XXXIX Відкрита студентська Олімпіада з математики КПІ ім. Ігоря Сікорського, I тур, 29 січня 2025 року
Задачі для студентів старших курсів, категорія T

1. За допомогою розкладу функції $f(x) = x$, $x \in (0, 2\pi)$, в ряд Фур'є показати, що
$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \ldots = \frac{\pi - x}{2}, \quad x \in (0, 2\pi).$$
Використавши отриману рівність, довести, що нескінченна сума
$$\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \ldots, \quad x \in (0, \pi),$$
не залежить від x.

2. Про число z відомо, що
$$z + \frac{1}{z} = 1.$$
Знайти
$$z^{2025} + \frac{1}{z^{2025}}.$$

3. Обчислити
$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\frac{2}{3} + x + y}{1 + x + y + z}\, dx\, dy\, dz.$$

4. Нехай $f(x) = \sin x \sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$. Довести нерівність
$$\max_{x \in [-\pi, \pi]} f(x) \le \frac{4\sqrt{3}}{9}.$$

5. Числову послідовність $(x_n, n \in \mathbb{N})$ визначено у рекурентний спосіб:
$$\begin{cases} x_1 = 1; \\ x_{n+1} = \frac{\sqrt{x_n^2 + 4x_n} + x_n}{2}. \end{cases}$$
Довести збіжність ряду
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^2}$$
та знайти його суму.

6. Знайти найменше значення виразу
$$\sum_{1 \le i < j \le 2025} a_i a_j,$$
де $a_1, \ldots, a_{2025} \in [-1, 1]$.