лінійно незалежними, то додаткові фінансові інструменти не розширюють можливостей формування нових грошових потоків. Отже, ми можемо вважати матрицю C оборотною матрицею розміру $T \times T$.

Означення 3.4

Грошовий потік облігації з нульовим купоном, яка погашається в момент часу t , описується одиничним вектором $e_t \in \mathbb{R}^T$.

Твердження 3.1

Вартість облігації з нульовим купоном, погашення якої відбувається в момент часу t , дорівнює дисконтному множнику d_t .

Доведення:

Розглянемо портфель θ_t , для якого виконується рівність $C^T \theta_t = e_t$.

Вектор початкових цін задовольняє співвідношення $\pi = Cd$. Тоді початкова вартість цього портфеля дорівнює

$$\pi^T \theta_t = (Cd)^T \theta_t = C^T d^T \theta_t = d^T e_t.$$

Скалярний добуток $d^T e_t$ вибирає t -ту компоненту вектора d , тобто

$$d^T e_t = d_t.$$

З дисконтних множників ми можемо визначити різні типи процентних ставок, які є важливими для вивчення ринків облігацій.

Коротка ставка відіграє центральну роль у формуванні структури відсоткових ставок, адже її поточне значення використовується для опису та прогнозування подальшої динаміки процентних ставок на найближчому часовому горизонті.

Означення 3.5

Коротка відсоткова ставка визначається співвідношенням на момент часу 0 як:

$$r_0 = \frac{1}{d_1} - 1.$$

Означення 3.6

Одноперіодна форвардна ставка відображає дохідність, яку ринок закладає для інтервалу між моментами t та $t + 1$, за умови що вона визначається на момент часу 0. Вона задається співвідношенням

$$f(0, t) = \frac{d_t}{d_{t+1}} - 1,$$

де $d_0 = 1$.

Ідею короткої процентної ставки найпростіше пояснити через те, як працює однорічна безкупонна облігація. Нехай її поточна ціна позначається як d_1 . Якщо інвестор придбає $\frac{1}{d_1}$ таких облігацій, загальні витрати становитимуть рівно 1 грошову одиницю, адже $\frac{1}{d_1} \cdot d_1 = 1$. Через один період кожна облігація приносить виплату 1, тому загальна сума отриманих коштів дорівнюватиме $\frac{1}{d_1} = 1 + r_0$.

Щоб пояснити походження форвардної ставки, розглянемо стратегію, яку можна виконати в момент часу 0. Інвестор:

- 1) Продає одну облігацію з нульовим купоном із погашенням у момент часу t ;
- 2) На отримані кошти купує $\frac{d_t}{d_{t+1}}$ облігацій з нульовим купоном із погашенням у момент $t + 1$.

Сума, отримана від продажу, точно відповідає сумі, використаній для купівлі, і тому грошовий потік від цієї стратегії в момент часу 0 дорівнює 0. Якщо утримувати ці позиції до погашення, то в момент t виникає виплата -1 , а в момент $t + 1$ інвестор отримує $\frac{d_t}{d_{t+1}} = 1 + f(0, t)$.

Означення 3.7

Дохідність (або дохідність до погашення) у момент часу 0 облігацій з нульовим купоном з терміном погашення t визначається як

$$y(0, t) = \left(\frac{1}{d_t} \right)^{\frac{1}{t}} - 1,$$

де d_t — дисконтний множник відповідного терміну. Це еквівалентно твердженню, що

$$d_t (1 + y(0, t))^t = 1.$$

Таким чином, дохідність можна інтерпретувати як середню ефективну ставку за весь період до погашення облігації з нульовим купоном. Її також можна подати як геометричне середнє одноперіодних форвардних ставок:

$$1 + y(0, t) = \left((1 + f(0, 0)) \dots (1 + f(0, t - 1)) \right)^{\frac{1}{t}}.$$

Структура відсоткових ставок на момент часу 0 описується послідовністю дохідностей до погашення для різних строків. Зазвичай її

подають у вигляді вектора $(y(0,1), \dots, y(0,T))$, який і називають кривою дохідності.

3.5 Облігації з купонами та їх грошові потоки

На практиці зазвичай представленні в обігу облігації з купонами, тобто окрім повернення номіналу передбачають регулярні виплати платежів у вигляді купонів. На світових фінансових ринках найчастіше зустрічаються такі різновиди купонних облігацій: ануїтетна облігація, облігації з серійним погашенням та облігації з погашенням номіналу в кінці строку.

Нехай F позначає номінальну вартість облігації. Грошові виплати за нею здійснюються, починаючи з моменту часу 1, і продовжуються до дати погашення, яку позначимо через τ . Нехай c_t — величина платежу в період t . Ми розглядаємо динаміку основної суми боргу облігації з купонною ставкою R та платежами $c_1, \dots, c_\tau$, припускаючи, що вона задовольняє таке рекурентне рівняння:

$$p_t = (1 + R)p_{t-1} - c_t, t = 1, \dots, \tau,$$

де $p_0 = F$, а в момент повного погашення виконується $p_\tau = 0$.

Величину p_t доцільно інтерпретувати як залишок основної суми після здійснення платежу в період t . Зменшення боргу у періоді t визначається як

$$\delta_t = p_{t-1} - p_t,$$

а відсоткова частина платежу дорівнює

$$i_t = Rp_{t-1} = c_t - \delta_t.$$

Означення 3.8

Ануїтетною облигацією з терміном погашення τ , номінальною вартістю F та купонною ставкою R називають облигацію, для якої всі проміжні виплати c_t є однаковими протягом періодів $t = 1, \dots, \tau$. Залишок основної суми при цьому змінюється відповідно до рекурентного рівняння:

$$p_t = (1 + R)p_{t-1} - c_t.$$

Запишемо залишок основної суми боргу в момент часу t як

$$p_t = (1 + R)^t F - c \sum_{j=0}^{t-1} (1 + R)^j, \quad t = 1, \dots, \tau.$$

Отже, щоб задовольнити граничну умову $p_\tau = 0$, ми повинні мати

$$F - c \sum_{j=0}^{\tau-1} (1 + R)^{j-\tau} = 0,$$

отже, використовуючи добре відому формулу $\sum_{i=0}^{n-1} x_i = \frac{x^n - 1}{x - 1}$, отримуємо

$$c = F \left(\sum_{j=0}^{\tau-1} (1 + R)^{j-\tau} \right)^{-1} = F \frac{R(1 + R)^\tau}{(1 + R)^\tau - 1} = F \frac{R}{1 - (1 + R)^{-\tau}}.$$

Оскільки розмір періодичного платежу прямо пропорційний номіналу, для розрахунків можна брати $F = 1$.

$$\alpha_{n|R} = \frac{(1 + R)^n - 1}{R(1 + R)^n}.$$

Можна встановити, яка частина припадає на відсоткові нарахування, а яка спрямовується на погашення основної суми боргу. Спочатку виведемо вираз для залишку основної суми боргу:

$$p_t = (1 + R)^t F - \frac{F}{\alpha_{\tau|R}} \sum_{j=0}^{t-1} (1 + R)^j = \frac{F}{\alpha_{\tau|R}} \left((1 + R)^t \alpha_{\tau|R} - \frac{(1 + R)^t - 1}{R} \right) =$$

$$= \frac{F}{\alpha_{\tau|R}} \left(\frac{(1+R)^\tau - 1}{R(1+R)^{\tau-t}} - \frac{(1+R)^\tau - (1+R)^{\tau-t}}{R(1+R)^{\tau-t}} \right) = \frac{F}{\alpha_{\tau|R}} \alpha_{\tau-t|R}.$$

Це дає нам виплату відсотків та негайне відрахування для ануїтету:

$$i_t = R \frac{F}{\alpha_{\tau|R}} \alpha_{\tau-t+1|R}$$

$$\delta_t = \frac{F}{\alpha_{\tau|R}} (1 - R \alpha_{\tau-t+1|R}).$$

У випадку ануїтетної облигації розмір кожного періодичного платежу визначається непрямо — його значення впливає з умов рівномірності виплат протягом усього строку. Натомість для облигації з погашенням номіналу в кінці строку та облигації з серійним погашенням правила формування грошових потоків задаються безпосередньо й однозначно.

Означення 3.9

Облигація з погашенням номіналу в кінці строку τ , номінальною вартістю F та купонною ставкою R характеризується тим, що $i_t = c_t$ для $t = 1, \dots, \tau - 1$, тобто $c_t = RF$. Оскільки основна сума боргу не амортизується до останнього періоду, підсумковий платіж має вигляд $c_\tau = F + RF = (1+R)F$.

Означення 3.10

Облигація з серійним погашенням зі строком до погашення τ номінальною вартістю F та купонною ставкою R визначається тим, що величина δ_t є сталою для всіх $t = 1, \dots, \tau$.

Оскільки за умовою облигації з серійним погашенням в кожному періоді погашається однакова частина основної суми боргу, амортизаційний платіж δ_t є сталим протягом усього строку. Наприкінці періоду τ непогашений залишок основної суми має дорівнювати нулю, тобто $p_\tau = 0$.

Це означає, що загальний номінал F рівномірно розподіляється між усіма τ періодами, а тому величина погашення основного боргу в кожному з них становить:

$$\delta_t = \frac{F}{\tau}, t = 1, \dots, \tau.$$

Після визначення рівномірної амортизації легко бачити, як формується відсоткова частина платежу. Відсотки нараховуються на залишок основної суми боргу на початок відповідного періоду, тому відсотковий платіж i_t дорівнює:

$$i_t = Rp_{t-1}.$$

Тому відсоткова частина платежу в міру проходження періодів стає меншою. Це пов'язано з тим, що з кожним кроком зменшується сума основного боргу, на яку нараховуються відсотки, адже вона погашається рівними частинами.

Розділ 4. Застосування оптимізаційної моделі для формування портфеля облігацій

У цьому розділі розглянемо приклад застосування оптимізаційних методів до формування та аналізу портфеля облігацій на основі реальних ринкових даних.

Облігації внутрішньої державної позики України вважаються одним із найбільш надійних інструментів для інвестування. Це пов'язано з тим, що їхнім емітентом є держава, яка несе повну відповідальність за виконання зобов'язань та має значно вищий рівень кредитоспроможності порівняно з більшістю приватних компаній чи фінансових установ.

Окрему категорію серед державних облігацій становлять військові облігації внутрішньої державної позики. Це інвестиційний інструмент підтримки державного бюджету, доступний для громадян, бізнесу та іноземних інвесторів. [9] Надходження від військових облігацій держава використовує для покриття витрат, пов'язаних із забезпеченням обороноздатності та виконанням поточних бюджетних зобов'язань у період воєнного стану. Тому в межах даного дослідження розглядатимуться саме ОВДП, зокрема й військові облігації.

У розміщенні та обміні облігацій беруть участь різні категорії фінансових посередників. Зокрема:

- учасники обміну облігацій — первинні дилери (депозитарні установи), яким надається право участі в аукціонах з обміну облігацій, відповідно до укладених з емітентом договорів про співпрацю;
- учасники розміщення облігацій — первинні дилери (депозитарні установи та їх депоненти, клієнти та/або клієнти клієнтів номінального утримувача), яким надається право участі в розміщенні облігацій відповідно до укладених з емітентом договорів про співпрацю в частині розвитку

внутрішнього ринку державних цінних паперів (далі - договір про співпрацю).
[10]

Фізична особа не має можливості придбати ОВДП безпосередньо у Міністерства фінансів. Купівля можлива лише через первинного дилера або іншу депозитарну установу, яка має право участі у відповідних аукціонах та виконує функції посередника між інвестором і державою.

В Україні випускаються облігації внутрішньої державної позики, номіновані у кількох валютах. Основною та найбільш доступною для інвесторів є гривня, оскільки такі облігації не потребують купівлі іноземної валюти та характеризуються ширшою пропозицією на ринку. Разом з тим, законодавством передбачена можливість емісії державних облігацій, номінованих у доларах США та євро.

Національним банком України визначено особливості придбання ОВДП, номінованих в іноземній валюті:

- придбати ОВДП, номіновані в іноземній валюті можна виключно у валюті їх номінальної вартості;
- виплата доходів у вигляді відсотків (купону) та погашення здійснюється у валюті їх номінальної вартості. [11]

У практичній частині визначимо мінімальний обсяг початкових інвестицій у державні облігації для покриття фінансових потреб інвестора у 2025–2028 роках. Для подальших розрахунків приймемо, що інвестору необхідно отримати визначені грошові суми у 2025–2028 роках. Зокрема, у 2025 році потреба становить 10 тисяч гривень, у 2026 році — 41 тисячу гривень, у 2027 році — 38 тисяч гривень, а у 2028 році — 84 тисячі гривень.

Для подальших розрахунків скористаємося реальними ринковими даними. Використаємо перелік гривневих ОВДП та військових облігацій, що були доступні для купівлі клієнтами ПриватБанку 4 листопада 2025 року. Кожній облігації для зручності присвоєно окремий порядковий номер.

№	Код ISIN	Дата випуску	Дата погашення
1	UA4000230809	09.04.2024	18.03.2026
2	UA4000231559	11.06.2024	10.06.2026
3	UA4000234215	14.01.2025	24.06.2026
4	UA4000235378	29.04.2025	19.08.2026
5	UA4000235865	10.06.2025	16.09.2026
6	UA4000236624	05.08.2025	14.10.2026
7	UA4000237416	07.10.2025	18.11.2026
8	UA4000234413	11.02.2025	13.01.2027
9	UA4000236228	01.07.2025	10.03.2027
10	UA4000207518	28.01.2020	26.05.2027
11	UA4000234223	14.01.2025	09.06.2027
12	UA4000237424	07.10.2025	23.06.2027
13	UA4000230270	13.02.2024	07.07.2027
14	UA4000231195	07.05.2024	25.08.2027
15	UA4000233712	03.12.2024	03.11.2027
16	UA4000231625	18.06.2024	09.02.2028
17	UA4000235196	15.04.2025	12.04.2028
18	UA4000236475	22.07.2025	27.09.2028
19	UA4000237556	14.10.2025	15.11.2028
20	UA4000235782	03.06.2025	29.11.2028

Табл. 4.1. Перелік облігаційних випусків, використаних у моделюванні

Ринкова ціна облігації може відрізнятися від її номінальної вартості, оскільки на неї впливає низка факторів: облікова ставка НБУ, попит і пропозиція на вторинному ринку, результати аукціонів Міністерства фінансів,

ситуація на глобальних фінансових ринках, а також ціни та дохідності інших державних фінансових інструментів.

Також на формування ринкової ціни облігації впливає те, що продавець повинен отримати належний дохід за період її утримання. Тому покупець компенсує продавцю вже нараховану частину майбутньої купонної виплати, внаслідок чого ринкова ціна між датами купонних виплат зростає на суму нарахованого купонного доходу. Після здійснення купонної виплати ринкова вартість облігації зазвичай знижується до величини, близької до її номіналу.

Отже, зростання ринкової дохідності приводить до падіння ціни облігації, а її зниження — до підвищення вартості.

Перейдемо до розгляду фактичних ринкових цін облігацій та річних купонних ставок:

№	Купонна ставка, %	Ціна за шт. в тис. грн.
1	17,00	1,03
2	15,47	1,07
3	15,01	1,05
4	16,33	1,04
5	16,35	1,02
6	16,35	1,01
7	16,35	1,08
8	16,61	1,05
9	17,10	1,03
10	9,79	0,96
11	16,20	1,06
12	17,10	1,06
13	18,50	1,09
14	17,5	1,04
15	16,46	1,08

Табл. 4.2. Ціни облігацій та річні купонні ставки

№	Купонна ставка, %	Ціна за шт. в тис. грн.
16	16,80	1,03
17	17,80	1,02
18	17,77	1,02
19	17,80	1,08
20	17,80	1,08

Продовження табл. 4.2.

Усі облігації, які використані у дослідженні, є купонними та передбачають виплати раз на 182 дні, тобто двічі на рік. Номінальна вартість кожної облігації становить 1000 гривень, що є типовим для більшості гривневих ОВДП. Повернення номіналу облігації та останнього купону відбуваються у дату погашення, яка визначена емітентом. Такий графік виплат є стандартним для більшості ОВДП.

Розмір купону для представлених облігацій можна знайти за формулою:

$$K_j = \frac{F \cdot R_j}{2},$$

де F — номінал;

R_j — річна купонна ставка облігації j -го виду;

K_j — купонна виплата за облігацією j -го виду.

У подальшому для побудови оптимізаційної моделі використовуються грошові потоки на одну облігацію кожного випуску та подані в тисячах гривень.

№	2025	2026	2027	2028
1	0	1,09	0	0
2	0,08	1,08	0	0
3	0,08	1,08	0	0

Табл. 4.3. Грошові потоки на одну облігацію

№	2025	2026	2027	2028
4	0	1,16	0	0
5	0	1,16	0	0
6	0	1,16	0	0
7	0,08	1,16	0	0
8	0	0,17	1,08	0
9	0	0,17	1,09	0
10	0,05	0,10	1,05	0
11	0,08	0,16	1,08	0
12	0,09	0,17	1,09	0
13	0	0,19	1,19	0
14	0	0,18	1,18	0
15	0,08	0,16	1,16	0
16	0	0,17	0,17	1,08
17	0	0,18	0,18	1,09
18	0	0,18	0,18	1,18
19	0,09	0,18	0,18	1,18
20	0,09	0,18	0,18	1,18

Продовження табл. 4.3.

У певні роки сума купонних виплат та погашень може виявитися більшою за необхідні витрати, що приводить до формування тимчасово вільних коштів. Надлишкові кошти доцільно реінвестувати, щоб збільшити загальну ефективність інвестиційного портфеля.

У межах цього дослідження тимчасово вільні кошти планується спрямовувати на банківський депозит. Для реінвестування обрано депозит «Стандарт» у ПриватБанку строком на 12 місяців. За умовами без дострокового закриття річна процентна ставка становить 13%.

Отже, маючи визначені грошові потоки від облігацій та можливість реінвестування тимчасово вільних коштів на депозиті, перейдемо до побудови математичної моделі формування портфеля, яка дозволить мінімізувати обсяг

початкових інвестицій за умови покриття фінансових потреб інвестора у 2025–2028 роках.

Нехай x_j — кількість облігацій j -го виду, які необхідно придбати для забезпечення фінансових потреб. У подальшому вважатимемо, що всі грошові величини подано в тисячах гривень, тому номінальна вартість однієї облігації становить $F = 1$. Купонну виплату для облігації j – го виду позначимо через K_j . Грошові надходження від цієї облігації у відповідні роки задаються співвідношенням:

$$c_{jt} = \begin{cases} K_j, & t < \tau_j, \\ F + K_j = 1 + K_j, & t = \tau_j, \\ 0, & t > \tau_j, \end{cases}$$

де $\tau_j \in \{2025, 2026, 2027, 2028\}$ — рік погашення облігації. Поточна ринкова ціна однієї облігації j -го виду позначається через π_j . S_t — надлишок коштів у кінці року t .

Тоді поставлена задача має такий вигляд:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{j=1}^{20} \pi_j x_j \rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^{20} c_{j2025} x_j &\geq 10, \\ \sum_{j=1}^{20} c_{j2026} x_j + 1,13 S_{2025} &\geq 41, \\ \sum_{j=1}^{20} c_{j2027} x_j + 1,13 S_{2026} &\geq 38, \\ \sum_{j=1}^{20} c_{j2028} x_j + 1,13 S_{2027} &\geq 84. \end{aligned}$$

Побудована модель належить до класу задач цілочислового лінійного програмування. Це зумовлено тим, що цільова функція та система обмежень мають лінійну структуру відносно змінних. Оскільки у фінансовій практиці придбання дробових частин облігацій є неможливим, значення цих змінних повинні бути цілими невід’ємними числами. Саме вимога цілочисельності поряд із лінійністю моделі визначає її належність до задач цілочисельного лінійного програмування.

Для розв’язання задачі скористаємося Microsoft Excel. Створимо таблицю для перевірки та коректного задання обмежень, яка є допоміжним інструментом у побудові моделі, оскільки без її використання формування обмежень суттєво ускладнюється.

Рік	Кошти від облігацій	Реінвестовані кошти	Потреба в коштах	Надлишкові кошти
2025	10,07	0	10	0,07
2026	41,14	0,08	41	0,23
2027	38,26	0,25	38	0,51
2028	84,82	0,58	84	1,39

Табл. 4.4. Динаміка грошових потоків портфеля

У таблиці наведено розрахунок грошових потоків портфеля за роками, що використовується для перевірки коректності задання обмежень у моделі. Кошти від облігацій визначаються як добуток кількості придбаних облігацій на їхній грошовий потік у відповідному році. Реінвестовані кошти відсутні у першому році, а у наступні роки це значення відображає надлишкові кошти попереднього року, на які нараховано 13% річних відповідно до депозитної ставки.

Відповідно до математичної постановки задачі запишемо обмеження, яким має відповідати оптимальний розв’язок, представивши їх у вигляді таблиці.

Обмеження		
10,07	$\geq$	10,00
41,23	$\geq$	41,00
38,51	$\geq$	38,00
85,39	$\geq$	84,00

Табл. 4.5. Обмеження оптимізаційної моделі

Для отримання оптимального розв'язку скористаємося надбудовою Solver.

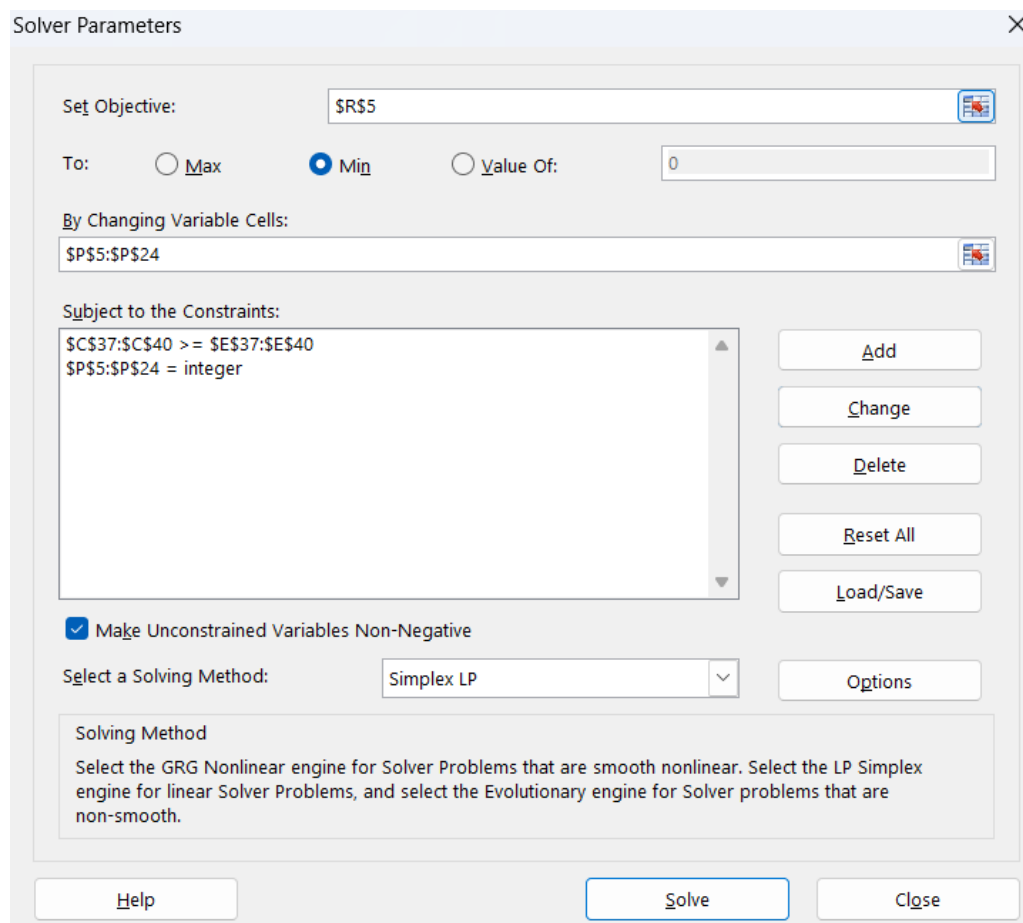


Рис. 4.1. Налаштування параметрів оптимізації в надбудові Solver

Налаштування Solver передбачає використання таких діапазонів комірок моделі:

- R5 — значення цільової функції, тобто значення цільової функції, що відображає сумарну вартість інвестицій у тисячах гривень.
- P5:P24 — комірки, що відповідають змінним моделі і визначають кількість облігацій у портфелі.
- $C37:C40 \geq E37:E40$ — обмеження моделі.
- $P5:P24 = \text{integer}$ — обмеження, що гарантує цілочисельність змінних, тобто кількість облігацій задається лише цілими значеннями.

У результаті розв’язання оптимізаційної задачі встановлено, що для забезпечення повного покриття фінансових потреб інвестора оптимальним є портфель, який включає 21 облігацію 7-го виду, 17 — 12-го виду та 72 — 20-го виду. Загальна вартість такого портфеля становить 125 тисяч гривень, що відповідає мінімальному значенню початкових інвестицій за умов моделі.

Отриманий результат підтверджує ефективність застосування оптимізаційних методів для прийняття інвестиційних рішень. Модель визначає структуру портфеля так, щоб за мінімальних початкових вкладень жодного року не виник дефіцит коштів, а надлишкові суми ефективно працювали через реінвестування. Завдяки поєднанню облігацій із різними строками погашення, сформований портфель гарантує стабільність надходжень та їхню достатність для покриття запланованих фінансових потреб інвестора. Таким чином, результати демонструють практичну цінність оптимізаційного підходу у формуванні облігаційних портфелів та підтверджують можливість його використання у реальних інвестиційних задачах.

Висновки

У представленій роботі розглянуто застосування оптимізаційних методів у фінансах на прикладі аналізу валютного ринку та задачі формування інвестиційного портфеля облігацій. Отримані результати свідчать про успішне використання застосованих підходів.

На основі розглянутих положень щодо функціонування валютного ринку та валютного арбітражу було побудовано лінійну оптимізаційну модель для виявлення арбітражних можливостей. Аналіз валютних курсів, опублікованих ПриватБанком, показав відсутність арбітражу для основних валют, що свідчить про їх узгодженість та відносну ефективність відповідного сегмента ринку. Водночас валюти, менш доступні на українському ринку, мають більшу схильність до виникнення короткострокових курсових неузгодженостей. Це може бути пов'язано з несвоєчасним оновленням або менш точним котируванням валютних курсів.

Також було розглянуто основні підходи до моделювання облігацій, їх грошових потоків і механізмів ціноутворення. Для формування інвестиційного портфеля було розглянуто гривневі облігації внутрішньої державної позики, доступні для придбання в ПриватБанку. Вільні кошти, що виникали в окремі роки, реінвестувалися у гривневий депозит для фізичних осіб, запропонований цим банком. Із застосуванням методів цілочисельного лінійного програмування було визначено мінімальний початковий обсяг інвестицій за заданих фінансових потреб, а також кількість відповідних облігацій, необхідних для формування портфеля.

Отримані результати можуть бути використані для аналізу ефективності валютного ринку, виявлення потенційних арбітражних можливостей, а також для прийняття обґрунтованих інвестиційних рішень при формуванні портфеля облігацій.

Список використаних джерел

1. Міжнародні розрахунки та валютні операції : навч. посіб. / Б. С. Івасів, Л. М. Прийдун, В. Я. Рудан. — Тернопіль : Вектор, 2013. — 572 с.
2. Шкварчук Л. О. Фінансовий ринок : навч. посіб. / Л. О. Шкварчук. — К. : Знання, 2013. — 382 с.
3. Методологія розрахунку реального ефективного валютного курсу (REER)/Національний банк України. — URL: https://bank.gov.ua/admin_uploads/article/REER_methodology.pdf
4. Валютний арбітраж [Електронний ресурс]. — URL: <https://googlegroups.com/group/mev2010-2014/attach/100ecef6130412f2/Tema-5-arb-PDF.pdf?part=0.1>
5. Про цінні папери і фондову біржу : Закон України від 18 червня 1991 р. № 1201-XII [Електронний ресурс]. — URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1201-12>
6. Пальчевич Г. Т., Подплетній В. В. Ринок цінних паперів : навч. посіб. / Г. Т. Пальчевич, В. В. Подплетній. — Кіровоград : ТОВ ПВЦ «Мавік», 2002. — 238 с.
7. Lando D., Poulsen R. Lecture Notes for Finance 1 (and More). — January 2006.
8. Голіченко І. І., Клесов О. І., Тимошенко О. А. Фінансова математика та елементи актуарної математики : навч. посіб. [Електронний ресурс] / І. І. Голіченко, О. І. Клесов, О. А. Тимошенко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. — 104 с.
9. Місцеві облігації, випущені під час воєнного стану [Електронний ресурс] / Міністерство фінансів України. — URL: https://mof.gov.ua/uk/local_bonds_issued_during_the_war_time-572

10. Про затвердження Положення про порядок здійснення уповноваженими банками операцій з купівлі, продажу та обміну іноземної валюти : постанова Правління Національного банку України від 10 серпня 2003 р. № 281, зареєстр. в Міністерстві юстиції України 29 серпня 2003 р. за № 751/8072
11. ОВДП для населення [Електронний ресурс] / Міністерство фінансів України. — URL:
https://mof.gov.ua/uk/domestic_government_bonds_for_population-360