

XXXIX Відкрита студентська Олімпіада з математики
КПІ ім. Ігоря Сікорського, I тур, 29 січня 2025 року
Задачі для студентів старших курсів, категорія С

1. Підкидаються дві монети — справжня і фальшива. У фальшивої ймовірність випадіння герба вдвічі більша за ймовірність випадіння решки. Проводиться два експерименти: спочатку підкидають справжню монету, доки не випаде перша решка; потім те саме роблять для фальшивої монети. Розглянемо дві випадкові події:

$$A = \{\text{при підкиданні справжньої монети випало рівно } n \text{ гербів}\},$$

$$B = \{\text{при підкиданні фальшивої монети випало рівно } m \text{ гербів}\}.$$

Яким співвідношенням мають бути пов'язані параметри m та n , щоб забезпечити виконання нерівності

$$\mathbb{P}(B) \geq 2\mathbb{P}(A),$$

тут $\mathbb{P}(\cdot)$ позначає ймовірність події.

2. Знайти значення параметру a , для якого

$$\int_a^{19} ||x^2 - 9| - 16| dx + \int_{a-5}^{a+8} dx = 2025.$$

3. Яку криву другого порядку задає рівняння? Побудувати графік цієї кривої:

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & -1 & 2 \\ x & 8 & 2 & y \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2y & 3 & 3 & -x \end{vmatrix} = 0.$$

4. Знайдіть розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - y' = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

5. Числову послідовність $(x_n, n \in \mathbb{N})$ визначено у рекурентний спосіб:

$$\begin{cases} x_1 = 1; \\ x_{n+1} = \frac{\sqrt{x_n^2 + 4x_n} + x_n}{2}. \end{cases}$$

Довести збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2}$$

та знайти його суму.

6. Знайти найменше значення виразу

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 2025} a_i a_j,$$

де $a_1, \dots, a_{2025} \in [-1, 1]$.