XXXIX Відкрита студентська Олімпіада з математики КПІ ім. Ігоря Сікорського, І тур, 29 січня 2025 року Задачі для студентів старших курсів, категорія М

1. Знайти всі многочлени P такі, що $P(0) = 0$ та $P(n^2 + 1) = P^2(n) + 1$ для будь-якого цілого n.

2. Для функції $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ визначити $f^{(2025)}(1)$ та $f^{(2026)}(1)$.

3. Знайти всі функції $f(x), x \in (0, \infty)$ такі, що

$$\int_0^1 f(tx)\,dt = 2f(x)$$

   для кожного $x > 0$.

4. Послідовність комплексних чисел $(z_n, n \in \mathbb{N})$ задано формулою $z_n = (1+i)(1+\frac{i}{2}) \cdot \ldots \cdot (1+\frac{i}{n})$. Чи існує границя $\lim_{n\to\infty} z_n$? Якщо так, то знайти її.

5. Числову послідовність $(x_n, n \in \mathbb{N})$ визначено у рекурентний спосіб:

$$\begin{cases} x_1 = 1; \\ x_{n+1} = \frac{\sqrt{x_n^2 + 4x_n} + x_n}{2}. \end{cases}$$

   Довести збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2}$$

   та знайти його суму.

6. Знайти найменше значення виразу

$$\sum_{1 \le i < j \le 2025} a_i a_j,$$

   де $a_1, \ldots, a_{2025} \in [-1, 1]$.