XXXIX Відкрита студентська Олімпіада з математики КПІ ім. Ігоря Сікорського, I тур, 29 січня 2025 року Задачі для студентів першого курсу, категорія T

1. Для матриць $A_{3\times 2}$ та $B_{2\times 3}$ знайти $\det(AB)$.

2. Про число z відомо, що
$$z + \frac{1}{z} = 1.$$
Знайти
$$z^{2025} + \frac{1}{z^{2025}}.$$

3. Довести, що відрізок дотичної до гіперболи, який знаходиться між її асимптотами, ділиться точкою дотику навпіл.

4. Нехай $f(x) = \sin x \sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$. Довести нерівність
$$\max_{x\in[-\pi,\pi]} f(x) \le \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

5. Позначимо через D множину точок площини, що знаходяться всередині квадрата з вершинами $(1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1)$. Зобразити геометричне місце таких точок Y на площині, що
$$\langle \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY} \rangle \le 1$$
для будь-якої точки $X \in D$. Тут кутовими дужками позначено скалярний добуток векторів.

6. З набору цілих чисел $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{2024}, a_{2025})$ сформуємо новий набір за правилом
$$\boldsymbol{a}' = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}, \ldots, \frac{a_{2024} + a_{2025}}{2}, \frac{a_{2025} + a_1}{2}\right).$$
Визначити всі набори $\boldsymbol{a}$, для яких всі елементи всіх наборів $\boldsymbol{a}', \boldsymbol{a}'', \boldsymbol{a}''', \ldots$ є цілими числами.