XXXIX Відкрита студентська Олімпіада з математики КПІ ім. Ігоря Сікорського, І тур, 29 січня 2025 року Задачі для студентів першого курсу, категорія М

1. Спростити матричний вираз

$$(2E - A)^{-1} + (E + A)^{-1} - 3(2E + A - A^2)^{-1}$$

у припущенні, що вказані обернені матриці існують.

2. Які значення може набувати відстань від точки $A(3, 2, 3)$ до різних площин, які проходять через точки $B(1, 1, 1)$ та $C(2, 2, 2)$?

3. Про числа $x, y \in \mathbb{R}$ відомо, що $x + e^x = y + e^y$. Чи обов'язково вірно, що $x^2 + e^{-2x} = y^2 + e^{-2y}$?

4. Знайти найбільше значення виразу

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{a_1^x + \ldots + a_{2025}^x}{2025} \right)^{\frac{1}{x}},$$

якщо $a_1, \ldots, a_{2025} > 0$ та $a_1^2 + \ldots + a_{2025}^2 = 1$.

5. Позначимо через D множину точок площини, що знаходяться всередині квадрата з вершинами $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)$. Зобразити геометричне місце таких точок Y на площині, що

$$\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle \leq 1$$

для будь-якої точки $X \in D$. Тут кутовими дужками позначено скалярний добуток векторів.

6. З набору цілих чисел $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{2024}, a_{2025})$ сформуємо новий набір за правилом

$$\boldsymbol{a}' = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}, \ldots, \frac{a_{2024} + a_{2025}}{2}, \frac{a_{2025} + a_1}{2} \right).$$

Визначити всі набори $\boldsymbol{a}$, для яких всі елементи всіх наборів $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{a}'', \boldsymbol{a}''', \ldots$ є цілими числами.