

XXXIX Відкрита студентська Олімпіада з математики  
КПІ ім. Ігоря Сікорського, I тур, 29 січня 2025 року  
Задачі для студентів першого курсу, категорія С

1. Послідовність  $\{x_n\}$  задана за допомогою рекурентного співвідношення:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}, \\ x_1 = \sqrt{6}. \end{cases}$$

Знайдіть її границю.

2. Знайти власні числа та власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Яку криву другого порядку задає рівняння? Побудувати графік цієї кривої:

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & -1 & 2 \\ x & 8 & 2 & y \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2y & 3 & 3 & -x \end{vmatrix} = 0.$$

4. Дві протилежні вершини ромба мають координати  $A(3; 5; 7)$  та  $B(1; -1; -3)$ . Третя вершина ромба лежить на прямій

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = z.$$

Записати координати невідомих вершин ромба та обчислити його площу.

5. Позначимо через  $D$  множину точок площини, що знаходяться всередині квадрата з вершинами  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(-1, -1)$ ,  $(1, -1)$ . Зобразити геометричне місце таких точок  $Y$  на площині, що

$$\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle \leq 1$$

для будь-якої точки  $X \in D$ . Тут кутовими дужками позначено скалярний добуток векторів.

6. З набору цілих чисел  $a = (a_1, a_2, \dots, a_{2024}, a_{2025})$  сформуємо новий набір за правилом

$$a' = \left( \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}, \dots, \frac{a_{2024} + a_{2025}}{2}, \frac{a_{2025} + a_1}{2} \right).$$

Визначити всі набори  $a$ , для яких всі елементи всіх наборів  $a', a'', a''', \dots$  є цілими числами.