

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ «КИЇВСЬКИЙ
ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА

ХІІІ ВСЕУКРАЇНСЬКА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ МОЛОДИХ МАТЕМАТИКІВ

9–10 травня 2025 р.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
м. Київ

**ХІІІ Всеукраїнська наукова
конференція молодих математиків**
<https://matan.kpi.ua/uk/young-math-2025/>

Співголови програмного комітету:

Клесов О.І.	д.ф.-м.н., професор, КПП ім. Ігоря Сікорського
Працьовитий М.В.	д.ф.-м.н., професор, УДУ ім. Михайла Драгоманова
Чорней Р.К.	к.ф.-м.н., доцент, НаУКМА

Члени програмного комітету:

Авраменко О.В.	д.ф.-м.н., професор, НаУКМА
Василик О.І.	д.ф.-м.н., доцент, КПП ім. Ігоря Сікорського
Гончаренко Я.В.	к.ф.-м.н., доцент, УДУ ім. Михайла Драгоманова
Іванов О.В.	д.ф.-м.н., професор, КПП ім. Ігоря Сікорського
Крюкова Г.В.	к.ф.-м.н., доцент, НаУКМА
Лисенко І.М.	к.ф.-м.н., доцент, НаУКМА
Петравчук А.П.	д.ф.-м.н., професор, КНУ ім. Тараса Шевченка
Пилипенко А.Ю.	д.ф.-м.н., професор, КПП ім. Ігоря Сікорського
Ратушняк С.П.	доктор філософії, УДУ ім. Михайла Драгоманова
Розора І.В.	д.ф.-м.н., доцент, КНУ ім. Тараса Шевченка
Самусенко П.Ф.	д.ф.-м.н., професор, КПП ім. Ігоря Сікорського
Шкільний О.В.	д.пед.н., професор, УДУ ім. Михайла Драгоманова
Щестюк О.В.	к.ф.-м.н., доцент, НаУКМА

Члени організаційного комітету:

Клесов О.І. (голова)	д.ф.-м.н., професор, КПП ім. Ігоря Сікорського
Новікова Ю.В.	к.ф.-м.н., доцент, КПП ім. Ігоря Сікорського
Галганов О.А.	аспірант, КПП ім. Ігоря Сікорського
Погребіцька М.М.	асистент, КПП ім. Ігоря Сікорського
Приходько Ю.Є.	к.ф.-м.н., асистент, КПП ім. Ігоря Сікорського

Секції:

1. Математичного аналізу, теорії ймовірностей, диференціальних рівнянь.
2. Метричної теорії чисел, геометрії, фрактального аналізу.
3. Алгебри, дискретної математики, теорії алгоритмів, інформатики.
4. Методики навчання та історії математики.

Всеукраїнська конференція молодих математиків України відбувається кожного року по чергово у кожному з університетів-співорганізаторів. Виключенням став 2022 рік, коли проти України було здійснено повномасштабну агресію.

З 2020 року конференції здійснюються на платформі Zoом. Всі надіслані матеріали рецензуються та перевіряються на плагіат.

Пленарна доповідь	9
<i>О.І. Клесов. Задача Лапласа</i>	9
Секція 1.	
Математичного аналізу, теорії ймовірностей, диференціальних рівнянь	10
<i>І.М. Авдєєнко</i>	
<i>Ітераційні методи для розв'язання задач оптимізації з використанням методу дискретних функціональних частинок</i>	11
<i>М.І. Айкало, С.П. Пафик</i>	
<i>Побудова асимптотичного розв'язку двоточкової крайової задачі для лінійного сингулярно збуреного диференціального рівняння другого порядку</i>	13
<i>О.О. Bedzir, I.V. Rozora</i>	
<i>Reinforcement Learning for Bandwidth Estimation in Real Time Communications</i>	15
<i>О.А. Галганов</i>	
<i>Граничні теореми для складу малих блоків процесу китайського ресторану</i>	16
<i>В.В. Гладун</i>	
<i>Консистентність квазіперіодограмної оцінки параметрів чирпованого сигналу</i>	17
<i>Є.А. Данилюк</i>	
<i>Побудова і дослідження оптимального портфеля інвестора за різними критеріями оптимальності</i>	19
<i>О.В. Дикий, О.В. Іванов, І.М. Савич</i>	
<i>Асимптотична нормальність періодограмних оцінок у польовій тригонометричній моделі регресії</i>	21
<i>Б.О. Євдокименко</i>	
<i>Гармонічні коливання пружно закріпленої круглої мембрани</i>	23
<i>А.Д. Журавльова</i>	
<i>Побудова моделі поточного прогнозування для регіональних економічних показників України з використанням коротких даних та змішаної частотності VAR</i>	25
<i>А.О. Косянчук</i>	
<i>Один клас функцій, що є розв'язком системи функціональних рівнянь</i>	27
<i>А.Ю. Кравець</i>	
<i>Оцінювання ймовірності банкрутства для біноміально-φ-субгауссової моделі ризику</i> ..	28
<i>І.С. Ласкін, О.Г. Білий</i>	
<i>Векторний потенціал соленоїдалного поля</i>	30
<i>Н.Ю. Магдич</i>	
<i>Керовані марковські поля та їх застосування в економіці</i>	32
<i>І.В. Манаєнко, В.В. Павленков</i>	
<i>Функціональні рівняння Коші для комплекснозначних функцій</i>	33
<i>А.О. Мельник, І.В. Розора</i>	
<i>Статистична оцінка та перевірка гіпотез для імпульсної перехідної функції</i>	34
<i>Д.Л. Мельник</i>	
<i>Стохастичний експеримент у модифікованій задачі пошуку найкращого секретаря</i> ...	36
<i>Я.Г. Мокану</i>	
<i>Ергодичність розв'язків СДР, керованих процесом Леві</i>	38

<i>А.В. Нехай, С.П. Пафик</i> <i>Побудова асимптотичного розв'язку задачі Коші для лінійного неоднорідного сингулярно збуреного диференціального рівняння другого порядку</i>	39
<i>Є.М. Окунев, О.І. Василик</i> <i>Підготовка даних щодо епідемії ВІЛ/СНІД для актуарного дослідження</i>	41
<i>А.О. Охремчук, А.В. Сиротенко</i> <i>Розв'язки лінійного операторного рівняння в просторі ℓ_p</i>	43
<i>В.Є. Панаско</i> <i>Глибина Тьюкі деяких багатовимірних імовірнісних розподілів</i>	45
<i>О.В. Панічек, О.А. Тимошенко</i> <i>Стохастичні диференціальні рівняння в моделюванні динаміки популяцій</i>	46
<i>С.О. Сергієнко, С.П. Пафик</i> <i>Побудова розв'язку задачі Коші для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь першого порядку</i>	48
<i>Ф.О. Сердюк, Д.Ю. Случинський</i> <i>Моделювання динаміки неліквідних фінансових ринків</i>	50
<i>А.Ю. Pilipenko, V.V. Tkachenko</i> <i>Explosion and implosion of semi-Markov birth-death processes</i>	52
<i>А.В. Федорцова, А.О. Ковалюк, Т.Г. Пригалінська</i> <i>Математична модель SIR</i>	54
<i>А.В. Сиротенко, Д.А. Чаус</i> <i>Метод підсумовування розбіжних в класичному сенсі рядів</i>	56
<i>A. Pilipenko, I. Chulakov</i> <i>Switching problem on graph</i>	57
<i>А.О. Шевченко, В.В. Павленков</i> <i>Функціональні рівняння Коші з обмеженнями</i>	59
<i>Б.Ю. Шевченко</i> <i>Паралельний розподілений солвер Крилова для змішаних скінченних елементів</i>	60
<i>Є.І. Шептуха, І.В. Розора</i> <i>Визначення параметра Херста дробового броунівського процесу за допомогою методів машинного навчання</i>	62
<i>К.І. Шурубур</i> <i>Моделювання φ-субгауссового дробового броунівського руху в просторі $L_p([0; T])$</i>	64
Секція 2.	
Метричної теорії чисел, геометрії, фрактального аналізу	66
<i>Т.Р. Бабич, С.П. Ратушняк</i> <i>Одна ніде не диференційовна функція</i>	67
<i>О.І. Бондаренко, М.В. Працьовитий</i> <i>Неперервні перетворення одиничного інтервалу, які зберігають хвости нескінченно-символьного В-зображення чисел</i>	69
<i>В.О. Василенко, Г.М. Торбін</i> <i>Про проблему фрактальної довірчості локально тонких систем покриттів $\tilde{Q}$-зображення для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича</i>	71

С.О. Васькевич, Ю.Ю. Вовк, Я.В. Гончаренко	
Деякі застосування систем числення з натуральною основою і двома надлишковими цифрами	73
О.Я. Виннишин	
Канторвали, пов'язані з системами числення з надлишковим алфавітом	75
Ю.П. Волошин, Г.М. Торбін	
Фрактальні властивості випадкових величин з незалежними символами розкладів Кантора та їх застосування	77
М.В. Емайкін	
Криві віялового типу	79
В.О. Єлагін	
Функції Радемахера і ряди Уолша для нега-двійкового зображення чисел	81
В.С. Калюжний	
Тополого-метричні властивості множини неповних сум одного ряду	83
А.І. Корнійчук, С.П. Ратушняк	
Функції з фрактальними множинами особливостей	85
Ю.Ю. Кушнір	
Множини канторівського типу	86
О.П. Макарчук	
Про один клас фрактальних множин заданих в термінах ланцюгового A_2 -представлення	87
В.В. Метіль	
Про фрактальні властивості розподілів випадкових величин, породжених субгеометричними розкладами Кантора	88
Н.А. Мицко	
Аналог Трибін-функції для L -зображення чисел	90
В.В. Міський	
Про фрактальні властивості розподілів випадкових величин з незалежними символами факторіального розкладу та їхнє застосування	91
М.П. Мороз	
Контрприклад до гіпотези про топологічний тип множини неповних сум проміжного ряду	93
М.Г. Москалько	
Невідомі канторвали. Приклади нових сімейств канторвалів	95
В.В. Назарчук, М.В. Працьовитий	
Один клас функцій, означених в термінах Q_s^* -зображення чисел	97
О.О. Нікорак	
Ланцюгове A -зображення чисел і його застосування	99
Д.М. Пихтар	
Про суперфрактальність множини суттєво аномальних чисел для арифметичних розкладів Кантора та їх узагальнень	101
В.І. Плакида, О.М. Працьовитий, І.М. Лисенко	
Фрактальні функції двох змінних	103
Л.А. Повар	
Криві павутинного типу	104

І.І. Продан

Аналог Трибін-функції для q_0^∞ -зображення чисел 105

С.П. Ратушняк, М.В. Працьовитий

Зображення дійсних чисел у системі з основою 3 і надлишковою цифрою та їх різнопланові застосування 107

Д.М. Сергійко

Одна неперервна ніде не монотонна функція, означена в термінах марковського зображення чисел 109

Д.С. Хіхлушко, М.В. Працьовитий

Автомодельні математичні об'єкти: множини, функції, міри 110

Д.С. Шпитюк

Арифметична сума множин канторівського типу 111

Секція 3.

Алгебри, дискретної математики, теорії алгоритмів, інформатики 112

А.А. Бурдим

Псевдо-обернена матриця та її застосування у побудові оптимального портфеля інвестора 113

В.О. Гапоненко

S_4 відокремлюваність та p -розбиття графа у all -path та $detour$ опуклостях 115

К.В. Глега

Гібридний підхід до виявлення аномалій у зашифрованому трафіку на основі булевої фільтрації та моделей глибокого навчання 117

Б.В. Дехтяр, С.О. Козеренко

Полідерева зі слабо зв'язними реберними орграфами 119

Ю.-Л.В. Дехтяр, С.О. Козеренко

Відображення між графами, що зберігають ребра назад 121

М.О. Жульжик

Вивчення ознак подільності цілих чисел в системі гурткової роботи у закладах середньої освіти 123

О.К. Заколенко, Г.І. Малашонок

Середовище виконання для блочно-рекурсивних та ітераційних матричних алгоритмів із додатком до алгоритму Діксона для розв'язання СЛАР 125

С.В. Зубко

Графові алгебри Лі фарбованих графів і графові властивості 127

А.О. Крамаренко

Застосування RSA у кібернетичній безпеці 129

N.V. Perepichka

par -Functions and Algorithms on Square Matrices 131

Е.О. Семенко, Л.М. Тимошкевич

Класифікація злічених графів Коксетера $T_{k,l,\infty}^5$ зі значеннями індексу у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$ 133

Т.І. Соколова, Л.М. Тимошкевич

Відновлююче спектральне число графа-циклу C_n 135

<i>M. Staryi</i> <i>On realizations and representations of complex simple Lie algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$</i>	137
<i>A.M. Тіхонов</i> <i>Реалізація алгоритму факторизації Кантора-Зассенгауза та порівняння з алгоритмом Берлекампа</i>	139
<i>A.O. Tsukanova</i> <i>Solving Arbitrary Systems of Linear Algebraic Equations via Variational Calculus</i>	141
<i>К.С. Чернявська</i> <i>Відновлююче спектральне число графа-діаманта</i>	143
<i>К.В. Яковенко</i> <i>Властивості антиподальних графів деяких родин графів</i>	145
Секція 4.	
Методики навчання та історії математики	147
<i>A.M. Боборикін, Т.Г. Пригалінська</i> <i>Числа Фібоначчі та золотий перетин: аспекти застосування та прояви в природі</i> ...	148
<i>Ю.Ю. Бондаренко, Т.В. Маловічко</i> <i>Дитячі роки Ади Лавлейс</i>	150
<i>К. Будовський</i> <i>Задача пошуку «піфагорових трійок»</i>	152
<i>Д.А. Войцїх, Ю.П. Буценко</i> <i>Використання програмного пакету GNU Octave при вивченні розділу «Диференціальне числення функцій багатьох змінних»</i>	154
<i>Л.В. Гасюк</i> <i>Методологічні аспекти формування навичок розв'язування сюжетних задач аналітичним та синтетичним методами в учнів</i>	156
<i>І.І. Голіченко</i> <i>Історія відкриття комплексних чисел</i>	158
<i>С.П. Горбач</i> <i>Роль математичних гуртків та олімпіад у розвитку математичних талантів: історичний огляд та сучасні тенденції</i>	160
<i>Д.О. Гринь, Ю.П. Буценко</i> <i>Порівняльний аналіз використання онлайн-калькуляторів та програмного пакету GNU Octave при розв'язуванні ДР</i>	162
<i>М.В. Гринюк, Ю.П. Буценко</i> <i>Порівняльний аналіз використання програмного пакету GNU Octave та онлайн-засобів при розв'язуванні задач із розділу «Визначені інтеграли»</i>	164
<i>Т.В. Дідківська</i> <i>Математична грамотність та математична культура школярів</i>	166
<i>А.В. Житарюк</i> <i>Використання прийомів перевернутого навчання під час вивчення теми «Подібність фігур»</i>	167
<i>М.С. Кондренко</i> <i>Про відомі методи оцінки кількості коренів алгебраїчних поліномів</i>	169

<i>М. Красуленко</i> <i>Текстові задачі як засіб формування умінь математичного моделювання учнів базової середньої школи</i>	171
<i>Ж.Л. Кузів</i> <i>Прикладні задачі з параметрами як засіб формування математичної компетентності учнів на уроках алгебри</i>	173
<i>Т. Лавринюк</i> <i>Використання візуальних методів навчання задля розвитку творчої активності учнів 5–6 класів</i>	175
<i>С.Є. Лебеденко, Т.Г. Пригалінська</i> <i>Математичні моделі у медичних дослідженнях</i>	177
<i>К.В. Мартинюк</i> <i>Формування громадянської ідентичності під час навчання математики учнів 5–6 класів</i>	179
<i>М.В. Мицик</i> <i>Стан проблеми формування обчислювальної компетентності в учнів базової середньої школи під час вивчення природничо-математичних дисциплін</i>	181
<i>С.Р. Молошина, О.Г. Білий</i> <i>Верзієра Анъезі</i>	183
<i>Н.С. Остролуцька</i> <i>Перетворення систем координат та графіків функцій</i>	185
<i>В. Павліченко</i> <i>Особливості організації діяльності щодо подолання освітніх втрат учнівства з математики в старшій школі</i>	186
<i>О.О. Плугатор, О.А. Лагода</i> <i>Оцінка Нельсона-Аалена</i>	188
<i>Н.С. Правіцка, М.В. Працьовитий</i> <i>Класифікації афінних перетворень площини</i>	190
<i>А.М. Сергійчук</i> <i>Криптографія як елемент STEM-освіти: формування цифрових компетенцій</i>	192
<i>О.В. Ткач</i> <i>Формування компетентності підприємливості та фінансова грамотність на уроках математики у старшокласників</i>	194
<i>С.Д. Шимчик, Н.В. Круглова, О.О. Диховичний</i> <i>Вибір моделі MIRT для аналізу тестів з вищої математики</i>	196
<i>Б.А. Шумер</i> <i>Історичний та методичний підходи до навчання математики: формування змістовного і мотивованого пізнання</i>	198

ЗАДАЧА ЛАПЛАСА

О.І. КЛЕСОВ

Багато фундаментальних результатів з теорії ймовірностей та статистики увійшли у монографію П.-С.Лапласа [1]. Два роки потому вийшла інша його монографія [2], яку іноді називають полегшеним варіантом [1]. Так кваліфікувати монографію [2] можна хіба що через те, що за обсягом вона у кілька разів є меншою за [1].

Обговорюючи принципи (саме такий термін вживає Лаплас) теорії ймовірностей у главі III з [2], у якості ілюстрації сьомого принципу, Лаплас аналізує задачу про ймовірність сходження сонця завтра при наявності інформації, що воно до цього сходило кожного ранку 182623 днів поспіль (5000 років), він отримує відповідь, базуючись на теоремі Баєса, як ми її зараз називаємо. Варто підкреслити, що сама задача, її розв'язання та відповідь до неї, що отримав Лаплас, були для нього прикладом застосування принципів теорії ймовірностей, а не твердженням про закон природи. Тим не менше, багато з читачів сприймали його текст саме як спробу аналізувати природний феномен і висміювали його відповідь як абсурдну. Не менше було і таких, хто надавав гуманітарно-філософського характеру цьому прикладу, тим більше, що назва твору «*Філософські нариси про ймовірність*» ніби підштовхувала до цього. Посилання таких авторів на Лапласа варто сприймати як паразитування на його імені, оскільки нічого гуманітарного він не мав на увазі. Третій шар читачів його твору намагались розширити його обговорення про індуктивний спосіб означення ймовірності.

У цій доповіді зроблено спробу проаналізувати підхід Лапласа до «*знаходження ймовірності майбутніх подій*» (вислів самого Лапласа), що сучасною мовою можна висловити як «*розв'язання задачі про прогноз*».

Буде також наведено кілька історичних та евристичних прикладів прогнозування.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Laplace P.-S. Théorie analytique des probabilités. — Paris: Gauthier-Villars — 1812.
- [2] Laplace P.-S. Essai philosophique sur les probabilités. — Paris: — 1814.

КАФЕДРА МАТАТІЙ, КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО, КИЇВ, УКРАЇНА
 Email address: voselk@gmail.com
 URL: <https://matan.kpi.ua/uk/people/klesov/>

СЕКЦІЯ 1
Математичного аналізу,
теорії ймовірностей,
диференціальних рівнянь

ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ ДИСКРЕТНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ЧАСТИНОК

І.М. АВДЕЄНКО

Вступ. Метод дискретних функціональних частинок (DFPM, Discrete Functional Particle Method) є ефективним ітераційним підходом для розв'язання задач необумовленої оптимізації. Він базується на аналізі затухаючих динамічних систем другого порядку, що дозволяє уникати обмежень, пов'язаних із виродженістю задач або сингулярністю коваріаційної матриці.

DFPM вже показав свою ефективність у фінансовому моделюванні, зокрема в задачах оптимального вибору портфеля активів у випадку сингулярної коваріаційної матриці Σ , що часто виникає при малій кількості спостережень або високій колінеарності активів.

У даній роботі цей метод буде використаний для розв'язання задачі прогнозування оптимального товарного набору для певної категорії в мережі магазинів. Така задача зводиться до задачі мінімізації функціоналу, що відображає сукупний прогнозований ризик (наприклад, відсутність продажів або втрати прибутку) з урахуванням ряду обмежень (сезонність, попит, бюджет, наявність товарів тощо).

Перевага DFPM полягає в здатності ефективно працювати з недообумовленими моделями, які включають високу розмірність, пропущені дані та корельовані фактори. Це дозволяє застосовувати DFPM у практичних системах підтримки рішень у сфері торгівлі та логістики, де необхідно формувати найкращий набір товарів, адаптований до ринкових умов.

Постановка задачі для товарного набору для певної категорії. Розглянемо класичну задачу вибору портфеля з k категорій з мінімізацією ризику:

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \quad \text{за умов} \quad \mathbf{w}^T \mathbf{1} = 1, \quad \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} = q, \quad (1)$$

де $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k$ — вектор середніх прибутковостей, $\Sigma \in \mathbb{R}^{k \times k}$ — коваріаційна матриця, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^k$ — вектор ваг кожної категорії, q — задана очікувана дохідність.

У випадку сингулярної Σ , задача (1) стає виродженою, і класичні методи не дають єдиного розв'язку. У таких умовах застосовують ітераційні регуляризаційні підходи.

Метод DFPM як підхід до регуляризації. DFPM розв’язує задачу:

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n} V(\mathbf{u}),$$

використовуючи динамічну систему другого порядку:

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) + \eta \dot{\mathbf{u}}(t) = -\nabla V(\mathbf{u}(t)), \quad \eta > 0.$$

Чисельна реалізація здійснюється за допомогою симплектичних методів (наприклад, Euler або Verlet), що забезпечують стабільність та швидку збіжність методу.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Gulliksson M., Mazur S. *An Iterative Approach to Ill-Conditioned Optimal Portfolio Selection*. Computational Economics, 2020, 56:773–794.
- [2] Gulliksson M., Karlsson M., Lindskog F. *A damped dynamic systems approach for solving ill-conditioned optimization problems*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2019, 362: 352–363.
- [3] Ding Y., Liu J. *Joint pricing strategies of multi-product retailer with reference-price and substitution-price effect*. Journal of Data, Information and Management, 2021, 3:49–63.
- [4] Gulliksson M., Karlsson M. *Damped dynamical systems for solving equations and optimization problems*. In: Advances in Computational Mathematics, Springer, 2020.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: i.avdieienko@ukma.edu.ua

ПОБУДОВА АСИМПТОТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ДВОТОЧКОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНОГО СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

М.І. АЙКАЛО, С.П. ПАФИК

Використовуючи асимптотичні методи, досліджено питання побудови формального розв'язку двоточкової крайової задачі для лінійного сингулярно збуреного диференціального рівняння другого порядку вигляду:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon a(t; \varepsilon) \frac{dx}{dt} + b(t; \varepsilon) x = 0, \quad (1)$$

$$\alpha_{11} x(0; \varepsilon) + \alpha_{12} x(T; \varepsilon) = b_1(\varepsilon), \alpha_{21} \frac{dx(0; \varepsilon)}{dt} + \alpha_{22} \frac{dx(T; \varepsilon)}{dt} = b_2(\varepsilon), \quad (2)$$

в якій $x(t, \varepsilon)$ — шукана функція, $a(t, \varepsilon)$, $b(t, \varepsilon)$ — відомі функції дійсної змінної, ε — малий дійсний параметр, $b_1(\varepsilon)$, $b_2(\varepsilon)$ — вирази залежні від малого параметра ε , α_{ij} — деякі дійсні числа, $i, j = 1, 2$, $t \in [0; T]$, $T > 0$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$.

Задачу (1), (2) було досліджено при виконанні наступних умов:

1°. Функції $a(t, \varepsilon)$, $b(t, \varepsilon)$ і вирази $b_1(\varepsilon)$, $b_2(\varepsilon)$ представляються у вигляді асимптотичних розвинень за степенями малого параметра ε :

$$a(t; \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n a_n(t), b(t; \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n b_n(t),$$

$$b_1(\varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n b_n^{(1)}, b_2(\varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n b_n^{(2)}.$$

2°. Функції $a_n(t)$, $b_n(t)$, $n = 0, 1, \dots$ — нескінченно диференційовні на відрізьку $[0; T]$.

3°. Рівняння $\lambda_0^2(t) + a_0(t)\lambda_0(t) + b_0(t) = 0$ має два різних розв'язки $\lambda_0^{(1)}(t)$, $\lambda_0^{(2)}(t)$ такі, що $\lambda_0^{(1)}(t) \neq \lambda_0^{(2)}(t)$, $\forall t \in [0; T]$.

4°. $b_0(t) \neq 0$, $\forall t \in [0; T]$.

5°. $\operatorname{Re}(\lambda_0^{(i)}(t)) < 0$, $i = 1, 2$, $\forall t \in [0; T]$.

В результаті було доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови 1° – 5°, то крайова задача (1), (2) має формальний розв'язок*

$$x(t; \varepsilon) = C_1(\varepsilon) \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda^{(1)}(\tau, \varepsilon) d\tau \right) + C_2(\varepsilon) \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda^{(2)}(\tau, \varepsilon) d\tau \right), \quad (3)$$

який є асимптотичним розвиненням точного розв'язку крайової задачі (1), (2) при прямуванні малого параметра ε до нуля.

Зауваження 1. Функції $\lambda^{(1)}(t, \varepsilon)$, $\lambda^{(2)}(t, \varepsilon)$ в формулі (3) визначаються через коефіцієнти рівняння (1) та початкові умови (2).

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Самойленко А.М., Перестюк П.О., Парасюк І.О. *Диференціальні рівняння*. — Київ: Либідь, 2003. — 600 с.
- [2] Пафик С. П. Асимптотичне розв'язання двоточкової крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у некритичному та критичному стійких випадках // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка — 2019. — Т. 40, № 1. — С. 19–25.
- [3] Шкіль М.І. *Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях*. — Київ: Вища школа, 1971. — 228 с.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: 21fmf.m.aikalo@std.npu.edu.ua

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: s.p.pafyk@udu.edu.ua

REINFORCEMENT LEARNING FOR BANDWIDTH ESTIMATION IN REAL TIME COMMUNICATIONS

O.O. BEDZIR, I.V. ROZORA

Accurate bandwidth estimation for Real-Time Communication is a key factor that defines Quality of Experience. Traditional algorithmic approach such as Google Congestion Control [1] has exhausted their potential for improvements. Because of this, Reinforcement Learning has become popular and has achieved good results recently. The main approach of Offline RL becomes Deep Q-Learning. Model-free algorithm that tries to maximize Q function, by next formula

$$Q(s_t, a_t) \leftarrow Q(s_t, a_t) + \alpha \left[r_{t+1} + \gamma \max_{a'} Q(s_{t+1}, a') - Q(s_t, a_t) \right] \quad (1)$$

We compared 3 offline reinforcement learning algorithms:

- (1) Delayed deep deterministic policy gradient algorithm plus behavior cloning
- (2) Conservative Q-Learning
- (3) Implicit Q-Learning

Our analyzes show that Implicit Q-Learning shows the best results for this problem under certain conditions.

REFERENCES

- [1] Gaetano Carlucci, Luca De Cicco, Stefan Holmer, and Saverio Mascolo. *Congestion control for web real-time communication*. — IEEE/ACM Transactions on Networking 25, 5 (2017), 2629–2642.
- [2] Tan Qingyue, Lv Gerui, Fang Xing, Zhang Jiaying, Yang Zejun, Jiang Yuan, Wu Qinghua. *Accurate Bandwidth Prediction for Real-Time Media Streaming with Offline Reinforcement Learning* (2024). 381-387. 10.1145/3625468.3652183.

TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV, KYIV, UKRAINE
Email address: `oleksandr.bedzir@knu.ua`

TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV, KYIV, UKRAINE
Email address: `iryna.rozora@knu.ua`

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ СКЛАДУ МАЛИХ БЛОКІВ ПРОЦЕСУ КИТАЙСЬКОГО РЕСТОРАНУ

О.А. ГАЛГАНОВ

Нехай $\mathcal{P}_n, n \in \mathbb{N}$ — послідовність розбиттів $\{1, \dots, n\}$, утворена процесом китайського ресторану з параметром $\theta > 0$ — $\text{CRP}(\theta)$ (напр., [1]). Для довільного $N \in \mathbb{N}$ на просторі

$$\mathbb{X}_N = \{(x_1, \dots, x_N, y) \in [0, +\infty)^{N+1} : x_1 \leq \dots \leq x_N \leq y\}$$

визначимо послідовність точкових процесів

$$\Xi_n^{(N)} = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_N < m} \delta_{\left(\frac{k_1}{n}, \dots, \frac{k_N}{n}, \frac{m}{n}\right)} \mathbb{1}_{A(k_1, \dots, k_N, m)}, \quad (1)$$

де подія $A(k_1, \dots, k_N, m) = \{\{k_1, \dots, k_N, m\} \in \mathcal{P}_m\}$, по суті, описує процес утворення довільного блоку розміру N за K_N кроків та його перетворення на блок розміру $N + 1$ на m -тому кроці $\text{CRP}(\theta)$.

Теорема. *Послідовність точкових процесів $\Xi_n^{(N)}$ при $n \rightarrow \infty$ збігається за розподілом в грубій топології до пуассонівської точкової міри $\Xi^{(N)}$ на $\mathbb{X}_N$ з мірою інтенсивності $d\mu^{(N)} = \theta \frac{N!}{y^{N+1}} dx_1 \dots dx_N dy$.*

За допомогою теореми про неперервне відображення отримано низку функціональних граничних теорем в просторі Скорохода $\mathcal{D}((0, +\infty))$ для деяких статистик $\mathcal{P}_{[nt]}$. Скінченновимірні розподіли відповідних граничних càdlàg-процесів записано в явному вигляді.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Pitman Jim. Combinatorial stochastic processes. Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXXII – 2002. — Berlin: Springer, 2006. — Vol. 1875 of Lect. Notes Math.
- [2] O. Galganov, A. Iliencko. Scaling limit for small blocks in the Chinese restaurant process. — 2025. — Submitted. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2502.05578>.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: galganov.oleksii@l11.kpi.ua

КОНСИСТЕНТНІСТЬ КВАЗІПЕРІОДОГРАМНОЇ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ ЧИРПОВАНОГО СИГНАЛУ

В.В. ГЛАДУН

Моделі чирпованих сигналів, тобто сигналів з лінійною частотною модуляцією, мають важливе прикладне значення. Такі сигнали широко використовуються в радарних системах, а також у прикладному аналізі даних, де спостерігаються гармонійні коливання з лінійним приростом частоти. У зв'язку з цим актуальною є задача отримання консистентних оцінок невідомих параметрів чирпованого сигналу. У роботі [1] було доведено консистентність оцінки найменших квадратів. Проте на практиці доцільно мати кілька різних консистентних оцінок. У цій роботі розглянуто іншу оцінку, яка називається квазіперіодограмною (див. означення нижче). Для неперервного чирпованого сигналу, що спостерігається на фоні адитивного гауссівського шуму, доведено властивість сильної консистентності квазіперіодограмної оцінки.

Нехай спостерігається випадковий процес

$$X(t) = A^0 \cos(\phi^0 t + \psi^0 t^2) + \varepsilon(t), \quad t \in [0, T],$$

де $A^0 > 0$, $\theta^0 = (\phi^0, \psi^0) \in \Phi \times \Psi = (\underline{\phi}, \bar{\phi}) \times (\underline{\psi}, \bar{\psi})$, $0 < \underline{\phi} < \bar{\phi} < +\infty$, $0 < \underline{\psi} < \bar{\psi} < +\infty$; $\varepsilon = \{\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}\}$ – випадковий шум, що задовольняє наступній вимозі.

А. ε – вибірково неперервний стаціонарний гауссівський випадковий процес з нульовим середнім та коваріаційною функцією $B(t) = E\varepsilon(t)\varepsilon(0)$, $t \in \mathbb{R}$, що задовольняє одну з умов:

- (i) $B(t) = L(|t|)|t|^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, де L – неспадна повільно змінна на нескінченності функція;
- (ii) $B(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$.

Надамо означення квазіперіодограмної оцінки.

Означення. Квазіперіодограмною оцінкою параметра θ^0 будемо називати такий випадковий вектор $\theta_T \in \Phi^c \times \Psi^c$, для якого

$$\theta_T = \max_{\theta \in \Phi^c \times \Psi^c} Q_T(\theta),$$

$$Q_T(\theta) = \left| \frac{2}{T} \int_0^T X(t) e^{i(\phi t + \psi t^2)} dt \right|^2.$$

У той же час, оцінку амплітуди будемо шукати як значення $A_T = Q_T^{\frac{1}{2}}(\theta_T)$.

Сформулюємо теорему про консистентність квазіперіодограмної оцінки параметрів чирпованого сигналу, що є основним результатом даної роботи.

Теорема. *Нехай виконується умова **A**. Тоді оцінка θ_T є сильно консистентною в тому сенсі, що $A_T \rightarrow A^0$, $T(\phi_T - \phi^0) \rightarrow 0$, $T^2(\psi_T - \psi^0) \rightarrow 0$ м.н. при $T \rightarrow \infty$.*

Доведення цієї теореми спирається на схему, запропоновану в роботі [2], а також використовує результати, отримані в [1], зокрема рівномірні посилені закони великих чисел. Відповідно до цих результатів, для процесу ε , що задовольняє умову **A**, виконуються такі збіжності:

$$\sup_{(\phi, \psi) \in \mathbb{R}^2} T^{-1} \left| \int_0^T \cos(\phi t + \psi t^2) \varepsilon(t) dt \right| \rightarrow 0,$$

$$\sup_{(\phi, \psi) \in \mathbb{R}^2} T^{-1} \left| \int_0^T \sin(\phi t + \psi t^2) \varepsilon(t) dt \right| \rightarrow 0,$$

м.н. при $T \rightarrow \infty$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Ivanov, A., Hladun, V. (2023). Consistency of the LSE for Chirp Signal Parameters in the Models with Strongly and Weakly Dependent Noise. *Austrian Journal of Statistics*, 52(SI), 107–126. <https://doi.org/10.17713/ajs.v52iSI.1762>
- [2] Іванов, О. В., Лимар, О. В. (2019). Асимптотичні властивості періодограмних оцінок параметрів тригонометричної моделі спостережень на площині. *Теорія ймовірностей та математична статистика*, 2(101), 115–133.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Email address: viktor.hladun00@gmail.com

ПОБУДОВА І ДОСЛІДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ ІНВЕСТОРА ЗА РІЗНИМИ КРИТЕРІЯМИ ОПТИМАЛЬНОСТІ

Є.А. ДАНИЛЮК

В умовах сучасного фінансового ринку інвестори стикаються з необхідністю приймати рішення, що забезпечують оптимальне поєднання прибутковості та ризику. У цьому контексті особливо актуальним є дослідження методів побудови оптимальних інвестиційних портфелів, що дозволяють раціонально розподіляти капітал між активами. У класичній постановці оптимальний портфель Марковіца визначається як такий, що мінімізує ризик у вигляді середньоквадратичного відхилення (волатильності) при фіксованому очікуваному прибутку. Також досліджується двоїста задача — максимізація дохідності скоригованої на ризик. Незважаючи на практичну цінність цих підходів, вони не дають повної картини можливих екстремальних втрат, що може бути критично важливим для інвестора.

Актуальною є постановка задачі, що запропонована Alexander та Baptista [1, 2], у якій в якості критерію оптимальності портфеля використовується Value at Risk (VaR) замість волатильності:

$$\text{VaR}_\alpha \rightarrow \min, \quad \text{за умов:} \quad \sum_{i=1}^d x_i = 1,$$

де x_i — частка інвестицій в i -ий актив. Під VaR при рівні довіри $\alpha \in (0.5; 1)$ неформально розуміється така дохідність, нижче якої ціна портфелю з ймовірністю $1 - \alpha$ не опуститься. Більш точно VaR це квантиль рівня $1 - \alpha$ для функції розподілу випадкової величини збитків Y . Такий підхід дозволяє враховувати не лише середні коливання дохідності, а й імовірність настання суттєвих фінансових втрат. Використання VaR, як критерію оптимальності, відкриває нові можливості для побудови інвестиційних стратегій із підвищеним контролем ризиків в умовах невизначеності [3].

У роботі проведено побудову оптимальних портфелів на основі реальних фінансових даних для декількох активів. Обчислення показника VaR виконано двома підходами — історичним методом, що базується на зібраних даних, та параметричним методом за припущенням нормального розподілу дохідностей. Результати дослідження демонструють переваги

та відмінності в методах побудови портфеля інвестора при використанні різних критеріїв оптимальності.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Alexander G.J., Baptista A.M. Economic implications of using a mean-VaR model for portfolio selection: A comparison with mean-variance analysis. *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2002. Vol.26, No.7-8. P.1159–1193.
- [2] Bodnar T., Schmid W., Zabolotsky T. Minimum VaR and minimum CVaR optimal portfolios: Estimators, confidence regions, and tests. *Statistics & Risk Modeling*. 2012. Vol. 29, No. 4. P. 281–314.
- [3] Solomanchuk, G., N. Shchestyuk. Risk modelling approaches for student-like models with fractal activity time. *Mohyla Mathematical Journal* 2021. Vol.4, P.28-33.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: yevheniia.danyliuk@ukma.edu.ua

АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ ПЕРІОДОГРАМНИХ ОЦІНОК У ПОЛЬОВІЙ ТРИГОНОМЕТРИЧНІЙ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ

О.В. ДИКИЙ, О.В. ІВАНОВ, І.М. САВИЧ

Позначимо $\langle \varphi, t \rangle = \sum_{l=1}^M \varphi_l t_l$, $\|t\| = \sqrt{\langle t, t \rangle}$ для векторів $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_M)$, $t = (t_1, \dots, t_M)$, $M \geq 3$. Розглянемо модель спостережень

$$X(t) = A^0 \cos(\langle \varphi^0, t \rangle) + \varepsilon(t), \quad t \in [0, \infty]^M,$$

де $A^0 > 0$, $\varphi^0 \in \Phi = \bigtimes_{m=1}^M (\underline{\varphi}_m, \overline{\varphi}_m)$, $0 < \underline{\varphi}_m < \overline{\varphi}_m < \infty$, $m = \overline{1, M}$. Припустимо, що φ_m^0 , $i = \overline{1, M}$ — різні числа, а випадковий шум ε задовольняє наступні умови.

С. ε — вибірково неперервне однорідне гауссівське поле з нульовим середнім та коваріаційною функцією $B(t) = \mathbb{E} \varepsilon(t) \varepsilon(0)$, $t \in \mathbb{R}^M$, причому виконується одне з припущень:

- (i) ε — ізотропне поле і $B(t) = \tilde{B}(\|t\|) = L(\|t\|) / \|t\|^\alpha$,
 $\alpha \in (0, M - [\frac{M}{2}])$, з неспадною повільно змінною на нескінченності функцією L ;
- (ii) $B(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}^M)$.

С. За умови **С(i)** випадковий шум ε має спектральну щільність

$$f(\lambda) = \tilde{f}(\|\lambda\|) = c(\alpha) \|\lambda\|^{\alpha-M} L_s \left(\frac{1}{\|\lambda\|} \right),$$

де $c(\alpha) = \frac{\Gamma(\frac{M-\alpha}{2})}{2^\alpha \pi \Gamma(\frac{\alpha}{2})}$, α збігається з α з **С(i)**, L_s є локально обмеженою повільно змінною на нескінченності функцією такою, що f неперервна на множині $\mathbb{R}^M \setminus \{0\}$ і $\tilde{f}(r) \uparrow \infty$, при $r \rightarrow 0$.

За умови **С(ii)** неперервна обмежена спектральна щільність $f(\lambda)$ поля ε існує автоматично.

Для забезпечення правильності подальших формулювань ми вводимо необтяжливу умову для всіх спектральних щільностей у нашому тексті.

S⁺. $f(\lambda) > 0$, $\lambda \in \Phi$.

Лема 1. Якщо виконуються умови $\mathbf{C}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}^+$, то вектор $T^{\frac{M}{2}-1} \nabla Q_T (\varphi^0)$ асимптотично при $T \rightarrow \infty$ нормальний $N(0, K_3)$, де

$$K_3 = \frac{2}{3} (2\pi)^M (A^0)^2 f(\varphi^0) \mathbb{I}_M.$$

Лема 2. Якщо виконуються умови лема 1, тоді

$$T^{-2} H(Q_T(\tilde{\varphi}_T)) \xrightarrow{\mathbb{P}} -\frac{1}{6} (A^0)^2 \mathbb{I}_M \text{ при } T \rightarrow \infty,$$

H – матриця других похідних Q_T у проміжних точках $\tilde{\varphi}_T$ між φ^0 і φ_T .

Теорема 1. За умов $\mathbf{C}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}^+$ вектор $T^{\frac{M}{2}+1} (\varphi_T - \varphi^0)$ асимптотично при $T \rightarrow \infty$ нормальний $N(0, K_4)$, де $K_4 = 24 (2\pi)^M (A^0)^{-2} f(\varphi^0) \mathbb{I}_M$.

Теорема 2. Якщо виконуються умови $\mathbf{C}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}^+$, величина $T^{\frac{M}{2}} (A_T - A^0)$ асимптотично при $T \rightarrow \infty$ нормальна $N(0, \sigma_A^2)$, де $\sigma_A^2 = 2 (2\pi)^M f(\varphi^0)$.

Теорема 3. Якщо виконуються умови $\mathbf{C}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}^+$, то вектор $\zeta_T = \left(T^{\frac{M}{2}} (A_T - A^0), T^{\frac{M}{2}+1} (\varphi_{1T} - \varphi_1^0), \dots, T^{\frac{M}{2}+1} (\varphi_{MT} - \varphi_M^0) \right)$ асимптотично при $T \rightarrow \infty$ нормальний $N(0, K_5)$, де

$$K_5 = (2\pi)^M f(\varphi^0) \begin{bmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 24 (A^0)^{-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 24 (A^0)^{-2} \end{bmatrix}.$$

Сформульовані твердження узагальнюють результати роботи [1] для випадку $M = 2$ та використовують деякі результати робіт [2], [3] для $M \geq 3$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Іванов, О.В., Лимар, О.В. Асимптотичні властивості періодограмних оцінок параметрів тригонометричної моделі спостережень на площині // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2019. — 2(101). — С. 115–133.
- [2] Ivanov, A.V., Savych, I.M. *n the least squares estimator asymptotic normality of the multivariate symmatric textured surface parameters* // Theor. Probability and Math Statist. — 2021. — 105. — С. 151–169.
- [3] Dykyi, O.V., Ivanov, A.V. *Consistency of LSE for the many-dimensional symmetric textured surface parameters* // Modern Stoch. Theory Appl. — 2023. — 10(3). — С. 267–285.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: dykyiolexandr@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: alexntuu@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: sim7ka@gmail.com

ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНО ЗАКРІПЛЕНОЇ КРУГЛОЇ МЕМБРАНИ

Б.О. ЄВДОКИМЕНКО

Розглянемо задачу: знайти поперечні коливання круглої однорідної мембрани радіуса R , викликані неперервно розподіленою по мембрані силою щільності $f(t) = q \sin \omega t$, що діє з моменту $t = 0$, якщо край мембрани пружно закріплений.

Математична постановка цієї задачі наступна: знайти розв'язок мішаної задачі

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \right) + \frac{q}{\rho} \sin \omega t, \quad 0 \leq r < R, \quad t > 0, \\ |u(0, t)| &< +\infty, \quad u_r(R, t) + hu(R, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(r, 0) &= 0, \quad u_t(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r < R. \end{aligned} \quad (1)$$

Будемо шукати розв'язок задачі (1) у вигляді розвинення $u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) R_k(r)$ у ряд Фур'є за власними функціями $R_k(r)$ задачі Штурма–Ліувілля.

Функції $R_k(r)$ задовольняють задачу Штурма–Ліувілля для рівняння Бесселя нульового порядку

$$\begin{aligned} R_k''(r) + \frac{1}{r} R_k'(r) + \lambda^2 R_k(r) &= 0, \\ |R_k(0)| &< +\infty, \quad R_k'(r) + h R_k(r) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

а функції $T_k(t)$ задовольняють задачу Коші

$$T_k''(t) + a^2 \lambda^2 T_k(t) = f_k(t), \quad T_k(0) = 0, \quad T_k'(0) = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

де $f_k(t)$ — коефіцієнти розкладу функції $f(t)$ у ряд Фур'є за власними функціями $R_k(r)$.

Розв'язуючи (2), знаходимо, що власні значення λ_k , $k \in \mathbb{N}$ — це корені рівняння

$$h J_0(\lambda R) = \lambda J_1(\lambda R).$$

Поклавши $\mu_k = \lambda_k R$, отримаємо, що відповідні власні функції рівні

$$R_k(r) = J_0 \left(\frac{\mu_k}{R} r \right),$$

і є ортогональними з вагою r . Квадрат норми власних функцій рівний

$$\|R_k(r)\|^2 = \frac{R^2 J_0^2(\mu_k)}{2\mu_k^2} (\mu_k^2 + R^2 h^2).$$

Розклавши функцію $\frac{q}{\rho} \sin \omega t$ у ряд Фур'є за власними функціями $R_k(r)$, знайшовши коефіцієнти розкладу $f_k(t)$, та розв'язавши задачі Коші (3), знаходимо, що

$$T_k(t) = \frac{2qR^2 J_1(\mu_k) \left(\omega R \sin \frac{a\mu_k}{R} t - a\mu_k \sin \omega t \right)}{\rho a (\mu_k^2 + R^2 h^2) (\omega^2 R^2 - a^2 \mu_k^2) J_0^2(\mu_k)}.$$

Звідси отримуємо, що розв'язок задачі (1) у випадку відсутності резонансу (тобто $\omega \neq \frac{a\mu_k}{R}$, $k \in \mathbb{N}$) рівний

$$u(r, t) = \frac{2qR^2}{\rho a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_k) \left(\omega R \sin \frac{a\mu_k}{R} t - a\mu_k \sin \omega t \right)}{(\mu_k^2 + R^2 h^2) (\omega^2 R^2 - a^2 \mu_k^2) J_0^2(\mu_k)} J_0 \left(\frac{\mu_k}{R} r \right). \quad (4)$$

Розв'язок задачі за наявності резонансу (тобто $\exists k_0 \in \mathbb{N}$: $\omega = \omega_{k_0} = \frac{a\mu_{k_0}}{R}$) можна отримати з розв'язку (4) граничним переходом при $\omega \rightarrow \omega_{k_0}$:

$$u(r, t) = \frac{q\mu_{k_0} J_1(\mu_{k_0}) (\sin \omega_{k_0} t - \omega_{k_0} t \cos \omega_{k_0} t)}{\rho \omega_{k_0}^2 (\mu_{k_0}^2 + R^2 h^2) J_0^2(\mu_{k_0})} J_0 \left(\frac{\mu_{k_0}}{R} r \right) + \\ + \frac{2qR^2}{\rho a} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^{\infty} \frac{J_1(\mu_k) \left(\omega_{k_0} R \sin \frac{a\mu_k}{R} t - a\mu_k \sin \omega_{k_0} t \right)}{(\mu_k^2 + R^2 h^2) (\omega_{k_0}^2 R^2 - a^2 \mu_k^2) J_0^2(\mu_k)} J_0 \left(\frac{\mu_k}{R} r \right).$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Вакал Є.С., Ловейкін А.В. *Методи математичної фізики в прикладах і задачах: навчальний посібник*. — Київ: Видавець Кравченко Я.О., 2020. — 188 с.
- [2] Watson G.N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Second edition*. — Cambridge University Press, 1980. — 804 с.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
 Email address: om11.yevdokymenko.bogdan@gmail.com

ПОБУДОВА МОДЕЛІ ПОТОЧНОГО ПРОГНОЗУВАННЯ ДЛЯ РЕГІОНАЛЬНИХ ЕКОНОМІЧНИХ ПОКАЗНИКІВ УКРАЇНИ З ВИКОРИСТАННЯМ КОРОТКИХ ДАНИХ ТА ЗМІШАНОЇ ЧАСТОТНОСТІ VAR

А.Д. ЖУРАВЛЬОВА

У задачі nowcasting економічної активності ми маємо справу з даними, які надходять з різною частотою — наприклад, щоквартальні індикатори y_t та щомісячні або щотижневі короткі індикатори z_t^r , що доступні лише для окремих регіонів r і лише з певного моменту часу $T_0^r < T$. Типовою проблемою є так званий «рваний край» (ragged edge), коли на момент прогнозування t деякі змінні вже спостерігаються, а інші ще ні, а також ситуація, коли деякі регіональні дані мають дуже коротку історію спостережень.

Ці труднощі виникають у багатьох країнах із затримками в офіційній статистиці та стають особливо критичними при прогнозуванні таких агрегованих показників, зокрема валової доданої вартості (ВДВ), яка є основою для обчислення ВВП. Для обробки такого типу даних використовуються моделі змішаної частотності типу MF-VAR, які можуть комбінувати різночастотні ряди, заповнювати пропущені значення та враховувати інформацію з коротких індикаторів за допомогою побудови латентних факторів.

У даній роботі розглядається модель nowcasting на базі змішаночастотної факторної VAR (MF-FAVAR), що враховує короткі та нерівномірно наявні регіональні економічні дані України. Нехай $t = 1, \dots, T$ — індекс часу, $r = 1, \dots, R$ — регіони, де один з них — місто Київ. Позначимо: Y_t^{UA} — ВДВ України, $y_t^{UA} = \log Y_t^{UA} - \log Y_{t-1}^{UA}$ — її квартальне зростання. Для регіону r : Y_t^r — регіональна ВДВ, $y_t^r = \log Y_t^r - \log Y_{t-1}^r$.

Річне значення та річне зростання визначаються як:

$$Y_t^{r,A} = Y_t^r + Y_{t-1}^r + Y_{t-2}^r + Y_{t-3}^r, \quad y_t^{r,A} = \log Y_t^{r,A} - \log Y_{t-4}^{r,A}.$$

Обмеження:

$$y_t^{r,A} = \frac{1}{4}y_t^r + \frac{1}{2}y_{t-1}^r + \frac{3}{4}y_{t-2}^r + y_{t-3}^r + \frac{3}{4}y_{t-4}^r + \frac{1}{2}y_{t-5}^r + \frac{1}{4}y_{t-6}^r,$$

$$y_t^{UA} \approx \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R y_t^r.$$

VAR-модель:

$$By_t = Ax_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

де x_t — лаги y_t , B — нижньотрикутна матриця. У MF-FAVAR розширення: $y_t = (y_t^{UA}, y_t^Q, f_t)$, де f_t — вектор регіональних факторів із коротких індикаторів Z_t^r .

Методи побудови факторів:

- **ЕМРСА** — ітеративний метод з РСА та ЕМ для заповнення пропусків;
- **TW (Tall-Wide)** — неітеративний метод, що показав найкращу якість прогнозу;
- **TP (Tall-Project)** — регресійне заповнення пропусків на основі <tall блоку.

Для регуляризації використовуються Adaptive Lasso. Для порівняння також була оцінена модель BVAR:

$$y_t = \Phi_1 y_{t-1} + \dots + \Phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t,$$

що показала найкращу точність за метрикою MSCE серед усіх моделей.

Запропонована модель може бути використана для оперативного планування на регіональному рівні, що дозволить уряду та бізнесу приймати швидкі та обґрунтовані рішення. Також модель може бути адаптована для аналізу економічної активності в інших країнах із подібними обмеженнями у доступності даних.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Gary Koop, Stuart McIntyre, James Mitchell, Aubrey Poon, and Ping Wu. *Incorporating Short Data into Large Mixed-Frequency VARs for Regional Nowcasting* // Federal Reserve Bank of Cleveland Working Paper Series — May 2023
- [2] Jack Fosten, Ryan Greenaway-McGrevy. *Panel data nowcasting*. // *Econometric Reviews*, 41:7, 675-696 — 2022.
- [3] Mihnea Constantinescu, Kalle Kappne, Nikodem Szumilo. *The Warcast Index: Estimating Economic Activity without Official Data during the Ukraine War in 2022* // NBU Working Papers — March 2024

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: a.zhuravlova@ukma.edu.ua

ОДИН КЛАС ФУНКЦІЙ, ЩО Є РОЗВ'ЯЗКОМ СИСТЕМИ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

А.О. КОСЯНЧУК

Функції, множини особливостей різного роду яких є фракталами в широкому чи вузькому сенсі, ми відносимо до фрактальних функцій (функцій з фрактальними властивостями). До таких множин відносять множину значень, множину визначення, множини рівнів, множини точок росту функції тощо.

Сьогодні існує кілька підходів до задання та дослідження функцій з фрактальними властивостями. Один з таких підходів є задання системою функціональних рівнянь. Серед відомих прикладів фрактальних функцій, означених з допомогою системи функціональних рівнянь, є сингулярна (неперервна, відмінна від константи, похідна якої рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега) функція Салема [1]:

$$\begin{cases} f(q_0x) = p_0f(x), \\ f(q_0 + q_1x) = p_0 + (1 - p_0)f(x), \end{cases}$$

де $p_0 \in (0; 1)$, $q_0 \in (0; 1)$.

Нехай $(0; 1) \ni q_0$ — фіксований параметр, $q_1 \equiv 1 - q_0$. Розглядається система функціональних рівнянь

$$\begin{cases} f(q_1x) = q_0f(x - \frac{q_0}{q_1}), \\ f(q_0x) = q_1f(x) + q_0. \end{cases} \quad (1)$$

Теорема 1. *В просторі неперервних обмежених функцій, визначених на відрізку $[0; 1]$, розв'язком системи функціональних рівнянь (1) є лінійна функція, якщо $q_0 = \frac{1}{2}$, і сингулярна функція, якщо $q_0 \neq \frac{1}{2}$.*

У доповіді пропонуються результати дослідження структурних та диференціальних властивостей функції f .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Salem R. *On some singular monotonic functions which are strigly increasing.* // Trans. Amer. Math. Soc., 1943. Vol.53. P.423-439.
- [2] Працевитый Н.В. *Непрерывные канторовские проекторы.* // Методы исследования алгебраических и топологических структур. — К.: КГПИ, 1989. — С.95-105.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: 21fmf.a.kosianchuk@std.npu.edu.ua

ОЦІНЮВАННЯ ЙМОВІРНОСТІ БАНКРУТСТВА ДЛЯ БІНОМІАЛЬНО- φ -СУБГАУССОВОЇ МОДЕЛІ РИЗИКУ

А.Ю. КРАВЕЦЬ

- (1) N_t — випадковий процес, що описує кількість страхових подій відповідно до біноміального розподілу $P(N_t = k) = \binom{n}{k} \theta(t)^k (1 - \theta(t))^{n-k}$, де $0 \leq k \leq n$, $|\theta(t) - \theta(s)| \leq \mu |t - s|$ для деякого $\mu > 0$,
- (2) Y_i є незалежними між собою випадковими величинами, що мають однаковий закон розподілу, $E(Y_i) = 0$,
- (3) N_t та послідовність випадкових величин $(Y_1, Y_2, \dots)$ є незалежними,
- (4) випадкові величини Y_i належать простору $\text{Sub}_\varphi(\Omega)$.

Теорема 1. Нехай $X(t) = S(t) - f(t)$, де $\left\{ S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, t \in B \right\}$ — випадковий процес для якого виконуються умови (1)–(4) та $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Тоді для всіх $p \in (0; 1)$ справджуються нерівності:

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{t \in [0,1]} (S(t) - ct) > x \right\} &\leq Z_r(p; \beta; x), \\ P \left\{ \sup_{t \in [0,1]} (S(t) - ct) < -x \right\} &\leq Z_r(p; \beta; x), \\ P \left\{ \sup_{t \in [0,1]} |S(t) - ct| > x \right\} &\leq 2Z_r(p; \beta; x), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} Z_r(p; \beta; x) &\leq \inf_{p \in (0,1)} n(n+1)^{\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E} Y_1^2 \beta^2 p^{\frac{1}{\alpha}-4} \cdot (1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} \times \\ &\times \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ W(\lambda; p; \beta) + \frac{n\beta^2 (\lambda \tau_\varphi(Y_1))^2 p^3}{2\mathbb{E} Y_1^2 (1-p)^2} + \frac{\lambda \beta^2 p^4}{(1-p^2)n\mathbb{E} Y_1^2} - \lambda x \right\}, \\ W(\lambda; p; \beta) &= \inf_{\nu \geq (1-p)^{-1}} \left(\frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{n\mathbb{E} Y_1^2}{(\beta p)^2} \right) + \right. \\ &\left. + \sup_{u \in [0,1]} \left[\frac{n}{\nu} \ln \left(u \cdot \exp \left\{ \frac{(\lambda \tau_\varphi(Y_1))^2}{2} \right\} + 1 - u \right) - \lambda c u \right] \right). \end{aligned}$$

Теорема 2. Нехай $X(t) = S(t) - f(t)$, де $\left\{ S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, t \in B \right\}$ – випадковий процес для якого виконуються умови (1)-(4) та $\varphi(x) = \frac{|x|^\omega}{\omega}$, $x \in \mathbb{R}$ коли $1 < \omega \leq 2$. Тоді для всіх $p \in (0; 1)$ справджуються нерівності:

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{t \in [0,1]} (S(t) - ct) > x \right\} &\leq Z_r(p; \beta; x), \\ P \left\{ \sup_{t \in [0,1]} (S(t) - ct) < -x \right\} &\leq Z_r(p; \beta; x), \\ P \left\{ \sup_{t \in [0,1]} |S(t) - ct| > x \right\} &\leq 2Z_r(p; \beta; x), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} Z_r(p; \beta; x) &\leq \inf_{p \in (0,1)} n(n+1)^{\frac{1}{\alpha}} \mathbb{E}Y_1^2 \beta^2 p^{\frac{1}{\alpha}-4} \cdot (1-2\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}} \times \\ &\times \inf_{\lambda > 0} \exp \left\{ W(\lambda; p; \beta) + \frac{n\beta^2(\lambda|\tau_\varphi(Y_1)|)^\omega}{\omega \mathbb{E}Y_1^2} \frac{p^{5-\omega}}{(1-p^{3-\omega})(1-p)^{\omega-1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda\beta^2 p^4}{(1-p^2)n\mathbb{E}Y_1^2} - \lambda x \right\}, \\ W(\lambda; p; \beta) &= \inf_{\nu \geq (1-p)^{-1}} \left(\frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{n\mathbb{E}Y_1^2}{(\beta p)^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{u \in [0,1]} \left[\frac{n}{\nu} \ln \left(u \cdot \exp \left\{ \frac{(\lambda|\tau_\varphi(Y_1)|)^\omega}{\omega} \right\} + 1 - u \right) - \lambda c u \right] \right). \end{aligned}$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V. *Metric characterization of random variables and random processes* // American Mathematical Society, Providence RI, 2000.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: a.kravets.om91@kpi.ua

ВЕКТОРНИЙ ПОТЕНЦІАЛ СОЛЕНОЇДАЛЬНОГО ПОЛЯ

І.С. ЛАСКІН, О.Г. БІЛИЙ

Твердження 1. Рівність $\mathbf{F} = \nabla u$ надає умову того, що векторне поле, породжене $\mathbf{F}$, де u — деяка скалярна функція, є потенціальним, а u — його потенціалом. Якщо таке поле задано, то знайти його дуже важливу характеристику u , використовуючи незалежність відповідного криволінійного інтеграла від шляху інтегрування, а значить і того, що диференціальна форма $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ є повним диференціалом, зовсім нескладно.

Твердження 2. Інша ситуація із соленоїдальним полем. Знову із рівності $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{a}$ випливає, що поле, породжене $\mathbf{F}$, де $\mathbf{a}$ — вектор, є соленоїдальним, а $\mathbf{a}$ — його векторним потенціалом, знайти який значно складніше.

Дійсно, маємо таку систему диференціальних рівнянь у координатній формі:

$$\begin{cases} \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} = P, \\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} = Q, \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} = R. \end{cases}$$

Зауваження 1. Якщо існує вектор $\mathbf{a}$, що задовольняє цим умовам, то і вектор $\mathbf{a} + \nabla u$ для будь-якої неперервно диференційованої скалярної функції u також задовольняє системі, бо $\nabla \times (\nabla u) = \mathbf{0}$. Це означає, що векторний потенціал соленоїдального поля визначається неоднозначно, так само як і потенціал u для потенціального поля.

Відмітимо також той факт, що будь-яке векторне поле $\mathbf{F}$ можна подати у вигляді:

$$\mathbf{F} = \mathbf{U} + \mathbf{V},$$

де $\mathbf{U}$ — потенціальне поле, а $\mathbf{V}$ — соленоїдальне. А якщо поле задовольняє одночасно умовам $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ та $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, то воно називається гармонічним.

Приклад 1. Задано поле: $\mathbf{F} = 3x^2y \mathbf{i} - 2xy^2 \mathbf{j} - 2xyz \mathbf{k}$.

Перевіримо, що поле є соленоїдальним:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 6xy - 4xy - 2xy = 0.$$

Покладемо $a_z = z^4$.

Маємо систему:

$$\begin{cases} P = 3x^2y = -\frac{\partial a_y}{\partial z}, \\ Q = -2xy^2 = \frac{\partial a_x}{\partial z}, \\ R = -2xyz = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}. \end{cases}$$

Звідки, інтегруючи, знаходимо:

$$a_x = -2xy^2z, \quad a_y = -3x^2yz.$$

Отже,

$$\mathbf{a} = -2xy^2z \mathbf{i} - 3x^2yz \mathbf{j} + z^4 \mathbf{k}.$$

Приклад 2. Задано поле: $\mathbf{F} = 8xy \mathbf{i} + (3x^2 - y^2 - 2y) \mathbf{j} + (z + x^2y) \mathbf{k}$.

Представимо його як $\mathbf{F} = \mathbf{U} + \mathbf{V}$, де $\mathbf{U}$ — потенціальне, а $\mathbf{V}$ — соленоїдальне.

Знайдемо ротор:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 8xy & 3x^2 - y^2 - 2y & z + x^2y \end{vmatrix} = x^2 \mathbf{i} - 2xy \mathbf{j} - 2x \mathbf{k}.$$

Система для $\mathbf{V} = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} + V_z \mathbf{k}$, при $V_y = -y^2$:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_z}{\partial y} = x^2, \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} = -2xy, \\ -\frac{\partial V_x}{\partial y} = -2x. \end{cases}$$

Звідки:

$$V_x = 2xy, \quad V_y = -y^2, \quad V_z = x^2y.$$

Отже:

$$\mathbf{V} = 2xy \mathbf{i} - y^2 \mathbf{j} + x^2y \mathbf{k}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{F} - \mathbf{V} = 6xy \mathbf{i} + (3x^2 - 2y) \mathbf{j} + z \mathbf{k}.$$

Перевірка:

$$\nabla \times \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Пільтяй С.І. *Електродинаміка та поширення радіохвиль. Практикум: навчальний посібник для студентів спеціальності 172 «Телекомунікації та радіотехніка»*. — Київ: НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2021. — 54 с.
- [2] Фіхтенгольц Г.М. *Курс диференціального та інтегрального числення. Т.1, Т.2.* — [інтернет-джерело], 2022–2023. — 1302 с.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: laskin100@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: belyi.oleksandr@gmail.com

КЕРОВАНІ МАРКОВСЬКІ ПОЛЯ ТА ЇХНІ ЗАСТОСУВАННЯ В ЕКОНОМІЦІ

Н.Ю. МАГДИЧ

Керовані поля Маркова є інструментом для побудови моделей, що дозволяють врахувати вплив випадкових процесів на систему та зовнішнє управління, що здійснюється агентами [1]. Таким чином, щоб визначити кероване поле Маркова необхідно визначити марковське випадкове поле та керування у вершинах.

Означення 1. Марковське випадкове поле — випадкова величина ξ , визначена на (Ω, F, P) просторі, що залежить від часу t та задовольняє умову:

$$P(\xi_k^{(t+1)} = y'_k \mid \xi_{(V-k)}^t = x_{(V-k)}^t, \dots) = P(\xi_k^{(t+1)} = y_k \mid \xi_{(N(k))}^t = x_{(N(k))}^t)$$

В роботі [2] доведено існування оптимальної стратегії з множини локальних, стаціонарних, детермінованих стратегій, що є відображеннями множини станів околу вершини на множину допустимих дій агента у вершині.

Означення 2. Марковська локальна, детермінована стратегія — відповідність δ_k між значенням випадкової величини $\xi_{\tilde{N}(k)}^t$ в повному околі вершини k та елементом u_k^t з множини можливих дій в вершині k ;

Модель дозволяє прогнозувати та оптимізувати процеси управління в умовах невизначеності та ризику. Дослідження спирається на теоретичні відомості про контрольовані поля Маркова з локальною, синхронною взаємодією [2]. Ця робота зосереджена на побудові моделей економічних процесів. Головним обмеженням для моделі є складність обчислень, тому розглянута оцінка складності пошуку оптимального локального керування.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Knopov Pavel S. SOME APPLIED PROBLEMS FROM RANDOM FIELD THEORY // Cybernetics and Systems Analysis. — 2010. — Vol. 46, no. 1.
- [2] Ruslan K. Chornei Hans Daduna, Knopov Pavel S. Controlled Markov Fields With Finite State Space on Graphs // Stochastic Models. — 2005. — Vol. 21. — P. 1–28.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Email address: nazar.mahdych@ukma.edu.ua

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ КОШІ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНИХ ФУНКЦІЙ

I.V. МАНАЄНКО, V.V. ПАВЛЕНКОВ

Доповідь буде присвячена функціональним рівнянням типу Коші для комплекснозначних функцій:

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad x \in \mathbb{C}, \quad y \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

які природнім чином узагальнюють звичайне (експоненційне) функціональне рівняння Коші.

Зрозуміло, що функції

$$f(z) = e^{\zeta z}, \quad z \in \mathbb{C},$$

де ζ — деяке фіксоване комплексне число, є розв'язками (1).

Виявляється, що існують і неаналітичні вимірні розв'язки рівняння (1). Це контрастує з дійснозначним випадком, де вимірні розв'язки є нескінченно диференційованими.

Теорема 1. *Нехай вимірна функція $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ є розв'язком функціонального рівняння (1). Тоді існують комплексні сталі ζ та ξ , такі, що*

$$f(z) = \exp\{\zeta z + \xi \bar{z}\}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] J. ACZÉL and J. DHOMBRES FUNCTIONAL EQUATIONS IN SEVERAL VARIABLES

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Email address: imanaenko5@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна, UNIVERSITY OF YORK, YORK, UK

Email address: pavlenkovvolodymyr@gmail.com

V. Pavlenkov is supported by the British Academy in partnership with the Academy of Medical Sciences, the Royal Academy of Engineering, the Royal Society and Cara under the *Researchers at Risk Fellowships* Award RAR\100132.

СТАТИСТИЧНА ОЦІНКА ТА ПЕРЕВІРКА ГІПОТЕЗ ДЛЯ ІМПУЛЬСНОЇ ПЕРЕХІДНОЇ ФУНКЦІЇ

А.О. МЕЛЬНИК, І.В. РОЗОРА

Розглянемо лінійну однорідну систему з дійснозначною імпульсною перехідною функцією (ІПФ) $H(\tau)$, визначеною на відрізку $[0, \Lambda]$. Вихідний сигнал $Y(t)$ пов'язаний з вхідним сигналом $X(t)$ через згорткове інтегральне рівняння:

$$Y(t) = \int_0^\Lambda H(\tau)X(t - \tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R},$$

де $H(\tau) \in L_2([0, \Lambda])$.

Задача полягає у статистичному оцінюванні $H(\tau)$ на основі спостережень $X(t)$ та $Y(t)$. Припустимо, що $X(t)$ — стаціонарний гауссівський процес з нульовим математичним сподіванням. Для наближення $X(t)$ використовується скінченний тригонометричний ряд:

$$X_N(u) = \sqrt{\frac{2}{\Lambda}} \sum_{k=1}^N \left(\xi_k \cos\left(\frac{2k\pi u}{\Lambda}\right) + \eta_k \sin\left(\frac{2k\pi u}{\Lambda}\right) \right),$$

де ξ_k, η_k — некорельовані гауссівські випадкові величини.

Оцінку ІПФ у точці $\tau > 0$ визначимо у вигляді сумісної емпіричної корелограми:

$$\hat{H}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T Y(t)X(t - \tau) dt,$$

де $T > 0$ — параметр усереднення. Такий підхід розглянуто в [1, 2].

Розглянемо наступні умови:

Умова А. Функція $H(\tau)$ має двічі неперервну похідну на $[0, \Lambda]$, а також виконуються: $I_0 = \int_0^\Lambda |H(\tau)| d\tau < \infty$, $I_1 = \left(\int_0^\Lambda |H'(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} < \infty$, $I_2 = \int_0^\Lambda |H''(\tau)| d\tau < \infty$.

Умова В. Виконується рівність: $H(0) = H(\Lambda)$. Позначимо $d = |H'(0)| + |H'(\Lambda)|$.

Лема. [3] Нехай виконуються умови А, В. Тоді справедливі оцінки:

$$|H^*(\tau) - \mathbb{E}[\hat{H}(\tau)]| \leq \frac{\Lambda(d + I_2)}{2\pi^2 N}, \quad \text{Var}[\hat{H}(\tau)] \leq \frac{\Lambda^3(\Lambda + 2)I_1^2}{\pi^4 T^2} \left(2 - \frac{1}{N} \right)^2,$$

$$\text{де } H^*(\tau) = H(\tau) - a_0, \quad a_0 = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \int_0^\Lambda H(\tau) d\tau.$$

При $T, N \rightarrow \infty$ оцінка $\hat{H}(\tau)$ є асимптотично незміщеною та конзистентною.

Теорема. Нехай виконуються умови A, B . Тоді для

$$\varepsilon \geq \left(\left(\frac{p}{\sqrt{2}} + \sqrt{\left(\frac{p}{2} + 1 \right) p} \right) \Lambda^{\frac{1}{p}} \gamma_0 + \Lambda h_{N,\Lambda}^* \right)^p$$

справедлива оцінка

$$P \left\{ \int_0^\Lambda |H^*(\tau) - \hat{H}(\tau)|^p d\tau > \varepsilon \right\} \leq 2 \sqrt{1 + \frac{(\varepsilon^{\frac{1}{p}} - \Lambda h_{N,\Lambda}^*) \sqrt{2}}{\Lambda^{\frac{1}{p}} \gamma_0}} e^{-\frac{\varepsilon^{1/p} - \Lambda h_{N,\Lambda}^*}{\sqrt{2} \Lambda^{1/p} \gamma_0}}.$$

Отримані результати дозволяють побудувати критерій перевірки гіпотез про форму ІПФ. Нехай $H_0: H(\tau) = H_0(\tau)$ — нульова гіпотеза. Тоді статистика тесту має вигляд деякої функції від відхилення між $H(\tau)$ та $\hat{H}(\tau)$ на інтервалі від 0 до Λ , яка порівнюється з критичним значенням ε^* . Це критичне значення відповідає заданому рівню значущості δ .

У числовому експерименті розглядалася функція $H(\tau) = \tau(e^{-\tau} - e^{-\Lambda})$. Було досліджено залежність мінімального значення параметра T від вибраної точності ε , рівня значущості δ та кількості членів ряду N . Результати підтверджують, що зі зростанням N значення T можна зменшити, що узгоджується з теоретичними оцінками [4].

Запропонований підхід придатний для аналізу лінійних систем у різних прикладних задачах, зокрема в обробці сигналів, автоматичному керуванні, економетриці та океанології.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Kozachenko Y., Rozora I. *Cross-correlogram estimators of impulse response functions* // Theory Probab. Math. Stat. — 2016. — Vol. 93. — P. 79–91.
- [2] Розора І.В. *Про швидкість збіжності для оцінки імпульсної перехідної функції у просторі $L_p(T)$* // Вісн. Київський національний університет імені Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки. — 2018. — № 4. — С. 36–41.
- [3] Kozachenko Y., Rozora I. *On statistical properties of the estimator of impulse response function* // Stoch. Proc., Stat. Methods, Eng. Math. — 2023. — Vol. 408. — P. 563–586.
- [4] Rozora I., Melnyk A. *Statistical Estimation and Hypothesis Testing on Impulse Response Function* // Austrian J. Stat. — 2025. — Vol. 54, No. 1. — P. 200–213.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Київ, Україна
Email address: anastasiia.melnyk@knu.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Київ, Україна
Email address: irozora@knu.ua

СТОХАСТИЧНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ У МОДИФІКОВАНІЙ ЗАДАЧІ ПОШУКУ НАЙКРАЩОГО СЕКРЕТАРЯ

Д.Л. МЕЛЬНИК

У класичній задачі оптимальної зупинки [1] з деякої скінченної множини альтернатив $D = \{d_1, \dots, d_N\}$ необхідно обрати найкращу, переглядаючи їх послідовно без можливості повернення. Оптимальна стратегія передбачає відхилення перших r кандидатів із запам'ятовуванням найкращого серед них, після чого — вибір першого, хто кращий за всіх попередніх. Відомо, що максимальна ймовірність успіху $P \approx 0.37$ досягається при $r \approx N/e$ [1].

Проте, у ряді прикладних завдань мета вибрати найкращу альтернативу може виявитися надмірною. Достатньо використати оптимальну стратегію, що буде обирати альтернативу, близьку до найкращої (модифікована задача). Для цього вводиться поступка $\Delta \geq 0$, і перевіряється, щоб обрана альтернатива $\tilde{d}^*$ відрізнялась від найкращої d^* за деяким суперкритерієм x^0 не більше, ніж на Δ [2, 4]:

$$\left| x^0(\tilde{d}^*) - x^0(d^*) \right| \leq \Delta.$$

Для розв'язання даної задачі доречно використати статистичний експеримент. Правильно організований статистичний експеримент — ефективний метод дослідження поведінки об'єкта у випадкових умовах, який дозволяє за допомогою методу Монте-Карло [3] та моделювання оцінити характеристики об'єкта. У цьому експерименті генерується велика кількість вибірок при різних значеннях поступок Δ , на основі чого визначаються оптимальні кроки зупинки [4].

Крім класичного рівномірного розподілу, також розглядаються інші типи, зокрема нормальний та експоненційний, що дозволяє оцінити вплив форми розподілу на ймовірність успішного вибору.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Ferguson, T.S., 2003. «Who Solved the Secretary Problem?» / Ferguson, T.S. // Statistical Science — 2003 — Vol. 4, No. 3 — P. 282–289.
- [2] Fainzilberg, L.S. Modified optimal stopping method in the problem of a sequential alternatives analysis / L.S. Fainzilberg // International Research and Training Center for Information Technologies and Systems of the NAS and MES of Ukraine, Glushkov ave., 40, Kyiv, 03187, Ukraine – 2019. – P. 11–21.

- [3] Rubinstein, R.Y., Kroese, D.P. Simulation and the Monte Carlo Method / Rubinstein, R.Y., Kroese, D.P. // New York — 2016. — 432 p.
- [4] Fainzilberg, L., Yaremenko, Yu. Computer Modeling of the Modified Method of Optimal Stopping / Fainzilberg, L., Yaremenko, Yu. // Proceedings of the International Scientific Conference “Information Technologies and Computer Modeling”, Ivano-Frankivsk — 2018. — P. 270–273.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: danik.melnyk2004@gmail.com

ЕРГОДИЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ СДР, КЕРОВАНИХ ПРОЦЕСОМ ЛЕВІ

Я.Г. МОКАНУ

Доповідь присвячено достатнім умовам ергодичності розв'язків СДР, керованих процесом Леві,

$$\begin{aligned} X_t = & X_0 + \int_0^t \ell(X_{s-})ds + \int_0^t Q(X_{s-})dB(s) \\ & + \int_0^t \int_{u \neq 0} k(X_{s-}, u) \mathbb{1}_{|k(X_{s-}, u)| \leq 1} (\mathcal{N}(du, ds) - \nu(du)ds) \\ & + \int_0^t \int_{u \neq 0} k(X_{s-}, u) \mathbb{1}_{|k(X_{s-}, u)| > 1} \mathcal{N}(du, ds), \end{aligned}$$

де $\ell: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $k: \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}^d$, $Q: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ — деяка невід'ємно визначена матриця, $\mathcal{N}(du, ds)$ — випадкова міра Пуассона з компенсатором $\nu(du)ds$.

Для доведення використовуються аналітичні методи, а саме перевіряється умова Ляпунова для розширеного генератора напівгрупи, побудованої за процесом X_t .

Означенні умови надаються в термінах міри Леві відповідного процесу та можуть бути застосовані до випадку відсутності дрейфу.

Доповідь спирається на результати сумісної праці з В.П. Кноповою.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Böttcher B., Schilling R., Wang J. *Lévy-Type Processes: Construction, Approximation and Sample Path Properties*. Springer, Lecture Notes in Mathematics vol. 2099 (Lévy Matters III), Cham 2013.
- [2] Кнопova V., Mokuanu Y. *On Lyapunov condition for the solution to a Lévy-driven SDE in $\mathbb{R}^d$* . (in preparation).
- [3] Kulik A. *Ergodic Behaviour of Markov Processes*. de Gruyter, Berlin, 2017.
- [4] Sandrić N. *Ergodicity of Lévy-type processes*. // ESAIM: PS — 2016. — V. 20, № 1. — P. 154–177.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: yana.mokanu3075@gmail.com

ПОБУДОВА АСИМПТОТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЛІНІЙНОГО НЕОДНОРІДНОГО СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

А.В. НЕХАЙ, С.П. ПАФИК

Використовуючи асимптотичні методи, досліджено питання побудови загального розв'язку задачі Коші для лінійного неоднорідного сингулярно збуреного диференціального рівняння другого порядку вигляду:

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon a(t; \varepsilon) \frac{dx}{dt} + b(t; \varepsilon)x = f(t; \varepsilon), \quad (1)$$

$$x(t_0; \varepsilon) = p(\varepsilon), \quad \frac{dx(t_0; \varepsilon)}{dt} = d(\varepsilon), \quad (2)$$

в якій $x(t, \varepsilon)$ — шукана функція, $a(t, \varepsilon)$, $b(t, \varepsilon)$, $f(t, \varepsilon)$ — відомі функції дійсної змінної, ε — малий дійсний параметр, $p(\varepsilon)$, $d(\varepsilon)$ — вирази залежні від малого параметра ε , $t \in [0; T]$, $T > 0$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$.

Задачу (1), (2) було досліджено при виконанні наступних умов:

1°. Функції $a(t, \varepsilon)$, $b(t, \varepsilon)$, $f(t, \varepsilon)$ і вирази $p(\varepsilon)$, $d(\varepsilon)$ представляються у вигляді асимптотичних розвинень за степенями малого параметра ε :

$$a(t; \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k a_k(t), \quad b(t; \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k b_k(t), \quad f(t; \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k f_k(t),$$

$$p(\varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k p_k, \quad d(\varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k d_k.$$

2°. Функції $a_k(t)$, $b_k(t)$, $f_k(t)$, $k = 0, 1, \dots$ — нескінченно диференційовні на відрізку $[0; T]$.

3°. Рівняння $\lambda_0^2(t) + a_0(t)\lambda_0(t) + b_0(t) = 0$ має два різних розв'язки $\lambda_0^{(1)}(t)$, $\lambda_0^{(2)}(t)$ такі, що $\lambda_0^{(1)}(t) \neq \lambda_0^{(2)}(t)$, $\forall t \in [0; T]$.

4°. $b_0(t) \neq 0$, $\forall t \in [0; T]$.

5°. $\operatorname{Re}(\lambda_0^i(t)) < 0$, $i = 1, 2$, $\forall t \in [0; T]$.

В результаті було доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови $1^\circ - 5^\circ$, то задача Коші (1), (2) має формальний розв'язок*

$$x(t; \varepsilon) = C_1(\varepsilon) \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \lambda^{(1)}(\tau, \varepsilon) d\tau \right) + C_2(\varepsilon) \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \lambda^{(2)}(\tau, \varepsilon) d\tau \right) + \bar{x}(t; \varepsilon), \quad (3)$$

який є асимптотичним розвиненням точного розв'язку задачі Коші (1), (2) при прямуванні малого параметра ε до нуля.

Зауваження 1. Функції $\lambda^{(1)}(t, \varepsilon)$, $\lambda^{(2)}(t, \varepsilon)$, $\bar{x}(t; \varepsilon)$ в формулі (3) визначаються через коефіцієнти рівняння (1) та початкові умови (2).

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Самойленко А.М., Перестюк П.О., Парасюк І.О. *Диференціальні рівняння*. — Київ: Либідь, 2003. — 600 с.
- [2] 2. Пафик С. П. *Асимптотичне розв'язання двоточної крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у некритичному та критичному стійких випадках* // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка — 2019. — Т. 40, № 1. — С. 19–25.
- [3] Шкіль М.І. *Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях*. — Київ: Вища школа, 1971. — 228 с.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: 21fmf.a.nekhai@std.udu.edu.ua

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: s.p.pafyk@udu.edu.ua

ПІДГОТОВКА ДАНИХ ЩОДО ЕПІДЕМІЇ ВІЛ/СНІД ДЛЯ АКТУАРНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Є.М. ОКУНЄВ, О.І. ВАСИЛИК

Для проведення актуарного дослідження нам потрібні дані про стан епідемії ВІЛ/СНІД в Україні. Хоча ці дані є у відкритому доступі, їхній формат не є придатним для імпорту в R, MS Excel або Wolfram Mathematica. Тож дані потребують попередньої обробки та стандартизації.

Основні кроки:

- OCR-зчитування (використано ABBYY для зчитування табличної структури)
- Стандартизація таблиць
- Усунення помилок OCR
- Оцінка регіональних популяцій
- Виявлення й виправлення помилок у початкових таблицях
- Заповнення клітинок зі значеннями NA, де це можливо

PDF-файли після OCR було вручну перенесено до шаблонної таблиці з такими колонками:

- HIV.N / AIDS.N — нові випадки ВІЛ / СНІД за місяць.
- HIV.N.100K.POP / AIDS.N.100K.POP — те саме, на 100 тис. населення.
- AIDS.D — смертність від СНІДу за місяць.
- AIDS.D.100K.POP — смертність від СНІДу на 100 тис. населення.
- HIV.T / AIDS.T — кількість осіб з ВІЛ / СНІДом під медичним наглядом на кінець місяця.
- HIV.T.100K.POP / AIDS.T.100K.POP — те саме, на 100 тис. населення.

Серед типових OCR-помилوک — зчитування цифр 0 і 3 як літер «о» та «з» відповідно, а також зчитування нерозривних пробілів як звичайних. Для їхнього усунення застосовано макрос із глобальною заміною у числових полях.

Для оцінки регіональних популяцій, яких немає у звітах, використано формулу:

$$POP = \frac{X}{X.100K.POP} \cdot 10^5,$$

де X — будь-яка змінна, доступна як в абсолютних одиницях, так і на 100 тис. населення.

У деяких звітах значення змінних $HIV.T$, $HIV.T.100K.POP$, $AIDS.T$, $AIDS.T.100K.POP$ не оновлювались і повторювалися з попереднього звітного місяця. Було введено індикатор повтору. Для відновлення даних використано такі формули:

$$HIV.T(n) = HIV.T(n-1) + HIV.N(n) - AIDS.N(n), \quad (1)$$

$$HIV.T.100K.POP(n) = \frac{HIV.T(n)}{POP(n)} \cdot 10^5, \quad (2)$$

$$AIDS.T(n) = AIDS.T(n-1) + AIDS.N(n) - AIDS.D(n), \quad (3)$$

$$AIDS.T.100K.POP(n) = \frac{AIDS.T(n)}{POP(n)} \cdot 10^5 \quad (4)$$

Ці ж формули використовувалися для заповнення пропущених значень (NA) в колонках, що стосуються нових випадків ВІЛ/СНІД та спричинених ними смертей.

Зауваження 1. На основі звітів також була побудована таблиця про статистику способів передачі ВІЛ.

Подальше дослідження передбачає наступні кроки:

- Знаходження і обробка інформації про загальну смертність та оцінювання сили декрементів (СНІД та інші причини);
- Дослідження адекватності моделювання процесів ВІЛ/СНІД, як напівмарківського ланцюга;
- Оцінювання нетто-премій для страхової угоди пов'язаної із ВІЛ/СНІД;
- Побудова мартингалу на основі процесу капіталу портфелю ВІЛ/СНІД;
- Оцінювання ймовірності банкрутства для страхового портфелю ВІЛ/СНІД.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Василик, О.І., Яковенко, Т.О. (2010). *Лекції з теорії і методів вибіркового обстеження*. К.: ВПЦ «Київський університет». — С. 36–42.
- [2] Dickson, D.C., Hardy, M.R., Waters, H.R. (2020). *Actuarial mathematics for life contingent risks*. Cambridge University Press.
- [3] Schmidli, H. (2017). *Risk theory*. Cham, Switzerland: Springer.
- [4] Центр громадського здоров'я МОЗ України. Статистичні довідки про ВІЛ/СНІД (2024).

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: egorky96@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: vasylyk@matan.kpi.ua

РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО РІВНЯННЯ В ПРОСТОРИ ℓ_p

А.О. ОХРЕМЧУК, А.В. СИРОТЕНКО

Розглядається задача побудови розв'язку лінійного операторного рівняння

$$AX - XB = Y, \quad (1)$$

де $A, B, Y \in \mathcal{L}(\ell_p)$, $X \in \mathcal{L}(\ell_p)$, $1 \leq p < \infty$. Оператори A і B задаються у вигляді діагональних операторів, спектри яких складаються з попарно різних чисел. Оператор Y — обмежений оператор зсуву.

Нехай

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, \dots) &= (2x_1, 3x_2, 2x_3, 3x_4, \dots), \\ B(x_1, x_2, \dots) &= (7x_1, 11x_2, 7x_3, 11x_4, \dots), \end{aligned}$$

тобто

$$a_n = \begin{cases} 2, & n \text{ не парне,} \\ 3, & n \text{ парне,} \end{cases} \quad b_n = \begin{cases} 7, & n \text{ не парне,} \\ 11, & n \text{ парне.} \end{cases}$$

Оператор $Y: \ell_p \rightarrow \ell_p$ визначено як зважений оператор зсуву:

$$Y(x)_n = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ \frac{1}{n-1} x_{n-1}, & n \geq 2. \end{cases}$$

Оскільки спектри операторів A і B не перетинаються, для розв'язку рівняння (1) можна застосувати інтегральну формулу:

$$X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_A} \oint_{\Gamma_B} \frac{(A - \lambda I)^{-1} Y (B - \mu I)^{-1}}{\lambda - \mu} d\lambda d\mu,$$

де Γ_A, Γ_B — замкнені контури в комплексній площині, що охоплюють спектри A і B відповідно.

Резольвенти операторів мають вигляд:

$$(A - \lambda I)^{-1}(x)_n = \frac{1}{a_n - \lambda} x_n, \quad (B - \mu I)^{-1}(x)_n = \frac{1}{b_n - \mu} x_n.$$

З урахуванням дії оператора Y , отримаємо:

$$X(x)_n = \frac{x_{n-1}}{(n-1)(a_{n-1} - b_n)}.$$

Парний випадок. Якщо n парне, то $a_{n-1} = 3$, $b_n = 7$, отже:

$$X(x_n) = -\frac{1}{4(n-1)}x_{n-1}.$$

Непарний випадок. Якщо n непарне, то $a_{n-1} = 2$, $b_n = 11$, отже:

$$X(x_n) = -\frac{1}{9(n-1)}x_{n-1}.$$

Звідси остаточно:

$$X(x_n) = \begin{cases} -\frac{1}{4(n-1)}x_{n-1}, & n \text{ парне,} \\ -\frac{1}{9(n-1)}x_{n-1}, & n \text{ непарне.} \end{cases}$$

Отримані формули демонструють, як спектральна структура операторів та форма правої частини впливають на вигляд розв'язку. Узагальнення результатів буде представлено в магістерській роботі.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Чаповський Ю.А. *Лекції з функціонального аналізу*. — Київ, 2022. — 446 с.
- [2] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве*. — Москва: Наука, 1970. — 532 с.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: nastia.ohremchuck@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: antonsyrotenko86@gmail.com

ГЛИБИНА ТЬЮКІ ДЕЯКИХ БАГАТОВИМІРНИХ ІМОВІРНІСНИХ РОЗПОДІЛІВ

В.Є. ПАНАСКО

Функція глибини Тьюкі, вперше запропонована в [1], є однією з найвживаніших мір центральності в багатовимірному статистичному аналізі. Для ймовірнісного розподілу μ на $\mathbb{R}^d$ вона визначається як

$$D_\mu(x) = \inf_{H \ni x} \mu(H),$$

де інфімум береться по всіх замкнених півпросторах $H \subset \mathbb{R}^d$, що містять точку x . Значення $D_\mu(x)$ характеризує ступінь “центральності” або “типовості” точки x відносно розподілу μ : ця величина набуває найбільших значень в центральній частині розподілу і спадає до нуля при $\|x\| \rightarrow \infty$. Детальний огляд властивостей функції D_μ наведено в [2].

Аналітичне обчислення функції глибини Тьюкі, як правило, є складним і можливе лише для окремих класів розподілів. У двовимірному випадку точні вирази відомі для низки розподілів, зокрема наведених у [2]. В нашій роботі ми узагальнюємо ці результати на нові класи багатовимірних розподілів: рівномірний розподіл на кулях у $\mathbb{R}^d$ (що фактично включає також еліпсоїди завдяки афінній еквіваріантності функції D_μ) та розподіли з незалежними симетричними α -стійкими координатами. Крім того, для деяких інших двовимірних розподілів — експоненціального та закону Стюдента з незалежними координатами — аналітичний опис глибини є недоступним; у цих випадках ми досліджуємо геометрію відповідних верхніх рівневих множин чисельно та вивчаємо вплив параметрів розподілів на форму контурів.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Tukey, J. W. (1975). *Mathematics and the picturing of data*. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vancouver, 1974), vol. 2, pp. 523–531.
- [2] Rousseeuw, P. J., Ruts, I. (1999). *The depth function of a population distribution*. *Metrika*, **49**, 213–244.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: panasko.vitalii@l111.kpi.ua

СТОХАСТИЧНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В МОДЕЛЮВАННІ ДИНАМІКИ ПОПУЛЯЦІЙ

О.В. ПАНІЧЕК, О.А. ТИМОШЕНКО

Прогнозування демографічної динаміки, зокрема рівнів смертності й народжуваності, є ключовим інструментом оцінки популяційних змін. Особливу роль у цьому відіграє моделювання епідеміологічних процесів як окремого випадку популяційної динаміки. В умовах війни в Україні епідеміологічна ситуація істотно ускладнилася, що підкреслює потребу в ефективних математичних методах її аналізу. Найпоширенішими моделями поширення інфекцій є SIR- та SIRD-моделі на основі систем диференціальних рівнянь (див. [1], [2]).

Для врахування випадкових факторів і часової змінності параметрів запропоновано модифіковану SIRD-модель у формі системи стохастичних диференціальних рівнянь (СДР). Такий підхід дозволяє моделювати випадкові збурення, притаманні реальним епідеміологічним процесам, і підвищити точність прогнозів (див. [3]). Розглянемо систему СДР:

$$\begin{cases} dS = \left[(1-p)\theta(t) + b(t)V + \alpha(t)R - \mu_1(t)S - \frac{\beta c(t)I}{N}S \right] dt + \sigma_1(t)SdW_1, \\ dV = \left[p\theta(t) - \frac{\gamma\beta c(t)I}{N}V - (b(t) + \mu_1(t))V \right] dt + \sigma_2(t)VdW_2, \\ dI = \left[\frac{\beta c(t)I}{N}S + \frac{\gamma\beta c(t)I}{N}V - (\mu_1(t) + \mu_2(t) + r(t))I \right] dt + \sigma_3(t)IdW_3, \\ dR = [r(t)I - \alpha(t)R - \mu_1(t)R] dt + \sigma_4(t)RdW_4, \end{cases} \quad (1)$$

де $S(t)$, $V(t)$, $I(t)$ та $R(t)$ — це кількість сприйнятливих, вакцинованих, інфікованих та одужалих відповідно, а $N(t) = S(t) + V(t) + I(t) + R(t)$ — загальна чисельність. Початковий стан задається як $(S(0), V(0), I(0), R(0)) \in \mathbb{R}_+^4$. Клас $S(t)$ поповнюється через народжуваність, втрату імунітету вакцинованими та тими, хто одужав; зменшується — внаслідок інфікування та смертності. Вакциновані $V(t)$ з'являються через вакцинацію новонароджених, втрачаються через зараження, зниження імунітету та смерть. Клас $I(t)$ збільшується за рахунок заражень, зменшується внаслідок одужання та смертності. Одужалі $R(t)$ переходять у цей стан після лікування, але можуть знову стати сприйнятливими або померти. Стохастичні впливи моделюються доданками — $\sigma_i(t)dW_i$, де $W_i(t)$ — незалежні вінерівські процеси, а $\sigma_i(t)$ — функції волатильності ($i = 1, 2, 3, 4$).

Нехай система (1) має єдиний глобальний розв'язок $(S(t), I(t), R(t), V(t))$ для всіх $t \geq 0$, який майже напевно залишається в $\mathbb{R}_+^4$. Крім того, якщо $I(0) > 0$, то $I(t) > 0$ майже напевно (м.н.) для всіх $t > 0$; аналогічне твердження справджується для інших класів.

Теорема 1. Розглянемо $(S(t), I(t), R(t), V(t)) \in \mathbb{R}_+^4$, $t \geq 0$ — розв'язок системи (1) у момент часу t з $(S(0), I(0), R(0), V(0)) \in \mathbb{R}_+^4$. Припустимо, що збігається ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^{k-1}} \int_0^{2^{k+1}} \sigma_3^2(s) ds < \infty$ та

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t [\beta(1 + \gamma)c(s) - \mu_1(s) - \mu_2(s) - r(s)] ds = 0.$$

Тоді

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln I(t)}{t} = 0 \quad \text{м. н.}$$

Наслідок 1. Розглянемо систему (1), у якій всі коефіцієнти є сталими. Тоді існує додатний розв'язок $(S(t), I(t), R(t), V(t))$ та визначається репродуктивне число $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta(1+\gamma)c}{\mu_1 + \mu_2 + r}$. Якщо $\mathcal{R}_0 < 1$, то кількість інфікованих осіб майже напевно прямує до нуля.

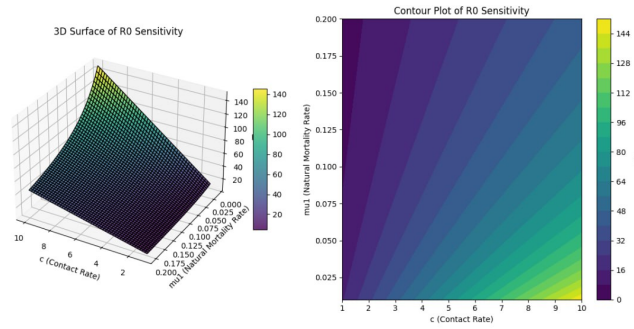


Рис. 1. Значення $\mathcal{R}_0$ залежно від частоти контактів c та інтенсивності природної смертності μ_1

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Kermack W.O. and McKendrick *Cotributions to the Mathematical Theory of Epidemics-I*, Proceedings of the Royal Society, 1927.
- [2] Siyan Wen, *A Modified SIRV Model for COVID-19*, Proc. SPIE 12451, 5th International Conf. on Comp. Inf. Sc. and App. Tech. (CISAT 2022).
- [3] Ю. Ю. Млавець, О. В. Панічек, О. А. Тимошенко, *Математичне моделювання динаміки передачі туберкульозу з використанням диференціальних рівнянь збурених за допомогою вінерівських процесів*, Наук. вісник Ужгород. ун-ту, 2024, том 45, № 2, с.97-109.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: panichekalex@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: otymoshenkokpi@gmail.com

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

С.О. СЕРГІЄНКО, С.П. ПАФИК

Використовуючи асимптотичні методи, досліджено питання побудови розв'язку задачі Коші для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь першого порядку вигляду:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t; \varepsilon)x, \quad (1)$$

$$x(t_0; \varepsilon) = \bar{x}(\varepsilon), \quad (2)$$

в якій $x(t, \varepsilon)$ — шуканий n -вимірний вектор, $A(t; \varepsilon)$ — квадратна матриця n -го порядку, елементи якої є функції дійсної змінної, ε — малий дійсний параметр, $\bar{x}(\varepsilon)$ — вираз залежний від малого параметра ε , $t \in [0; T]$, $T > 0$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$.

Задачу (1), (2) було досліджено при виконанні наступних умов:

1°. Матриця $A(t; \varepsilon)$ і вектор $\bar{x}(\varepsilon)$ представляються у вигляді асимптотичних розвинень за степенями малого параметра ε :

$$A(t; \varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k A_k(t), \bar{x}(\varepsilon) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \bar{x}_k.$$

2°. Елементи матриці $A_k(t)$ нескінченно диференційовні на відрізку $[0; T]$.

3°. Рівняння $|A_0(t) - \lambda_0 E| = 0$ має n простих коренів $\lambda_0^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, n}$, $\forall t \in [0; T]$.

4°. $\operatorname{Re}(\lambda_0^{(i)}(t)) < 0$, $i = \overline{1, n}$, $\forall t \in [0; T]$.

В результаті було доведено наступну теорему.

Теорема 1. Якщо виконуються умови 1° – 4°, то задача Коші (1), (2) має формальний розв'язок

$$x(t; \varepsilon) = \sum_{i=1}^n C_i(\varepsilon) h^{(i)}(t; \varepsilon)(\varepsilon) \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \lambda^{(i)}(\tau, \varepsilon) d\tau \right), \quad (3)$$

який є асимптотичним розвиненням точного розв'язку задачі Коші (1), (2) при прямуванні малого параметра ε до нуля.

Зауваження 1. Функції $\lambda^{(i)}(t, \varepsilon)$ та вектори $h^{(i)}(t; \varepsilon)$, $i = \overline{1, n}$, в формулі (3) визначаються через коефіцієнти рівняння (1) та початкові умови (2).

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Самойленко А.М. , Перестюк П.О., Парасюк І.О. *Диференціальні рівняння*. — Київ: Либідь, 2003. — 600 с.
- [2] 2. Пафик С. П. *Асимптотичне розв'язання двоточної крайової задачі для лінійної сингулярно збудованої системи диференціальних рівнянь у некрітичному та критичному стійких випадках* // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка — 2019. — Т. 40, № 1. — С. 19–25.
- [3] Шкіль М.І. *Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях*. — Київ: Вища школа, 1971. — 228 с.

УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна
Email address: 21fmf.s.serhiienko@std.npu.edu.ua

УДУ ім Михайла Драгоманова, Київ, Україна
Email address: s.p.pafyk@udu.edu.ua

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ НЕЛІКВІДНИХ ФІНАНСОВИХ РИНКІВ

Ф.О. СЕРДЮК, Д.Ю. СЛУЧИНСЬКИЙ

Оцінка опціонів на ринках з обмеженою ліквідністю є критично важливою для управління ризиками. Проте традиційні моделі, зокрема модель Блека-Шоуза, часто вироджуються за умов неліквідності. Це зумовлює необхідність використовувати інші моделі, які враховують зупинку зміни ціни та нестабільну волатильність. Наприклад, субдифузійні моделі, що ґрунтуються на введенні процесу нового часу H_t .

У роботі розглянуто субдифузійні моделі ціноутворення опціонів [1] з урахуванням локальної волатильності σ_{H_t} для випадку оберненого гаусівського субординатора з параметрами $(0, 1)$. Для цього випадку пропонуються два методи знаходження справедливої ціни опціонів. Перший метод використовує мартингальний підхід, запропонований Магдіазр [2]:

$$C_{H_t}(S_{H_t}, K, T, \sigma_{H_t}) = \int_0^\infty C(S_{H_t}, K, x, \sigma_{H_t}^2) \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi T}} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx, \quad (1)$$

де:

- S_{H_t} — ціна активу в момент часу H_t ,
- K — ціна страйку,
- T — час до реалізації опціону.

Другий — базується на фрактальному рівнянні Дюпері [3].

Для цих підходів було реалізовано чисельні методи і знайдено оцінку премій опціонів для реальних ринкових даних з Nasdaq. Проведені статистичні та емпіричні тести для оцінювання якості моделі.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Shchestyuk, N., & Tyshchenko, S. *Subdiffusive option price model with inverse Gaussian subordinator*. — *Modern Stochastics: Theory and Applications*, 12(2), 136–152, 2025.
- [2] Magdziarz M. *Black-Scholes formula in subdiffusive regime*. — *J. Stat. Phys.* — 2009. — Т. 136. — С. 553–564. MR2529684. <https://doi.org/10.1007/s10955-009-9791-4>
- [3] Donatien, H., & Leonenko, N. N. *Option pricing in illiquid markets: A fractional jump-diffusion approach*. — *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 381, Article 112995, 2021.

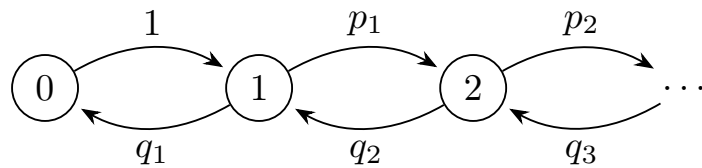
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: `f.serdiuk@ukma.edu.ua`

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: `d.sluchynskyi@ukma.edu.ua`

EXPLOSION AND IMPLOSION OF SEMI-MARKOV BIRTH-DEATH PROCESSES

A.YU. PILIPENKO, V.V. TKACHENKO

Consider a birth-death Markov chain $(X_k)_{k \geq 0}$ on the state space $\{0, 1, 2, \dots\}$ with transitional probabilities $p_{i,i+1} = p_i$, $p_{i,i-1} = q_i$ such that $p_{0,1} = 1$ and $p_i, q_i > 0$, $p_i + q_i = 1$ for $i \geq 1$. Its diagram is given below.



Let $\{\tau_i\}_{i=0}^{\infty}$ be a sequence of positive random variables. For each τ_i consider a sequence $\{\tau_i^k\}_{k=0}^{\infty}$ of its independent copies. Suppose all these sequences and the Markov chain (X_k) are independent of each other. Put $T_0 = 0$ and define random moments of jumps recurrently:

$$T_{k+1} = T_k + \tau_{X_k}^k, \quad k \geq 0.$$

Definition 1. Let

$$X(t) = X_k, \quad t \in [T_k, T_{k+1}), \quad k \geq 0.$$

Then $X(t)$, $t \geq 0$ is a *semi-Markov* process with the embedded Markov chain (X_k) and waiting times $\{\tau_i\}$.

Denote by σ_n the first moment when X hits $n \in \mathbb{N}$. Then $\sigma_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$ represents the moment of hitting infinity.

Definition 2. The process X *explodes* (to infinity) if $\sigma_{\infty} < \infty$.

Let $\{Y_n\}_{n \geq 0}$ be a sequence of independent processes from Definition 1 such that $Y_n(0) = n$ for $n \geq 0$. Define stopping times

$$\theta_n = \inf\{t \geq 0 \mid Y_n(t) = n - 1\}, \quad n \geq 1.$$

Then $\theta_{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k$ represents the time of hitting 0 starting from infinity.

Definition 3. The process *implodes* (from infinity) if $\theta_{\infty} < \infty$.

The following Theorems provide a generalization to known results about regularity for Markov birth-death processes (see [1, IV, §5]). They are also analogous to classical results about attainability and entrance of boundaries for one-dimensional diffusions (see, e.g., [2, XV, §6]).

Introduce the following notation:

$$\delta_k = \frac{q_1 \cdots q_k}{p_1 \cdots p_k}, \quad k \geq 0,$$

$$\nu_i = (1 - \mathbb{E}e^{-\tau_i}) \frac{p_1 \cdots p_{i-1}}{2q_1 \cdots q_i}, \quad i \geq 0.$$

Theorem 1 (Explosion condition). *Let X be a semi-Markov process from Definition 1. For every initial distribution of X the following alternative holds:*

$$\mathbb{P}\{X \text{ explodes}\} = 1 \iff \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k \nu_i \right) \delta_k < \infty,$$

$$\mathbb{P}\{X \text{ explodes}\} = 0 \iff \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k \nu_i \right) \delta_k = \infty.$$

Theorem 2 (Implosion condition). *Let X be a semi-Markov process from Definition 1. For every initial distribution of X the following alternative holds:*

$$\mathbb{P}\{X \text{ implodes}\} = 1 \iff \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \nu_i \right) \delta_k < \infty \quad \text{and} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k = \infty,$$

$$\mathbb{P}\{X \text{ implodes}\} = 0 \iff \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \nu_i \right) \delta_k = \infty \quad \text{or} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty.$$

REFERENCES

- [1] Dynkin E.B., Yushkevich A.A. Markov processes. — Plenum Press, 1969.
- [2] Karlin S., Taylor H.M. A Second Course in Stochastic Processes. — Elsevier Science, 1981.

IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC,
 INSTITUTE AND INSTITUTE OF MATHEMATICS, NAS OF UKRAINE, KYIV, UKRAINE
Email address: pilipenko.ay@gmail.com

INSTITUTE OF MATHEMATICS, NAS OF UKRAINE, KYIV, UKRAINE
Email address: v.tkachenk@gmail.com

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ SIR В ЕПІДЕМІОЛОГІЇ

А.В. ФЕДОРЦОВА, А.О. КОВАЛЮК, Т.Г. ПРИГАЛІНСЬКА

У 1927 році В.О. Кермак і А.Г. Макендрік опублікували серію праць під назвою «Внесок у математичну теорію епідемій», де описали динаміку передачі захворювання за допомогою системи диференціальних рівнянь. Вже наприкінці XX століття математичне моделювання стало активно використовуватися у сфері громадського здоров'я. Епідеміологічні моделі покликані прогнозувати перебіг захворювання, визначати джерела поширення інфекції та формулювати оптимальні стратегії втручання [1].

Вибір компартментів (параметрів) моделі залежить від особливостей конкретного захворювання та цілей дослідження. Саме тому існує велика кількість епідеміологічних моделей, серед яких найпоширенішою є *SIR*. Модель *SIR* (англ. Susceptible — сприйнятливі, Infectious — інфіковані, Recovered/Removed — одужавші/померлі) ґрунтується на поділі популяції на три групи:

- S — особи, які здорові, але сприйнятливі до інфекції;
- I — інфіковані, тобто ті, хто може передавати хворобу;
- R — особи, які перенесли модельоване захворювання, не можуть бути інфікованими повторно та не можуть інфікувати інших, оскільки здобули постійний імунітет, або померли.

Маємо три рівняння, які описують нашу модель:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta IS}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I,$$

де N — параметр, що відповідає за кількість населення. Для опису динаміки переходів між цими групами використовуються такі коефіцієнти: β — середня кількість ефективних контактів на особу за день; γ — обернено пропорційна середній кількості днів, протягом яких особа є заразною.

Можна виділити коефіцієнт поширення інфекції R_0 (базове репродуктивне число). Цей коефіцієнт не використовується у рівняннях, що задають модель, але визначає динаміку інфекційного захворювання:

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Якщо $R_0 > 1$, то вважають, що інфекція має потенціал до поширення, оскільки один інфікований у середньому заражає більше ніж одну особу [1].

Система рівнянь, що лежить в основі моделі SIR , є нелінійною і у 2014 році Гарко Т., Лобо Ф. та Мак М. отримали її точний аналітичний розв'язок [2]. Важливою властивістю моделі є збереження сталої загальної кількості населення у кожен момент часу: $S(t) + I(t) + R(t) = \text{const} = N$.

Для аналізу довгострокової динаміки захворювання необхідно враховувати демографічні чинники, які не враховує базова, зокрема, народження та смерть. У модифікованій моделі смертність рівномірно впливає на всі категорії населення з певною сталою швидкістю, а новонароджені додаються лише до групи сприйнятливих до інфекції. Припускається, що рівень народжуваності дорівнює рівню смертності, тож загальна чисельність популяції залишається сталою:

$$\frac{dS}{dt} = \mu - \beta IS - \mu S, \quad \frac{dI}{dt} = \beta IS - \gamma I - \mu I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R.$$

Припущення щодо сталого темпу оновлення популяції призводить до експоненціального розподілу за віком із середнім значенням наближено рівним $L = \frac{1}{\mu}$, де μ — коефіцієнт смертності, не пов'язаний із дією вірусу. Спрощення є прийнятним для країн, що розвиваються, де умови життя створюють приблизно однаковий тиск смертності на всі вікові групи [3].

Отже, модель SIR є базовою у епідеміології. Вона дозволяє зрозуміти динаміку поширення захворювань, оцінити вплив ключових параметрів на розвиток епідемії та визначити необхідні заходи. Може бути адаптована до складніших умов шляхом включення демографічних показників. У сучасному світі саме математичні моделі допомагають описувати реальні процеси та формувати стратегії боротьби з інфекційними загрозами.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Kretzschmar M., Wallinga J. *Mathematical models in infectious disease epidemiology* // Modern infectious disease epidemiology. New York, NY, 2009. С. 209–221. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-93835-6_12.
- [2] Harko T., Lobo F. S. N., Mak M. K. *Exact analytical solutions of the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) epidemic model and of the SIR model with equal death and birth rates..* Applied mathematics and computation. 2014. Т. 236. С. 184–194. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.03.030>
- [3] Tibayrenc M. *Encyclopedia of Infectious Diseases: Modern Methodologies*. Wiley & Sons, Incorporated, John, 2007. 480 с.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: a.fedortsova.zm42.fbmi28@l111.kpi.ua

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: a.kovaljuk.zm42.fbmi28@l111.kpi.ua

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: tania.krivorot@gmail.com

МЕТОД ПІДСУМОВУВАННЯ РОЗБІЖНИХ В КЛАСИЧНОМУ СЕНСІ РЯДІВ

А.В. СИРОТЕНКО, Д.А. ЧАУС

Твердження. *Формула*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) A_n, \quad (1)$$

де $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ і b_n монотонно спадає до нуля, може поставити у відповідність ряду число більшому класу рядів ніж класичний метод.

Приклад 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k = \frac{1}{2}$$

Приклад 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{k=1}^n k \cos k = -\frac{1}{2}$$

Приклад 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 \sin k = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2}$$

Теорема. *Для формули (1) виконуються властивості лінійності, стабільності і регулярності.*

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Hardy, G. H. (2000). *Divergent Series*. American Mathematical Society.
- [2] Фихтенгольц, Г. М. (1966). *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Рипол Классик.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: antonsyrotenko86@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: droba20020504@gmail.com

SWITCHING PROBLEM ON GRAPH

A. PILIPENKO, I. CHULAKOV

A. Skorokhod in 1961 formulated the reflection problem in his work [1], which subsequently proved to be an effective method for constructing reflected diffusions. Based on this reflection problem, a mapping was built that assigns to a function the solution of Skorokhod's reflection problem for that function. This mapping turned out to be useful for solving various problems in queueing theory (see, for example, [2]). Skorokhod's reflection problem has been generalized by different authors. In particular, A. Pilipenko in the article [3] posed the problem of jump-like reflection, and this work made it possible to construct Brownian motion with jump-like reflection (see [4]).

The aim of our work is to construct a similar mapping for natural gluing of functions on a graph. We investigate the properties of this mapping and apply it to the study of random walks, using the continuous mapping Theorem and Donsker's invariance principle.

Definition 1. Let $m \in \mathbb{N}$. We say that the function $\vec{X}$ is a solution to the *graph switching problem* for function $\vec{W}$ and compensating function $\vec{H}$ if for each $i \in \overline{1, m}$ the function $X_i(t)$ from the vector $\vec{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t))$ can be represented as

$$X_i(t) = W_i(T_i(t)) + H_i(\tilde{T}(t))$$

and there is a sequence $\{a_k, b_k \mid k \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+$ such that this sequence and functions $T_i: \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$, $\tilde{T}: \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ satisfy the following conditions:

- (1) $0 = a_0 \leq b_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq \dots \leq +\infty$; $a_k \rightarrow +\infty$.
- (2) $\tilde{T}$ is a non-decreasing right-continuous function and $\tilde{T}(0) = 0$.
- (3) For all $i \in \overline{1, m}$ the function T_i is a piecewise linear function that has derivative at each point of $\mathbb{R}_+$ except maybe $\{a_k, b_k \mid k \geq 0\}$.
- (4) For all $t \in \mathbb{R}_+ \setminus \{a_k, b_k \mid k \geq 0\}$ and for all $i \in \overline{1, m}$ we have $T'_i(t) \in \{0, 1\}$ and $T_i(0) = 0$.
- (5) For all $t \in A = \cup_{k=0}^{\infty} (a_k, b_k)$ holds $\sum_{i=1}^m T'_i(t) = 1$.
- (6) $\int_0^{\infty} \mathbb{I}_A(t) d\tilde{T}(t) = 0$.
- (7) For $B = \cup_{k=0}^{\infty} (b_k, a_{k+1})$ for all $i \in \overline{1, m}$ holds $\int_0^{\infty} \mathbb{I}_B(t) dT_i(t) = 0$.

We shall denote that $\vec{X}$ is a solution of the *graph switch problem* for functions $\vec{W}$, $\vec{H}$ in the following way: $\vec{X} \in \mathcal{R}(\vec{W}, \vec{H})$.

Theorem 1. For $n \in \mathbb{N}$ let $\vec{X}^{(n)}$ be a function from $\mathcal{R}(\vec{W}^{(n)}, \vec{H}^{(n)})$ and let the following conditions hold:

- (1) The sequence of functions $\{\vec{W}^{(n)}\}_{n \geq 1}$ converges locally uniformly to the function $\vec{W}$ from $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$ on $\mathbb{R}_+$ as $n \rightarrow \infty$.
- (2) The sequence of functions $\{\vec{H}^{(n)}\}_{n \geq 1}$ converges locally uniformly to the function $\vec{H}$ from $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$ on $\mathbb{R}_+$ as $n \rightarrow \infty$.
- (3) For all $T > 0$ and $\forall i \in \overline{1, m}$ we have $\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{t \in [0, T]} X_i^{(n)}(t) \geq 0$.
- (4) For all $T > 0$ and $\forall i \in \overline{1, m}$ we have $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T] \cap \overline{B^{(n)}}} X_i^{(n)}(t) \leq 0$.
- (5) The functions $H^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^m H_i^{(n)}(t)$ converge locally uniformly to the function t on $\mathbb{R}_+$ as $n \rightarrow \infty$.
- (6) The sequence of functions $T^{(n)}(t) := \sum_{i=1}^m T_i^{(n)}(t)$ converges locally uniformly to the function t on $\mathbb{R}_+$ as $n \rightarrow \infty$.

Then there exists a subsequence n_k and functions $T_i: \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$, $i \in \overline{1, m}$ and $\tilde{T}: \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ such that for all $i \in \overline{1, m}$ the functions $X_i^{(n_k)}$ converge locally uniformly to the function $X_i(\cdot) := W_i(T_i(\cdot)) + H_i(\tilde{T}(\cdot))$ as $k \rightarrow \infty$ and for all $i \in \overline{1, m}$ the functions $T_i^{(n_k)}$ converge to T_i and the functions $\tilde{T}^{(n_k)}$ converge to $\tilde{T}$ locally uniformly. Moreover,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m T_i(t) = t, \\ l_i(T_i) = H_i(\tilde{T}(t)), \quad i = \overline{1, m}. \end{cases}$$

REFERENCES

- [1] Skorokhod A. Stochastic equations for diffusion processes in a bounded region // Theory of Probability & Its Applications. — 1961. — Vol. 6, no. 3. — P. 264–274.
- [2] Asmussen S. Applied probability and queues. — Springer, 2003. — Vol. 2.
- [3] Pilipenko A. On the Skorokhod mapping for equations with reflection and possible jump-like exit from a boundary // Ukr. Math. J. — 2012. — Vol. 63, no. 9.
- [4] Pilipenko A., Prykhodko Y. Limit behavior of a simple random walk with non-integrable jump from a barrier // Theory of Stoch. Process. — 2014. — Vol. 19, no. 1. — P. 52–61.

IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE,
INSTITUTE OF MATHEMATICS, NAS OF UKRAINE, KYIV, UKRAINE
Email address: pilipenko.ay@gmail.com

INSTITUTE OF MATHEMATICS, NAS OF UKRAINE, KYIV, UKRAINE
Email address: igorchzpu@gmail.com

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ КОШІ З ОБМЕЖЕННЯМИ

А.О. ШЕВЧЕНКО, В.В. ПАВЛЕНКОВ

Доповідь буде присвячена функціональним рівнянням Коші з обмеженнями вигляду

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{G} \subset \mathbb{R}, \quad (1)$$

які природнім чином узагальнюють звичайне функціональне рівняння Коші.

Зрозуміло, що будь-який розв'язок звичайного функціонального рівняння Коші (адитивна функція) є також і розв'язком функціонального рівняння Коші з обмеженнями (1). Але в доповіді будуть наведені приклади розв'язків функціональних рівнянь Коші з обмеженнями (1), які не є розв'язками звичайного функціонального рівняння Коші.

Будуть розглянуті наступні твердження стосовно функціональних рівнянь (1):

- про властивості множини $\mathbb{G}$;
- про структуру розв'язків рівнянь (1);
- про достатні умови звідності функціональних рівнянь (1) до звичайного функціонального рівняння Коші.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Aczèl, J., Dhombres, J. *Functional equations in several variables* (No. 31) – Cambridge: Cambridge University Press, — 1989 — p. 11-18.
- [2] Bingham N.M., Goldie C.M., Teugels J.L. *Regular variation* – Cambridge: Cambridge University Press, — 1987 — 508 p.
- [3] Buldygin, V. V., Klesov, O. I., Steinebach, J. G. *On factorization representations for Avakumovič–Karamata functions with nondegenerate groups of regular points.* // Analysis Mathematica — 2009, **30(3)**, p. 161-192.
- [4] Steinhaus H. *Sur les distances des points de mesure positive.* // Fund. Math. — 1920, **1**, p. 93-104.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: shevchenko.artem1@111.kpi.ua

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна, UNIVERSITY OF YORK, YORK, UK
Email address: pavlenkovvolodymyr@gmail.com

V. Pavlenkov is supported by the British Academy in partnership with the Academy of Medical Sciences, the Royal Academy of Engineering, the Royal Society and Cara under the *Researchers at Risk Fellowships* Award RAR\100132.

ПАРАЛЕЛЬНИЙ РОЗПОДІЛЕНИЙ СОЛВЕР КРИЛОВА ДЛЯ ЗМІШАНИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Б.Ю. ШЕВЧЕНКО

Вступ

Розглядається розробка високопродуктивного паралельного солвера для задач гібридизованого змішаного скінчено елементного аналізу тріщин у газоохолоджуваних ядерних реакторах Великої Британії.

Такі задачі призводять до надвеликих систем лінійних рівнянь розміром понад 10^9 ступенів вільності.

Для розробки мені було надано доступ до ARCHER2 — найпотужніший суперкомп'ютер Великої Британії. Доступна мені пікова продуктивність — 1 PFLOPS.

МЕТОДИ КРИЛОВА ТА ОБҐРУНТУВАННЯ ЇХНЬОЇ ЕФЕКТИВНОСТІ

Методи Крилова — це велика група ефективних ітераційних алгоритмів для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ та обчислення власних значень матриць.

Нехай $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — невироджена матриця, а $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ — заданий вектор. Криловським підпростором порядку m називається простір, породжений векторами:

$$\mathcal{K}_m(A, \mathbf{b}) = \text{span}\{\mathbf{b}, A\mathbf{b}, A^2\mathbf{b}, \dots, A^{m-1}\mathbf{b}\}.$$

Тобто, на кожній ітерації будується підпростір, який включає $\mathbf{b}$ та результат послідовних застосувань оператора A .

Твердження (мінімальний многочлен). Будь-яка матриця A задовольняє певний мінімальний многочлен:

$$q(t) = t^m + \alpha_{m-1}t^{m-1} + \dots + \alpha_1t + \alpha_0,$$

де $m \leq n$, такий що

$$q(A) = A^m + \alpha_{m-1}A^{m-1} + \dots + \alpha_1A + \alpha_0I = 0.$$

Якщо A є невиродженою, тобто оберненою, тоді $\alpha_0 \neq 0$, і ми можемо записати:

$$A^{-1} = -\frac{1}{\alpha_0} (A^{m-1} + \alpha_{m-1}A^{m-2} + \dots + \alpha_1I).$$

Тепер, застосовуючи A^{-1} до вектора $\mathbf{b}$, отримуємо:

$$\mathbf{x}^* = A^{-1}\mathbf{b} \in \mathcal{K}_m(A, \mathbf{b}).$$

Тобто точний розв'язок знаходиться у підпросторі і теоретично буде знайдено за не більше ніж m ітерацій, а практично збіжність часто настає набагато раніше.

МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ (FEM)

Метод скінченних елементів (FEM) наближує розв'язок $u(x)$ задачі, як комбінацію простих базисних функцій $N_i(x)$. На рисунку показано приклад: функцію $u(x)$ апроксимовано на відрізку $[0, 1]$ як суму відрізків.

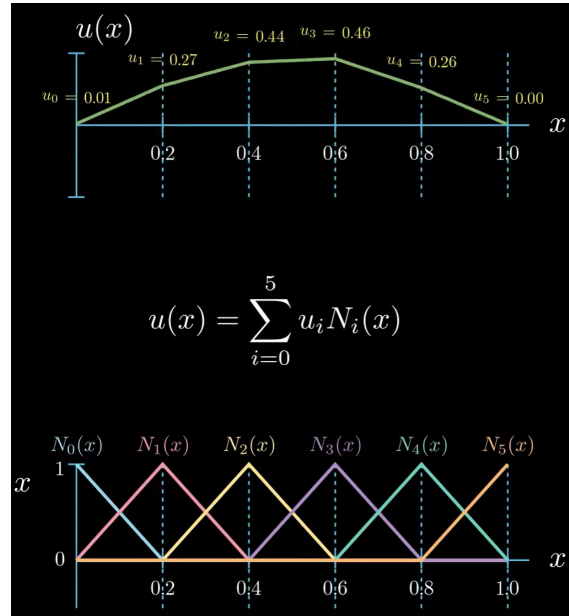


Рис. 1. Апроксимація функції $u(x)$ методом скінченних елементів.

РЕАЛІЗАЦІЯ ТА ПРОДУКТИВНІСТЬ

- **Розподіл даних.** Система $Ax = b$ масштабу $n \sim 10^9$ формується підматрицями і підвекторами, що зберігаються на різних процесорах суперкомп'ютера, що спілкуються MPI.
- **GPU-прискорення.** Множення Ax : У кожного процесора є власний супер GPU, на який копіюється підматриця і підвектор. Їхнє множення відбувається ефективним алгоритмом розподілення на густі блоки і використання MAGMA Batched Blas-2. Внутрішньовузловий збір: Через розділення на густі блоки результати множення розкидані по пам'яті. Вони збираються у підвектор результатів через окремий алгоритм написаний на SYCL.
- **Апаратна платформа.** 16 вузлів: процесор 32 ядра і GPU AMD Instinct MI210 32GB, пікова продуктивність ≈ 1 PFLOPS (FP64).

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Saad, Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*.— 2nd ed.— SIAM, 2003.
- [2] Gutknecht, M. H. A Brief Introduction to Krylov Space Methods for Solving Linear Systems. *Frontiers of Computational Science*, Springer, 2007.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», Київ, Україна
Email address: bohdan.shevchenko@ukma.edu.ua

ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРА ХЕРСТА ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО ПРОЦЕСУ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДІВ МАШИННОГО НАВЧАННЯ

Є.І. ШЕПТУХА, І.В. РОЗОРА

Актуальність роботи пов'язана із широким застосуванням дробового броунівського руху для моделювання процесів у різних сферах, таких як фінанси, телекомунікації, біомедицина та геофізика [1, 2]. Параметр Херста є ключовою характеристикою довготривалої залежності та самоподібності часових рядів, що робить його оцінку критично важливою для аналізу та якісного прогнозування таких процесів.

Традиційні методи визначення параметра Херста, такі як R/S-аналіз [2] або DFA-аналіз (Detrended fluctuation analysis) [3], мають обмеження у точності та швидкості обчислень, особливо для коротких або зашумлених рядів. Сьогодні методи машинного навчання демонструють вражаючу ефективність у таких задачах прогнозування часових рядів та виокремлення ознак, що відкриває нові можливості для покращення точності та ефективності оцінки параметрів випадкових процесів [1].

У роботі досліджується ефективність застосування моделей машинного навчання для оцінки параметра Херста дробового броунівського процесу. Основна увага приділяється підходу до моделювання тренувальних даних, порівнянню точності визначення параметру Херста різними моделями машинного навчання (лінійні моделі, дерева рішень, ансамблеві моделі, нейронні мережі), а також порівнянню ефективності наведених алгоритмів машинного навчання та поширених класичних методів: R/S-аналіз та DFA-аналіз.

Для моделювання даних, зокрема траєкторій дробового броунівського процесу, використовувався метод Хоскінга [4]. Алгоритм моделювання даних для навчання та валідації моделей мав наступний вигляд:

- Випадковим чином обирається значення параметра Херста з проміжку $[0.001, 0.999]$, яке потім буде використано як значення цільової змінної;
- Генерується дробовий броунівський процес довжини 1000;
- Випадковим чином з змодельованого процесу обирається підпоследовність заданої довжини: 10, 25, 50, 100.
- Значення випадкового процесу нормуються на інтервалі $[0, 1]$.

Використовуючи змодельовані дані (100000 записів), було проведено крос-валідацію наступних моделей машинного навчання: лінійна регресія (Ridge, Lasso), дерево рішень (Decision Tree), випадковий ліс (Random Forest), LightGBM, XGBoost, Multi-layer Perceptron, RNN, LSTM, одновимірні CNN. Для цього використовувалася процедура крос-валідації із 5 частинами у поєднанні із процедурою підбору гіперпараметрів моделей за допомогою алгоритму байєсівської оптимізації [5]. В якості метрики точності моделювання було використано середньоквадратичну похибку RMSE.

Для порівняння ефективності моделей машинного навчання із класичними методами (R/S-аналіз та DFA) їх було протестовано на окремо змодельованих тестових даних (1000 записів) із використанням вже підібраних гіперпараметрів для моделей машинного навчання.

За результатами моделювання було зроблено висновок, що найкращу точність визначення параметра Херста для дробового броунівського процесу показують моделі нейронних мереж, зокрема LSTM та одновимірні CNN. Подібні результати демонструють моделі LightGBM, XGBoost та Random Forest, які є представниками ансамблевих моделей. Лінійні моделі та дерева рішень показують значно гірші результати.

Подальший напрямок дослідження може полягати у більш детальному аналізі та підборі гіперпараметрів моделей машинного навчання для досягнення вищої точності при визначенні параметра Херста та швидкості навчання.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Raubitzek S., Corpaci L., Hofer R., Mallinger K. *Scaling Exponents of Time Series Data: A Machine Learning Approach* // Entropy. — 2023. — Vol. 25. — P. 1671. DOI: 10.3390/e25121671.
- [2] Hurst H.E. *The problem of long-term storage in reservoirs* // International Association of Scientific Hydrology. Bulletin. — 1956. — Vol. 1, № 3. — P. 13–27.
- [3] Peng C.-K., Buldyrev S.V., Havlin S., Simons M., Stanley H.E., Goldberger A.L. *Mosaic organization of DNA nucleotides* // Physical Review E. — 1994. — Vol. 49, № 2.
- [4] Hosking J.R.M. *Modeling persistence in hydrological time series using fractional differencing* // Water resources research. — 1984. — Vol. 20, № 12. — P. 1898–1908.
- [5] Watanabe S. *Tree-structured parzen estimator: Understanding its algorithm components and their roles for better empirical performance* // arXiv preprint arXiv:2304.11127. — 2023.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Київ, Україна
Email address: yevheniisheptukha@knu.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Київ, Україна
Email address: irozora@knu.ua

МОДЕЛЮВАННЯ φ -СУБГАУССОВОГО ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ В ПРОСТОРІ $L_p([0; T])$

К.І. ШУРУБУРА

У роботі [1] запропоновано метод моделювання дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $L_p([0; T])$. Використовуючи результати роботи [2], побудуємо модель строго φ -субгауссового дробового броунівського руху в просторі $L_p([0; T])$.

Нехай (Ω, Σ, P) — стандартний імовірнісний простір, а T — деяка параметрична множина ($T = [0, T]$ або $T = [0, \infty]$).

Означення 1. Випадковий процес $\{W_\alpha(t), t \in T\}$ називається строго φ -субгауссовим дробовим броунівським рухом із параметром $\alpha \in (0, 2)$, якщо він є строго φ -субгауссовим випадковим процесом з кореляційною функцією $R(t, s) = \frac{1}{2}(|t|^\alpha + |s|^\alpha - |t - s|^\alpha)$.

Строго φ -субгауссовий дробовий броунівський рух із параметром $\alpha \in (0, 2)$ можна зобразити у такому вигляді (наприклад, див. [3]):

$$W_\alpha(t) = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^\infty \frac{\cos(\lambda t) - 1}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\xi(\lambda) - \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda^{\frac{\alpha+1}{2}}} d\eta(\lambda) \right), \quad t \in [0, T],$$

де $\xi(\lambda), \eta(\lambda)$ — строго φ -субгауссові випадкові процеси,

$$A^2 = \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos(\lambda t)}{\lambda^{\alpha+1}} d\lambda \right\}^{-1} = \left\{ -\frac{2}{\pi} \Gamma(-\alpha) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right\}^{-1}.$$

Модель строго φ -субгауссового дробового броунівського руху W_α має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} S_M(t, \lambda) &= \frac{A}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{i=1}^{M-1} \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} (\xi(\lambda_{i+1}) - \xi(\lambda_i)) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^{M-1} \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} (\eta(\lambda_{i+1}) - \eta(\lambda_i)) \right) = \\ &= \frac{A}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{i=1}^{M-1} \frac{\cos(\lambda_i t) - 1}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} X_i - \sum_{i=1}^{M-1} \frac{\sin(\lambda_i t)}{\lambda_i^{\frac{\alpha+1}{2}}} Y_i \right), \\ &\quad t \in [0, T], \quad M \in \mathbf{N}, \end{aligned}$$

де $\{X_i, Y_i\}, i = 1, 2, \dots, M-1$, — це незалежні строго φ -субгауссові випадкові величини.

Твердження 1. Нехай $X = \{X(t), t \in [0, T]\}$ — строго φ -субгауссовий випадковий процес, та інтеграл Лебега $\int_0^T (E(X(t))^2)^{\frac{p}{2}} dt < \infty$ при $p \geq 1$ (позначимо $\int_0^T (E(X(t))^2)^{\frac{p}{2}} dt =: c$). Тоді інтеграл $\int_0^T |X(t)|^p dt$ існує з імовірністю 1 та для довільних $\varepsilon > c^{\frac{p}{2}}$ справедлива оцінка

$$P\left\{\int_0^T |X(t)|^p dt > \varepsilon\right\} \leq 2 \exp\left\{-\varphi^*\left(\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^{1/p}\right)\right\}.$$

Теорема 1. Модель S_M наближає процес W_α із заданою надійністю $1-\delta$, $0 < \delta < 1$, та точністю $\varepsilon > 0$ у просторі $L_p([0, T])$, $p \geq 1$, якщо у випадку $\alpha \in (0, 1]$ виконується умова

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\frac{2A^2}{\pi} \left(\frac{t^2 \lambda_1^{2-\alpha}}{2(2-\alpha)} + \frac{1}{\alpha \lambda^\alpha} + 2t^2 \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^3}{3\lambda_i^{\alpha+1}} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (1 + 2^{2-\frac{3}{2}\alpha}) t^{\frac{3}{2}\alpha} \sum_{i=1}^{M-1} \frac{(\lambda_{i+1} - \lambda_i)^{\alpha+2}}{\lambda_i^{\frac{\alpha}{2}+2}} \right) \right)^{p/2} dt < \\ & < \varepsilon^p \cdot \min \left\{ \frac{1}{p^{\frac{p}{2}}}, \frac{1}{(\varphi^{*(-1)}(\ln(\frac{2}{\delta})))^p} \right\}, \end{aligned}$$

де $M \in \mathbb{N}$ та $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M = \lambda$ — розбиття відрізка $[0, \lambda]$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Козаченко Ю.В., Пашко А.О., Васирик О.І. *Моделювання дробового броунівського руху у просторі $L_p([0; T])$* // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2017. — Вип. 97 — С. 97–108.
- [2] Козаченко Ю.В., Каменщикова О.Є. *Апроксимація $S\text{Sub}_\varphi(\Omega)$ випадкових процесів у просторі $L_p([0; T])$* // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2008. — Вип. 79 — С. 73–78.
- [3] Picard J. *Representation formulae for the fractional Brownian motion.* // Séminaire de Probabilités. — 2011. — V. 43 — P. 3–70.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: shurubura@hotmail.com

СЕКЦІЯ 2
Метричної теорії чисел,
геометрії,
фрактального аналізу

ОДНА НІДЕ НЕ ДИФЕРЕНЦІЙОВНА ФУНКЦІЯ

Т.Р. БАБИЧ, С.П. РАТУШНЯК

Нехай $A_s = \{0, 1, \dots, s-1\}$ — алфавіт, $L_s = A_s \times A_s \times \dots$ — простір послідовностей елементів алфавіту A_s . Відомо, що для довільного числа $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L_s$ така, що $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{s^n} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s$. Розклад числа x в s -ковий ряд називається s -ковим представленням, а запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s$ — його s -ковим зображенням.

У 1986 році Працьовитим М.В. була введена в розгляд функція T_c :

$$T_c(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots}^2, \quad c \in A_2$$

$$\text{де } \beta_1 = \begin{cases} c, & \text{при } \alpha_1 = 1, \\ 1 - c, & \text{при } \alpha_1 \neq 1, \end{cases} \quad \beta_{n+1} = \begin{cases} \beta_n, & \text{при } \alpha_n = \alpha_{n+1}, \\ 1 - \beta_n, & \text{при } \alpha_n \neq \alpha_{n+1}. \end{cases}$$

Дана функція є неперервною ніде не диференційовною функцією не обмеженої варіації [1]. Клас таких функцій (s — довільне) носить назву Трибін-функцій.

Основний об'єкт дослідження. Розглядається функція, означена рівностями:

$$f(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^3) = \begin{cases} \delta_0(T_0(x)), & \text{якщо } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ \delta_1(T_0(x)), & \text{якщо } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ T_1(x), & \text{якщо } \frac{2}{3} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

де δ_i — оператор припису цифри $i \in A_2$, що визначається рівністю

$$\delta_i(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2) = \Delta_{i \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2 = \frac{1}{2}x + \frac{i}{2}.$$

Теорема 1. *Функція f є неперервною ніде не монотонною недиференційовною функцією.*

У доповіді пропонуються результати дослідження структурних, фрактальних та варіаційних властивостей функції f .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працевитый Н.В. *Непрерывные канторовские проекторы*. // Методы исследования алгебраических и топологических структур. — К.: КГПИ, 1989. — С.95-105.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА

Email address: 21fmf.t.babych@std.npu.edu.ua

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА

Email address: ratush404@gmail.com

НЕПЕРЕРВНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ОДИНИЧНОГО ІНТЕРВАЛУ, ЯКІ ЗБЕРІГАЮТЬ ХВОСТИ НЕСКІНЧЕННОСИМВОЛЬНОГО B -ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

О.І. БОНДАРЕНКО, М.В. ПРАЦЬОВИТИЙ

Нехай $A = Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ — алфавіт (набір цифр), $L = A \times A \times \dots \times A \times \dots$ — простір послідовностей елементів алфавіту; (Θ_n) — послідовність додатних дійсних чисел ($n \in Z$) така, що

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_{-n} \equiv u < 1, \quad 0 < \sum_{n=0}^{+\infty} \Theta_n \equiv v < 1, \quad u + v = 1.$$

Сформуємо іншу двосторонню послідовність (b_n) , визначену послідовністю (Θ_n) , а саме

$$b_n \equiv \sum_{i=-\infty}^{n-1} \Theta_i = b_{n-1} + \Theta_{n-1}.$$

Теорема 1. Для будь-якого числа $x \in (0; 1)$ існує єдиний скінченний набір цілих чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ або єдина послідовність $(\alpha_n) \in L$ такі, що виконується одна з рівностей

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^m b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^B(\emptyset), \quad (1)$$

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^B. \quad (2)$$

Символічний запис числа x рівністю (1) або (2) називатимемо B -зображенням цього числа, а $\alpha_n = \alpha_n(x)$ — n -ою його цифрою.

Числа, для яких виконується рівність (1), називаються B -скінченними, а ті, для яких виконується рівність (2), — B -нескінченними.

Нагадаємо [1, 2], що перетворенням множини називається взаємнооднозначне, тобто бієктивне, відображення цієї множини на себе. Неперервні перетворення одиничного інтервалу вичерпуються строго зростаючими та строго спадними функціями, область визначення і множина значень яких співпадають з даним інтервалом.

Казатимемо, що зображення B -нескінченних чисел $x_1 = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^B$ і $x_2 = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots}^B$ мають однаковий хвіст, якщо існують натуральні k і m

такі, що $\alpha_{k+j} = \beta_{m+j}$ для всіх натуральних j , що символічно записується $x_1 \sim x_2$. Вважатимемо, що усі B -скінченні числа мають однаковий хвіст.

Очевидно, що бінарне відношення «мати однаковий хвіст» є відношенням еквівалентності. Кожен з класів еквівалентності за відношенням $\sim$ називається *хвостовою множиною* [2, 3]. Легко бачити, хвостова множина є зліченною, а фактор-множина — континуальною.

Означення 1. Функцією, що зберігає хвости B -зображення чисел називають таку функцію, для якої для будь-якого $x \in (0; 1)$ і йому відповідного значення $f(x)$ виконується умова $x \sim f(x)$, тобто існують такі номери k і m , що $\alpha_{n+i}(x) = \alpha_{m+i}(f(x))$, $i \in N$ [2, 3].

Очевидно, що оператори лівостороннього та правостороннього зсувів є функціями, що зберігають хвости B -зображення чисел.

Оператором лівостороннього зсуву цифр B -зображення чисел називається функція ω , означена рівностями:

$$\omega(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^B) = \Delta_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots}^B, \quad \omega(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n (\emptyset)}^B) = \Delta_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n (\emptyset)}^B.$$

Оператором правостороннього зсуву цифр B -зображення з параметром $i \in Z$ називається функція δ_i , означена рівностями:

$$\delta_i(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}^B) = \Delta_{i \alpha_1 \alpha_2 \dots}^B, \quad \delta_i(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n (\emptyset)}^B) = \Delta_{i \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n (\emptyset)}^B.$$

Теорема 2. Множина G всіх неперервних бієкцій (перетворень) інтервалу $(0; 1)$ в $(0; 1)$, які зберігають хвости B -зображення чисел, відносно операції «композиція перетворень» утворюють континуальну некомутативну групу (групу неперервних перетворень, що зберігають хвости B -зображення чисел).

В доповіді буде наведено приклади: нетривіального перетворення, залежного від натурального параметра i , яке зберігає хвости зображення; двох перетворень, які не комутують.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Pratsiovytyi M., Isaieva T. *Transformations of $(0; 1]$ preserving tails of Δ^μ -representation of numbers* // Algebra and Discrete Mathematics. — 2016. — Vol. 22, № 1. — pp. 102–115.
- [2] Pratsiovytyi M.V., Lysenko I.M., Ratushniak S.P. *Uncountable group of continuous transformations of unit segment preserving tails of Q_2 -representation of numbers* // Proceeding of the International Geometry Center. — 2024. — 17, № 2. — pp. 99–108.
- [3] Працьовитий М.В. *Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування*. — Київ: Наук. думка, 2022. — 316 с.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: o.i.bondarenko@udu.edu.ua

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: prats4444@gmail.com

ПРО ПРОБЛЕМУ ФРАКТАЛЬНОЇ ДОВІРЧОСТІ ЛОКАЛЬНО ТОНКИХ СИСТЕМ ПОКРИТТІВ $\tilde{Q}$ -ЗОБРАЖЕННЯ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ РОЗМІРНОСТІ ХАУСДОРФА-БЕЗИКОВИЧА

В.О. ВАСИЛЕНКО, Г.М. ТОРБІН

Нехай $H^\alpha(E, \Phi)$ — α -міра Хаусдорфа множини E відносно фіксованої локально тонкої системи покриттів Φ одиничного відрізка (див. [3]).

Означення 1. Розмірністю Хаусдорфа-Безиковича множини E відносно Φ називається число

$$\dim_H(E, \Phi) = \inf\{\alpha : H^\alpha(E, \Phi) = 0\}.$$

Означення 2. Локально тонка система покриттів Φ називається довірчою системою покриттів на $[0, 1]$, якщо

$$\dim_H(E, \Phi) = \dim_H(E), \quad \forall E \subset [0, 1].$$

А.С. Безикович довів довірчість сім'ї циліндричних відрізків двійково-го представлення; Р. Billingsley довів довірчість сім'ї циліндричних відрізків s -адичного представленням, М.В. Працьовитий довів довірчість сім'ї циліндричних відрізків Q -представленням. Достатні умови довірчості сім'ї $\Phi(Q^*)$ циліндричних відрізків Q^* -представлення знайдено в роботах S. Albeverio, М. ібрагіма, Г. Торбіна [2], а для $\Phi(Q_\infty)$ -представлень — в роботах S. Albeverio, Ю. Кондратьєва, Р. Нікіфорова, Г. Торбіна [5]. Критерій довірчості сім'ї покриттів, породжених розкладами Кантора, знайдено у роботі S. Albeverio, Г. Іваненко, М. Лебеда, Г. Торбіна [3].

На сьогодні відкритою залишається проблема знаходження необхідних і достатніх умов довірчості для сімейств покриттів, що породжуються Q^* -представленням. У роботі [4] доведено нову достатню умову довірчості сім'ї циліндричних відрізків Q^* -представлення і висловлено гіпотезу про те, що ця ж умова є необхідною умовою для довірчості сім'ї $\Phi(Q^*)$ циліндрів.

Нехай $\tilde{Q}$ -стохастична матриця $\tilde{Q} = \|q_{ik}\|$ така, що

- 1) $q_{ik} > 0, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n_k - 1\}, \quad \forall k \in N;$
- 2) $\sum_{i=0}^{n_k-1} q_{ik} = 1, \quad \forall k \in N;$
- 3) $\prod_{k=1}^{\infty} \max_i q_{ik} = 0.$

Теорема 1. Нехай $Q_k := q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_k$, де $q_k := \max_i \{q_{ik}\}$, $0 \leq i \leq n_k - 1$.
Припустимо, що $\forall \delta > 0$ виконуються умови

$$\lim_{k \rightarrow \infty} n_k \cdot Q_k^\delta = 0; \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q_k^\delta < +\infty. \quad (2)$$

Тоді сім'я $\Phi(\tilde{Q})$ циліндрів $\tilde{Q}$ -зображення [1] є довірчою для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича на $[0, 1]$.

Наслідок 1. Якщо $n_k = s$, тобто $\tilde{Q}$ -зображення є Q^* -зображенням, то для довірчості сім'ї $\Phi(\tilde{Q})$ циліндрів достатньо виконання умови (2).

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Alberverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G. *On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent Q -symbols.* // Methods of Functional Analysis and Topology, 17 (2011), №2, 97–111.
- [2] M. Ibragim, G. Torbin. *Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q^* -digits.* // Modern Stochastics: Theory and Applications, 2016, vol. 3, №2, P. 119–131.
- [3] Alberverio S., Ivanenko G., Lebid M., Torbin G. *On the Hausdorff dimension faithfulness and the Cantor series expansion.* // Methods of Functional Analysis and Topology Vol. 26 (2020), no. 4, pp. 298–310.
- [4] Василенко В., Вороненко О., Пихтар М., Торбін Г. *Про довірчість системи Q^* -циліндрів для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича.* // Міждисциплінарні дослідження складних систем 2023, вип. 23, ст. 70-77.
- [5] Alberverio S., Kondratiev Yu., Nikiforov R., Torbin G., *On new fractal phenomena connected with infinite linear IFS* // Mathematische Nachrichten, 2017, 290 (8-9), 1163-1176.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: vasvlad1997@gmail.com

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: g.m.torbin@npu.edu.ua

ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ СИСТЕМ ЧИСЛЕННЯ З НАТУРАЛЬНОЮ ОСНОВОЮ І ДВОМА НАДЛИШКОВИМИ ЦИФРАМИ

С.О. ВАСЬКЕВИЧ, Ю.Ю. ВОВК, Я.В. ГОНЧАРЕНКО

Нехай $2 < r$ — фіксоване натуральне число, $A_r \equiv \{0, 1, \dots, r\}$ — алфавіт (набір цифр), $L_r \equiv A_r \times A_r \times \dots$ — простір (множина) послідовностей елементів алфавіту, тобто $L_r = \{(\alpha_n) : \alpha_n \in A_r\}$.

Розглядаються вирази виду

$$\frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} s^{-n} \alpha_n \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{r_s}, (\alpha_n) \in L_r. \quad (1)$$

Означення 1. Якщо число x є сумою ряду (1), то цей ряд називається його r_s -представленням, а символічний запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{r_s}$ — r_s -зображенням числа x .

Лема 1. Якщо натуральне число p задовольняє умову $ps - 1 \leq r$, то має місце рівність

$$\frac{s-1}{s^k} + \frac{s-1}{s^{k+1}} = \frac{s-p}{s^k} + \frac{ps-1}{s^{k+1}}$$

і взаємозаміна пар

$$(s-1, s-1) \leftrightarrow (s-p, ps-1),$$

зокрема $(s-1, s-1) \leftrightarrow (s-2, 2s-1)$.

Теорема 1. Кожне r_s -раціональне число інтервалу $(0; \frac{r}{s-1})$ має нескінченну множину різних r_s -зображень, причому

- 1) континуальну, якщо $r \geq 2s-1$,
- 2) зліченну, якщо $s \leq r < 2s-1$.

Лема 2. Число $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k(a)}^{r_s}$ має r_s -зображення:

- 1) $x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1}[\alpha_k+1](a+1-s)}^{r_s}$, якщо $a \geq s-1$;
- 2) $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1}[\alpha_k-1](a-1+s)}^{r_s}$, якщо $a \leq r-s$ і $\alpha_k \neq 0$.

Лема 3. Якщо деяке r_s -зображення $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^{r_s}$ числа x містить нескінченну кількість лише цифр 0 і $s-1$, то це число має континуальну множину різних r_s -зображень.

У доповіді пропонуються результати дослідження тополого-метричної теорії r_s -зображення, її геометрії (геометричного змісту цифр, властивостей циліндрів, зокрема специфіки їхніх перекриттів, метричних співвідношень), а також зв'язку r_s -зображення з множинами неповних сум рядів.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Гончаренко Я.В., Микитюк І.О. Представлення дійсних чисел в системах з надлишковим набором цифр та їх використання Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки: К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова. – 2004, № 5. – С. 255-275.
- [2] Працьовитий М.В. Розподіли сум випадкових степеневих рядів Доповіді НАН України, 1996. – № 5. – С.32-37.
- [3] Працьовитий М.В. Згортки сингулярних розподілів Доповіді НАН України, 1997. – № 9. – С.36-43.

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: `svetaklymchuk@gmail.com`

ЧОІППО ІМЕНІ К.Д. УШИНСЬКОГО, ЧЕРНІГІВ, УКРАЇНА
Email address: `freeeidea@ukr.net`

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: `goncharenko.ya.v@gmail.com`

КАНТОРВАЛИ, ПОВ'ЯЗАНІ З СИСТЕМАМИ ЧИСЛЕННЯ З НАДЛИШКОВИМ АЛФАВІТОМ

О.Я. ВИННИШИН

Для абсолютно збіжного числового ряду $r_0 = u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots$ розглядаються числа виду

$$x = x(B) = \sum_{k \in B \subseteq \mathbb{N}} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k u_k,$$

де $\alpha_k = 1$ при $k \in B$ і $\alpha_k = 0$ при $k \notin B$.

Означення 1. Множина E всіх таких чисел називається множиною неповних сум (підсум) даного ряду.

Означення 2. Розклад числа $x \in [0; \frac{r}{s-1}]$, $1 < s \in \mathbb{N}$ в ряд

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k s^{-k} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{r_s}, \text{ де } \alpha_k \in A \equiv \{0, 1, \dots, r\}, r \geq s,$$

називається його r_s -представленням (а запис $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^{r_s}$ – r_s -зображенням) у системі числення з основою s і надлишковим алфавітом A .

Розглядається збіжний додатний ряд, аналогічний ряду Гатрі-Німана, а саме

$$\frac{5}{8} + \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{5}{8^2} + \frac{4}{8^2} + \frac{2}{8^2} + \dots + \frac{5}{8^n} + \frac{4}{8^n} + \frac{2}{8^n} + \dots \quad (1)$$

Теорема 1. Множина E неповних сум ряду (1) містить відрізок $[\frac{5}{8}, 1]$ та не є скінченним об'єднанням відрізків, тобто є канторвалом.

Для множини E підсум даного ряду досліджуються її структурні та тополого-метричні властивості.

На множину E підсум ряду (1) можна дивитись як на множину чисел, які у системі зображення чисел з основою 8 та надлишковим алфавітом $\{0, 1, \dots, 11\}$, використовують лише цифри $\{0, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}$, тобто є множиною, що визначається заборонаю на використання цифр у цій системі зображення чисел.

Розглядається узагальнення, а саме ряди виду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{p^k} + \frac{2n}{p^k} + \frac{2n-2}{p^k} + \dots + \frac{4}{p^k} + \frac{2}{p^k} \right), \text{ де } p = n^2 + n + 2. \quad (2)$$

Теорема 2. Множина E неповних сум ряду (2) є канторвалом. Також множина E містить $2n$ попарно неперетинних ізометричних копій самої себе з коефіцієнтом подібності $\frac{1}{n^2+n+2}$.

У доповіді пропонуються результати дослідження тополого-метричних та фрактальних властивостей множини підсум ряду (2).

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Guthrie J. A., Nymann J. E. *The topological structure of the set of subsums of an infinite series* // Colloquium Mathematicum — 1988. — 55— С. 325–327.
- [2] Pratsiovytyi M. V, Karvatsky D.M. *Множина неповних сум модифікованого ряду Гампі-Німана* // Буковинський математичний журнал — 2023. — 10— С. 195–203.
- [3] Glab S., Marchwincki J. *Set of uniqueness for Cantorvals* // Results Math. — 2023. — 78— Paper No. 9, 24
- [4] Michael B., Gorodetski A., Mazac J. *A naturally appearing family of Cantorvals* // Lett Math Phys. — 2024. — 114
- [5] Виннишин Я., Маркітан В., Працьовитий М., Савченко І. *Додатні ряди, множини підсум яких є канторвалами* // Proceedings of the int. geometry center — 2019. — 12, №2— С. 26–42.

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: oleh.vynnyshyn@imath.kiev.ua

ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН З НЕЗАЛЕЖНИМИ СИМВОЛАМИ РОЗКЛАДІВ КАНТОРА ТА ЇХНІ ЗАСТОСУВАННЯ

Ю.П. ВОЛОШИН, Г.М. ТОРБІН

Нехай $\{n_k\} : n_k \in N, n_k \geq 2$. Нехай $\{\xi_k\}$ — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень $0, 1, \dots, n_k - 1$ з імовірностями $p_{0k}, p_{1k}, \dots, p_{(n_k-1)k}$ відповідно.

Означення 1. Випадкову величину виду

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\xi_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} \right),$$

називають випадковою величиною з незалежними символами розкладів Кантора.

У даній доповіді розглядаються властивості випадкових величин з незалежними символами розкладів Кантора, зокрема розмірність міри $\dim_H \mu_\xi$, розмірність спектра $\dim_H S_\xi$ та їхні застосування до DP-перетворень.

Питання фрактальних властивостей μ_ξ все ще не вивчено у повному обсязі. Невідомі загальні формули ні для розмірності Хаусдорфа-Безиковича спектра S_ξ , ні для розмірності Хаусдорфа-Безиковича міри $\dim_H \mu_\xi$, де $\dim_H \mu_\xi = \inf_{\mu_\xi(E)=1} \{\dim_H(E)\}$.

Фрактальні властивості спектра та тонкі фрактальні властивості міри μ_ξ досліджувались в роботах S. Albeverio, М. Лебеда, Г. Торбіна та інших. Зокрема, відомі наступні твердження.

Теорема 1. [1] *Нехай*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ln(n_k)}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_{k-1})} \right)^2 < +\infty.$$

Тоді

$$\dim_H \mu_\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h_1 + h_2 + \dots + h_k}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k)},$$

де h_k — ентропія випадкової величини $\{\xi_k\}$, тобто $h_k = -\sum_{i=0}^{n_k-1} p_{ik} \ln p_{ik}$.

Теорема 2. [1] *Нехай*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ln(n_k)}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_{k-1})} \right)^2 < +\infty.$$

Тоді

$$\dim_H S_\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k)}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k)}, \quad (1)$$

де m_k — кількість ненульових ймовірностей $p_{0k}, p_{1k}, \dots, p_{(n_k-1)k}$.

Чи правильна формула (1) без додаткових обмежень? Покажемо, що відповідь негативна.

Приклад 1. Нехай $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_k = 6^{2^{k-3}}$, $\forall k \geq 3$ та випадкова величина $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\xi_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} \right)$, де

ξ	0	1	...	$\sqrt{n_k} - 1$	$\sqrt{n_k}$	...	$n_k - 1$
	$\frac{1}{\sqrt{n_k}}$	$\frac{1}{\sqrt{n_k}}$	...	$\frac{1}{\sqrt{n_k}}$	0	...	0

В даному випадку $\dim_H S_\xi \leq \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k)}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k)}$

Теореми про $\dim_H \mu_\xi$ дозволяють обчислити $\dim_H S_\xi$ та мають застосування до DP-перетворень.

Означення 2. $f(x)$ називається DP-перетворенням на $[0;1]$, якщо

$$\forall E \subset [0;1] : \dim_H(E) = \dim_H(f(E)).$$

Використовуючи вказані вище результати та результати роботи [2], ми отримали такий результат.

Теорема 3. Нехай F_ξ — функція розподілу випадкової величини з незалежними символами розкладів Кантора. Якщо послідовність $\{n_k\}$ — обмежена і існує $p_0 > 0 : p_{ik} \geq p_0 > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, n_k - 1\}$, то F_ξ є DP-перетворенням тоді і тільки тоді, коли $\dim_H \mu_\xi = 1$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Alberverio S., Ivanenko G., Lebid M., Torbin G. *On the Hausdorff dimension faithfulness and the Cantor series expansion* // Methods of Functional Analysis and Topology — 2020. — Т. 26, № 4. — С. 298–310.
- [2] Василенко В., Міський В., Торбін Г. *Умови фрактальної довірчості для сімейства циліндрів, породжених $\tilde{Q}$ -зображенням.* // Міждисциплінарні дослідження складних систем — 2024. — Т. 25. — С. 70–76.
- [3] Alberverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. *Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension* // Ergodic Theory Dynam. Systems — 2004. — Т. 24, № 1. — С. 1–16.
- [4] Alberverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. *Transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension* // Central European Journal of Mathematics. — 2008. — Т. 6, № 1. — С. 119–128.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: yu.p.voloshyn@udu.edu.ua

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: g.m.torbin@npu.edu.ua

КРИВІ ВІЯЛОВОГО ТИПУ

М.В. ЕМАЙКІН

Трикутний килим Серпінського один з найпопулярніших елементів фрактальної геометрії, який є прикладом кривої павутинного типу. Дану фігуру можна задати кількома способами: 1) як множину точок евклідової площини

$$S = \{(x, y) : x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2, y = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots}^2 \alpha_n + \beta_n \leq 1, n \in N\},$$

де $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2^n}$, $\alpha_n \in \{0, 1\}$;

2) як множину значень комплекснозначної функції

$$f(t = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^3) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{\alpha_i}}{2^i}, \quad \alpha_n \in \{0, 1, 2\}, \quad (1)$$

де $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $t = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^3 = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \alpha_n$.

Останнє задання дозволяє вивчати килим Серпінського за допомогою методів математичного аналізу. Аналогічним чином (з використанням п'ятіркової системи числення) можна означити фрактал Вічека, що є фрактальною кривою віялового типу. Ми цікавимося множинами значень комплекснозначних функцій виду (1). Розглядається функція f , означена рівністю

$$f(t = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^8) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{\alpha_k} r^k \quad (2)$$

де $t = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^8 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{8^n}$ — вісімкова система зображення чисел, $\alpha_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $r = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$, $\varepsilon_{\alpha_k} = \cos(\frac{2\pi\alpha_k}{8}) + i \sin(\frac{2\pi\alpha_k}{8})$ — корені 8-го степеня з 1.

В першу чергу нас цікавить множина значень даної функції, та її фрактальні властивості. Розглянемо значення функції від $t_j = \Delta_{j \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^8$

$$f(t_j) = f(\Delta_{j \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^8) = \varepsilon_j r + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon_{\alpha_k} r^k = \varepsilon_j r + f(\Delta_{\alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^8),$$

тобто точка t_j переходить в $x' + iy'$, де

$$\begin{cases} x' = rx + r \cdot \operatorname{Re}(\varepsilon_j) + \sum_{k=2}^{\infty} \operatorname{Re}(\varepsilon_{\alpha_k}) r^k, \\ y' = ry + r \cdot \operatorname{Im}(\varepsilon_j) + \sum_{k=2}^{\infty} \operatorname{Im}(\varepsilon_{\alpha_k}) r^k, \end{cases} \quad j \in \{0, 1, \dots, 7\}. \quad (3)$$

Теорема 1. Множина S значень функції $f(t)$ є самоподібною множиною з самоподібною структурою

$$S = f_0(S) \cup f_1(S) \cup f_2(S) \cup f_3(S) \cup f_4(S) \cup f_5(S) \cup f_6(S) \cup f_7(S),$$

де

$$f_j: \begin{cases} x' = rx + r \cos\left(\frac{2\pi j}{8}\right), \\ y' = ry + r \sin\left(\frac{2\pi j}{8}\right), \end{cases} \quad j \in \{0, 1, \dots, 7\}, \quad (4)$$

і з самоподібною розмірністю $\log_r 0.125$.

Зауваження 1. Криву виду S відносять до кривих віялового типу.

У доповіді пропонуються результати дослідження фрактальних властивостей множини значень однієї комплекснозначної функції f .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М. В. *Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел*. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. — 68 с.
- [2] Працьовитий М.В., Чумак М.Є. *Фрактальність і канторовість розподілу однієї комплекснозначної випадкової величини типу Джессена-Вінтнера* // Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. Фізико-математичні науки.— Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 1999.— 1.— С.244-250.
- [3] Ратушняк С., Трачук А. *Трикутний килим Серпінського, означений в термінах Q_2 -зображення чисел відрізка $[0;1]$* // Актуальні проблеми математики та методики її навчання у вищій школі: матеріали Всеукраїнської наукової конференції, 17–18 грудня 2020 р. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2021. — С. 41–43.
- [4] Pratsiovytyi M.V., Kovalenko V.M. *Probability measures on fractal curves (probability distributions on Vicsek fractal)* // Random Operators and Stochastic equations, 2015; 23(3). — p. 161 – 168.
- [5] Pratsiovytyi M.V., Lysenko I.M., Ratushniak S.P., Tsokolenko O.A., *Distribution of unit mass on one fractal self-similar web-type curve*, Matematychni Studii, 2024, 62(1), p. 21–30.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА

Email address: 23fmif.m.emaikin@std.udu.edu.ua

ФУНКЦІЇ РАДЕМАХЕРА І РЯДИ УОЛША ДЛЯ НЕГА-ДВІЙКОВОГО ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

В.О. ЄЛАГІН

Нехай $A \equiv \{0; 1\}$ — алфавіт двійкової системи числення, $L \equiv A \times A \times \dots$ — множина (простір) послідовностей елементів алфавіту (простір послідовностей 0 та 1).

Нагадаємо, що функціями Радемахера $r_k(x)$ для класичного двійкового зображення називаються функції з періодом (1), визначені на піввідрізку $[0; 1]$ так:

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in [0; \frac{1}{2}), \\ -1, & \text{при } x \in [\frac{1}{2}; 1], \end{cases}$$

де $r_k(x) = r_0(\{2^k x\})$, $k = 1, 2, \dots$.

Функції Уолша є всеможливими добутками функцій Радемахера.

Доповідь присвячена аналогам функцій Радемахера та Уолша для нега-двійкового зображення чисел. а саме

$$x = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-2)^n} = \frac{2}{3} - \left(\frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{2^2} + \frac{\alpha_3}{2^3} - \dots \right) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots}^{-2}, \alpha_n \in A$$

Циліндром рангу n з основою $c_1 c_2 \dots c_n$, що відповідає нега-двійковому зображенню чисел відрізка $[0; 1]$, називають множини

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{-2} = x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n \beta_1 \beta_2 \dots}^{-2}, (\beta_n) \in L.$$

Означення 1. На піввідрізку $[0; 1]$ означимо послідовність функцій $(\overline{r}_n)_{n=0}^{\infty}$:

$$\overline{r}_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha_1(x) = 0, \Leftrightarrow x \in [\frac{2}{3}; 1) \\ -1 & \text{якщо } \alpha_1(x) = 1 \Leftrightarrow x \in [0; \frac{2}{3}), \end{cases}$$

$$\overline{r}_n(x) = \overline{r}_0(\Delta_{\alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \dots}^{-2}), n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1. Для довільного набору $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in L$ для функції $\overline{r}_n$ має місце рівність:

$$\int_{x \in \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{-2}} \overline{r}_n(x) dx = 0 = \int_0^1 \overline{r}_n(x) dx$$

Теорема 2. Система функцій $\overline{r_n}(x)$ є ортогональною, а саме для $m \neq n$:

$$\int_0^1 \overline{r_n}(x) \overline{r_m}(x) dx = 0$$

В доповіді пропонуються різнопланові застосування аналогів функцій Радемахера та Уолша.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М.В, Маслова Ю.П. *Про одне узагальнення системи функцій Радемахера та Уолша* // Збірник Праць Інституту математики НАН України — 2016. — Т. 13, № 3. — С. 146–157.
- [2] Працьовитий М.В. *Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування*. — Київ: Наук. думка, 2022. — 316 с.

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: yelahin@imath.kiev.ua

ТОПОЛОГО-МЕТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ МНОЖИНИ НЕПОВНИХ СУМ ОДНОГО РЯДУ

Б.С. КАЛЮЖНИЙ

Розглядається збіжний знакододатний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + r_n, \quad r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots \quad (1)$$

Нехай M — довільна підмножина множини натуральних чисел. Тоді

$$x = x(M) = \sum_{n \in M \subset \mathbb{N}} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, \quad \text{де} \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n \in M, \\ 0, & \text{якщо } n \notin M. \end{cases}$$

називається *неповною сумою (підсумою) ряду (1)*.

Множина $E\{a_n\} = \{x : x = \sum_{n \in M} a_n, M \in 2^{\mathbb{N}}\}$, де $2^{\mathbb{N}}$ — множина всіх підмножин $\mathbb{N}$, називається *множиною неповних сум ряду (1)*.

Різні вчені займались дослідженням тополого-метричних властивостей множин неповних сум рядів. Зокрема, в роботі [1] автори сформулювали теорему, яку остаточно доведено в [2]. Нагадаємо її.

Теорема (Гатрі–Німан–Сеїнз). *Множина $E\{a_n\}$ неповних сум ряду (1) є однією з наступних:*

- скінченним об'єднанням відрізків;
- гомеоморфною множині Кантора;
- канторвалом.

Об'єктом дослідження є збіжний додатний ряд:

$$\frac{1}{4} + \frac{4}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{4}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} + \frac{4}{4^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{4}{4^n} \right). \quad (2)$$

Топологічні властивості множини неповних сум ряду (2) не зміняться, якщо переставити доданки на парних і непарних місцях, а також відкинути перший доданок. Тому розглядатимемо множину неповних сум для наступного ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{1}{4^n} \right)$, тобто множину

$$E = \left\{ x : x = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_{2k-1}}{4^k} + \frac{\alpha_{2k}}{4^k} \right), \alpha_n \in \{0, 1\} \right\}. \quad (3)$$

Теорема 1. Множина неповних сум ряду (3) є множиною канторівського типу, тобто ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.

На множині E задамо операцію $*$ наступним чином: для довільних $x, y \in E$, таких що

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_{2k-1}}{4^k} + \frac{\alpha_{2k}}{4^k} \right), \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\beta_{2k-1}}{4^k} + \frac{\beta_{2k}}{4^k} \right), \quad \alpha_i \in \{0, 1\}, \beta_i \in \{0, 1\},$$

$$z = x * y = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma_{2k-1}}{4^k} + \frac{\gamma_{2k}}{4^k} \right), \quad \gamma_n = \alpha_n \circ \beta_n.$$

де $\circ$ — бінарна операція на множині $\{0; 1\}$, тобто $\alpha_n \circ \beta_n = \gamma_n \in \{0, 1\}$.

Теорема 2. Множина чисел E разом з операцією $*$ утворює нескінченну комутативну групу, якщо поелементна операція $\circ$ визначається наступним чином:

$$\alpha_n \circ \beta_n = |\alpha_n - \beta_n| \quad \text{або} \quad \alpha_n \circ \beta_n = 1 - |\alpha_n - \beta_n|.$$

У доповіді пропонуються результати дослідження тополого-метричних властивостей множини підсум заданого ряду.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Guthrie J.A., Nymann J.E. *The topological structure of the set of subsums of an infinite series*. Studia Math., 1988, 55(2), pp. 323–327.
- [2] Nymann J.E., Sáenz R.A. *On the paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series*. Colloq. Math., 2000, 83, pp. 323–327.
- [3] Працьовитий М.В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*. — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
 Email address: 23fmif.b.kaliuzhnyi@std.udu.edu.ua

ФУНКЦІЇ З ФРАКТАЛЬНИМИ МНОЖИНАМИ ОСОБЛИВОСТЕЙ

А.І. КОРНІЙЧУК, С.П. РАТУШНЯК

Нехай $2 \leq s$ — натуральне число, $A_s = \{0, 1, \dots, s-1\}$ — алфавіт, $L = A^\infty$ — простір послідовностей елементів A . Тоді для довільного числа $x \in [0; 1]$ існує $(\alpha_n) \in L$ така, що $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{s^n} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s$. Розклад числа x в s -ковий ряд називається s -ковим представленням, а запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s$ — s -ковим зображенням. s -кові системи зображення і їм топологічно еквівалентні є ефективним засобом для задання та дослідження фрактальних функцій.

Розглядається функція, означена рівністю

$$f(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots}^m, \quad m \leq s,$$

де $\beta_n = \varphi_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, φ — фінітна функція така, що $A_m^n \xrightarrow{\varphi_n} A_s$.

Можна довести, що функція f є неперервною тоді і тільки тоді, коли вона коректно означена у точках, що мають два формально різні зображення $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} i(s-1)}^s = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} [i+1](0)}^s$, $i \in A_{s-1}$.

Якщо $m = 2$, $\beta_1 = 0$, коли $\alpha_1 = 0$, і $\beta_1 \neq 0$ у решті випадків, а $\beta_{n+1} = \begin{cases} \beta_n, & \text{якщо } \alpha_n = \alpha_{n+1}, \\ 1 - \beta_n, & \text{якщо } \alpha_n \neq \alpha_{n+1}, \end{cases}$ то функція f є відомою ніде не диференційовною Трибін-функцією [1]. Якщо $m = 3$, $s = 5$, а β_n визначаються рівностями [2], то f є недиференційовною функцією Серпінського.

У доповіді пропонуються результати фрактального аналізу деяких представників класу функцій f та їхніх суперпозицій.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працевитый Н.В. *Непрерывные канторовские проекторы*. // Методы исследования алгебраических и топологических структур. — К.: КГПИ, 1989. — С.95-105.
- [2] Працьовитий М. В., Василенко Н.А. *Недиференційовна функція, що є одним з узагальнень відомої функції Серпінського* // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки, 2010.— №11. — С. 170-181.

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ УПРАВЛІННЯ, Київ, Україна
Email address: t_anastasia_i@ukr.net

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, Київ, Україна
Email address: ratush404@gmail.com

МНОЖИНИ КАНТОРІВСЬКОГО ТИПУ

Ю.Ю. КУШНІР

Нехай $A_s = \{0, 1, \dots, s-1\}$ — алфавіт, $L_s = A_s \times A_s \times \dots$ — простір послідовностей елементів алфавіту A_s . Відомо, що для довільного числа $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L_s$ така, що

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{s^n} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s.$$

Розклад числа x в s -ковий ряд називається s -ковим представленням, а запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^s$ — його s -ковим зображенням. s -кова система числення використовується для задання та дослідження фрактальних множин та функцій. Зокрема, одним із найвідоміших прикладів фрактальних множин, означених в термінах трійкової системи числення, є досконала ніде не щільна нуль-множина Кантора. Відомо, що вона є самоподібною множиною з самоподібною розмірністю $\log_3 2$.

Розглядається множина виду

$$C[5; V_n] = \{x \in [0; 1] : x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^5, \alpha_n \in V_n, n \in N\}.$$

Відомо, що множина C є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега, якщо $V_n = V \subset A_5$, $V \neq \emptyset$.

Ми цікавимося арифметичною сумою $C \oplus C$.

Нагадаємо, що арифметичною сумою числових множин A і B називається множина $C = \{x : x = a + b, a \in A, b \in B\}$.

Приклад 1. Якщо $V_n = \{0, 1, 3, 4\}$ для будь-якого $n \in N$, то арифметична сума $C \oplus C = [0; 2]$.

Приклад 2. Якщо $V_n = \{0, 4\}$ для будь-якого $n \in N$, то арифметична сума $C \oplus C$ є досконалою ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.

У доповіді пропонуються результати дослідження структурних, топологічних та фрактальних властивостей арифметичних сум множин C в залежності від множин V_n .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: 21fmf.yu.kushnir@std.npu.edu.ua

ПРО ОДИН КЛАС ФРАКТАЛЬНИХ МНОЖИН ЗАДАНИХ В ТЕРМІНАХ ЛАНЦЮГОВОГО A_2 -ПРЕДСТАВЛЕННЯ

О.П. МАКАРЧУК

Нехай $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}$. Відомо [1], що для кожного числа $t \in [\alpha_1; \alpha_2]$ існує послідовність (b_n) така, що $b_n \in \{\alpha_1; \alpha_2\}$ для кожного натурального n та виконується рівність:

$$t = [0; b_1, \dots, b_k, \dots],$$

де $[0; b_1, \dots, b_k, \dots]$ позначає значення нескінченного ланцюгового дробу з елементами з (b_n) відповідно. Відповідне зображення числа $t \in [\alpha_1; \alpha_2]$ називається ланцюговим A_2 -зображенням з алфавітом $\{\alpha_1; \alpha_2\}$.

Відомо [1], що існує зчисленна множина чисел, які називаються A_2 -бінарними, кожне з яких має два A_2 -зображення виду:

$$[0; b_1, \dots, b_n, \alpha_1(\alpha_1, \alpha_2)] = [0; b_1, \dots, b_n, \alpha_2(\alpha_2, \alpha_1)],$$

де круглі дужки символізують період. З іншого боку, всі інші числа відрізка $[\alpha_1; \alpha_2]$ мають єдине A_2 -зображення і їх називають A_2 -унарними.

Нехай $\rho \in (0; 1)$, розглянемо множину:

$$A(\alpha_1; \rho) = \{x = [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots] \mid \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\#\{1 \leq j \leq k \mid a_j = \alpha_1\}}{k} = \rho\}.$$

Деякі оцінки для розмірності Гаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(A(\alpha_1; \rho))$ множини $A(\alpha_1; \rho)$ були отримані в роботі [2]. Новою є наступна оцінка:

Теорема 1. Для кожного $\rho \in (0; 1)$ виконується нерівність

$$\alpha_0(A(\alpha_1; \rho)) \geq - \frac{\rho \ln(\rho) + (1 - \rho) \ln(\rho)}{2\rho \ln\left(\frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 + 4}}{2}\right) + (2 - 2\rho) \ln\left(\frac{\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 + 4}}{2}\right)}.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Дмитренко С.О., Кюрчев Д.В., Працьовитий М.В. Ланцюгове A_2 -зображення дійсних чисел та його геометрія // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 21, № 4. — С. 452–463.
- [2] Працьовитий М.В., Кюрчев Д.В. Сингулярність розподілу випадкової величини, зображеної ланцюговим A_2 -дробом з незалежними елементами // Теорія ймовір. та матем. статист. — 2009. — Т. 21. — С. 139–154.

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: makolpet@gmail.com

ПРО ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗПОДІЛІВ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН, ПОРОДЖЕНИХ СУБГЕОМЕТРИЧНИМИ РОЗКЛАДАМИ КАНТОРА

В.В. МЕТІЛЬ

Нехай $\{n_k\}$ – послідовність натуральних чисел, $n_k \geq 2$.

Розклад числа $x \in [0; 1]$ у ряд виду

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k(x)}{n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k}, \quad (1)$$

де $\gamma_k(x) \in \{0, 1, \dots, n_{k-1}\}$, називається розкладом Кантора числа x (див. [1]).

Означення 1. Розклад Кантора називається субгеометричним, якщо існує $q \in N$ таке, що $n_k \leq q^k$, $\forall k \in N$.

Якщо $\{n_k\}$ утворює арифметичну чи геометричну прогресію, то відповідний розклад Кантора є, очевидно, субгеометричним.

Проблема фрактальної довірчості системи $\Phi(c)$ циліндрів розкладу Кантора досліджена в роботі [2], де знайдено критерій довірчості для розкладів Кантора: $\Phi(c)$ є довірчою для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича на одиничному відрізку тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(n_k)}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_{k-1})} = 0. \quad (2)$$

Теорема 1. Якщо $\{n_k\}$ утворює арифметичну або геометричну прогресію, то $\Phi(c)$ є довірчою для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича на $[0; 1]$.

Очевидно, що при досить швидко зростаючих послідовностях $\{n_k\}$ (наприклад $n_k = 2^{2^k}$) відповідна сім'я циліндрів $\Phi(c)$ не є довірчою.

Теорема 2. Існують субгеометричні розклади Кантора, для яких $\Phi(c)$ не є довірчою.

Нехай $\{\eta_k\}$ – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень $0, 1, \dots, n_{k-1}$ з імовірностями $p_{0k}, p_{1k}, \dots, p_{(n_k-1)k}$ відповідно.

Розглянемо випадкову величину

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{n_1 \cdot \dots \cdot n_k}.$$

Теорема 3. Якщо $\{n_k\}$ утворюють арифметичну прогресію, то

$$\dim_H \mu_\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h_1 + \dots + h_k}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k)},$$

де

$$h_k := - \sum_{i=0}^{n_k-1} p_{ik} \ln p_{ik},$$

$\dim_H \mu_\xi = \inf \{ \dim_H E, \mu_\xi(E) = 1 \}$ — розмірність Хаусдорфа міри μ_ξ .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Cantor G. *Über die einfachen Zahlensysteme* // Zeitschrift f.Math.u.Physik. 14:121–128, 1869.
- [2] Alberverio S., Ivanenko G., Lebid M., Torbin G. *On the Hausdorff dimension faithfulness and the Cantor series expansion*. // Methods of Functional Analysis and Topology, 2020. 26(4), pp. 298–310.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: v.v.metil@udu.edu.ua

АНАЛОГ ТРИБІН-ФУНКЦІЇ ДЛЯ L -ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

Н.А. МИЦКО

Нехай $L = N \times N \times \dots$ — простір послідовностей елементів алфавіту (простір послідовностей натуральних чисел). Відомо [1], що для $\forall x \in (0; 1]$ $\exists (d_n) \in L$ така, що

$$x = \frac{1}{d_1 + 1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{d_1(d_1 + 1) \dots d_{n-1}(d_{n-1} + 1)(d_n + 1)} \equiv \Delta_{d_1 d_2 \dots d_n \dots}^L.$$

Розклад числа x в ряд Люрота називається L -представлення, а запис $\Delta_{d_1 d_2 \dots d_n \dots}^L$ — його L -зображення. Зображення чисел рядами Люрота є одним з представників нескінченносимвольного самоподібного зображення з екстранульовою надлишковістю.

Розглядається функція f , означена рівністю

$$f(x = \Delta_{d_1 d_2 \dots d_n \dots}^L) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} \equiv \Delta_{b_1 b_2 \dots b_n \dots}^2, \quad b_n \in \{0, 1\},$$

де $b_1 = 0$, якщо $d_1 = 1$ і $b_1 = 1$ в решті випадків, $b_{n+1} = b_n$, якщо $a_n = a_{n+1}$ і $b_{n+1} \neq b_n$ в решті випадків.

Теорема 1. *Функція f є неперервною ніде не монотонною функцією не обмеженої варіації. Якщо у L -зображенні точки x_0 немає періоду (1), то функція $f(x)$ не має скінченної похідної в цій точці.*

Дана функція є аналогом відомої ніде не диференційовної Трибін-функції [2] для нескінченносимвольного зображення чисел.

У доповіді пропонуються результати дослідження структурних, варіаційних, інтегро-диференціальних властивостей функції f .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Luroth J. *Über eine eindeutige Entwicklung von Zahlen in eine unendliche Reihe* // Math. Ann. — 1883. — Т. 21, — Р. 411–423.
- [2] Працевитый Н.В. *Непрерывные канторовские проекторы*. // Методы исследования алгебраических и топологических структур. — К.: КГПИ, 1989. — С.95-105.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: 21fmf.n.bilovytska@std.npu.edu.ua

ПРО ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗПОДІЛІВ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН З НЕЗАЛЕЖНИМИ СИМВОЛАМИ ФАКТОРІАЛЬНОГО РОЗКЛАДУ ТА ЇХНЄ ЗАСТОСУВАННЯ

В.В. МІСЬКИЙ

Означення 1. Розклад дійсного числа $x \in [0; 1]$ у вигляді

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(x)}{(k+1)!}, \quad (1)$$

де $\alpha_k = \alpha_k(x) \in \{0, 1, \dots, k\}$, називається факторіальним розкладом числа x .

Зауважимо, що факторіальний розклад є частковим випадком розкладів Кантора [1] при $n_k = k + 1$. Зчислення кількість чисел з $[0; 1]$ має два різні розклади у вигляді (1). Всі інші числа мають єдиний факторіальний розклад.

Нехай $\{\xi_k\}$ — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень $0, 1, \dots, k$ з імовірностями $p_{0k}, p_{1k}, \dots, p_{kk}$, відповідно ($p_{ik} \geq 0, \sum_i p_{ik} = 1$).

Випадкова величина $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{(k+1)!}$ називається випадковою величиною з незалежними символами факторіального розкладу.

Теорема 1. Розподіл випадкової величини ξ має чистий тип, причому чисто дискретний $\Leftrightarrow$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_i p_{ik} > 0. \quad (2)$$

чисто абсолютно неперервний $\Leftrightarrow$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} \cdot \sum_{i=1}^k \sqrt{p_{ik}} \right) > 0. \quad (3)$$

чисто сингулярно неперервний $\Leftrightarrow$ нескінченні добутки (2) і (3) розбігаються до 0.

Нехай S_{ξ} — спектр випадкової величини ξ .

Теорема 2. Нехай m_k — кількість ненульових елементів серед чисел $p_{0k}, p_{1k}, \dots, p_{kk}$. Тоді

$$\dim_H S_\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(m_1 m_2 \dots m_k)}{\ln(k+1)!}.$$

Нехай $N_i(x, k)$ — кількість цифр « i » у факторіальному розкладі числа x до k -го місця включно. Якщо $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_i(x, k)}{k}$ існує, то її називають частотою цифри « i » і позначають $\nu_i(x)$. Число називають суттєво анормальним (для факторіальної системи числення), якщо не існує $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_i(x, k)}{k}, \forall i$.

Вперше дослідження фрактальних властивостей суттєво анормальних чисел проведено в роботі [2], де показано суперфрактальність множини суттєво анормальних чисел для s -адичної системи числення.

Теорема 3. 1) Для майже всіх (в сенсі міри Лебега) дійсних чисел з $[0; 1]: \nu_i(x) = 0, \forall i$.

2) Розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини всіх суттєво анормальних чисел (для факторіальної системи числення) дорівнює 1.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Cantor., G. *Über die einfachen Zahlensysteme* // Zeitschrift für Mathematik und Physik. — 14:121–128, — 1869
- [2] Pratsevityi, N.V., Torbin, G.M. *Superfractality of the set of numbers having no frequency of n -adic digits, and fractal probability distributions* // Ukrainian Mathematical Journal, — 1995, — 47(7), — pp. 1113–1118

УДУ ім. М. Драгоманова, Київ, Україна
 Email address: vadim.miskyi@gmail.com

КОНТРПРИКЛАД ДО ГІПОТЕЗИ ПРО ТОПОЛОГІЧНИЙ ТИП МНОЖИНИ НЕПОВНИХ СУМ ПРОМІЖНОГО РЯДУ

М.П. МОРОЗ

Множиною неповних сум збіжного додатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається множина

$$E(u_n) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n, \varepsilon_n \in \{0, 1\} \right\} = \left\{ \sum_{n \in A} u_n, A \subset \mathbb{N} \right\}.$$

Відомо [2, 4], що $E(u_n)$ є множиною одного з трьох топологічних типів:

- скінченним об'єднанням відрізків;
- множиною канторівського типу (гомеоморфною множині Кантора, що в той же час є множиною неповних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$);
- канторвалом (гомеоморфною множині Гатрі-Німана, що є множиною неповних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, де $u_{2k} = \frac{2}{4^k}$ та $u_{2k-1} = \frac{3}{4^k}$).

У випадку, коли кожна з нерівностей $u_n > r_n^u = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i$ та $u_n \leq r_n^u$ виконується для нескінченної кількості номерів n , визначити топологічний тип множини $E(u_n)$ зазвичай досить складно. З метою часткового вирішення цієї проблеми, М.В. Працьовитий та Д.М. Карвацький у роботі [5] висловили гіпотезу про множину неповних сум проміжного ряду, засновану на аналогії з теоремою про три послідовності.

Гіпотеза ([5, Працьовитий, Карвацький]). *Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — два збіжних доданих ряди з однаковими топологічними типами множин неповних сум. Тоді якщо послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ та $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ задовольняють умови*

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad \text{та} \quad \begin{cases} b_n \leq r_n^a = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i, \\ r_n^b = \sum_{i=n+1}^{\infty} b_i < a_n \end{cases}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$, то множина неповних сум $E(c_n)$ ряду $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ має той же топологічний тип, що й множини $E(a_n)$ та $E(b_n)$.

Проте нам вдалося показати, що вказаних умов недостатньо, щоб забезпечити очікуваний результат.

Контрприкладом слугує трійка рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, де

$$a_{2k-1} = a_{2k} = \frac{\alpha}{4^k}, \quad \alpha = 1.95;$$

$$b_{2k-1} = \frac{4\beta}{4^k}, \quad b_{2k} = \frac{3\beta}{4^k}, \quad \beta = 0.8;$$

$$c_{2k-1} = \frac{3}{4^k}, \quad c_{2k} = \frac{2}{4^k}.$$

Множини неповних сум $E(a_n)$ та $E(b_n)$ є множинами канторівського типу, а множина $E(c_n)$ є канторвалом.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Banach T., Bartoszewicz A., Szymonik E., Filipczak M. *Topological and measure properties of some self-similar sets*. Topological Methods in Nonlinear Analysis **46**(2), 1013–1028 (2015).
- [2] Guthrie J.A., Nymann J.E. *The topological structure of the set of subsums of an infinite series*. Colloquium Mathematicae **55**(2), 323–327 (1988).
- [3] Moroz M. *A counterexample to the Karvatskyi–Pratsiovytyi conjecture concerning the achievement set of an intermediate series*. Preprint at <https://arxiv.org/pdf/2412.00042> (2024).
- [4] Nymann J.E., Sáenz R.A. *On the paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series*. Colloquium Mathematicae **83**(1), 1–4 (2000).
- [5] Pratsiovytyi M., Karvatskyi D. *Cantorvals as sets of subsums for a series related with trigonometric functions*. Proceedings of the International Geometry Center **16**(3-4), 262–271 (2023).

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: moroznik22@gmail.com

НЕВІДОМІ КАНТОРВАЛИ. ПРИКЛАДИ НОВИХ СІМЕЙСТВ КАНТОРВАЛІВ

М.Г. МОСКАЛЬКО

Нехай $A = \{0, 1\}$ — алфавіт, $L = A \times A \times A \times \dots$ — простір послідовностей елементів алфавіту. Якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — збіжний додатний ряд з сумою r_0 , а (ξ_n) — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 і 1 з ймовірностями p_{0n} та p_{1n} відповідно ($p_{1n} \geq 0$, $p_{0n} + p_{1n} = 1$), то розподіл суми ξ випадкового ряду $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$ називають [2] нескінченною згорткою Бернуллі, керованою рядом $\sum a_n$. Зрозуміло, що розподіл випадкової величини ξ зосереджений на $[0; r_0]$.

В залежності від ряду (властивостей ряду) спектр S_ξ розподілу ξ може мати різні топологічні властивості, в переважній більшості «продиктовані» властивостями множини неповних сум (підсум) ряду, а саме $E = \{x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, (\varepsilon_n) \in L\}$. Якщо у матриці $\|p_{in}\|$ нулів немає, то очевидно, що $S_\xi = E(a_n)$. Якщо існують нулі, то $E(a_n) \neq S_\xi \subset E(a_n)$.

Відносно недавно встановлено, що існує лише три топологічні типи множин неповних сум: 1) відрізок або скінченне об'єднання відрізків; 2) ніде не щільна множина; 3) канторвал. Останній тип є своєрідною «сумішню» двох попередніх типів. Математики Бартошевич, Філіпчак та Шимонік [3] описали сімейства рядів, які містять більшість відомих прикладів підсум, які є канторвалами. Ми наведемо ще одне сімейство рядів, яке дає нові приклади множин неповних сум ряду, які є канторвалами.

Передусім, згадаємо, як можна визначити множину Кантора. Ми рекурсивно визначаємо такі підмножини відрізка $[0; 1]$:

$$C_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right); \quad C_n = \frac{C_{n-1}}{3} \cup \left(\frac{2}{3} \oplus \frac{C_{n-1}}{3}\right), \quad \text{для } n \geq 2.$$

Тоді множина Кантора $C = [0; 1] \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right)$. Або множина неповних сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$.

Тепер дамо визначення канторвалу. Канторвал — це підмножина R , яка є гомеоморфною $C \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{2n-1}\right)$. При обговоренні канторвалів наступна

рівність множин може бути корисною:

$$C \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{2n-1} \right) = [0, 1] \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{2n} \right).$$

Досить відомим прикладом ряду, множина неповних сум якого є канторвалом, є ряд Гатрі-Німана: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_{2n-1} = \frac{3}{4^n}$, $a_{2n} = \frac{2}{4^n}$, $n \in N$.

Але вже множина неповних сум ось такого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_{2n-1} = \frac{10}{11^n}$, $u_{2n} = \frac{1}{11^n}$, $n \in N$, не дивлячись на те, що візуально вони схожі, буде гомеоморфна множині Кантора C і не буде канторвалом. Для збіжного додатного ряду невідомі умови, які гарантують канторвальність множини його підсум. Бартошевич, Філіпчак та Шимонік описують сімейства рядів, які містять більшість приклади рядів, для яких множина підсум є канторвалом. Зокрема, вони розглядають мультигеометричні ряди і будують сімейство таких рядів, множини підсум яких є канторвалами.

Нехай $k_1, k_2, \dots, k_m$ та q є константами з $0 < q < 1$. Тоді послідовність

$$(k_1, k_2, \dots, k_m, k_1q, k_2q, \dots, k_mq, k_1q^2, k_2q^2, \dots, k_mq^2, \dots)$$

називається мультигеометричною послідовністю і позначається $(k_1, k_2, \dots, k_m; q)$, а її множина підсум — $E(k_1, k_2, \dots, k_m; q)$. Взагалі кажучи, мультигеометрична послідовність — це «комбінація» декількох геометричних послідовностей, кожна з яких має свій початковий елемент $(k_1, k_2, \dots, k_m)$, але загальний знаменник прогресії (q) .

Приклад 1. $(17, 15, 13, 11, 9, 1; q)$ є канторвалом, якщо $\frac{1}{10} < q < \frac{4}{37}$.

Приклад 2. $(41, 37, 33, 29, 25, 21, 2; q)$ є канторвалом, якщо $\frac{1}{12} < q < \frac{19}{207}$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Виннишин Я.Ф., Маркітан В.П., Працьовитий М.В., Савченко І.О. *Додатні ряди, множини підсум яких є канторвалами* // Preceeding of the International Geometry Center. — 2019. — Vol. 12, no. 2., P.23-42.
- [2] Працьовитий М.В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
- [3] Bartoszewicz A., Filipczak M., Szymonik E. *Multigeometric sequences and Cantorvals* // Open Math. — 2014. — V. 12, No 7. — P. 1000–1007.
- [4] Kakeya S. *On the partial sums of an infinite series* // The Science Reports of the Tôhoku University — 1914. — V. 3, — P. 159–164.
- [5] Guthrie J. A., Nymann J. E. The topological structure of the set of subsums of an infinite series. *Colloquium Mathematicum*. 1988. Vol. 55, N 2. P. 323 — 327

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: 23fmif.m.moskalko@std.udu.edu.ua

ОДИН КЛАС ФУНКЦІЙ, ОЗНАЧЕНИХ В ТЕРМІНАХ Q_s^* -ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

В.В. НАЗАРЧУК, М.В. ПРАЦЬОВИТИЙ

Нехай $A_s \equiv \{0, 1, \dots, s-1\}$ — s -ковий алфавіт, $L_s = A_s \times A_s \times \dots$ — простір послідовностей елементів A_s ; $\|q_{in}\|$ — матриця, така що $\sum_{i=0}^{s-1} q_{in} = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, $q_{in} > 0$ і $\prod_{n=1}^{\infty} \max_{i \in A_s} \{q_{in}\} = 0$. Тоді [1] $\forall x \in [0; 1] \exists (\alpha_n) \in L_s$:

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_{\alpha_n n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j j} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s^*}, \quad \beta_{\alpha_n n} = \prod_{i=0}^{\alpha_n-1} q_{in}. \quad (1)$$

Розклад x в ряд (1) називається Q_s^* -представленням, а запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s^*}$ — Q_s^* -зображенням. Якщо усі $q_{in} = \frac{1}{s}$, то Q_s^* -зображенням співпадає з s -ковим зображенням: $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{s^i}$. Множина чисел виду $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \alpha_1 \alpha_2 \dots}^{Q_s^*}$, де $(\alpha_n) \in L_s$, називається циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$. Очевидно, що $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_s^*} = \bigcup_{c=0}^{s-1} \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m c}^{Q_s^*} = \bigcup_{i=0}^{s-1} [\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i(0)}^{Q_s^*}; \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i(s-1)}^{Q_s^*}]$. Числа, що є кінцями циліндра та мають два формально різні зображення $\Delta_{c_1 \dots c_m i(s-1)}^{Q_s^*} = \Delta_{c_1 \dots c_m i[s-1](0)}^{Q_s^*}$, називають Q_s^* -бінарними. Решта чисел мають єдине Q_s^* -зображення і називаються Q_s^* -унарними.

Розглядається функція f_a , означена рівністю

$$f_a(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s^*}) = \Delta_{|a_1 - \alpha_1| |a_2 - \alpha_2| \dots |a_n - \alpha_n|}^{Q_s^*},$$

де (a_n) цифри s -кового зображення числа $a = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^s$, $(a_n) \in L_s$. За домовленістю не використовувати одне із двох Q_s^* -бінарних зображень, а саме з періодом $(s-1)$, означення функції є коректним.

Теорема 1. Функція f є неперервною на усій області визначення за виключення зліченної кількості точок. Функція f має скінченні та континуальні рівні, причому останні є ніде не щільними нульвої міри Лебега. Якщо $a = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^s$, $a_n \in \{0, c\}$, $c \in A_s$, то функція f_a зберігає цифру $\frac{c-1}{2}$ (тобто якщо $\alpha_n(x) = \frac{c-1}{2}$, то $\beta_n(y) = \frac{c-1}{2}$), коли c — непарне; і зберігає цифру $\frac{c}{2}$, коли c — парне.

Теорема 2. Нехай s – непарне. Функція $f_a(x = \Delta_{a_1 a_2 a_3 \dots}^{Q_s^*}) = \Delta_{|\frac{s-1}{2} - \alpha_1| \alpha_2 \alpha_3 \dots}^{Q_s^*}$ є кусково лінійною, причому лінійною на циліндрах 1-го рангу.

У доповіді пропонуються результати дослідження структурних, тополого-метричних та фрактальних властивостей функції f_a .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М. В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.
- [2] Назарчук В.В., Васькевич С.О., Ратушняк С.П. *Один континуальний клас фрактальних функцій, означених в термінах Q_s^* -зображення*// Буковинський математичний журнал. — 2024., — Т 12, № 2. — С. 154-161.

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: nazarchukvalentyna@imath.kiev.ua

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ,
 УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: prats4444@gmail.com

ЛАНЦЮГОВЕ A -ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

О.О. НІКОРАК

Розглядається функція f , означена рівностями:

$$f(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{A_5}) = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots}^{A_3}, \text{ де}$$

$$\beta_n(\alpha_n, c_n) = \begin{cases} |c_n - \alpha_n|, & \text{якщо } \alpha_n \in \{0, 1\}, \\ |c_n - [\frac{\alpha_n}{2}]|, & \text{якщо } \alpha_n \in \{2, 3, 4\}, \end{cases}$$

$c_1 = 0$, $c_{n+1} = c_n$, якщо $\alpha_n \neq 2$, і $c_{n+1} = 2 - c_n$, якщо $\alpha_n = 2$, де $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{A_5}$ і $\Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots}^{A_3}$ — ланцюгове A_5 -зображення чисел. Нагадаємо його зміст. Нехай $A_s \equiv \{e_0, e_1, \dots, e_{s-1}\}$ — алфавіт, $0 < e_0 < e_1 < \dots < e_{s-1}$. Тоді ланцюговим A_s -дробом називається вираз виду

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \dots \equiv [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots], (a_n) \in L_s.$$

Теорема 1. [2] Для множини E значень ланцюгових A_s -дробів має місце $\min_{a_n \in A_s} \{E\} = [0; (e_{s-1}, e_0)] \equiv d_0$, $\max_{a_n \in A_s} \{E\} = [0; (e_0, e_{s-1})] \equiv d_1$. Якщо $e_i = e_{i-1} + d$, $i = \overline{1, s-1}$, де $d = d_1 - d_0$, то для довільного $x \in [d_0, d_1]$ існує послідовність $a_n \in A_s$, така що $x = [0; a_1, \dots, a_n, \dots]^{A_s}$.

Запис $[0; a_1, \dots, a_n, \dots]^{A_s}$ називається ланцюговим A_s -зображенням числа x . Ввівши перекодування $\alpha_n = e_{\alpha_n}$, де $\alpha_n \in \{0, 1, \dots, s-1\}$, ми отримаємо ланцюгове A_s -зображення засобами класичного алфавіту $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{A_s}$.

Теорема 2. Функція f є неперервною ніде не монотонною функцією не обмеженої варіації.

У доповіді пропонуються результати дослідження фрактальних, структурних та варіаційних властивостей функції f , що є аналогом узагальнення функції Серпінського запропоноване в [1].

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М. В., Василенко Н.А. Недиференційовна функція, що є одним з узагальнень відомої функції Серпінського // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки, 2010.— №11. — С. 170-181.
- [2] Ratuszniak S, Pratsiovytyi P. *Infinite continued fractions with a bounded set of elements and their applications*. Inspirations in Real Analysis II (Bedlewo, Poland, April 14–19, 2024): Book of Abstracts. — Lodz : Lodz Univ. Technol. Press, 2024.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: 23fmif.o.nikorak@std.udu.edu.ua

ПРО СУПЕРФРАКТАЛЬНІСТЬ МНОЖИНИ СУТТЄВО АНОРМАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ АРИФМЕТИЧНИХ РОЗКЛАДІВ КАНТОРА ТА ЇХНІХ УЗАГАЛЬНЕНЬ

Д.М. ПИХТАР

Нехай $\{n_k\}$ — послідовність натуральних чисел, $n_k \geq 2$. Як відомо ([1]), довільне дійсне число $x \in [0, 1]$ можна зобразити у вигляді

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(x)}{n_1 n_2 \cdots n_k} =: \Delta^C \alpha_1(x) \alpha_2(x) \dots \alpha_k(x) \dots, \quad (1)$$

де $\alpha_k(x) \in \{0, 1, \dots, n_k - 1\}$. Розклад (1) називається розкладом Кантора числа x .

Якщо $\{n_k\}$ утворює арифметичну прогресію, то розклад (1) називається арифметичним розкладом Кантора.

Нехай $N_i(x, k)$ — кількість появ цифри i серед перших k цифр розкладу Кантора числа x . Якщо існує границя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_i(x, k)}{k},$$

то її називають частотою появи цифри i в розкладі Кантора числа x .

Нормальні властивості розкладів Кантора суттєво залежать від послідовності основ $\{n_k\}$. Зокрема, якщо $n_k = k + 1$ (факторіальна система числення), то для майже всіх (в сенсі міри Лебега) дійсних чисел виконується:

$$\nu_0(x) = \nu_1(x) = \dots = \nu_k(x) = \dots = 0.$$

Означення 1. Число x називається суттєво аномальним для розкладу Кантора, якщо не існує жодної з границь

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_i(x, k)}{k}, \quad \forall \quad i.$$

Дослідження фрактальних властивостей множин суттєво аномальних чисел для різних систем числення висвітлені в роботах [2, 3, 4].

Позначимо множину суттєво аномальних чисел через $L(C)$.

Теорема 1. Якщо $\{n_k\}$ утворює арифметичну прогресію, то

$$\dim_H(L(C)) = 1,$$

де $\dim_H(L(C))$ — розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини $L(C)$.

Теорема 2. *Якщо існує така арифметична прогресія $\{a_k\}$, де $a_k \in \mathbb{N}$, що*

$$a_k \leq n_k \leq a_{k+1},$$

то

$$\dim_H(L(C)) = 1.$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Cantor., G. *Über die einfachen Zahlensysteme* // Zeitschrift f.Math. u. Physik. — 1869. — С. 121–128.
- [2] Alberverio, S., Pratsiovytyi, M., Torbin, G. *Topological and fractal properties of real numbers which are not normal.* // Bulletin des Sciences Mathematiques. — 2005. — С. 615–630.
- [3] Alberverio, S., Kondratiev, Y., Nikiforov, R., Torbin, G. *On fractal properties of non-normal numbers with respect to Rényi f-expansions generated by piecewise linear functions.* // Bulletin des Sciences Mathematiques. — 2014. — С. 440–455.
- [4] Alberverio, S., Garko, I., Ibragim, M., Torbin, G. *Non-normal numbers: Full Hausdorff dimensionality vs zero dimensionality.* // Bulletin des Sciences Mathematiques. — 2017. — С. 1–19.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
 Email address: d.m.pykhtar@npu.edu.ua

ФРАКТАЛЬНІ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

В.І. ПЛАКИДА, О.М. ПРАЦЬОВИТИЙ, І.М. ЛИСЕНКО

Нехай $A_2 \equiv \{0, 1\}$ — алфавіт, $L_2 = A_2 \times A_2 \times \dots$ — простір послідовностей елементів A_2 ; $\|q_{in}\|$ — матриця, така що $q_{0n} + q_{1n} = 1 \ \forall n \in N$, $q_{in} > 0$ і $\prod_{n=1}^{\infty} \max\{q_{0n}, q_{1n}\} = 0$. Тоді $\forall x \in [0; 1] \exists (\alpha_n) \in L_2$:

$$x = \delta_{\alpha_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \delta_{\alpha_n n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j j} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2^*}, \quad \delta_{\alpha_n n} = \prod_{i=0}^{\alpha_n-1} q_{in}. \quad (1)$$

Розклад x в ряд (1) називається Q_2^* -представленням, а запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2^*}$ — Q_2^* -зображенням. Якщо $q_{in} = \frac{1}{2} \ \forall n \in N$, то Q_2^* -зображення є класичним двійковим зображенням: $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{2^n} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2$. Існують числа

(Q_2^* -бінарні), що мають два Q_2^* -зображення: $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} 0(1)}^{Q_2^*} = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} 1(0)}^{Q_2^*}$. Решта чисел мають єдине Q_2^* -зображення (Q_2^* -унарні).

Розглядається функція, означена рівністю

$$z(x, y) = z(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2, \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots}^2) = \Delta_{\varphi_1(\alpha_1, \beta_1) \varphi_2(\alpha_2, \beta_2) \dots \varphi_n(\alpha_n, \beta_n) \dots}^{Q_2^*},$$

де $\varphi_n(\alpha_n, \beta_n) \in A_2$.

Лема 1. Функція z , за умови сталості послідовності функцій φ_n , є неперервною тоді і тільки тоді, коли z є коректно означеною в точках, що мають два формально різні зображення.

Теорема 1. Якщо $\varphi_n(\alpha_n, \beta_n) = 1 - \alpha_n$ для будь-якого $n \in N$, то z є неперервною фрактальною функцією, множини рівнів якої є сингулярними лініями, коли $q_{0n} \neq \frac{1}{2}$ для нескінченної кількості n .

У доповіді пропонуються результати дослідження структурних, топологометричних та фрактальних властивостей функції z для різних (φ_n) .

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: v.i.plakyda@udu.edu.ua

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: o.m.pratsovytyi@udu.edu.ua

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: i.m.lysenko@udu.edu.ua

КРИВІ ПАВУТИННОГО ТИПУ

Л.А. ПОВАР

Нехай $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ — десятковий алфавіт, $L = A \times A \times \dots$ — простір послідовностей елементів алфавіту. Тоді для довільного $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$ така, що $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{10^n} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{10}$.

Розглядається функція f , означена рівністю:

$$f(t = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{10}) = \sum_{n=1}^{\infty} c^n \varepsilon_{\alpha_n}(t),$$

де $\varepsilon_k = \cos \frac{2\pi k}{10} + i \sin \frac{2\pi k}{10}$, $k = 0, 1, \dots, 9$.

Лема 1. Якщо $c = \frac{\sin 18^\circ}{1 + \sin 18^\circ}$, то множина значень функції f є кривою павутинного типу.

Теорема 1. Множина значень функції f є самоподібною множиною

$$E_f = \bigcup_{k=0}^9 E_k = \bigcup_{k=0}^9 g_k(E),$$

$$g_k : \begin{cases} x' = cx + c \cdot \cos \frac{2\pi k}{10}, \\ y' = cy + c \cdot \sin \frac{2\pi k}{10}, \end{cases} \quad \text{де } k \in A.$$

У доповіді пропонуються результати дослідження фрактальних та структурних властивостей функції та її множини значень.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М.В., Чумак М.Є. Фрактальність і канторовість розподілу однієї комплекснозначної випадкової величини типу Джессена-Вінтнера // Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. Фізико-математичні науки.— Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 1999.— 1.— С.244-250.
- [2] Pratsiovytyi M.V., Kovalenko V.M. *Probability measures on fractal curves (probability distributions on Vicsek fractal)* // Random Operators and Stochastic equations, 2015; 23(3). — p. 161 – 168.
- [3] Pratsiovytyi M.V., Lysenko I.M., Ratushniak S.P., Tsokolenko O.A., *Distribution of unit mass on one fractal self-similar web-type curve*, Matematychni Studii, 2024, 62(1), pp. 21–30.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: 21fmf.1.povar@std.npu.edu.ua

АНАЛОГ ТРИБІН-ФУНКЦІЇ ДЛЯ q_0^∞ -ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

І.І. ПРОДАН

Нехай $A = \{0, 1\}$ — алфавіт, $L = A \times A \times \dots$ — простір послідовностей елементів алфавіту, (q_0, q_1) — стохастичний вектор, $q_0 > 0$, $q_1 > 0$. Тоді [1] для довільного числа $x \in [0; 1]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$, така що

$$x = \alpha_1 q_{[1-\alpha_1]} + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k q_{[1-\alpha_k]} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}.$$

Розклад числа x в ряд називається Q_2 -представлення, а запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}$ — його Q_2 -зображення. Якщо здійснити перекодування

$$\Delta_{\underbrace{11\dots1}_{a_1-1} 0 \underbrace{11\dots1}_{a_2-1} 0 \dots \underbrace{11\dots1}_{a_n-1} 0 \dots}^{Q_2} = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{q_0^\infty}, \quad a_n \in N,$$

то отримаємо нескінченносимвольне q_0^∞ -зображення чисел проміжку $[0; 1]$:

$$x = q_1^{a_1} + \sum_{n=1}^{\infty} q_0^n q_1^{a_1+a_2+\dots+a_{n+1}-n} \equiv \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{q_1^\infty}.$$

Розглядається функція $f: f(x = \Delta_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^{q_0^\infty}) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}$, де

$$\alpha_1 = \begin{cases} 0, & \text{при } a_1 = 1, \\ 1, & \text{при } a_1 \neq 1, \end{cases} \quad \alpha_{n+1} = \begin{cases} \alpha_n, & \text{при } a_n = a_{n+1}, \\ 1 - \alpha_n, & \text{при } a_n \neq a_{n+1}. \end{cases}$$

Теорема 1. *Функція f є неперервною ніде не монотонною функцією необмеженої варіації. Функція має одноточкові, злічені та континуальні множини рівні, причому останні є ніде не щільними множинами нульової міри Лебега.*

Дана функція є аналогом відомої ніде не диференційовної Трибін-функції [2] для нескінченносимвольного поліосновного зображення чисел.

У доповіді пропонуються результати дослідження структурних, фрактальних та варіаційних властивостей функції f .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Прпацьовитий М.В. *Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування*. Київ: Науков думка, 2022. — 316 с. — 1883. — Т. 21, — Р. 411–423.

- [2] Працевитый Н.В. *Непрерывные канторовские проекторы.* // Методы исследования алгебраических и топологических структур. — К.: КГПИ, 1989. — С.95-105.

УДУ іМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: 23fmif.i.prodan@std.udu.edu.ua

ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ У СИСТЕМІ З ОСНОВОЮ 3 І НАДЛИШКОВОЮ ЦИФРОЮ ТА ЇХНІ РІЗНОПЛАНОВІ ЗАСТОСУВАННЯ

С.П. РАТУШНЯК, М.В. ПРАЦЬОВИТИЙ

Нехай s і r — фіксовані натуральні параметри, $2 \leq s \leq r$, $A = \{0, 1, \dots, r\}$ — алфавіт, $L = A \times A \times \dots$ — множина послідовностей елементів A . Подання числа $x \in [0; \frac{r}{s-1}]$ рядом $x = \sum_{k=1}^{\infty} s^{-k} \alpha_k \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}$, ми називаємо його Δ -зображенням у системі з основою s і надлишковим алфавітом.

Розглядається випадок, коли $s = 3 = r$. Числа 0 і $\frac{3}{2}$ мають єдине зображення, але не лише вони. Існують числа, що мають зліченну і навіть континуальну множину різних Δ -зображень. Зауважимо, що існує три пари взаємозамінних пар послідовних цифр $\overline{03} \leftrightarrow \overline{10}$, $\overline{13} \leftrightarrow \overline{20}$, $\overline{23} \leftrightarrow \overline{30}$ у зображенні числа, які не приводять до зміни його значення.

Теорема 1. *Число, Δ -зображення якого містить лише цифри 1 і 2, причому кожному з них нескінченну кількість разів, має єдине Δ -зображення.*

Теорема 2. *Числа, Δ -зображення яких містить період, довжини 1, має зліченну множину зображень. Якщо деяке Δ -зображення числа x не є періодичним і містить нескінченну кількість 0 або 3, то воно має континуальну множину різних зображень.*

У доповіді планується висвітлення зв'язку розподілу випадкової величини $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} \xi_k$ з нескінченними згортками Бернуллі, керованими відповідними рядами та Δ -зображеннями чисел.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М.В. Розподіли сум випадкових степеневих рядів// Доповіді НАН України, 1996. — № 5. — С.32-37.
- [2] Працьовитий М.В. Згортки сингулярних розподілів// Доповіді НАН України, 1997. — № 9. — С.36-43.

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ,
УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: **ratush404@gmail.com**

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА,
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: **prats4444@gmail.com**

ОДНА НЕПЕРЕРВНА НІДЕ НЕ МОНОТОННА ФУНКЦІЯ, ОЗНАЧЕНА В ТЕРМІНАХ МАРКОВСЬКОГО ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

Д.М. СЕРГІЙКО

Нехай $A_{s-1} \equiv \{0, 1, \dots, s-1\}$ — алфавіт, $L_s = A_s \times A_s \times \dots$ — простір послідовностей елементів алфавіту, $q_0, q_1, \dots, q_{s-1}$ — фіксований набір додатних дійсних чисел такий, що $q_0 + q_1 + \dots + q_{[s-1]} = 1 \ \forall i \in A_s$, $\|q_{ij}\|$ — стохастична матриця, де $q_{i0} + q_{i1} + \dots + q_{i[s-1]} = 1, \forall i \in A_s$, яка не містить нулів ($q_{ij} > 0$). Тоді для довільного числа існує послідовність така, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{\alpha_k \alpha_{k+1}} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j \alpha_{j+1}} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{M_s}, \quad (1)$$

де $\beta_{\alpha_k \alpha_{k+1}} \equiv q_{\alpha_1} \sum_{i=0}^{\alpha_{k+1}-1} q_{\alpha_k i}, \beta_0 \equiv 0, \beta_1 \equiv q_0, \beta_{s-1} \equiv \sum_{i=0}^{s-2} q_i, \beta_s \equiv 1$. Розклад числа x в ряд (1) називається марковським M_s -представлення числа, а скорочений запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^{M_s}$ — його M_s -зображенням.

Розглядається функція f , яка визначається на відрізку $[0; 1]$ рівністю $f(x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^{M_s}) = \Delta_{\gamma_1 \dots \gamma_n \dots}^{M_2}$, де

$$\gamma_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha_1 = 0, \\ 1 & \text{при } \alpha_1 \neq 0, \end{cases} \quad \gamma_{n+1} = \begin{cases} \gamma_n & \text{при } \alpha_n = \alpha_{n+1}, \\ 1 - \gamma_n & \text{при } \alpha_n \neq \alpha_{n+1}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Дана функція є аналогом неперервної ніде не диференційовної Трибін-функції, означеної у термінах Q_s -зображення чисел [2].

Теорема 1. *Функція f є неперервною ніде не монотонною функцією не обмеженої варіації на усій області визначення.*

У доповіді пропонуються результати дослідження структурних, варіаційних та фрактальних властивостей функції f .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий О.М. *Про один специфічний спосіб кодування дійсних чисел та його застосування* // Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2008. — №3. — С. 57–67.
- [2] Працевитый Н.В. *Непрерывные канторовские проекторы*. // Методы исследования алгебраических и топологических структур. — 2008. — К.: КГПИ, 1989. — С. 95–105.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: 21fmf.d.serhiiko@std.npu.edu.ua

АВТОМОДЕЛЬНІ МАТЕМАТИЧНІ ОБ'ЄКТИ: МНОЖИНИ, ФУНКЦІЇ, МІРИ

Д.С. ХІХЛУШКО, М.В. ПРАЦЬОВИТИЙ

Нехай G — множина усіх перетворень площини, тобто бієктивних відображень площини на себе. Тоді фігура непорожня $F \subset R^2$ називається *автомодельною*, якщо існує набір перетворень $g_i \in G$, таких що має місце рівність:

$$F = \bigcup_{i=1}^n g_i(F) = \bigcup_{i=1}^n F_i. \quad (1)$$

Якщо G — це множина афінних перетворень площини, то фігура F називається *самоафінною*. Якщо G — це множина перетворень подібності площини, то F називається *самоподібною*.

Розклад (1) називається *структурою автомодельності* множини F .

Розглядається множина $V \subset R^2$, означена рівністю

$$V = \{(x; y) : x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^{A_3}, y = \Delta_{\beta_1 \dots \beta_n \dots}^{A_3} \mid \alpha_n - \beta_n \neq 1, n \in N\}, \quad (2)$$

де $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^{A_3}$ — перекодоване ланцюгове зображення чисел:

$$\left[\frac{4}{9}; \frac{3}{4} \right] \ni x = 1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n + \dots \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{A_3}, \quad e_{\alpha_n} = a_n,$$

$$a_n \in A_3 = \{0, 1, 2\}, e_i \in \left\{ \frac{8}{9}, \frac{43}{36}, \frac{3}{2} \right\}.$$

Теорема 1. *Множина V є автомодельною множиною зі структурою автомодельності*

$$V = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 = f_k(V_k),$$

$$\text{де } f_k = \begin{cases} x' = \frac{1}{x} - \frac{1}{e_i}, \\ y' = \frac{1}{y} - \frac{1}{e_j}, \end{cases} \quad , i, j \in A_3, |i - j| \neq 1.$$

У доповіді пропонуються результати дослідження структурних, топологометричних та фрактальних властивостей множини V .

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: 21fmf.i.khikhlushko@std.npu.edu.ua

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА,
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: prats4444@gmail.com

АРИФМЕТИЧНА СУМА МНОЖИН КАНТОРІВСЬКОГО ТИПУ

Д.С. ШПИТЮК

Нехай $A_3 \equiv \{0, 1, 2\}$ — алфавіт; $\|q_{in}\|$ — стохастична матриця: $q_{0n} + q_{1n} + q_{2n} = 1 \ \forall n \in N$, $q_{in} > 0$ і $\prod_{n=1}^{\infty} \max_{i \in A_3} \{q_{in}\} = 0$. Тоді [1] для довільного числа $x \in [0; 1]$ існує послідовність $\alpha_n \in A_3$, така що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_{\alpha_n n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j j} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_3^*}, \quad \beta_{\alpha_n n} = \prod_{i=0}^{\alpha_n-1} q_{in}.$$

Розклад числа x в ряд називається Q_3^* -представленням, а формальний запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_3^*}$ — Q_3^* -зображенням.

Розглядається множина чисел одиничного відрізка, означена рівністю

$$C[Q_3^*; \{0, 2\}] = \{x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_3^*}, \alpha_n \in \{0, 2\}, n \in N\}.$$

Якщо $q_{in} = \frac{1}{3}$ для будь-якого $i \in A_3$, $n \in N$, тобто, коли Q_3^* -зображення співпадає з класичним трійковим зображенням чисел, то множина C є множиною Кантора, яка, як відомо, є самоподібною ніде не щільною множиною нульової міри Лебега. Також відомо, що арифметична (векторна) сума двох множин Кантора співпадає з відрізком $[0; 2]$. Ми цікавимось множиною, що є арифметичною сумою $C \oplus C$.

Теорема 1. *Арифметична сума $C \oplus C$ співпадає з відрізком $[0; 2]$, якщо для $n \in N$ виконується система нерівностей $\begin{cases} q_{1n} \leq q_{0n}, \\ q_{1n} \leq q_{2n}. \end{cases}$ Якщо дана система виконується для скінченної кількості n , то $C \oplus C$ є об'єднанням відрізків. Якщо $q_{1n} > q_{0n}$ і $q_{1n} > q_{2n}$ для усіх n починаючи з деякого номера, то $C \oplus C$ є ніде не щільною множиною.*

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
- [2] Шпитюк Д.С. Арифметична сума множин канторівського типу// Студентські фізико-математичні етюди. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2022. — № 22. — С. 57-67.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: darina.shpytyuk@gmail.com

СЕКЦІЯ 3
Алгебри,
дискретної математики,
теорії алгоритмів,
інформатики

ПСЕВДО-ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ У ПОБУДОВІ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ ІНВЕСТОРА

А.А. БУРДИМ

Незважаючи на те, що теорія оптимального портфеля Марковіца була сформульована у 1950-х, вона й досі залишається актуальною і широко застосовується у банківській справі, інвестиційному аналізі та фінансовому плануванні. У класичному формулюванні задачі побудови оптимального портфеля Марковіца, пошук оптимальних ваг активів використовує обчислення оберненої коваріаційної матриці дохідностей Σ .

Проте для реальних фінансових даних може виникати ситуація, коли ця матриця є сингулярною, що унеможлиблює її стандартну інверсію A^{-1} . В таких випадках ми використовуємо псевдо-обернену матрицю. Використання псевдо-оберненої матриці Мура-Пенроза для побудови оптимального портфелю було запропоновано в статті [1].

Ця робота присвячена застосуванню цього підходу для реальних фінансових даних. З історичних цін акцій компаній Amazon, Apple, Netflix та Tesla було оцінено коваріаційну матрицю розмірності 4x4 для портфеля інвестора та середні дохідності для кожної компанії. На основі цих оцінок розраховано оптимальні ваги портфеля за допомогою програми, написаної на мові Python. Програма перевіряє коваріаційну матрицю на сингулярність та враховує можливість застосування псевдо-оберненої матриці. Також у роботі було симульовано стохастичні представлення для таких випадкових величин (див. [1]):

- $\hat{R}_{EU}^+$: оцінки очікуваної дохідності портфеля максимізації очікуваної корисності (Expected Utility Portfolio).
- $\hat{V}_{EU}^+$: оцінки дисперсії (ризик) такого портфеля.

У наступних дослідженнях планується розглянути побудову VaR — оптимального портфелю з урахуванням можливої сингулярності коваріаційної матриці дохідностей та знайти стохастичні представлення для $\hat{R}_{EU}^+$, $\hat{V}_{EU}^+$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Боднар Т., Мазур С., Нгуєн Х. *Estimation of Optimal Portfolio Compositions for Small Sample and Singular Covariance Matrix* // У книжці: *Advanced Statistical Methods in Process Monitoring, Finance, and Environmental Science: Essays in Honour*

of Wolfgang Schmid / ред. С. Кнот, Я. Охрін, П. Отто. — 2024. — Springer Nature Switzerland. — С. 259–278. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-69111-9_13.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: anastasiia.burdym@ukma.edu.ua

S_4 ВІДОКРЕМЛЮВАНІСТЬ ТА P -РОЗБИТТЯ ГРАФА У ALL-PATH ТА DETOUR ОПУКЛОСТЯХ

В.О. ГАПОНЕНКО

У нашій роботі ми досліджуємо властивості сепарабельності та подільності деяких графових опуклостей. Перш за все, простір $(X, \mathcal{C})$ називають опуклим якщо $\emptyset, X \in \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ замкнута відносно перетинів і вкладених об'єднань. Опуклий простір $(G, \mathcal{C})$, де G – граф, є графовим. Ми розглядаємо all-path опуклість [6] та детурову опуклість [1] на графах.

Для опуклого простору $(X, \mathcal{C})$, розглядають наступні аксіоми сепарабельності:

- (1) S_2 сепарабельний: будь-яка пара елементів X належить різним півпросторам;
- (2) S_3 сепарабельний: будь-яка множина A та елемент $b \notin A$ належать різним півпросторам;
- (3) S_4 сепарабельний: будь-яка пара неперетинних множин належить різним півпросторам.

У контексті сепарабельності для all-path опуклості ми охарактеризували всі сепарабельні графи:

Теорема 1. *Граф G є S_2 сепарабельним тоді і тільки тоді, коли G є деревом.*

Теорема 2. *Граф G є S_3 або S_4 сепарабельним тоді і тільки тоді, коли G є K_2 .*

Загальна проблема сепарабельності також породила проблему сепарабельності двох окремих елементів графа. Так наприклад проблема сепарабельності двох множин або ж S_4 сепарабельність була розглянута в [2]. Наступний результат показує що проблема будь-якої сепарабельності у all-path опуклості має лінійну часову складність.

Теорема 3. *З'ясувати чи є дві диз'юнктні підмножини графа G сепарабельними в all-path опуклості можна за лінійний час.*

Також ми показали пряму залежність між кількістю мостів графа та його p -подільністю для all-path опуклості у наступній теоремі.

Теорема 4. *Граф G може бути розбитим на щонайбільше $k + 1$ all-path опуклих множин, де k є числом мостів G .*

На відміну від all-path опуклості, проблема сепарабельності у детуровій опуклості є NP-складною.

Теорема 5. *Задача знаходження півпросторів, що розділяють дві диз'юнктні підмножини G , є NP-складною.*

Нехай B_G є родиною всіх блоків графа G чий породжений підграф не K_2 та K_G — сім'я блоків графа G чий породжений підграф є K_2 . Означимо функцію $Ex_G : 2^{V(G)} \rightarrow \mathbb{R}$, що відповідає кількості детур екстремальних вершин у підграфі породженому певною підмножиною G .

Теорема 6. *Зв'язний граф G може бути розбитим на щонайбільше $\sum_{B \in B_G} Ex_G(B) + |K_G| + 1$ detour опуклих множин.*

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Arco, R. and Canoy Jr, S., 2017. Detour convexity in graphs. Journal of Analysis and Applications, 15(2), pp.117-131.
- [2] Elaroussi, M., Nourine, L. and Vilmin, S., 2024. Half-space separation in monophonic convexity. arXiv preprint arXiv:2404.17564.
- [3] González, L. M., Grippo, L. N., Safe, M. D. and dos Santos, V. F., 2020. Covering graphs with convex sets and partitioning graphs into convex sets. Information Processing Letters, 158, p.105944.
- [4] Haponenko, V. and Kozerenko, S., 2024. All-path convexity: two characterizations, general position number, and one algorithm.
- [5] Santhakumaran, A. P. and Chandran, S. U., 2018. The detour hull number of a graph. Algebra and discrete mathematics, 14(2).
- [6] van De Vel, M. L., 1993. Theory of convex structures (Vol. 50). Elsevier.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», Київ, Україна
Email address: vladyslav.haponenko@gmail.com

ГІБРИДНИЙ ПІДХІД ДО ВИЯВЛЕННЯ АНОМАЛІЙ У ЗАШИФРОВАНОМУ ТРАФІКУ НА ОСНОВІ БУЛЕВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ ТА МОДЕЛЕЙ ГЛИБОКОГО НАВЧАННЯ

К.В. ГЛЕГА

Через зростання популярності протоколів шифрування та збільшення кількості зашифрованих даних, знижується ефективність традиційних методів аналізу мережевого трафіку, що не передбачають аналізу вмісту пакетів. Звідси постає актуальна проблема ефективного виявлення аномалій у зашифрованому трафіку без порушення конфіденційності даних.

Моделі глибокого навчання, наприклад, автоенкодер, можуть ефективно виявляти аномалії у мережевому трафіку без необхідності дешифрування. Втім, обробка автоенкодером всього обсягу трафіку є повільною та потребує великих обчислювальних потужностей.

У зв'язку з цим, доцільно проводити попереднє фільтрування трафіку та відбір підозрілих пакетів. Таким чином, навантаження на автоенкодер зменшиться, а ефективність та швидкість виявлення аномалій зростуть.

Будемо вважати булевою фільтрацією метод попереднього відбору мережевого трафіку на основі логічних умов, сформульованих за допомогою логічних операторів AND, OR та NOT. Логічні правила застосовуються до атрибутів мережевих пакетів — IP-адреси джерела або призначення, номеру порту, розміру пакету тощо — без потреби дешифрувати конфіденційні дані.

Нехай P — множина всіх пакетів, а P' — множина відфільтрованих пакетів. Тоді P' визначається як:

$$P' = \{p \in P \mid \phi(p) = true\}$$

де $\phi(p)$ — булева функція, що визначає умови фільтрації.

Наприклад, умова для відбору пакетів з портом призначення 443 або 8443 та розміром більше ніж 1000 байт одночасно, виглядатиме наступним чином:

$$\phi(p) = (p.port \in 443, 8443) \wedge (p.size > 1000)$$

Відібраний підозрілий трафік надходить на вхід автоенкодера для аналізу та перевірку на наявність аномалій.

Автоенкодер розглядається як тип штучної нейронної мережі, що складається з двох компонентів — енкодера та декодера. Спочатку енкодер

перетворює вхідні дані у стислий, прихований простір, зберігаючи найбільш важливу інформацію та відкидаючи усе зайве. Після цього декодер намагається відновити початкові вхідні дані, виходячи з цього стислого представлення.

У контексті виявлення аномалій, автоенкодер навчається відтворювати нормальні зразки зашифрованого трафіку. Аномалії та невідомі зразки даних унеможливають точну реконструкцію та призводять до помилки, яка використовується як індикатор.

Це — середньоквадратична помилка (Mean Squared Error, MSE), яка є функцією втрат, що описується формулою:

$$L(x, x') = \|x - x'\|^2$$

де x — вхідний вектор ознак, а $x' = g_\phi(f_\theta(x))$ — реконструйований вихід, отриманий після проходження через енкодер f_θ та декодер g_ϕ .

Високе значення втрат L може вказувати на потенційну аномалію.

Ефективність запропонованого гібридного методу доводить дослідження гібридного методу виявлення аномалій, який поєднує статистичну фільтрацію, що є аналогом булевої фільтрації, та композитний автоенкодер [3]. Тестування відбувалося на датасеті SWaT, а його результати показали покращення точності та зменшення часу виконання до 8.03%, порівняно із результатами використання лише автоенкодера.

Гібридний метод виявлення аномалій у зашифрованому мережевому трафіку, що поєднує булеву фільтрацію та моделі глибокого навчання, дозволяє ефективно обробляти великі обсяги даних без порушення конфіденційності даних, забезпечуючи високу точність виявлення аномалій.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Chan P.K., Mahoney M.V. *Network Traffic Anomaly Detection Based on Packet Bytes* // Melbourne: Florida Institute of Technology Technical Report CS-2002-13 — 2002. — 6 с.
- [2] Torabi H., Mirtaheri S.L., Greco S. *Practical autoencoder based anomaly detection by using vector reconstruction error*. — Tehran: Cybersecurity, 2023. — Т. 6, № 1. — 13 с.
- [3] Kwon H.-Y., Kim T., Lee M.-K. *Advanced Intrusion Detection Combining Signature-Based and Behavior-Based Detection Methods*. — Electronics, 2022. — Т. 11, № 867. — 19 с.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: katernaglega54@gmail.com

ПОЛІДЕРЕВА ЗІ СЛАБКО ЗВ'ЯЗНИМИ РЕБЕРНИМИ ОРГРАФАМИ

Б.В. ДЕХТЯР, С.О. КОЗЕРЕНКО

Нехай $D = (V(D), A(D))$ — оргграф. Його **реберним оргграфом** називатимемо оргграф $L(D)$ з множиною вершин $V(L(D)) = A(D)$ і множиною дуг $A(L(D)) = \{(\alpha, \beta) \in (A(D))^2 : \alpha = (a, b), \beta = (b, c), \text{ де } a, b, c \in V(D)\}$.

Основну інформацію про реберні оргграфи можна знайти в огляді [1].

Для довільного оргграфа D відповідний йому неорієнтований граф позначатимемо як $[D]$. Якщо $[D]$ зв'язний, то D називається **слабко зв'язним**, або **слабким**. **Полідерево** називається оргграф, який отримується з неорієнтованого дерева деякою орієнтацією його ребер.

Витоком називається вершина оргграфа, в яку не входить жодна дуга. Відповідно **стоком** називається вершина, з якої не виходить жодна дуга. Якщо в полідереві точно один витік (стік), називатимемо його **коренем** полідерева, а саме полідереву — **вихідним (вхідним)**. Множину витоків полідерева T позначатимемо $So(T)$, а стоків — $Si(T)$.

Для дерева X множину його **кінцевих вершин**, себто вершин ступеня 1, позначатимемо як $Leaf(X)$.

Для неорієнтованого графа G число $M_1(G) = \sum_{x \in V(G)} d_G^2(x)$ називається

першим загребським індексом G .

Твердження 1. *Нехай T є полідереву з $n \geq 2$ вершинами. Тоді $L(T)$ містить*

$$\sum_{u \in Si(T) \cup So(T)} (d_{[T]}(u) - 1) + 1.$$

компонент слабкої зв'язності [2].

Твердження 2. *Реберний оргграф $L(T)$ полідерева T слабкий тоді й тільки тоді, коли кожен витік і стік у T є кінцева вершина в $[T]$.*

Твердження 3. *Нехай X є дерево таке, що $|V(X)| \geq 2$ та $Leaf(X) = A \sqcup B$ є розбиття його кінцевих вершин. Тоді існує орієнтація T дерева X така, що A є множина витоків і B є множина стоків, тоді й тільки тоді, коли A й B непорожні.*

Теорема 1. Нехай X є дерево з $n \geq 3$ вершинами. Тоді кількість орієнтацій T зо слабкими реберними орграфами задається формулою

$$2 \cdot \prod_{u \in V(X) \setminus \text{Leaf}(X)} (2^{d_X(u)-1} - 1).$$

Твердження 4. Нехай T є вхідне (або вихідне) дерево з n вершинами, u - корінь T . Тоді $|A(L(T))| = n - 1 - d_{[T]}(u)$.

Наступний результат відповідає на питання: яка найменша можлива кількість дуг серед усіх орієнтацій дерева X зо слабкими реберними орграфами?

Теорема 2. Нехай X є дерево на $n \geq 2$ вершин. Тоді найменша кількість дуг в $L(T)$ серед орієнтацій T дерева X із слабким $L(T)$ дорівнює $n - 2$.

Знайдімо тепер найбільшу й середню кількість дуг у ребернім орграфі серед усіх орієнтацій.

Твердження 5. Нехай T є та орієнтація дерева X , що максимізує кількість дуг в $L(T)$. Тоді $L(T)$ слабкий.

Теорема 3. Нехай X дерево. Тоді найбільша кількість дуг в $L(T)$ серед усіх орієнтацій T дерева X дорівнює

$$\sum_{u \in V(X)} \left\lfloor \frac{d_X(u)}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{d_X(u)}{2} \right\rceil.$$

Твердження 6. Нехай X є дерево на n вершин. Тоді середня кількість дуг в $L(T)$ серед орієнтацій T дерева X дорівнює

$$\frac{M_1(X)}{4} - \frac{n-1}{2}.$$

Наслідок 1. Нехай X є дерево на n вершин. Тоді середня кількість дуг в $L(T)$ серед орієнтацій T дерева X не менша від $\frac{n-2}{2}$ і не більша від $\frac{(n-1)(n-2)}{4}$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Bagga J. S., Beineke L. W. *A survey of line digraphs and generalizations* // Discrete Math. Lett. — 2021. — Т. 6. — С. 68–93.
- [2] Dekhtiar B.-Y., Kozerenko S. *Line digraphs of polytrees and their weak components* // International Conference of Young Mathematicians. — June 1–3, 2023. — Kyiv, Ukraine.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: b.dekhtiar@ukma.edu.ua

УНІВЕРСИТЕТ «КИЇВСЬКА ШКОЛА ЕКОНОМІКИ», КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: kozerenkoserhiy@ukr.net

ВІДОБРАЖЕННЯ МІЖ ГРАФАМИ, ЩО ЗБЕРІГАЮТЬ РЕБРА НАЗАД

Ю.-Л.В. ДЕХТЯР, С.О. КОЗЕРЕНКО

Гомоморфізмом графів G і H називається відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ між множинами їхніх вершин, яке зберігає ребра: $\forall e \in E(G)$ маємо $f(e) \in E(H)$. У роботі [1] розглядають дуальне поняття, **когоморморфізм**, а саме, відображення у якому прообразом кожного ребра із образу графа G є ребро у оригінальному графі.

Природнім звуженням цього класу відображень є клас відображень, які зберігають назад усі ребра, а не тільки ребра з образу. Ми називаємо їх **ВЕР** (backward edge-preserving). Очевидно, що якщо відображення є ВЕР, то воно мусить бути когоморморфізмом, але не навпаки.

Для відображення $f : X \rightarrow Y$ та числа $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, позначатимемо

$$\text{Im}_k f = \{y \in Y : |f^{-1}(y)| = k\}.$$

ВЕР відображення між графами описуються наступним чином.

Теорема 1. Відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ між двома графами G та H є ВЕР тоді і тільки тоді, коли виконуються три умови:

- (1) Кожна вершина $y \in \text{Im } f$, для якої $|f^{-1}(y)| \geq 3$, є ізольованою вершиною у графі H ;
- (2) Для кожної зв'язної компоненти H' графа H , такої що $V(H') \cap \text{Im}_1 f \neq \emptyset$, маємо $V(H') \subset \text{Im}_1 f$, і звуження f^{-1} на $V(H')$ є гомоморфізмом з H' у G ;
- (3) Для кожної зв'язної компоненти H' графа H , такої що $V(H') \cap \text{Im}_1 f = \emptyset$ та $|V(H')| \geq 2$, множина $V(H') \cap \text{Im}_2 f$ є незалежним вершинним покриттям у H' , і для всіх $y \in V(H') \cap \text{Im}_2 f$ маємо $f^{-1}(y) \in E(G)$.

У випадку коли граф H є зв'язним, це твердження можна уточнити.

Наслідок 1. Нехай G — граф, а H — зв'язний граф з принаймні двома вершинами. У такому разі відображення $f : V(G) \rightarrow V(H)$ є ВЕР тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:

- (1) Образ $\text{Im } f$ є незалежним вершинним покриттям у H , і для всіх $y \in \text{Im } f$ маємо $f^{-1}(y) \in E(G)$;
- (2) Відображення f бієкція, причому f^{-1} є гомоморфізмом з H у G .

Зауваження 1. Нехай $f: V(G) \rightarrow V(H)$ — це ВЕР-відображення, яке задовольняє першу умову з *Наслідку 1*. Тоді множина ребер $\{f^{-1}(y): y \in \text{Im } f\}$ є досконалим паросполученням у графі G . Крім того, оскільки образ $\text{Im } f$ є незалежним покриттям вершин у H , граф H обов'язково має бути двочастковим.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Р. Hell, J. Nešetřil, *Cohomomorphisms of graphs and hypergraphs* // Math. Nachr. — 1979. — Т. 87. — С. 53–81.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», Київ, Україна
Email address: y.dekhtiar@ukma.edu.ua

УНІВЕРСИТЕТ «КИЇВСЬКА ШКОЛА ЕКОНОМІКИ», Київ, Україна
Email address: kozerenkosergiy@ukr.net

ВИВЧЕННЯ ОЗНАК ПОДІЛЬНОСТІ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ В СИСТЕМІ ГУРТКОВОЇ РОБОТИ У ЗАКЛАДАХ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

М.О. ЖУЛЬЖИК

Протягом багатьох століть задачі теорії чисел були улюбленою областю дослідження визначних математиків і багатьох тисяч дилетантів. В теорії чисел значне місце відводиться теорії подільності цілих чисел, зокрема цілих додатних натуральних чисел, висновки і результати вивчення якої поширюються на цілі від'ємні числа. Отож метою роботи є розробити та проаналізувати методичну систему вивчення ознак подільності цілих чисел в умовах гурткової роботи, спрямовану на підвищення якості математичної підготовки учнів середньої школи, знайти і систематизувати ознаки подільності, що дозволяють вирішити задачі, не вдаючись до громіздких розв'язань і висновків. В умовах оновлення змісту шкільної математичної освіти особливого значення набуває формування стійких знань учнів з основ арифметики та алгебри. Ознаки подільності є важливим компонентом цієї підготовки, оскільки вони використовуються при розв'язуванні задач на кратність, знаходженні найбільшого спільного дільника та найменшого спільного кратного, розкладанні чисел на множники. Як от число p , яке не дорівнює одиниці, називається простим, якщо воно ділиться лише на себе та на одиницю. Число, яке відмінне від одиниці і не є простим, називається складеним.

Теорема 1. *Якщо a і p — натуральні числа, то, або a кратне p , або числа a і p взаємно прості (найбільший спільний дільник — одиниця).*

Теорема 2. *Якщо M — спільне кратне a і b , а m — їхнє найменше спільне кратне, то M кратне m .*

Теорема 3. *Найменше спільне кратне двох простих чисел дорівнює їхньому добутку.*

Теорема 4. *Якщо добуток чисел a та b кратний числу c , причому числа b і c взаємно прості, то a кратне c .*

Теорема 5. *Якщо добуток кількох співмножників ділиться на просте число p , то хоча б один із співмножників ділиться на p .*

Теорема 6. *Основна теорема арифметики: Будь-яке ціле додатне число, крім одиниці, може бути представлене у вигляді добутку простих співмножників у єдиному вигляді.*

Теорема 7. *Для того, щоб числа a і b були взаємно простими, необхідно і достатньо, аби жоден з простих співмножників, які входять в канонічний розклад числа a , не входив в канонічний розклад числа b .*

Водночас традиційне вивчення цієї теми в межах навчального плану часто не дозволяє забезпечити глибоке розуміння і стійке засвоєння. Використання гурткової форми навчання дає змогу розширити можливості педагогів у формуванні математичної компетентності учнів, розвивати пізнавальну активність, критичне мислення та мотивацію до навчання. Більшість ознак виходять із основних простіших (на 2, 3, 4, 5, 11). Частина ознак подільності мають по 2 та 3 ознаки подільності на одне й те саме число, але різні за змістом. Знаючи основні ознаки, ми можемо вивести інші (на 12, 25, 14, 28). Французький математик Блез Паскаль (1623–1662) знайшов загальну ознаку подільності. Як наслідки із загальної ознаки Паскаля отримали різні ознаки подільності.

Значущість роботи полягає у розробці матеріалів для системи гуртків для школярів на тему «Подільність чисел», підборі низки задач та прикладів для проведення відповідних занять, та розробці тестових завдань для виявлення рівня засвоєння учнями відповідного матеріалу. Одне з можливих завдань «Шифрувальники» (індивідуально): Кожен учень отримує «закодоване» число для отримання призив, наприклад 7 890 і має дописати на місці сонечка таку цифру, щоб дане ділилось націло на 2, 3, 5 і 9 одночасно. За допомогою дослідження ознак подільності діти зможуть розв'язувати завдання на ділення чисел набагато швидше і зручніше, знаючи тільки таблицьку множення. Також ці знання формують логічне мислення і розвивають математичну грамотність.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокицький І.О. *Алгебра і теорія чисел* В 2-х ч. – К.: Вища шк. Головне вид-во, 1986. – Ч.2. – 264 с.
- [2] Требенко Д.Я., Требенко О.О. *Алгебра і теорія чисел*. У 2 ч. – [2-ге вид., переробл. та доповн.] – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2009. – Ч.1. – 420 с. (1-ше вид. 2006 р.)

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: 21fmf.m.zhulzhyk@std.npu.edu.ua

СЕРЕДОВИЩЕ ВИКОНАННЯ ДЛЯ БЛОЧНО-РЕКУРСИВНИХ ТА ІТЕРАЦІЙНИХ МАТРИЧНИХ АЛГОРИТМІВ ІЗ ДОДАТКОМ ДО АЛГОРИТМУ ДІКСОНА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ СЛАР

О.К. ЗАКОЛЕНКО, Г.І. МАЛАШОНОК

Суперкомп'ютерна середовище виконання DAP-SRT призначена для виконання обчислень відповідно до блочно-рекурсивного алгоритму [1], [2]. Обчислювальне дерево такого алгоритму розгортається на кластері при рекурсивному переході до блоків менших розмірів, а при завершенні обчислень усі залучені процесори звільняються.

1. ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

Завдання полягає в розширенні функціональності середовища так, щоб між окремими ітераціями змінювалися не всі аргументи, а лише їхня частина.

Важливим прикладом є алгоритм Діксона для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) [3]. У цьому алгоритмі багаторазово виконується множення матриці на вектор, при цьому матриця залишається незмінною, а змінюється лише вектор.

2. МОДЕЛЬ ДРОПА В DAP-SRT

У середовищі DAP-SRT основним об'єктом є **дроп**. Дроп містить поля для вхідних та вихідних даних, а також власний блочно-рекурсивний алгоритм. У процесі обчислень дроп розгортається відповідно до дерева свого алгоритму: створюються дропи для менших блоків і передаються на інші процесори. Після завершення обчислень обчислювальне дерево згортається, а всі поля звільняються.

3. ЗАПРОПОНОВАНЕ РОЗШИРЕННЯ

Пропонується розширити функціональність дропа шляхом додавання **незмінних вхідних полів**. Перші StatNumb вхідних полів не змінюються між ітераціями — вони вводяться лише на першій ітерації. Інші вхідні поля можуть змінюватися на кожній ітерації.

У вхідні дані дропу додається нове поле — ключ стану (state key). Він формується в кореневій вершині під час запуску чергової ітерації. Цей ключ може набувати одного з 4-х значень:

- (0) **Простий дроп.** Дроп не є ітераційним, обчислення виконуються за стандартною схемою.
- (1) **Початковий стан.** Будується обчислювальне дерево, динамічно залучаються процесори. На відміну від простого дропа, після завершення обчислень робочі поля та зв'язки між процесорами зберігаються.
- (2) **Проміжний стан.** Нові дропи не створюються. Існуючі дропи отримують нові вхідні дані та обчислюються або пересилаються іншим процесорам за попередньо визначеними маршрутами. Динамічний механізм розподілу дропів не використовується.
- (3) **Фінальний стан.** Обчислення виконуються як у стані 2, але після завершення обчислень вся використана пам'ять звільняється, як у простому дропі (стан 0).

Запропоноване розширення середовища виконання DAP-SRT дозволяє підтримувати ітеративні обчислення з частковим оновленням вхідних даних, що значно знижує накладні витрати та підвищує ефективність використання ресурсів. Завдяки введенню незмінних вхідних полів та механізму збереження обчислювального дерева між ітераціями стає можливим уникнути створення нових об'єктів і пересилань, що критично важливо для алгоритмів, таких як метод Діксона, або проекційні методи вирішення СЛАР у просторах Крилова.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Малашенок Г.І., Сідько А.А. *Паралельні обчислення на розподіленій пам'яті: OpenMPI, Java, Math Partner. Підручник.* — Київ: НаУКМА, 2020. — 266 с.
- [2] Gennadi Malaschonok, Alla Sidko. *Supercomputer runtime DAP for matrix block-recursive algorithms.* Computer Science and Information Technologies: Selected Papers of CSIT-2021 Conference. AIP Conference Proceedings. V.2757, Issue 1 (22 May 2023) p.21-27. doi.org/10.1063/5.0137014
- [3] Dixon J.D. *Exact Solution of Linear Equations Using P-Adic Expansions* // Numerische Mathematik — 1982. — Vol. 40,— pp. 137–142.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», Київ, Україна
Email address: o.zakolenko@ukma.edu.ua

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», Київ, Україна
Email address: malaschonok@ukma.edu.ua

ГРАФОВІ АЛГЕБРИ ЛІ ФАРБОВАНИХ ГРАФІВ І ГРАФОВІ ВЛАСТИВОСТІ

С.В. ЗУБКО

У роботі [1] запропонована конструкція алгебри Лі степеня нільпотентності 2, побудованої за простим графом без петель та кратних ребер. Такі алгебри Лі отримали назву графових алгебр Лі простих графів. У роботі [2] показано, що графові алгебри Лі є ізоморфними тоді і тільки тоді, коли ізоморфні відповідні прості графи, за якими вони побудовані. У роботі [3] запропоноване узагальнення графових алгебр простих графів до алгебр Лі до алгебр Лі, степеня нільпотентності 2, побудованої за орієнтованим графом з розфарбованими ребрами. Дослідження таких алгебр Лі були продовжені в [4] та [5]. На відміну від конструкції для простого графу, для алгебр Лі орієнтованого графу з фарбованими ребрами, ізоморфні алгебри Лі можуть бути у неізоморфних графів, тому варто досліджувати умови, за яких два неізоморфних графа з розфарбованими ребрами мають ізоморфні графові алгебри Лі.

Означення 1. Розфарбуванням ребер простого графу $\Gamma = (V, E)$ називаємо сюр'єктивне відображення $\text{col}: E \rightarrow C$. C називаємо множиною кольорів, $\text{col}\{v, w\}$ називаємо кольором ребра $\{v, w\}$.

Означення 2. Для фіксованої множини кольорів C гомоморфізмом $(\Gamma_1, \text{col}_1) \rightarrow (\Gamma_2, \text{col}_2)$ між орієнтованими фарбованими графами без петель називаємо гомоморфізм графів $f: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ такий, що існує перестановка σ на C така, що для довільного $(v, w) \in E_1$ $\text{col}_1(v, w) = \sigma(\text{col}_2(f(v), f(w)))$.

Для фіксованого орієнтованого простого графу $\Gamma = (V, \text{or } E)$, де множина V є скінченною, зафіксуємо порядок на вершинах $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ і для розфарбування його ребер $\text{col}: V \rightarrow C$ зафіксуємо порядок на множині його кольорів $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$.

Для поля $\mathbb{K}$ характеристики 0 розглянемо $\mathbb{K}$ -векторний простір $\langle V \rangle$ на множині вершин V та $\langle C \rangle$ — на множині кольорів C .

Для зовнішнього квадрату $\Lambda^2 \langle V \rangle$ розглянемо підпростір $S_E = \langle v_i \wedge v_j \mid \{v_i, v_j\} \notin E \rangle$. Орієнтація фарбованого простого графу природнім чином індукує косиметричну форму $\omega: \Lambda^2 \langle V \rangle \rightarrow \langle C \rangle$, таку, що $\ker(\omega) \supset S_E$,

де ω задається на базисі $\Lambda^2 \langle V \rangle / S_E$ як

$$\omega(v_i \wedge v_j) = \begin{cases} \text{col}\{v_i, v_j\}, & \text{or}\{v_i, v_j\} = (v_i, v_j) \\ -\text{col}\{v_i, v_j\}, & \text{or}\{v_i, v_j\} = (v_j, v_i). \end{cases}$$

Тоді ω природним чином визначає дужку Лі $[\cdot, \cdot]_\omega$ на $\langle V \rangle \oplus \langle C \rangle$ таку, що $[(v_1, c_1), (v_2, c_2)] = [0, \omega(v_1 \wedge v_2)]$.

Означення 3. Алгебра Лі $\text{Lie}(\Gamma) := (\langle V \rangle \oplus \langle C \rangle, [\cdot, \cdot]_\omega)$ називається графовою алгеброю Лі фарбованого простого орієнтованого графу (Γ, col) .

Теорема 1. Нехай розфарбування col_1 і col_2 є бієктивними.

Тоді $\text{Lie}(\Gamma_1) \cong \text{Lie}(\Gamma_2) \iff (\Gamma_1, \text{col}_1) \cong (\Gamma_2, \text{col}_2)$.

Теорема 2. Нехай задані однокольорові розфарбування col_1 та col_2 для $C = \{c_1\}$. A_1 та A_2 — косиметричні матриці інцидентності для орієнтованих простих графів Γ_1 та Γ_2 відповідно.

Тоді $\text{Lie}(\Gamma_1) \cong \text{Lie}(\Gamma_2) \iff \text{rk}(A_1) = \text{rk}(A_2)$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Dani S. G., Mainkar M. G. Anosov automorphisms on compact nilmanifolds associated with graphs // Transactions of the American Mathematical Society. — 2005. — Vol. 357. — P. 2235–2251.
- [2] Mainkar M. G. Graphs and Two-Step Nilpotent Lie Algebras // Groups, Geometry, and Dynamics. — 2015. — Vol. 9, no. 1. — P. 55–65.
- [3] Chakrabarti Debraj, Mainkar Meera, Swiatlowski Savannah. Automorphism Groups of nilpotent Lie algebras associated to certain graphs. — 2018. — arxiv : 1812.09439. Preprint.
- [4] Godoy Molina Mauricio, Lagos Diego. Lie algebras associated with labeled directed graphs. — 2023. — arxiv : 2308.00272. Preprint.
- [5] Godoy Molina Mauricio. Tanaka rigidity of graph Lie algebras. — 2024. — arxiv : 2402.07873. Preprint.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: stansislav.zubko@ukma.edu.ua

ЗАСТОСУВАННЯ RSA У КІБЕРНЕТИЧНІЙ БЕЗПЕЦІ

А.О. КРАМАРЕНКО

Математика — це основа технічної освіти, адже вона базується в основі багатьох технологічних та інженерних дисциплін. У технічному університеті її застосування обіймає численні галузі: від моделювання фізичних процесів до створення алгоритмів для захисту інформації. Криптографія, яка тісно зв'язана з абстрактною алгеброю, є одним із прикладних застосувань математики. Відіграє ключову роль у сучасному світі, де захист даних є найбільш важливим. Одним із найвідоміших криптографічних алгоритмів є RSA, що базується на складних математичних принципах, а також використовується для забезпечення цілісності та конфіденційності інформації.

Алгоритм RSA є основним інструментом у сучасній криптографії. Він забезпечує високий рівень захисту даних завдяки використанню складної задачі факторизації великих чисел. Його застосування в основному базується на асиметричному шифруванні, у якому використовуються два ключі: відкритий для шифрування та секретний для розшифрування. RSA був розроблений у 1977 році і з того часу став незамінним елементом в багатьох сферах кібербезпеки, зокрема для забезпечення конфіденційності, автентичності та цілісності даних.

Алгоритм RSA містить в собі такі етапи як: генерації ключів, шифрування, розшифрування, розповсюдження ключів.

Для того щоб згенерувати пару ключів, вибираються два великі прості числа p і q , які множаться для отримання модуля $n = p \times q$. Далі обчислюється функція Ейлера:

$$\varphi(n) = (p - 1)(q - 1)$$

Вибирається ціле число e , взаємно просте з $\varphi(n)$, і знаходиться d , яке задовольняє рівність:

$$e \times d \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$$

Відкритий ключ: (n, e) .

Секретний ключ: (n, d) .

Шифрування полягає в тому, що відправник перетворює повідомлення M в ціле число m , щоб

$$0 \leq m < n,$$

і обчислює шифротекст використавши відкритий ключ e за рівнянням (1)

$$c = m^e \mod n \quad (1)$$

Розшифрування повідомлення полягає у тому, що одержувач використовуючи свій секрет, обчислює вихідне повідомлення за допомогою рівняння (2):

$$m = c^d \mod n \quad (2)$$

Припущення RSA полягає в тому, що цей алгоритм є односторонньою перестановкою. Це означає, що для будь-якого алгоритму A ймовірність успішного обернення операції $Pr[A(n, e, c) = c^{1/e}]$ є вкрай малою. Іншими словами, без знання секретної інформації d обернення RSA практично неможливе.

Застосування алгоритму:

- 1) У протоколах безпечного обміну даними, наприклад, SSL/TLS, для шифрування інформації, що передається між клієнтом і сервером.
- 2) RSA використовується для створення цифрових підписів, які підтверджують, що дані походять від конкретного джерела і не були змінені.
- 3) У системах публічних ключів RSA забезпечує автентифікацію користувачів та управління ключами.
- 4) RSA використовується для підпису програмного забезпечення, що гарантує його справжність і відсутність змін.
- 5) RSA забезпечує захист платіжних даних у процесі онлайн-транзакцій.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Щур Н.О., Покотило О.А. *Основи криптології: навч. посібник.* – Житомир: Державний університет «Житомирська політехніка» — 1995. — No 1. — С. 120.
- [2] Вікіпедія. RSA [Електронний ресурс]: URL: [=https://uk.wikipedia.org/wiki/RSA](https://uk.wikipedia.org/wiki/RSA)

ІСЗЗІ, КПП ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: kramarenkoalina0@gmail.com

PAR-FUNCTIONS AND ALGORITHMS ON SQUARE MATRICES

N.V. PEREPICHKA

New polylinear functions of square matrices [1] are considered, which are analogues of the determinant and permanent of square matrices. These functions, like the determinant and permanent, are constructed in such a way that each element of the matrix influences their value. In addition, the par-function, which is an analogue of the determinant, contains half of the terms with a plus sign and half with a minus sign. The par-functions are closely related to the partitions of a natural number into non-negative integer summands.

A bijection is constructed between the elements of the set of ordered partitions $C(n, +)$ and the subset $CS_n \subset S_n$, where S_n is the set of all permutations of the first n natural numbers. Using this bijection, the definitions of the functions par and par^+ are given:

$$par(A_n) = \sum_{r=1}^n \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n)_r \in CS_n} (-1)^{n-r} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}, \quad (1)$$

$$par^+(A_n) = \sum_{r=1}^n \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n)_r \in CS_n} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}. \quad (2)$$

A theorem is proved that provides efficient linear recurrence [2] algorithms for computing the values of these functions:

Theorem 1. *The following recurrence relations hold:*

$$par(A_n) = \sum_{i=1}^n \prod_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-1} a_{n-j, n-i+j+1} par(A_{n-i}), \quad (3)$$

$$par^+(A_n) = \sum_{i=1}^n \prod_{j=0}^{i-1} a_{n-j, n-i+j+1} par^+(A_{n-i}), \quad (4)$$

where $p(A_0) = 1$ and $p(A_{<0}) = 0$.

Connections between the par-function and the determinants of Hessenberg matrices [4], [3], [5] are established:

Theorem 2. *For the elements a_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$ belonging to some numerical field, the following identity holds:*

$$\det(H_n) = \begin{vmatrix} h_{11} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_{21} & h_{22} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n-1,1} & h_{n-1,2} & h_{n-1,3} & \cdots & h_{n-1,n-1} & 1 \\ h_{n1} & h_{n2} & h_{n3} & \cdots & h_{n,n-1} & h_{nn} \end{vmatrix} = \text{par} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (5)$$

where

$$h_{ij} = \prod_{k=0}^{i-j} a_{i-k,j+k}. \quad (6)$$

REFERENCES

- [1] Perepichka N.V., Zatorsky R.A. par-Functions of square matrices. Algebra and Discrete Mathematics Volume 39 (2025). Number 1, pp. 130–138 DOI:10.12958/adm2387.
- [2] Zatorskyi R.A. Notebook 2 Matrix analysis of Sequences and their classification - Ivano-Frankivsk : Symphony forte, 2025. – 102 p. ISBN 978-966-286-301-7.
- [3] Zatorskyi R.A. Notebook 1 Hessenberg Matrices and their Commutative Product - Ivano-Frankivsk : Symphony forte, 2025. – 138 p. ISBN 978-966-286-302-4.
- [4] Goy T., Zatorsky R. Hessenberg matrices: Properties and some applications, in: I. Kyrchei (ed.), Hot Topics in Linear Algebra, New York, Nova Science Publishers, 2020, P. 163-204.
- [5] Zatorsky R.A. Hessenberg Matrices and Their Applications. - Ivano-Frankivsk: Holinei O.V., 2023. - 170 p. (in Ukrainian ISBN 978-617-95377-3-8).

VASYL STEFANYK PRECARPATHIAN NATIONAL UNIVERSITY, IVANO-FRANKIVSK, UKRAINE
 Email address: nazarii.perepichka.23@pnu.edu.ua

КЛАСИФІКАЦІЯ ЗЛІЧЕННИХ ГРАФІВ КОКСЕТЕРА $T_{k,l,\infty}^5$ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ ІНДЕКСУ У ПРОМІЖКУ $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$

Е.О. СЕМЕНКО, Л.М. ТИМОШКЕВИЧ

Спектральна теорія графів Коксетера має застосування у класифікаційних теоремах алгебри, зокрема, напівпростих алгебр Лі, скінченних груп Коксетера, та теорії представлень [1], [2]. Обмеження на індекс графа істотно впливають на його структуру, метричні властивості, в певних випадках можна навести повний перелік графів, що задовольняють цим обмеженням. У роботі [2] знайдено всі злічені зв'язні графи Коксетера, індекси яких не перевищують $\sqrt{\sqrt{5}+2}$. У статті [3] досліджувалися скінченні графи з індексами у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$. Актуальною є задача класифікації злічених графів Коксетера зі значеннями індексу в зазначеному проміжку. Дослідження цієї задачі та доведення низки властивостей відповідних графів наведено в роботах [2], [4], [5].

Графом Коксетера $\mathbf{G}$ називається впорядкована пара (G, f) , де G — простий неорієнтований граф, а f — відображення

$$f: E(G) \rightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 3\} \cup \{\infty\}.$$

Граф Коксетера $\mathbf{G}$ зручно зображати за допомогою діаграми графа G , де над кожним ребром $e \in E(G)$ написано позначку $f(e)$. Якщо $f(e) = 3$, така позначка зазвичай опускається.

З кожним скінченим графом Коксетера $\mathbf{G} = (G, f)$ та нумерацією його вершин натуральними числами від 1 до n , де n — порядок графа, пов'язують *матрицю суміжності* $A(\mathbf{G}) = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, елементи a_{ij} якої визначаються наступним чином: $a_{ij} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$, якщо $f(i, j) = k$; $a_{ij} = 2$, якщо $f(i, j) = \infty$; $a_{ij} = 0$, якщо вершини i і j не суміжні.

Індексом скінченного графа Коксетера $\mathbf{G}$ називають найбільше власне значення $\lambda_{\mathbf{G}}$ матриці суміжності $A(\mathbf{G})$ графа $\mathbf{G}$.

Зліченим графом Коксетера $\mathbf{G}$ називають граф зі зліченною множиною вершин.

Нехай $Fin(\mathbf{G})$ — це множина всіх скінчених підграфів графа $\mathbf{G}$. *Індексом зліченного графа Коксетера $\mathbf{G}$* називають додатне число або символ ∞ , визначені рівністю

$$ind \mathbf{G} = \sup_{\Gamma \in Fin(\mathbf{G})} ind \Gamma.$$

Теорема 1. Нехай G — злічений зв'язний граф Коксетера $T_{k,l,\infty}^5$. Нерівність $\sqrt{\sqrt{5}+2} < \text{ind } G < \frac{3}{2}\sqrt{2}$ виконується тоді та лише тоді, коли $l+3 \leq k$ або $l=1$ і $k=3$. Для всіх інших випадків значень k та l : $\text{ind } G > \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

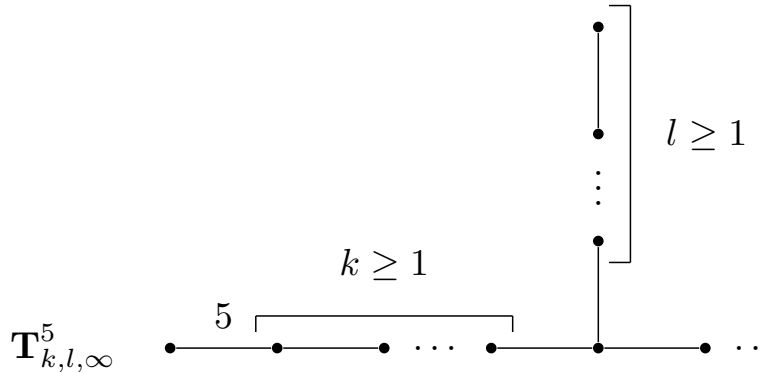


Рис. 1

Наведена теорема дозволяє частково завершити розпочате у роботах [2], [4], [5] дослідження та навести повний перелік злічених зв'язних графів Коксетера, які мають не більше однієї вершини степеня не менше за 3 та зі значеннями індексу у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Кириченко А. А., Самойленко Ю. С., Тимошкевич Л. М. Структура систем ортопроекторів, пов'язаних зі зліченими деревами Кокстера, Укр. мат. журн. — 2014. — Т. 66, № 9. — С. 1185–1192.
- [2] Тимошкевич Л.М. Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і злічених графів Кокстера, Дисертація канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. — 2015. — 160 с.
- [3] Woo R., Neumaier A. On Graphs Whose Spectral Radius is Bounded by $\frac{3}{2}\sqrt{2}$, Graphs and Combinatorics — 2007. — Vol. 23, № 6. — Pp. 713-726.
- [4] Тимошкевич Л.М., Когут М.В. Класифікація злічених графів Кокстера відносно значення індексу у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$, Могилянський математичний журнал. — 2022. — Том 5. — С.19-25.
- [5] Лучка К. Р., Тимошкевич Л. М. Класифікація злічених графів Кокстера $T_{2,n+m+1,\infty}^4$ зі значеннями індексу у проміжку $\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}; \frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$, XII Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків. Збірник тез конференції (м.Київ 9-11 травня 2024 р.) — С.105-107.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», Київ, Україна
Email address: e.semenko@ukma.edu.ua

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», Київ, Україна
Email address: l.tymoshkevych@ukma.edu.ua

ВІДНОВЛЮЮЧЕ СПЕКТРАЛЬНЕ ЧИСЛО ГРАФА-ЦИКЛУ C_n

Т.І. СОКОЛОВА, Л.М. ТИМОШКЕВИЧ

Спектральна теорія графів є сучасним напрямком математики, який активно розвивається завдяки широким можливостям практичного застосування в різних науках і технологіях.

Важливою складовою спектральної теорії графів є різноманітні задачі відновлення графів: визначення структури графа, його характеристик на основі спектральних даних. З оглядом обернених спектральних задач можна ознайомитися за роботою [1].

Дослідження присвячено оберненій спектральній задачі для зважених графів, тобто графів, на ребрах яких задано додатну функцію. У роботах [2], [3] вперше введено поняття відновлюючого спектрального числа $Srn(G)$ — мінімальної кількості спектрів індукованих підграфів, необхідних для однозначного відновлення ваг ребер графа, а також знайдено точні значення та верхні оцінки цього параметра для деяких класів графів. Зокрема, встановлено, що $Srn(A_n) = 2$ для графів-ланцюгів A_n при $n \geq 3$ та $Srn(K_{1,n}) = n$ для графів-зірок, а також отримано оцінку $Srn(C_n) \leq 3$ для графів-циклів C_n при $n \geq 5$. У роботі [4] доведено, що $Srn(C_3) = 3$ та $Srn(C_4) = 4$.

Метою цієї роботи є знаходження точних значень відновлюючого спектрального числа $Srn(C_n)$ для графів-циклів при $5 \leq n \leq 9$. Задача є складною через нелінійний характер залежності спектральних даних від ваг ребер та високу чутливість до змін у структурі графа.

Розглянемо детальніше задачу відновлення ваг для зважених графів. Зваженим графом $\mathbf{G}$ називається впорядкована пара (G, w) , де G — простий неорієнтований граф, а $w : E \rightarrow (0, +\infty)$ — вагова функція, яка ставить у відповідність кожному ребру e додатне число $w(e)$.

З кожним графом $\mathbf{G} = (G, w)$ та нумерацією його вершин натуральними числами від 1 до n , де n — порядок графа, пов'язують *матрицю суміжності* $A(\mathbf{G}) = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, в якій елемент a_{ij} i -го рядка та j -го стовпця дорівнює w_{ij} , якщо вершини з номерами i та j є суміжними (через w_{ij} позначаємо значення ваги ребра (i, j)), і дорівнює 0 в іншому випадку.

Спектром графа $\mathbf{G}$ називають мультимножину власних значень його матриці суміжності.

Нехай граф G відомий, задача полягає в знаходженні мінімальної кількості зв'язних індукованих підграфів графа G таких, що за спектрами відповідних зважених індукованих підграфів $\mathbf{G}$ завжди однозначно відновлюється вагова функція зваженого графа $\mathbf{G}$. Ця кількість називається відновлюючим спектральним числом графа G та позначається $Srn(G)$.

Теорема 1. $Srn(C_n) = 3$ для графа-циклу C_n , де $5 \leq n \leq 9$.

До перспектив подальшого дослідження відноситься задача знаходження точного значення спектрального відновлюючого числа для всіх графів-циклів C_n .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Chu M.T., Golub G.H. *Structured inverse eigenvalue problems* // Acta Numerica. — 2002. — Т. 11. — С. 1–71.
- [2] Тимошкевич Л.М. *Обернені спектральні задачі на реберно-зважених графах* // Наук. часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — 2013. — Т. 14. — С. 165–175.
- [3] Тимошкевич Л.М. *Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і злічених графів Кокстера: дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06.* — Київ, 2015. — 160 с.
- [4] Пилипіва О.В. *Обернені спектральні задачі на зважених графах. Кваліфікаційна робота.* — Київ: Нац. ун-т «Києво-Могилянська академія», 2022. — 35 с.
- [5] Пилипіва О.В., Тимошкевич Л.М. *Обернені спектральні задачі для зважених графів* // Могилян. матем. журн. — 2022. — Т. 5. — С. 26–32.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», Київ, Україна
Email address: tetiana.sokolova@ukma.edu.ua

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», Київ, Україна
Email address: l.tymoshkevychh@ukma.edu.ua

ON REALIZATIONS AND REPRESENTATIONS OF COMPLEX SIMPLE LIE ALGEBRA $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

M. STARYI

The Lie algebra 2×2 is the smallest simple Lie algebra, all other simple Lie algebras contain it as a subalgebra, therefore it serves as a key building block in many theories and constructions.

The main aim of this work is to study representations and realizations of a Lie algebra structure, namely of the well-known simple complex three-dimensional Lie algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. This algebra arose as an algebra of 2×2 traceless matrices $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, which satisfy the commutation relations

$$[e, f] = h, \quad [h, e] = 2e, \quad [f, h] = 2f \quad \text{or} \quad (1)$$

$$[e_1, e_2] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_3, \quad [e_1, e_3] = 2e_2 \quad \text{for } e = e_1, \quad h = -2e_2, \quad f = -e_3. \quad (2)$$

By *realization* we mean a representation (homomorphism) of a Lie algebra elements by means of first-order differential operators with smooth coefficients of the form $\xi^1(x_1, x_2, \dots, x_m) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \xi^m(x_1, \dots, x_m) \frac{\partial}{\partial x_m}$.

We are interested in the list of *faithful* (with zero kernel) realizations inequivalent up to the non-degenerate change of variables and basis automorphisms. The main classification result over the field of complex numbers is given by the following theorem.

Theorem 1. *There are only four inequivalent faithful realizations of the Lie algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ with the commutation relations (2):*

- (1) $\partial_1, x_1\partial_1 + x_2\partial_2, x_1^2\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2 + x_2\partial_3;$
- (2) $\partial_1, x_1\partial_1 + x_2\partial_2, (x_1^2 + x_2^2)\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2;$
- (3) $\partial_1, x_1\partial_1 + x_2\partial_2, x_1^2\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2;$
- (4) $\partial_1, x_1\partial_1, x_1^2\partial_1.$

Proof. The proof is provided by the application of complex diffeomorphisms to the list of all inequivalent realizations of the Lie algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ obtained in [2]. □

Yet another task considered in this work is the connection between realizations and matrix representations. We establish a one-to-one correspondence between realizations with linear coefficients and matrix representations by the following lemma.

Lemma 1. *Let $\mathfrak{g}$ be an n -dimensional Lie algebra with the structure $[e_i, e_j] = C_{ij}^k e_k$, $i, j, k = 1, \dots, n$ and with a representation φ defined by $(m \times m)$ basis matrices $(\Phi_i)_\alpha^\beta$, $\alpha, \beta = 1, \dots, m$ then the set of first-order differential operators with the linear coefficients*

$$\Xi_i = \sum_{\alpha=1}^m \left(\sum_{\beta=1}^m (\Phi_i)_\alpha^\beta x_\beta \right) \partial_\alpha$$

is a realization of $\mathfrak{g}$ and vice versa: any realization with linear coefficients generates the matrix representation of the Lie algebra.

Proof. Proof of this lemma is technical and follows from the commutation rule for first-order differential operators. $\square$

In general case all irreducible finite-dimensional representations of $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ are known, see, e.g., [1].

Let us consider the case of 2×2 natural representation and its corresponding realization with linear coefficients

$$\Xi_1 = R(e) = x_1 \partial_2, \quad \Xi_2 = R(f) = x_2 \partial_1, \quad \Xi_3 = R(h) = x_1 \partial_1 - x_2 \partial_2.$$

The realization corresponding to it is

$$R(e_1) = x_2 \partial_1, \quad R(e_2) = \frac{1}{2} x_1 \partial_1 - \frac{1}{2} x_2 \partial_2, \quad R(e_3) = -x_1 \partial_2.$$

To find the equivalent realization from the Theorem 1, we reduce the operator $x_2 \partial_1$ to the shift operator $\partial_{\tilde{x}_1}$ by the diffeomorphism transformation $\tilde{x}_1 = x_1$, $\tilde{x}_2 = \frac{1}{x_2^2}$, then our realization transforms to

$$\tilde{R}(e_1) = \partial_{\tilde{x}_1}, \quad \tilde{R}(e_2) = \tilde{x}_1 \partial_{\tilde{x}_1} + \tilde{x}_2 \partial_{\tilde{x}_2}, \quad \tilde{R}(e_3) = \tilde{x}_1^2 \partial_{\tilde{x}_1} + 2\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \partial_{\tilde{x}_2}.$$

Therefore, the realization constructed from the natural representation is equivalent to the nonlinear realization given under number 3 in Theorem 1. Since the diffeomorphism we constructed is invertible, we can embed the nonlinear realization into a linear space.

The description of Lie algebra representations by vector fields is of great interest and widely applicable e.g., in integration of differential equations and in group classification of partial differential equations. In further research, we plan to establish connections between other realizations and representations of $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, as well as to construct deformed representations and realizations that in the limiting case realize solvable Lie algebras.

REFERENCES

- [1] Erdmann K., Wildon M. *Introduction to Lie algebras*. — London, 2006. — 254 p.
- [2] Nesterenko M., Popovych R. *Realizations of real unsolvable low-dimensional Lie algebras* — Kyiv, // Proceedings of Institute of Mathematics. — 2005. — V. 55, No 3. — P. 163-168.

INSTITUTE OF MATHEMATICS OF NAS OF UKRAINE, KYIV, UKRAINE
Email address: staryimath@gmail.com

РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМУ ФАКТОРИЗАЦІЇ КАНТОРА-ЗАССЕНГАУЗА ТА ПОРІВНЯННЯ З АЛГОРИТМОМ БЕРЛЕКАМПА

А.М. ТІХОНОВ

1. Вступ

Факторизація многочленів над скінченними полями є однією з ключових задач комп'ютерної алгебри, що знаходить широке застосування в теорії чисел, криптографії та теорії кодування. Серед найбільш відомих підходів для розв'язання цієї задачі — алгоритми Берлекампа [1] та Кантора-Зассенгауза [2], кожен із яких має свої переваги залежно від структури вхідного многочлена та розміру поля. Особливу увагу приділено оцінці їхньої продуктивності у різних практичних умовах, зокрема в середовищі з паралельним виконанням на багатоядерних процесорах.

2. Постановка задачі

Завдання полягає в реалізації послідовних і паралельних версій алгоритмів Берлекампа та Кантора-Зассенгауза. Послідовна реалізація використовується як еталон для порівняння, оскільки результати попередніх досліджень [3] не є актуальними для поточного апаратного забезпечення та не беруть до уваги можливості паралелізації.

У паралельних версіях ми фокусувались на впливі кількості ядер на ступінь пришвидшення виконання алгоритмів. Також оцінюється асимптотична складність обох алгоритмів за часом та обсягом використаної пам'яті.

3. Модель паралелізму

У межах дослідження реалізовано модель паралельного виконання факторизації поліномів на основі багатоядерного середовища. Для обчислювальних експериментів було використано підхід, що полягає у виконанні основної задачі через розподіл її на максимально можливу кількість незалежних підзадач, таких як піднесення до степеня та перевірка дільників, що природно допускають розпаралелювання.

Основою для керування багатопотоковими обчисленнями було обрано модель *work stealing*, яка добре масштабується на системах з великою

кількістю ядер. У цьому підході кожен обчислювальний потік підтримує власну чергу задач і, в разі її спорожнення, може "викрасти" задачу з черги іншого потоку, що дозволяє динамічно балансувати навантаження без суттєвих накладних витрат. Такий підхід довів свою ефективність у широкому спектрі застосувань як для обчислень, так і виконання інших видів задач [4].

Застосування цієї моделі дозволяє спростити організацію паралельного виконання, при цьому залишивши місце для гнучкого розподілу підзадач та ефективного використання обчислювальних ресурсів процесора та зменшує час простою потоків при нерівномірному розподілі підзадач.

4. ЗАПРОПОНОВАНЕ ПОКРАЩЕННЯ АЛГОРИТМІВ

У межах реалізації було запропоновано низку оптимізацій:

- (1) Для алгоритму Берлекампа:
 - Паралельна побудова стовпців матриці;
 - Спеціальні структури для щільних та розріджених матриць;
- (2) Для алгоритму Кантора–Зассенгауза:
 - Паралельне знаходження множника з етапу рандомізованого підбору;
- (3) Загальні:
 - Паралельне виконання алгоритму швидкого піднесення до степеня з одночасним приведенням за модулем;
 - *Work stealing* для балансування навантаження;

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Berlekamp E R. Factoring polynomials over finite fields // Bell Syst. Tech. J. — 1967. — Vol. 46, no. 8. — P. 1853–1859.
- [2] Cantor David G, Zassenhaus Hans. A new algorithm for factoring polynomials over finite fields // Math. Comput. — 1981. — Apr. — Vol. 36, no. 154. — P. 587.
- [3] Shoup Victor. Factoring Polynomials over Finite Fields: Asymptotic Complexity vs. Practical Performance // Proceedings of the International IMACS Symposium on Symbolic Computation: New Trends and Developments. — Lille, France. — 1993. — P. 124–129. — Access mode: <https://www.shoup.net/papers/lille.pdf>.
- [4] Blumofe Robert D., Leiserson Charles E. Scheduling Multithreaded Computations by Work Stealing // Journal of the ACM. — 1999. — Vol. 46, no. 5. — P. 720–748.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: a.tikhonov@ukma.edu.ua

SOLVING ARBITRARY SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS VIA VARIATIONAL CALCULUS

A.O. TSUKANOVA

Applied linear algebra is rapidly developing branch of mathematics that allows us to take some different look at many classical problems [2], that is demonstrated in this paper. It presents some results of comparative analysis of classical Gauss method [1] and some modifications of optimization gradient method [3] for solving arbitrary systems of linear algebraic equations, obtained as result of testing our program, written in «Visual Basic for Applications». Namely, we have combined methods of classical linear algebra and the following six optimization methods: *gradient descent method with adapted step selection*, *gradient descent method with adapted step correction*, *modified gradient descent method*, *descent method with adapted step selection*, *gradient method of steepest descent*, and *gradient method of conjugate gradients*.

«Optimization» comes from the same root as «optimal», which means «best», i.e. making something as fully perfect or effective as possible. When you optimize something, you are «making it best», as best, as you can. But this «best» can vary. For example, if you're a football player, you might want to maximize your running yards and also desire to minimize your fumbles. Both maximizing and minimizing are types of optimization problems. In mathematics any optimization problem is some problem of finding the best solution from all feasible solutions. Mathematical optimization is sort of art of finding best solutions to complicated problems, from organizing movements of planes in large airports to placement of windmills.

Gradient descent methods are rather powerful tools for solving various optimization problems. The main disadvantage of these methods is a bit limited scope of applicability. Using gradient methods, it is possible to find solution to any problem of nonlinear programming. However, in the most general case, with the help of these methods it is possible to find the point of local extremum. Therefore, it is more advisable to use gradient methods to find solutions to programming problems, where every local extremum is simultaneously global. The process of finding a solution with the help of gradient methods consists in fact that, starting from some certain point, sequential transition to some other points is carried out until necessary acceptable solution to original problem under consideration is identified.

As far as we know, according to the Gauss method of sequential exclusion of unknowns, when solving an arbitrary matrix system of m linear algebraic equations with n unknowns of the form

$$A\vec{x} = \vec{b}, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \vec{b} \in \mathbb{R}^m, m \leq n,$$

as result of so-called forward stroke, this system is reduced to equivalent step-wise form, by which it is possible to determine whether there is any solution, it is the only one or there are infinitely many of them. Main essence of gradient descent method is that the solution of this system is reduced to finding extremum (namely, minimum) $\vec{x}^*$ of the next functional

$$f(\vec{x}) = (A\vec{x} - \vec{b}, A\vec{x} - \vec{b}) = \|A\vec{x} - \vec{b}\|^2,$$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \vec{b} \in \mathbb{R}^m, m \leq n.$$

This minimum is achieved for exact solution $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^n$ of the system under consideration.

Formally, this method consists in iterative generation of some sequence of such points $\{\vec{x}_k\}_{k \geq 0}$, i.e. some descent trajectory, that is sometimes called a *relaxation trajectory*, that converges to our «true» solution $\vec{x}^*$ while $k \rightarrow \infty$, that $f(\vec{x}_{k+1}) \leq f(\vec{x}_k)$, $k \geq 0$, using the following recurrent formula

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - \lambda_k \cdot \text{grad}(f(\vec{x}_k)), \lambda_k > 0, k \geq 0.$$

In this formula $\lambda_k > 0$, $k \geq 0$, determines the distance between $\vec{x}_k$ and $\vec{x}_{k+1}$, $k \geq 0$. As we see, at each step we have some movement along the vector of anti-gradient, in the direction of the fastest decrease of f , and we finally get our necessary solution.

The result of variational part of the program is solution of the system under consideration, found by each of six proposed gradient descent methods. The result of the Gauss method is some conclusion about solvability or unsolvability of the system, obtained after application of the Kronecker-Capelli theorem from classical linear algebra to the reduced triangular system.

We suppose the considered software product to become an effective and progressive intellectual system for studying the course of linear algebra and large cycle of numerous related disciplines from higher mathematics.

REFERENCES

- [1] Axler S. *Linear Algebra Done Right (Undergraduate Texts in Mathematics)*. — Springer, 2015. — 357 p.
- [2] Shores T.S. *Applied Linear Algebra and Matrix Analysis (Undergraduate Texts in Mathematics)*. — Springer, 2018. — 491 p.
- [3] Бейко І.В., Зінько П.М., Наконечний О. Г. *Задачі, методи і алгоритми оптимізації: Навчальний посібник*. — Рівне: НУБГП, 2011. — 624 p.

IGOR SIKORSKY KYIV POLYTECHNIC INSTITUTE, KYIV, UKRAINE
Email address: ponochka2511@ukr.net

ВІДНОВЛЮЮЧЕ СПЕКТРАЛЬНЕ ЧИСЛО ГРАФА-ДІАМАНТА

Л.М. ТИМОШКЕВИЧ, К.С. ЧЕРНЯВСЬКА

Спектральна теорія графів активно розвивається завдяки широкому спектру практичних застосувань у природничих, технічних та соціальних науках. Її методи використовуються, зокрема, для оптимізації архітектури згорткових нейронних мереж у машинному навчанні.

Актуальними є обернені спектральні задачі, що полягають у відновленні інформації про граф за його спектральними характеристиками (огляд див. [1]).

Ключовим поняттям нашої роботи є відновлююче спектральне число графа $Srn(G)$ — мінімальна кількість спектрів індукованих підграфів, необхідних для однозначного відновлення всіх ваг на ребрах графа G . Це поняття було вперше запропоновано у роботі [2], та для деяких класів графів було встановлено точні значення цього параметра. Подальші дослідження надали верхні оцінки $Srn(G)$ для дерев [3], уніциклічних графів [4, 5] та графів-кактусів [6].

Однак задача знаходження точних значень $Srn(G)$ залишається складною навіть для графів малого порядку через нелінійний зв'язок спектральних даних із вагами ребер та їхню високу чутливість до змін структури графа.

Під *зваженим графом* $\mathbf{G}$ розуміємо впорядковану пару (G, w) , де G — простий неорієнтований граф, а $w : E \rightarrow (0, +\infty)$ — вагова функція, що ставить у відповідність кожному ребру деяке додатне дійсне число.

Розглянемо наступну задачу відновлення для зважених графів: нехай відомий граф G , потрібно однозначно відновити вагову функцію w зваженого графа $\mathbf{G} = (G, w)$ за спектрами певних його індукованих зважених підграфів. Спектр підграфа будемо називати підспектром. Мінімальну кількість таких підспектрів будемо називати *відновлюючим спектральним числом графа* G , позначення: $Srn(G)$.

Метою нашої роботи є знаходження точного значення відновлюючого спектрального числа для графа-діаманта.

Будемо позначати через D граф, одержаний з повного графа K_4 видаленням одного ребра, тобто

$$D = K_4 \setminus e, \quad e \in E(K_4).$$

Доведена наступна теорема.

Теорема 1. $Srn(D) = 4$.

Перспективним напрямом подальших досліджень є знаходження верхніх оцінок і точних значень відновлюючого спектрального числа для планарних графів.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Chu M.T., Golub G.H. *Structured inverse eigenvalue problems* // Acta Numerica. — 2002. — Т. 11. — С. 1–71.
- [2] Тимошкевич Л.М. *Обернені спектральні задачі на реберно-зважених графах* // Наук. часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — 2013. — Т. 14. — С. 165–175.
- [3] Тимошкевич Л.М. *Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і злічених графів Кокстера: дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06.* — Київ, 2015. — 160 с.
- [4] Пилипіва О.В. *Обернені спектральні задачі на зважених графах. Кваліфікаційна робота.* — Київ: Нац. ун-т «Києво-Могилянська академія», 2022. — 35 с.
- [5] Пилипіва О.В., Тимошкевич Л.М. *Обернені спектральні задачі для зважених графів* // Могилян. матем. журн. — 2022. — Т. 5. — С. 26–32.
- [6] Тимошкевич Л.М., Чернявська К.С. *Верхня оцінка відновлюючого спектрального числа для графів-кактусів* // XII Всеукр. наук. конф. молодих математиків. Зб. тез конф. (Київ, 9–11 травня 2024 р.). — Київ, 2024. — С. 114–115.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», Київ, Україна
Email address: l.tymoshkevych@ukma.edu.ua

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», Київ, Україна
Email address: k.cherniavska@ukma.edu.ua

ВЛАСТИВОСТІ АНТИПОДАЛЬНИХ ГРАФІВ ДЕЯКИХ РОДИН ГРАФІВ

К.В. ЯКОВЕНКО

Нехай G — простий граф, тобто неорієнтований граф без кратних ребер і без петель.

Означення 1. Відстанню $d_G(u, v)$ між вершинами u та v графа G називають довжину найкоротшого шляху між u та v , якщо $u \neq v$. У випадку $u = v$ вважаємо $d_G(u, v) = 0$. Якщо жодного u - v -шляху не існує, тоді $d_G(u, v) = \infty$.

Означення 2. Діаметром графа G називають максимальну відстань між будь-якими двома вершинами графа:

$$\text{diam}(G) = \max\{d_G(u, v) \mid u, v \in V(G)\}.$$

Означення 3. Антиподальним графом графа G , який позначається як $A(G)$, називають граф, визначений на множині вершин графа G , у якому пари вершин з'єднані ребром тоді й лише тоді, коли відстань між ними в графі G дорівнює діаметру графа G .

Іншими словами,

$$E(A(G)) = \{(u, v) \in V(G) \times V(G) \mid d_G(u, v) = \text{diam}(G)\}.$$

Нагадаємо, що простим циклом C_n , $n \in \mathbb{N}$, називається граф, степінь кожної вершини якого дорівнює двом.

Теорема 1. Нехай C_n — простий цикл на $n \geq 3$ вершинах, і нехай $A(C_n)$ — антиподальний граф простого циклу C_n . Тоді:

(i) Якщо $n = 2k$ (парне), то

$$A(C_n) = \bigcup_{i=1}^k K_2,$$

тобто $A(C_n)$ є об'єднанням k графів K_2 , кожен з яких відповідає парі антиподальних вершин на відстані k .

(ii) Якщо $n = 2k + 1$ (непарне), то

$$A(C_n) \cong C_n,$$

тобто антиподальний граф $A(C_n)$ ізоморфний самому графу C_n .

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Reinhard Diestel. *Graph Theory*. Electronic Edition, 2005. Springer-Verlag Heidelberg, New York, 1997, 2000, 2005.
- [2] R. Aravamudhan, B. Rajendran. *On Antipodal Graphs* // Discrete Mathematics, Vol. 49 (1984), pp. 193–195.
- [3] Richard Hammack, Wilfried Imrich, Sandi Klavžar. *Handbook of Product Graphs. Second Edition*. CRC Press, 2011.

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ», УКРАЇНА
Email address: kateryna.yakovenko0102@gmail.com

СЕКЦІЯ 4
Методики навчання та
історії математики

ЧИСЛА ФІБОНАЧЧІ ТА ЗОЛОТИЙ ПЕРЕТИН: АСПЕКТИ ЗАСТОСУВАННЯ ТА ПРОЯВИ В ПРИРОДІ

А.М. БОБОРИКІН, Т.Г. ПРИГАЛІНСЬКА

Перші згадки про послідовність чисел, відомих сьогодні як послідовність Фібоначчі, з'явилися у праці індійського вченого Пінгали (300–200 рр. до н.е.). У Європі ці числа стали відомими завдяки італійському математику Леонардо Пізанському, більш відомому як Фібоначчі. Він описав цю послідовність у праці «Liber Abaci» (1202). Згодом послідовність, яка починається із 0 та 1, а кожен її наступний елемент є сумою двох попередніх (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...), набула широкого розповсюдження не лише у математиці, а й у природничих науках, мистецтві, архітектурі, інженерії та інших сферах людської діяльності.

Із математичної точки зору, числа Фібоначчі тісно пов'язані із золотим перетином — ірраціональним числом $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, що приблизно дорівнює 1.618, до якого прямує відношення сусідніх чисел Фібоначчі при необмеженому зростанні послідовності.

Найбільш поширене визначення золотого перетину говорить про те, що при поділі цілого менша частина так відноситься до більшої, як більша частина відноситься до всього цілого. У природі багато структур демонструють закономірності, пов'язані із числами Фібоначчі. Наприклад, філотахсис — розташування листків на стеблі — часто має спіральну структуру з кількістю витків, що відповідають послідовності. У соняшниках, шишках, ананасах та капусті можна побачити кількість спіралей, яка дорівнює сусіднім числам послідовності. Це пояснюється тим, що таке розташування забезпечує найефективніше використання простору. Також кількість пелюсток багатьох квітів належить до чисел Фібоначчі: жовтець, шипшина мають 5 пелюсток, дельфініум — 8, айстра та цикорій — 21, подорожник та піретрум — 34, ромашка — 55 або 89 пелюсток [1, 2].

Числа Фібоначчі зустрічаються і в анатомії. Прийнято вважати, що краса обличчя корелює з анатомічною симетрією. Одна з головних особливостей людського обличчя це рот і зуби. У 1973 році доктор Річард Е. Ломбарді запропонував використання золотого перетину для створення естетичної посмішки. У 1978 році доктор Едді Левін зазначив, що ширина верхньощелепного центрального різця знаходиться в золотій пропорції до ширини бічного різця, та розробив спеціальний супорт та діагностичну

сітку для перевірки пропорцій і розташування зубів. Але його практичне використання потребує додаткових досліджень щодо вдосконалення інструментів для оцінки естетики зубів [3].

Із інженерної точки зору, числа Фібоначчі застосовуються в алгоритмах сортування, при побудові дерев даних, в області обробки сигналів і зображень, для розробки високоефективних методів стиснення та кодування, а також у криптографії. Ця числова послідовність використовується для оптимізації архітектури мережевих структур і при аналізі складності алгоритмів, що демонструє прикладну цінність абстрактних математичних ідей у розробці сучасних інформаційних технологій [4].

У архітектурі і дизайні золотий перетин використовують для досягнення візуального балансу та симетрії. У класичних спорудах, таких як Парфенон, пропорції фасадів відповідають числам із послідовності. Цей принцип активно використовували архітектори епохи Відродження, а сьогодні — дизайнери інтер'єрів при проектуванні фасадів, віконних прорізів, елементів внутрішнього простору, і навіть фахівці з UI/UX, які розробляють інтерфейси, зручні для користувачів [5].

Отже, числа Фібоначчі та золотий перетин — це одні із найзагадковіших і водночас найпрекрасніших математичних понять. Сьогодні наука знаходить все нові й нові способи їхнього практичного застосування. Послідовність Фібоначчі є прикладом того, як математична ідея, сформульована ще в Середньовіччі, зберігає актуальність і вплив у сучасному світі. Її міждисциплінарне застосування свідчить про універсальність математичних структур та важливість історичного осмислення таких концепцій.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Golden ratio. // Encyclopaedia Britannica. URL: <https://www.britannica.com/science/golden-ratio> (дата звернення: 13.04.2025).
- [2] Jharwal A. K., Aaseri A., Nahlia M. K. Exploring the Beauty of Fibonacci Sequence: Patterns and Applications in Nature and Mathematics // Tuijin Jishu / Journal of Propulsion Technology. – 2023. – Vol. 44, No. 3. – P. 477–484.
- [3] Persaud-Sharma D., O'Leary J.P. Fibonacci Series, Golden Proportions, and the Human Biology // Austin Journal of Surgery. – 2015. – Vol. 2, No. 5.
- [4] Liu Zh. Analysis of the Application of Fibonacci Sequence in Different Fields // Proceedings of the 2023 International Conference on Mathematical Physics and Computational Simulation. – 2023. – P. 167–171.
- [5] Grigas A. The Fibonacci Sequence: Its History, Significance, and Manifestations in Nature : Senior Honors Thesis / Liberty University. – Spring 2013. – 35 p.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: a.boborykin.zm42.fbmi28@111.kpi.ua

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: tania.krivorot@gmail.com

ДИТЯЧІ РОКИ АДИ ЛАВЛЕЙС

Ю.Ю. БОНДАРЕНКО, Т.В. МАЛОВІЧКО

Ада Лавлейс (Августа Ада Кінг, графиня Лавлейс; уроджена Байрон; 10 грудня 1815 – 27 листопада 1852) — англійська математик і науковиця в галузі обчислювальної техніки. На прохання Беббіджа, Ада зробила переклад з французької книги Манабреа, у якій він зробив докладний огляд аналітичної машини Беббіджа, доповнивши її своїми записами, через що її об'єм збільшився втричі. Алгоритм, поданий Адою у своїх коментарях, вважається першою комп'ютерною програмою в історії.

Вона була єдиною законною дитиною видатного англійського поета лорда Джорджа Гордона Байрона та його дружини Анни Ізабелли Мілбенк. Її мати через пристрасть до точних наук отримала від Байрона іронічне прізвисько «Королева паралелограмів». Проте батько і донька не підтримували стосунків. Шлюб був жахливим, і Анна Ізабелла пішла від чоловіка, коли Аді був лише місяць.

Між Адою та її матір'ю ніколи не було справжньої близькості, завжди існувала певна відраза й недовіра, хоча вони й пишалися одна одною. Коли Ада була ще зовсім маленькою, вона спитала: «Мамо, чому в інших дівчаток є тата, а в мене немає?» Леді Байрон так суворо й загрозливо заборонила дочці коли-небудь знову говорити на цю тему, що дитина замкнулася в собі й відтоді почала відчувати страх перед матір'ю, що залишався з нею до самої смерті [1].

Ада почала вивчати свої листи від матері, коли їй було майже три роки. У 1821 році міс Ламонт була призначена тимчасовою гувернанткою. Вона задокументувала складний графік: ранкові уроки арифметики, граматики, орфографії, читання, музики, кожний не довше чверті години, а після обіду уроки географії, малювання, французької мови, музики, читання. Все це виконувалося «зі спритністю та слухняністю» [2].

У 1821 р. у міс Ламонт писала: «Почала давати вказівки міс Байрон... Перше випробування було з арифметики. Вона з точністю додає суми п'яти чи шести рядків цифр; вона обдумана і коректна в процесі, зацікавлена у виконанні.» [2].

Інколи Ада виявляла ознаки занепокоєння. Це навряд чи дивно, оскільки її змушували проводити частину часу, напівлежачи на дошці під час уроків у формі запитань та відповідей. Поза уроками були періоди, коли мати вимагала від неї лежати зовсім нерухомо [3].

У вісім років у Ади почалися сильні головні болі, які впливали на зір, або, принаймні, заважали читанню протягом кількох місяців. Головні болі лікували кровопусканням.

Її бабуса померла, коли Аді було шість років, а тато через два роки. Наступного року помер і дідусь. Смерть чоловіка й хворих батьків дала леді Байрон змогу здійснити грандіозну подорож Європою разом з Адою. Вони пробули за кордоном два роки. А через кілька місяців після повернення, Ада захворіла на кір, що викликало серйозні ускладнення. Їй тоді було тринадцять. З моменту повернення додому вона зацікавилася астрономією, але повністю втратила здатність стояти й ходити через наслідки кору. Те, що такий стан затягнувся на кілька років, дозволяє припустити, що її одужання затягнулося через суворий і тривалий постільний режим, що сам по собі може послаблювати м'язи. До того додавалися й інші виснажливі «лікування», якими захоплювалась леді Байрон. З листів Ади видно, що їй дозволяли сидіти лише пів години на день, а до кінця літа цей час збільшили до години. Вона зізнавалася в «пригніченому настрої», але навчання принаймні відновилося — іноді навіть у лежачому положенні. Восени 1831 року вона вже пересувалася на милицях. Нарешті у вересні 1832 року колишня покоївка її матері, місіс Клермонт, написала листа з привітаннями з приводу того, що Ада ходить без «підтримки» — хоча її мати зазначала, що Ада це робила вже за пів року до того, коли тримала щось важке в руках, що свідчить про проблему з рівновагою. Ще певний час після цього вона часто почувалася слабкою і запамороченою.

Аду визнали достатньо здоровою, щоб вийти у світ, під час першого лондонського сезону після її сімнадцятиріччя. Ада відзначила цю подію складанням документа, в якому вона намагалася пояснити матері власне бачення свобод, які батьки повинні дозволяти своїм дорослим дітям.

Цікаво, що попри систему виховання, яку запровадила її мати, Ада зберегла любов до навчання протягом усього життя.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Айзексон В. *Іноватори. Як група хакерів, геніїв та г'ків здійснила цифрову революцію*. — Київ: Наш формат, 2017. — 488 с.
- [2] Hollings, C., Martin, U., Rice, A. *The early mathematical education of Ada Lovelace* // BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics. — 2017. — Т. 32, № 3. — С. 221–234.
- [3] Stein D. *Ada: a life and a legacy*. — Cambridge, MA: MIT Press, 1985. — 355 с.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: yulia.b-fmf27@111.kpi.ua

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: tatianamt@protonmail.com

ЗАДАЧА ПОШУКУ «ПІФАГОРОВИХ ТРІЙОК»

К. БУДОВСЬКИЙ

Теорема 1 (Піфагора). *Сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи.*

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (1)$$

Означення 1. Піфагорові трійки — це цілі числа, які задовільняють рівняння (1).

Якщо розглядати координатну площину, то задача пошуку піфагорових трійок зводиться до пошуку точок з цілими координатами, назвемо їх вузлами, відстань від яких до початку координат є цілим числом.

Якщо розглядати комплексну площину, то на ній кожному вузлу буде відповідати деяке комплексне число $z = x + iy$.

Для кожного комплексного числа можна знайти таке комплексне число, відстань від якого до початку координат, тобто його модуль, буде цілим числом. Для цього зведемо число у квадрат. Така операція передбачає множення комплексного числа саме на себе:

$$(x + iy)(x + iy) = x^2 + ixy + ixy - y^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy.$$

Зауваження 1. У геометричній інтерпретації $x^2 - y^2$ та $2xy$ відповідають катетам прямокутного трикутника.

Обчисливши модуль даного числа, отримаємо

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2} = x^2 + y^2.$$

Зауваження 2. У геометричній інтерпретації $x^2 + y^2$ відповідає гіпотенузі прямокутного трикутника.

З геометричної точки зору, зведення комплексного числа в квадрат — це подвоєння аргументу цього числа та зведення в квадрат його модуля. Оскільки першочергово модуль комплексного числа — це квадратний корінь з цілого числа, то результат зведення в квадрат точно буде цілим числом.

Перетворимо координатну площину таким чином, щоб кожне комплексне число z опинилось в точці z^2 . Таке перетворення можна записати як

$$(x; y) \mapsto (x^2 - y^2; 2xy).$$

У результаті таких маніпуляцій координатна сітка перетвориться у набір парабол, а в точках перетину цих парабол будуть знаходитись вузли, які відповідають піфагоровим трійкам.

У даного методу є недоліки: після побудови виявилось, що, наприклад, трійка $(6, 8, 10)$ не була отримана. Але натомість була отримана трійка $(3, 4, 5)$. Перша трійка кратна другій. Згадавши, що 6 та 3 — це x координата, а 8 та 4 — y , можна зробити висновок, що такі точки будуть лежати на одній прямій. Тому, щоб отримати такі кратні трійки, потрібно провести промінь з початку координат через кожен вузол, і там, де він буде проходити через цілочисельні координати, — будуть знаходитись кратні трійки.

Даним методом можна отримати тривіальні розв'язки, які чисто формально задовольняють поставлені умови, але піфагоровими трійками не являються, бо у такому випадку одна зі сторін трикутники мала б дорівнювати 0.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Mohanty S., Mahanty P. *Pythagorean Number* // The Fibonacci Quarterly — 1990. — Vol. 28, № 21. — P. 31–43.
- [2] Mohanty S., Mahanty P. *Pythagorean Number Doctrine in the Academy* // Studia Praesocratica — 2013. — Vol. 5. — P. 323–334.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: k.budovskyi.al42@kpi.ua

ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМНОГО ПАКЕТУ GNU OCTAVE ПРИ ВИВЧЕННІ РОЗДІЛУ «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ»

Д.А. ВОЙЦІХ, Ю.П. БУЦЕНКО

У роботі [1] було проаналізовано основні питання, що виникають у зв'язку з проблемою поєднання вивчення курсу вищої математики у технічному університеті з отриманням навичок використання спеціалізованих програмних пакетів. При цьому має бути забезпечене свідоме засвоєння студентами математичних понять та результатів, що є справжньою ціллю такого курсу, уникаючи підміни його використанням онлайн-калькуляторів, засобів штучного інтелекту тощо. Одним із шляхів реалізації такого підходу є використання GNU Octave — безкоштовної інтерактивної програми для чисельних обчислень, яка надає потужні інструменти, наприклад, для задач математичного аналізу, операцій над матрицями, розв'язання складних рівнянь і візуалізації даних. Його синтаксис подібний до MatLab, що робить його зручною альтернативою для тих, хто не може використовувати платне програмне забезпечення.

Якщо ж порівнювати ці два пакета для обчислень, можна виокремити деякі переваги та недоліки кожного з них. З переваг Octave: це безкоштовна програма, що є альтернативою платному Matlab, має відкритий код, існує велика кількість пакетів для розширення функцій. З недоліків: менш зручний інтерфейс порівняно з Matlab, деякі функції Matlab не підтримуються у Octave, повільніший у складних обчисленнях.

Розглянемо функції, за допомогою яких GNU Octave може розв'язувати приклади з теми «Диференціальне числення функцій багатьох змінних», на тому рівні, як вона розглядається, наприклад, у [2]: Для обчислення частинних похідних є функція `diff(f, x)` — вона дозволяє брати похідну по конкретній змінній; обчислення градієнта — `gradient(f, [x, y])`; коли шукаємо екстремуми — використовуємо функцію `fminsearch` (метод без використання похідних), `fminunc` (використовує похідні, більш точніший) для мінімуму, а щоб знайти максимум — обертають знак функції, тобто використовують `fminsearch(@(x) -f(x))`; для випадків, коли треба побудувати якусь поверхню або скласти уявлення про поведінку функції з геометричної точки зору, можемо використати функції `meshgrid`, `surf` або `ezsurf`.

Перейдімо до розв’язання одного з прикладів у GNU Octave, які пропонуються студентам при вивченні цієї теми:

$$u = \ln(x + 2zy); du|_{M_0(1;2;1)} = ?$$

```
Symbolic pkg v3.2.1: Python communication link active, SymPy v1.10.1.
Повний диференціал u:
      dx      dy      dz*y
-----+-----+-----
      y      /      y \      2 /      y \
x + ---  2*z*|x + ---|  2*z *|x + ---|
      2*z      \      2*z/      \      2*z/
Повний диференціал у точці M0(1,2,1):
      dx      dy      dz
-----+-----+-----
      2      4      2
```

Отже, підсумуємо. Використання GNU Octave для розв’язання прикладів і задач з диференціального числення функцій багатьох змінних є доволі доцільним. Ця система дозволяє автоматизувати обчислення, наочно візуалізувати результати та перевіряти розв’язки. У той же час, слід наголосити, що Octave — це не просто онлайн-калькулятор: щоб отримати правильний результат, потрібно мати базові знання з теми, орієнтуватись у математичних поняттях і вміти правильно писати відповідний код. Просто «списати» через нього не вийде — потрібно чітко знати, що саме ти хочеш порахувати, і як це реалізується у вигляді команди. Насправді, базові знання Octave під час вивчення курсу вищої математики приносять подвійну користь: ми не лише розуміємо, як працює сама програма, а й глибше занурюємося в тему, краще засвоюємо матеріал і розвиваємо практичні навички обчислень.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Буценко Ю.П., Богданов О.В. *Програмні засоби супроводження курсу вищої математики у технічному університеті* // MicrosystElectronAcoust — Київ, 2024. — Т. 29, № 2.
- [2] <https://www.octave.org>
- [3] Алексеева І.В., Гайдей В.О., Диховичний О.О., Федорова Л.Б. *Математика в технічному університеті* — Київ: Видавничий дім «Кондор», 2019. — Т. 2. — 504 с.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
 Email address: d.voitsikh-me28@l111.kpi.ua

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
 Email address: armchairdoc@ukr.net

МЕТОДОЛОГІЧНІ АСПЕКТИ ФОРМУВАННЯ НАВИЧОК РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЮЖЕТНИХ ЗАДАЧ АНАЛІТИЧНИМ ТА СИНТЕТИЧНИМ МЕТОДАМИ В УЧНІВ

Л.В. ГАСЮК

Розв'язування сюжетних задач — це творчий процес, що спонукає до активного мислення та пошуку оптимального способу досягнення бажаного результату. Існує кілька основних методів практичного розв'язання задач, серед яких найпоширенішими є **аналітичний** та **синтетичний**. Вибір методу залежить передусім від типу задачі (проста чи складена), її умови та характеру. Часто, для досягнення успіху, доцільно використовувати обидва методи одночасно.

Аналітичний метод передбачає початок розв'язання із завдання задачі. Спочатку з'ясовують, як можна отримати відповідь, та визначають необхідні кроки (дії) для обчислення шуканої величини. Далі задачу поділяють на окремі частини, поступово розкладаючи її на простіші кроки, допоки шукане значення не буде виражене через відомі дані.

Синтетичний метод полягає в поступовому розв'язанні задачі, починаючи з даних величин, з обчислення проміжних значень. Спершу розв'язують першу просту задачу, використовуючи числові дані, наведені в умові. Отримані результати застосовують у наступному кроці для розв'язання наступної підзадачі, і так триває доти, доки не буде знайдено відповідь на основне запитання.

Залежно від складності задачі та особливостей її розв'язання, обидва методи можуть доповнювати один одного, забезпечуючи ефективне та структуроване розв'язання. Тоді говорять про аналітико-синтетичний метод [2].

Для навчання учнів аналітичному методу доречно скласти таблицю (1а), що допомагає структурувати дані та визначити оптимальну стратегію кроків. Розглянемо приклад такої задачі для 5 класу.

Задача №413 [1]: перша художниця розмалює 156 ялинкових прикрас за 3 дні, а друга стільки само — за 4 дні. За скільки днів спільної роботи вони розмалюють 364 такі прикраси?

Розв'яжемо цю ж задачу, застосувавши синтетичний метод (будемо рухатись у своїх міркуваннях від умови до шуканого). Скористаємось також табличним записом (1б).

Порівнявши кроки міркувань в таблицях, учні помічають, що при використанні синтетичного методу дії при розв'язуванні простих задач виконуються паралельно, тоді як в аналітичному методі вони здійснюються, починаючи з кінцевого результату.

Порядок	Щоб визначити	Що треба знати:	Порядок дій	Якою дією:
1 ↓	За скільки днів спільної роботи художниці розмалюють 364 прикраси?	Скільки ялинкових прикрас художниці розмалюють разом за 1 день спільної роботи?	4	$364:91=4$ дні.
2 ↓	Скільки ялинкових прикрас розмалюють перша і друга художниці разом за 1 день спільної роботи?	Скільки ялинкових прикрас розмалює перша художниця і друга художниця за 1 день разом	3 ↑	$39+52=91$ (прикраса за 1 день)
3 ↓	Скільки ялинкових прикрас розмалює друга художниця за 1 день?	Скільки прикрас розмалює друга художниця за 4 дні	2 ↑	$156:4=39$ (прикрас за 1 день)
4	Скільки ялинкових прикрас розмалює перша художниця за 1 день?	Скільки прикрас розмалює перша художниця за 3 дні	1 ↑	$156:3=52$ (прикраси за день)

(А) Таблиця 1

Порядок	Що ми маємо?	Що можна знайти?	Порядок дій	Якою дією:
1 ↓	Що перша художниця розмалює 156 ялинкових прикрас за 3 дні	Скільки ялинкових прикрас розмалює перша художниця за 1 день	1 ↓	$156:3=52$ (прикраси за 1 день)
2 ↓	Що друга художниця розмалює 156 ялинкових прикрас – за 4 дні	Скільки ялинкових прикрас розмалює друга художниця за 1 день	2 ↓	$156:4=39$ (прикрас за 1 день)
3 ↓	Скільки ялинкових прикрас розмалює перша художниця за 1 день та скільки розмалює друга художниця	Скільки прикрас розмалюють перша та друга художниці разом за 1 день	3 ↓	$39+52=91$ (прикраса за 1 день разом)
4	Скільки прикрас розмалюють перша та друга художниці разом за 1 день	За скільки днів спільної роботи художниці розмалюють 364 прикраси	4	$364:91=4$ дні.

(Б) Таблиця 2

Рис. 1. Приклади оформлення таблиць

Отже, завдяки наочному зображенню схем (таблиць) розв'язування однієї задачі двома методами, учні вчаться проаналізувати та порівняти ці методи.

Розв'язування задач різними методами сприяє розвитку гнучкості мислення та вибору найбільш раціонального способу розв'язання задачі з них.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Істер О.С. *Математика: підручник для 5 класу закладів загальної середньої освіти*. — Київ: Генеза, 2022 рік. — С. 59.
- [2] Лук'янова С.М. *Розв'язування текстових задач арифметичними способами в основній школі: дисертація*. — Київ: Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, 2005. — С. 96–97.

УДУ ім. Михайла Драгоманова, Київ, Україна
Email address: 23fmif.l.hasiuk@std.udu.edu.ua

ІСТОРІЯ ВІДКРИТТЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

І.І. ГОЛІЧЕНКО

Італійському математику Сципіону дель Ферро (1465–1526) у 15 столітті вдалося вивести формулу для коренів неповного кубічного рівняння, [1], [2]:

$$x^3 = cx + d, c > 0, d > 0. \quad (1)$$

Корінь x рівняння (1) обчислюється за формулою

$$x = \sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{c^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{c^3}{27}}}. \quad (2)$$

Перед смертю дель Ферро поділився цим результатом із своїм учнем Антоніо Маріо Фіорі. У 1535 році Фіорі викликав на математичний дуель більш досвідченого італійського математика Ніколо Тарталья (1499–1557). На дуелі Тарталья отримав рішучу перемогу, розв'язавши всі запропоновані йому задачі та самостійно вивівши формулу для розв'язку неповного кубічного рівняння (1). Точніше, вивів не формулу, а алгоритм, покрокову інструкцію для розв'язання рівняння (1). Адже, запис у вигляді формул винайдуть лише через 100 років.

У 1539 році міланський професор Джироламо Кардано (1501–1576), після довгих перемовин, переконав Тарталья поділитись із ним формулою, присягнувши зберігати її у секреті. Однак, одного разу Кардано натрапив на роботу дель Ферро, першовідкривача розв'язку рівняння (1). Зробивши висновок, що у секретності немає потреби, Кардано включив цю формулу у свою книгу, оновлений збірник з математики, «Велике мистецтво» (1545). Оскільки результат дель Ферро був вперше опублікований у книзі Кардано, то він відомий як формула Кардано.

Однак, у випадку коли

$$\frac{d^2}{4} - \frac{c^3}{27} < 0$$

формула (2) не працює, оскільки містить корені з від'ємних чисел. Наприклад, розв'язок рівняння, [3],

$$x^3 = 15x + 4, \quad (3)$$

за формулою (2) має вигляд

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

З іншого боку, перевірка встановлює, що $x = 4$ є розв'язком рівняння (3). Кардано не знав що робити із цією проблемою.

Рафаель Бомбеллі (1526–1572), італійський математик та учень Кардано, у 1572 році опублікував свою головну працю «Алгебра». У ній автор розробив формальну алгебру комплексних чисел, з особливою метою приведення виразу

$$\sqrt[3]{a + b\sqrt{-1}}$$

до вигляду

$$c + d\sqrt{-1}.$$

Він висунув ідею: квадратний корінь із від'ємного числа залишити квадратним коренем із від'ємного числа і вважати подібні числа новим типом чисел. Повертаючись до розв'язку рівняння (3), Бомбеллі знайшов, що

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1} \quad \text{та} \quad \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1}.$$

Тоді формула Кардано також дає правильний розв'язок рівняння (3):

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

Слід зауважити, що $\sqrt{-1}$ відсутній як в умові задачі, так і у її розв'язку. Однак, розв'язати задачу можливо лише припустивши існування $\sqrt{-1}$ та включивши його у розв'язання.

Комплексні числа називали «уявними», «неможливими» числами. Через роки 100 після Бомбеллі, Леонард Ейлер (1707–1783) запропонував використовувати латинську літеру i для позначення $\sqrt{-1}$, тобто

$$i = \sqrt{-1}.$$

Уявні числа у комбінації із дійсними утворюють відоме нам зараз комплексне число. Прикладом комплексного числа є число

$$2 + i \cdot 3.$$

Так кубічні рівняння зумовили появу нових чисел, завдяки яким ми отримали більш ефективну та повнішу математику, яка може вирішувати цілком реальні задачі.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Shastri Anant R. *Basic Complex Analysis of One Variable*. — Publisher: New Central Book Agency Pvt Ltd, 2010.
<https://www.math.iitb.ac.in/ars/revbook.pdf>
- [2] YangYi Zhao *Discovery of Complex numbers // Highlights in Science, Engineering and Technology*. — 2023. — vol. 38, — P. 138–143.
<https://drpress.org/ojs/index.php/HSET/article/view/5785/5596>
- [3] Stillwell J. *Mathematics and Its History*, 2nd ed. — Publisher: Springer, 2001.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: idubovetska@gmail.com

РОЛЬ МАТЕМАТИЧНИХ ГУРТКІВ ТА ОЛІМПІАД У РОЗВИТКУ МАТЕМАТИЧНИХ ТАЛАНТІВ: ІСТОРИЧНИЙ ОГЛЯД ТА СУЧАСНІ ТЕНДЕНЦІЇ

С.П. ГОРБАЧ

Актуальність підтримки математично обдарованої молоді в умовах науково-технічного прогресу є беззаперечною. Математичні гуртки та олімпіади історично відігравали ключову роль у розвитку їхніх талантів, забезпечуючи поглиблене навчання та інтелектуальну конкуренцію. Метою даного дослідження є аналіз ролі математичних гуртків та олімпіад у розвитку математичної обдарованості крізь історичну призму та сучасні тенденції. Об'єктом виступають зазначені форми позааудиторної діяльності, предметом — їхній вплив на формування математичних здібностей. Робота охоплюватиме історичний огляд еволюції гуртків та олімпіад, їхній вплив на наукову спільноту та сучасні підходи до їхньої організації для підтримки обдарованої молоді. Становлення математичних талантів тісно корелює з розвитком позашкільних освітніх ініціатив. Виникнення математичних гуртків у ХІХ столітті стало відповіддю на потребу в поглибленому вивченні математичних дисциплін та розвитку аналітичного мислення. Такі неформальні об'єднання, зокрема під керівництвом П. Л. Чебишова, сприяли формуванню стійкого інтересу до наукової діяльності серед молоді. Паралельно відбувалася еволюція олімпіадного руху. Перша систематизована математична олімпіада в Угорщині наприкінці ХІХ століття відіграла значну роль у виявленні обдарованих учнів. Подальший розвиток призвів до заснування Міжнародної математичної олімпіади (ІМО) у 1959 році, яка на початковому етапі об'єднала представників 7 країн, а наразі є авторитетним міжнародним змаганням, що засвідчує зростання глобальної зацікавленості у математичній освіті. Аналіз біографій багатьох видатних науковців, включаючи лауреатів престижних премій, свідчить про їхню активну участь у зазначених формах позашкільної діяльності на ранніх етапах становлення. Зокрема, досвід участі в ІМО Л. Лаффорга підкреслює важливість олімпіад як платформи для розвитку нестандартного мислення та глибокого розуміння математичних концепцій, що є критично важливим для майбутніх наукових досягнень. Таким чином, математичні гуртки та олімпіади слід розглядати не лише

як форму дозвілля для обдарованих, але й як важливий інститут підготовки майбутніх наукових лідерів, здатних здійснювати інноваційні розробки. Сучасний етап характеризується диверсифікацією форм математичних гуртків та олімпіад, включаючи очні заняття при освітніх закладах та зростання популярності онлайн-платформ (наприклад, Coursera, Khan Academy) і дистанційних форматів, що підтверджується зростанням кількості зареєстрованих користувачів та учасників дистанційних олімпіад. Відзначається спеціалізація олімпіад за рівнем складності та предметними галузями (алгебра, геометрія тощо). Методичне забезпечення гуртків еволюціонує в напрямку інтерактивних занять, проєктної діяльності та активного використання інформаційних технологій (спеціалізоване програмне забезпечення, віртуальні середовища). Онлайн-ресурси значно розширюють можливості для самоосвіти та підготовки до змагань, а елементи гейміфікації підвищують мотивацію учнів. Зміцнюється співпраця між університетами (наприклад, Київський національний університет імені Тараса Шевченка) та науковими установами, які ініціюють гуртки та надають переваги переможцям олімпіад при вступі, що сприяє залученню талановитої молоді до наукової діяльності. Поряд із позитивними тенденціями, існують певні виклики, такі як забезпечення рівного доступу до якісних позашкільних математичних програм та залучення достатньої кількості кваліфікованих педагогів, особливо у віддалених регіонах. Дослідження підтверджує ключову роль математичних гуртків та олімпіад у виявленні та розвитку математичних талантів на всіх історичних етапах, сприяючи формуванню наукової еліти. Сучасні тенденції демонструють диверсифікацію форм, впровадження інноваційних методик, зростання впливу онлайн-ресурсів та посилення співпраці з університетами. Подальший розвиток цих інститутів, з використанням новітніх технологій та розширенням співпраці, є визначальним для майбутнього математичної освіти та формування наукового потенціалу суспільства. Подальші дослідження можуть бути спрямовані на вивчення ефективності різних моделей організації математичних гуртків та олімпіад, а також їхнього довгострокового впливу на наукову кар'єру випускників.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Васильєв М. О., Петров С. І. *Історія математичної освіти в Україні*. — Київ, 2005. — 320 с.
- [2] Міжнародна математична олімпіада [Електронний ресурс]. — Режим доступу: <https://www.imo-official.org/> (дата звернення: 27.04.2025).
- [3] Іваненко О. П. *Онлайн-платформи як інструмент підготовки до математичних олімпіад* // Інформаційні технології в освіті: Матеріали V Міжнародної науково-практичної конференції. — Київ, 2020. — С. 112–115.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
 Email address: gorbacsofia173@gmail.com

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ВИКОРИСТАННЯ ОНЛАЙН-КАЛЬКУЛЯТОРІВ ТА ПРОГРАМНОГО ПАКЕТУ GNU OCTAVE ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ДР

Д.О. ГРИНЬ, Ю.П. БУЦЕНКО

У роботі [1] розглянуто загальну проблематику, пов'язану з використанням спеціалізованих програмних засобів при вивченні студентами математичних курсів у технічному університеті. Головна колізія, що виникає у цьому випадку, полягає у необхідності, з одного боку, максимально обмежити використання студентами онлайн-калькуляторів та аналогічних їм програм із засобами штучного інтелекту включно як таких, що принципово несумісні з цілями вивчення математичних дисциплін, з іншого ж боку, студенти мають засвоїти методи використання спеціалізованих математичних пакетів хоча б на прикладі стандартних задач, які пропонуються їм при вивченні цих дисциплін.

Безкоштовна програма GNU Octave є прямою альтернативою MATLAB, але при цьому, як зазначено в джерелі [3], значною мірою сумісна з нею. Розглянемо її застосування на прикладі вивчення розділу «Диференціальні рівняння» (ДР, наприклад, за інформацією посібника [2]).

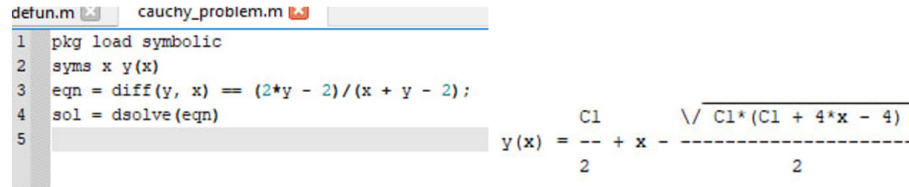
Нещодавно в курсі математичного аналізу ми закінчили тему диференціальних рівнянь, де я переконався, що GNU Octave непогано розв'язує багато різних типів ДР. Навіть може розв'язувати задачі Коші для звичайних ДР завдяки додатковій функції `ode`.

Під час вивчення ДР із загальними розв'язками в цьому програмному забезпеченні я зіткнувся з проблемами при символьному розв'язанні рівнянь. Заглибившись в можливості GNU Octave, я дізнався про межі цієї програми, але їх, хоч і частково, можна розширювати за допомогою команд, які встановлюють додаткові символьні пакети: `pkg load symbolic`. На жаль, розширення можливостей цього безкоштовного програмного забезпечення має свої обмеження, тому є теми, які не під силу йому: диференціальні рівняння в повних диференціалах, лінійно залежні й незалежні системи функцій, лінійне неоднорідне ДР зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду, системи лінійних диференціальних рівнянь, лінійно залежні й незалежні системи функцій.

GNU Octave — це не звичайний калькулятор, це набагато більше. Порівнявши онлайн-калькулятор ДР та це програмне забезпечення, я зробив висновок, що під час користування звичайнісінького калькулятора

студент ні про що не думає, починається просте списування розв'язку, на відміну від GNU Octave, де для розв'язання навіть найпростішого ДР потрібно знати спеціальні функції та сам процес розв'язку:

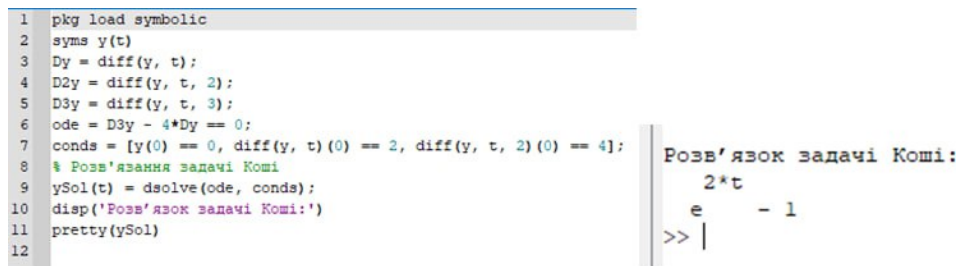
$$(1) \frac{dy}{dx} = \frac{2y-2}{x+y-2}$$



```
defun.m cauchy_problem.m
1 pkg load symbolic
2 syms x y(x)
3 eqn = diff(y, x) == (2*y - 2)/(x + y - 2);
4 sol = dsolve(eqn)
5
```

$$y(x) = \frac{C1}{2} + x - \frac{\sqrt{C1*(C1 + 4*x - 4)}}{2}$$

$$(2) y''' - 4y' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 4$$



```
1 pkg load symbolic
2 syms y(t)
3 Dy = diff(y, t);
4 D2y = diff(Dy, t);
5 D3y = diff(D2y, t);
6 ode = D3y - 4*Dy == 0;
7 conds = [y(0) == 0, diff(y, t)(0) == 2, diff(y, t, 2)(0) == 4];
8 % Розв'язання задачі Коші
9 ySol(t) = dsolve(ode, conds);
10 disp('Розв'язок задачі Коші:');
11 pretty(ySol)
12
```

Розв'язок задачі Коші:

$$y(t) = \frac{e^{2t}}{2} - 1$$

Обов'язково потрібно відмітити, що рівняння Бернуллі жоден з онлайн-калькуляторів нормально вирішити не зміг, довелося скористатися штучним інтелектом (ШІ) для порівняння відповідей, але було помічено, що ШІ виконував приклад не загальним способом, який ми проходили в курсі математичного аналізу, а найбільш раціональним. З цього випливає така ідея, що студенти, можуть додатково використовувати та аналізувати способи вирішення рівнянь, які пропонує ШІ.

Загалом, порівнявши широко розповсюджений математичний пакет — GNU Octave та будь-який звичайний онлайн-калькулятор, приходимо до висновку, що саме для якісного засвоєння тем курсу вищої математики онлайн-калькулятори є зовсім неефективними, навіть шкідливими, на відміну від GNU Octave, за допомогою якого можна не тільки дізнатися остаточну відповідь, а й зрозуміти весь процес.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] О.І. Баліна, І.С. Безклубенко, Ю.П. Буценко *Чисельні методи*, КНУБА Київ, 2019.
- [2] І.В. Алексєєва, В.О. Гайдей, О.О. Диховичний, Л.Б. Федорова *Математика в технічному університеті*, Т.3, КПІ ім. Ігоря Сікорського – Київ, 2021.
- [3] <https://octave.org/about>

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: d.hryn-me28@111.kpi.ua

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: armchairdoc@ukr.net

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМНОГО ПАКЕТУ GNU OCTAVE ТА ОНЛАЙН-ЗАСОБІВ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ ІЗ РОЗДІЛУ «ВИЗНАЧЕНІ ІНТЕГРАЛИ»

М.В. ГРИНЮК, Ю.П. БУЦЕНКО

У роботі [1] було розглянуто проблематику використання спеціалізованих програмних ресурсів при вивченні студентами курсу вищої математики. Варто зазначити, що викладачі математики в університетах стикаються з проблемою: студенти, замість самостійного розв'язування задач, використовують онлайн-калькулятори. Згодом виявляється, що дехто з них вже не може обійтися без таких засобів — вивчення математичної теорії зводиться нанівець.

Чи існує спосіб вирішення цієї проблеми? Проконтролювати чи не «малюють» студенти неможливо. Однак, існує цікавий варіант — застосування програмних пакетів, на кшталт GNU Octave [2].

GNU Octave — це математичний пакет, що є безкоштовним аналогом MATLAB. Цей та схожі пакети дозволяють поєднати вивчення інформатики та математики. Причини, чому це може бути корисним, насамперед для студентів:

- (1) користування пакетом потребує певних навичок; студентам, які вивчали його, легше перейти до програмування на мові C
- (2) пакет передбачає виконання досить складних обчислень, які знадобляться, наприклад, при вивченні загально інженерних дисциплін.

Порівняємо можливості онлайн-засобів та GNU Octave для знаходження визначених інтегралів. Зазначимо, що інтеграли можна поділити на ті, які «беруться» й «не беруться» (не мають первісної у елементарних функціях). Зазвичай, вивчення студентами-технарями відбувається на прикладах завдань [3], побудованих на інтегралах, які «беруться».

Розв'язування «вручну» зводиться до простого алгоритму: знайти первісну, за формулою Ньютона-Лейбніца обчислити значення. Отже, все, що відрізняє стандартні завдання — спосіб знаходження первісної.

Найперше, звернемо увагу на метод символьного інтегрування (команда `int`), у якому формули/способи інтегрування підбираються автоматично. Якщо не зазначати меж, то «Октейв» поверне вираз-первісну.

У той же час, GNU Octave дозволяє обчислювати визначені інтеграли наближено, не обмежуючись тими, які «беруться». Для цього доступний ряд квадратурних формул (див., напр., [4]) за командами: `quad`, `quadv`, `quadl`, `quadgk` та `quadsc`; метод трапецій (команда `trapz` — повідомляє загальну інтегральну суму, `cumtrapz` — повертає масив із проміжними значеннями).

Застосувавши ці методи та онлайн-калькулятор [5], розв’яжемо декілька стандартних завдань. Бачимо: обидва ресурси впоралися зі знаходженням простого інтегралу. Калькулятор ще й «розписує» розв’язання, але програмний пакет цього НЕ робить. Справа у тому, що чисельні методи в Octave не «прив’язані» до первісної, натомість, полягають в обчисленні значень у певних точках.

Постає питання точності. Очевидно, що вона залежить від кількості врахованих точок: чим їх більше, тим точніший результат. Яскравим прикладом такої залежності є метод трапецій (`trapz`), де ця кількість задається користувачем.

Як підсумок, розглянутий програмний пакет має широкі можливості, зокрема, в оцінці розбіжних (див. [6]) інтегралів; дозволяє обирати точність та методи обчислення, проте, не надає «розписаної» відповіді — використати його вдасться лише для звірки результату. Таким чином, GNU Octave чи якийсь інший схожий засіб може стати в нагоді при вивченні математики, не зашкодивши засвоєнню теорії, на відміну від онлайн-калькуляторів.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Богданов О.В., Буценко Ю.П., Баліна О.І., Безклубенко І.С. *Software Support for the Higher Mathematics Course at the Technical University* // MicrosystElectronAcoust — 2024. — vol. 29, № 2.
- [2] <https://www.octave.org/>
- [3] Алексєєва І.В., Гайдей В.О., Кіндибалюк А.Ю., Коновалова Н.Р., Трофимчук О.П., Федорова Л.Б. *Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної: Збірник завдань до типової розрахункової роботи для студентів I курсу технічних факультетів*. — Київ: Політехніка, 2001. — 65 с.
- [4] Голубєва К.М., Денисов С.В., Кашпур О.Ф., Ключин Д.А., Риженко А.І. *Чисельні методи інтегрування*. — Київ: Видавництво Людмила, 2019. — 55 с.
- [5] <https://mathdf.com/int/uk/>
- [6] Алексєєва І.В., Гайдей В.О., Диховичний О.О., Федорова Л.Б. *Математика в технічному університеті*. — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. — Т. 3, — С. 54–60.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: m.hryniuk-me28@111.kpi.ua

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: armchairdoc@ukr.net

МАТЕМАТИЧНА ГРАМОТНІСТЬ ТА МАТЕМАТИЧНА КУЛЬТУРА ШКОЛЯРІВ

Т.В. ДІДКІВСЬКА

Традиційно грамотність визначається як вміння читати й писати або вміння використовувати мову, щоб читати, писати чи розмовляти. Якщо говорити про математичну грамотність, то тут можна провести повну аналогію. *Математична грамотність* — це вміння рахувати, читати й писати математичні тексти. Перші спроби висвітлити зміст цього поняття був здійснений у 1989 р. у стандартах НСТМ. Було визначено п'ять основних цілей, яких мають досягати математично грамотні учні: 1) цінувати математику; 2) бути впевненими у своїй здатності займатися математикою; 3) вміти розв'язувати математичні задачі; 4) вміти спілкуватися математичною мовою; 5) вміти міркувати математичною мовою.

Якість змісту математичної освіти визначається його відповідністю суспільним ідеалам і соціальним замовленням, рівню розвитку науки, наявним технічним та інформаційним засобам, адекватністю потребам практики, загальнолюдським цінностям. Якість кінцевих результатів математичної освіти визначається математичною культурою, кругозором, сформованістю навичок використовувати математичні знання на практиці та сформованістю професійних якостей суб'єкта освіти [1]. Тобто математична грамотність, як складова математичної культури, є одним з показників якості знань учнів. Оскільки математична теорія ШКМ має ознаки багатопаровості, кожна наступна теми ґрунтується та/або опирається на попередню, то контроль рівня математичної грамотності учня здійснюється, зокрема, безпосередньо під час вивчення нової теми.

У доповіді пропонуються результати аналізу змісту тем шкільного курсу математики та відповідних показників рівня математичної грамотності, помилок та ролі математичної культури у формуванні математичних компетентностей учня.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М.В. *До концепції розвитку математичної освіти* // Сучасна математика і математична освіта. Мат. Місячника ІМ НАН України в НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2004 р. — К.: Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2007. — С. 116–121.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: 21fmf.t.didkivska@std.npu.edu.ua

ВИКОРИСТАННЯ ПРИЙОМІВ ПЕРЕВЕРНУТОГО НАВЧАННЯ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ПОДІБНІСТЬ ФІГУР»

А.В. ЖИТАРЮК

На сьогодні пошук інноваційних технологій, які б сприяли підвищенню ефективності процесу навчання математики в ЗЗСО в умовах нестабільності навчального процесу через зовнішні обставини (пандемія, військовий стан, повітряні тривоги, відключення електроенергії і т.д.), є актуальною проблемою, вирішенню якої присвячені дослідження науковців та вчителів-практиків. Неможливість повноцінно організовувати навчальний процес офлайн стала поштовхом для впровадження в шкільну практику змішаної форми навчання, однією із моделей якого є перевернуте навчання.

Перевернуте навчання — це форма активного навчання, в якій звичайний навчальний процес «перевертається» наступним чином. Учні спочатку отримують завдання переглянути навчальний матеріал у посібниках за розробленим вчителем планом та відеоролики до наступного уроку, тобто перше знайомство із темою у здобувачів освіти відбувається самостійно, а у класі вчитель відповідає на їхні питання, роз'яснюючи незрозумілі моменти з відеороликів. Також час аудиторних занять використовується для розгляду складнішого матеріалу та виконання практичних завдань, які учням не під силу розібрати самостійно. Під час таких занять роль учителя полягає в тому, щоб виступати в ролі тренера або консультанта, заохочуючи учнів до самостійного пошуку та співпраці. Надалі вчитель чергує дистанційну і аудиторну форми роботи, зважаючи на навчальні можливості своїх учнів.

На нашу думку, на практиці головною трудностю для вчителя у використанні «перевернутого навчання» є визначення під час попереднього аналізу теми, які поняття, формули, теореми, опорні задачі можна дати учням на самостійне вивчення, а які потрібно детально пояснювати самостійно.

Аналіз модельної навчальної програми [1] показує, що з подібними фігурами учні знайомляться у два етапи: під час вивчення теми: «Подібність трикутників» у 8 класі та «Подібність фігур» у 9 класі.

Згідно з модельною навчальною програмою [1] ми виділили такі моменти вивчення теми «Подібність трикутників»: перед поняттям подібності

трикутників учні в класі знайомляться з теоремою Фалеса, теоремою про пропорційні відрізки, властивостями медіан та бісектриси трикутника. Пізніше учні самостійно знайомляться з означенням подібних трикутників та коефіцієнтом подібності. І вже на наступних уроках вчитель розповідає учням про ознаки подібності та вчить застосовувати їх для розв'язування задач.

Стосовно теми «Подібність фігур», то здобувачі освіти самостійно можуть ознайомитися з перетворенням подібності та його властивостями. Після того вчитель знайомить учнів з поняттям подібності фігур, коефіцієнтом подібності та теоремою про відношення площ подібних фігур.

Завершити тему «Подібність фігур» у 9 класі ми пропонуємо виконанням проєкту «Подібність фігур у навколишньому світі», в якому учні узагальнюють свої знання про подібні фігури. У 8 класі схожий проєкт про подібні трикутники в практичних задачах, зміст якого полягає в розв'язанні прикладних задач, які пропонує вчитель, та створення власних.

При підготовці до «перевернутих» уроків вчитель може використовувати такі технічні засоби: YouTube-відеоуроки з поясненням; Google Classroom, Moodle — організація навчання; GejGebra, Desmos — побудова фігур; LearningApps, Classtime, Kahoot, Wordwall — створення тестів та інтерактивних вправ; Canva, PowerPoint, WordArt — створення цікавих презентацій, дошок, ментальних мап, хмар слів.

Висновок. Перевернуте навчання відкриває нові перспективи для освітнього процесу, які дають змогу вчителю виступати в ролі наставника, забезпечувати активізацію навчальної діяльності в позаурочний час та здійснювати індивідуальний підхід, а для учня забезпечується доступність якісних електронних освітніх ресурсів, навчання у власному темпі. Тема «Подібність фігур» є особливо вдалою для впровадження перевернутого навчання завдяки наочності та прикладному характеру, що робить навчання більш цікавим та зрозумілим.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Модельна навчальна програма «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С.) .

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: 21fmf.a.zhytariuk@std.npu.edu.ua

ПРО ВІДОМІ МЕТОДИ ОЦІНКИ КІЛЬКОСТІ КОРЕНІВ АЛГЕБРАЇЧНИХ ПОЛІНОМІВ

М.С. КОНДРЕНКО

Упродовж століть математики розробили численні методи для визначення кількості дійсних та комплексних коренів алгебраїчних рівнянь. У цій роботі розглядаються основні класичні методи та приклади їхнього застосування.

- (1) **Неповне правило Ньютона.** Оцінює кількість дійсних коренів на основі похідних. Дає верхню межу кількості дійсних коренів, проте не гарантує точності [1].
- (2) **Метод Штурма.** Дає точну кількість дійсних коренів на заданому інтервалі. Ґрунтується на побудові послідовності Штурма. Ефективний, хоч і обчислювально складний [2].
- (3) **Правило знаків Декарта.** Дозволяє оцінити максимальну кількість додатних (або від'ємних) дійсних коренів за кількістю змін знаків коефіцієнтів у многочлені [3].
- (4) **Теорема про раціональні корені.** Дозволяє знайти всі можливі раціональні корені многочлена з цілими коефіцієнтами. Не виявляє ірраціональні або комплексні корені [4].
- (5) **Основна теорема алгебри.** Гарантує, що будь-яке поліноміальне рівняння степеня n має n коренів у полі комплексних чисел (з урахуванням кратності) [5].
- (6) **Теорема Гаусса-Люка.** Усі корені похідної многочлена розташовані в опуклій оболонці множини коренів самого многочлена. Дає геометричне уявлення [6].
- (7) **Геометричні властивості коренів.** Використовуються для візуалізації і симетрії коренів на комплексній площині. Допомагають зрозуміти загальне розташування коренів [7].

Для порівняння зазначених методів використано наступні рівняння:

- (1) $x^2 + 1 = 0$
- (2) $x^3 - 2x + 2 = 0$
- (3) $(x - 1)^3 = 0$
- (4) $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

ПОРІВНЯЛЬНА ТАБЛИЦЯ МЕТОДІВ

У наступній таблиці містяться результати аналізу зазначених рівнянь.

Метод	$x^2 + 1 = 0$	$x^3 - 2x + 2 = 0$	$(x-1)^3 = 0$	$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$	Примітки
Правило знаків Декарта	0	≤ 2	0	1	Дає оцінку кількості додатних коренів
Метод Штурма	0	1	1	1	Точна кількість дійсних коренів
Неповне правило Ньютона	0	1	1	1	Оцінка на основі похідних
Теорема про раціональні корені	—	—	1	1	Перевірка цілих і раціональних коренів
Основна теорема алгебри	2 (компл.)	3	3	3	Враховує кратність і комплексність
Теорема Гаусса-Люка	—	так	—	—	Корені похідної в опуклій оболонці
Геометричні властивості	На колі	Дійсний + пара комплексних	Кратний у точці	Один дійсний, два на колі	Розташування на комплексній площині

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Acosta Daniel J. *Newton's Rule of Signs for Imaginary Roots*
- [2] Prof. Dr. J. Top, Dr. R. Dyer *Sturm's Theorem: determining the number of zeroes of polynomials in an open interval.*
- [3] Curtiss D.R. *Recent extensions of Descartes' rule of signs, Annals of Mathematics.* 1918. — 251–278 с.
- [4] Lucas N. H. Bunt, Phillip S. Jones, Jack D. Bedient *The historical roots of elementary mathematics.*
- [5] Oswaldo Rio Branco de Oliveira *The Fundamental Theorem of Algebra: an Elementary and Direct Proof.*
- [6] Florian Enescu *Fall 2010 Polynomials: Lecture notes Week 9.*
- [7] Yap, Chee-Keng (2000) *Fundamental problems of algorithmic algebra*

КАФЕДРА МАТАТІЙ, КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО, КИЇВ, УКРАЇНА
 Email address: kondrenkomariiaom91@gmail.com

ТЕКСТОВІ ЗАДАЧІ ЯК ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ УМІНЬ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ УЧНІВ БАЗОВОЇ СЕРЕДНЬОЇ ШКОЛИ

М. КРАСУЛЕНКО

Відповідно до Державного стандарту базової середньої освіти [1], одним із ключових завдань сучасної освіти є формування математичної компетентності учнів. Ця компетентність передбачає не лише знання математичних фактів, але й вміння застосовувати їх у житті. Текстові задачі є важливим засобом для її формування. Завдяки ним учні вчаться застосовувати знання для розв'язання практичних проблем, які можуть виникнути у повсякденному житті чи у їхній майбутній професійній діяльності, розвивають логічне мислення та вміння аналізувати. На нашу думку, саме текстові задачі з шкільного курсу математики дають можливість поєднати теорію з практикою та сприяють формуванню й розвитку ключових компетентностей учнів.

На сьогодні ефективно дослідження різних явищ природи та процесів у різних сферах діяльності людини відбувається завдяки використанню математичного моделювання, що передбачає опис реальних ситуацій мовою математичних понять, створення математичних моделей (формул, рівнянь).

У шкільному курсі інформатики поняття інформаційної та математичної моделі розглядається в 6 класі. Математична модель — це інформаційна модель, у якій залежності між властивостями об'єкта та його зв'язки з іншими об'єктами описуються формулами, рівняннями, нерівностями тощо [4]. Тому, на нашу думку, потрібно і в шкільному курсі математики під час розв'язування текстових задач ознайомлювати учнів із основними поняттями математичного моделювання.

Текстова задача — це сформульована звичайною (природною мовою) вимога знайти невідоме число чи значення деякої величини на основі заданих співвідношень між числами або значеннями величин [3]. Курс математики 5–9 класів містить значну кількість текстових задач, які орієнтовані на побудову та розв'язування математичних моделей різних видів. Прикладами є задачі на пропорцію, рух, відсотки — вони всі передбачають виділення основних змінних, формулювання залежностей і використання математичних моделей для розв'язання.

Упродовж вивчення шкільного курсу математики для розв'язування текстових задач використовуються різні математичні моделі [2]:

5-6 класи — числові вирази, формули і нескладні рівняння;

алгебра 7 клас — лінійні рівняння, системи лінійних рівнянь з двома змінними, формули;

алгебра 8 клас — раціональні вирази, дробово-раціональні рівняння, квадратні рівняння, функції;

алгебра 9 клас — числові нерівності, квадратні нерівності, дробово-раціональні рівняння, системи рівнянь з двома змінними, що містять різні види рівнянь (наприклад, лінійне рівняння і квадратне) та функції.

Використання математичного моделювання під час вирішення певної текстової задачі із шкільного підручника передбачає наступні 4 кроки, які є спрощеною евристичною схемою діяльності:

1. *Проведення попереднього аналізу об'єкта, що досліджується.*
2. *Створення математичної моделі за підсумками проведеного аналізу.*
3. *Дослідження властивостей і поведінки математичної моделі.*
4. *Аналіз отриманих результатів та їхня інтерпретація стосовно досліджуваного об'єкта.*

На нашу думку, під час розв'язування текстових задач вчитель має вживати відповідні терміни (модель, етап, розв'язання, аналіз, перевірка) й чітко під час розв'язання задачі виділяти відповідні етапи спрощеної схеми евристичної діяльності. Це формує вміння усвідомлено розв'язувати задачі: від аналізу умови до побудови моделі й інтерпретації результату.

У підсумку хочемо зазначити, що на нашу думку, завдяки застосуванню текстових задач як засобу математичного моделювання, чіткому дотриманню етапів моделювання та використанню термінології підвищується ефективність процесу формування математичної компетентності учнівства. Цей підхід сприяє розвитку логічного мислення, вміння аналізувати, узагальнити та застосовувати отримані знання для розв'язання практичних ситуацій.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти: постанова Кабінету міністрів України № 898 від 30 вересня 2020 року.
- [2] Лук'янова Світлана. *Розв'язування текстових задач арифметичними способами: 5-6 класи.* / Світлана Лук'янова Навч. посіб. — К.: Вид. дім «Шкіл. світ»: Вид. Л. Галіцина, 2006. — 128 с.
- [3] Лук'янова Світлана. *Текстові задачі на уроках і в позаурочний час: алгебра: Л84 7-9 класи* / Світлана Лук'янова. / Світлана Лук'янова Навч. посіб. — К.: Редакції газет природничо-математичного циклу, 2012. — 128 с.
- [4] Ривкінд Й. Я., Лисенко Т. І., Чернікова Л. А., Шакотько В. В. *Інформатика для 6 класу закладів загальної середньої освіти.* — Київ.: «Генеза» -2023. —239 с.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА

Email address: 21fmf.m.krasulenko@std.npu.edu.ua

ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ ЯК ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ НА УРОКАХ АЛГЕБРИ

Ж.Л. КУЗІВ

Сучасна система освіти спрямована на формування компетентної особистості, здатної ефективно застосовувати набуті знання та вміння у реальному житті. Математична компетентність є однією з ключових компетентностей, визначених у Державному стандарті базової середньої освіти [1]. Особливе місце у її формуванні посідають задачі з параметрами, які сприяють розвитку логічного мислення, аналітичних здібностей та дослідницьких навичок учнів.

Такі задачі є ефективним інструментом для формування математичної компетентності, оскільки вони поєднують у собі теоретичні знання з практичним застосуванням, розвивають критичне мислення та здатність до математичного моделювання.

Методична послідовність полягає у поетапному підході: спочатку пропонується розв'язати задачу без параметра, потім відбувається введення в умову параметра з чітким обґрунтуванням його змісту, а завершується процес аналізом області допустимих значень параметра з практичної точки зору.

Приклад 1. Два велосипедисти виїхали назустріч один одному з двох міст, відстань між якими 120 км. Перший велосипедист рухався зі швидкістю $(20 + a)$ км/год, а другий — зі швидкістю $(15 + a)$ км/год, де a — параметр. При яких значеннях параметра a велосипедисти зустрінуться через 3 години?

Спочатку обговорюємо з учнями фізичний зміст параметра a (додакова швидкість обох велосипедистів).

Складаємо рівняння: $(20 + a) \cdot 3 + (15 + a) \cdot 3 = 120$.

Розв'язуємо: $(35 + 2a) \cdot 3 = 120$, звідки $105 + 6a = 120$, $6a = 15$, $a = 2.5$.

Обговорюємо з учнями практичний зміст результату: обидва велосипедисти мають збільшити швидкість на 2.5 км/год.

У 8 класі з вивченням квадратних рівнянь з'являється можливість розв'язувати більш складні прикладні задачі [4], [5], [6]. Особливу увагу слід приділити інтеграції алгебраїчних та геометричних підходів, задачам фізичного змісту, аналізу різних випадків залежно від значення параметра.

У 9 класі задачі з параметрами набувають дослідницького характеру. Їхня специфіка у необхідності введення допоміжних параметрів для встановлення взаємозв'язків між величинами, аналізі кількості розв'язків.

Система завдань з параметром має бути диференційована, що враховує різний рівень математичної підготовки учнів.

Для базового рівня відносимо характерні задачі з параметрами, що мають пряму інтерпретацію в реальному житті.

Приклад 2. Шкільна їдальня готує фруктові десерти. На приготування одного десерту потрібно взяти $a + 2$ яблука. Кухар хоче використати рівно 5 яблук для приготування кількох однакових десертів. При якому значенні a кухар зможе приготувати ціле число десертів, не розрізаючи яблука?

Середній рівень — задачі на побудову математичної моделі.

Приклад 3 [2]. Лампа W ват висить над столом на висоті h см. Коли вона вийшла з ладу, її замінили лампою w_1 ват. Як треба змінити висоту лампи, щоб освітлення столу залишилось без змін? Дослідіть розв'язок залежно від співвідношення між W та w_1 .

Високий рівень містить задачі дослідницького характеру з необхідністю аналізу різних випадків.

Приклад 4 [3]. Трава на лузі виростає однаково швидко і густо. Відомо, що 70 корів поїли б її за 24 дні, а 30 корів — за 60 днів. Скільки корів поїли б усю траву за 96 днів?

При роботі з учнями рекомендується поетапне введення поняття параметра через знайомі учням життєві ситуації, використання різних типів прикладних задач (на рух, роботу, задачі економічного змісту), приділення особливої уваги до аналізу області допустимих значень параметра як важливого етапу розв'язування, а також акцентування на практичній інтерпретації отриманих результатів, що посилює розуміння зв'язку математики з реальним життям.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Державний стандарт базової середньої освіти : Постанова Кабінету Міністрів України № 898. 2020
- [2] Литвиненко К. В. *Прикладні задачі на дослідження*. Математика у школах України. 2007. № 29(185). С. 6-10.
- [3] Гарнагіна І. А. *Як навчити розв'язувати задачі*. Математика у школах України. 2008. № 27(219). С. 7-12.
- [4] Бурда М.І., Тарасенкова Н.А., Васильєва Д.В. Мод. навч. програма «Алгебра. 7-9 класи» для ЗЗСО. 2023.
- [5] Істер О. С. *Мод. навч. програма «Алгебра. 7-9 класи» для ЗЗСО*. 2023.
- [6] Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С. *Мод. навч. програма «Алгебра. 7-9 класи» для ЗЗСО*. 2022.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА

Email address: 21fmf.zh.kuziv@std.npu.edu.ua

ВИКОРИСТАННЯ ВІЗУАЛЬНИХ МЕТОДІВ НАВЧАННЯ ЗАДЛЯ РОЗВИТКУ ТВОРЧОЇ АКТИВНОСТІ УЧНІВ 5–6 КЛАСІВ

Т. ЛАВРИНЮК

У сучасному освітньому просторі особливої актуальності набуває впровадження візуальних методів навчання, які є ефективним засобом активізації пізнавальної діяльності учнів. В умовах інформаційного перевантаження, коли учні щодня стикаються з великим обсягом різноманітної інформації, саме візуалізація дає змогу структурувати навчальні знання, полегшити сприйняття нових понять і водночас сприяти розвитку творчого мислення.

Сучасна школа, зокрема в контексті реалізації концепції НУШ, орієнтує вчителів на використання креативних та інноваційних підходів. Візуальні методи навчання цілком відповідають цій потребі: активізують уяву та залучають учнів до активної взаємодії з навчальним матеріалом. До таких методів належать ментальні мапи, інтелект-карти, хмари слів, опорні схеми, кроссенси, меми, комікси тощо. Вони не лише підвищують ефективність процесу сприйняття та засвоєння інформації учнівством, а й мотивують їх до подальших досліджень, формують позитивне ставлення до навчання.

Під час вивчення математики часто виникає потреба в абстрагуванні, що для молодших підлітків може бути складним. Візуальні засоби дозволяють представити складні поняття у зрозумілій формі, пов'язати їх із повсякденним досвідом учнів, зробити навчальний процес емоційно забарвленим. Саме тому для учнів 5–6 класів надзвичайно важливо залучати такі методи, що активізують образне мислення, сприяють кращому засвоєнню матеріалу, розвитку пізнавального інтересу та творчої активності школярів.

Наприклад, під час вивчення теми «Симетрія відносно прямої. Дослідження симетрії у природі та геометрії» у 5 класі, можна запропонувати учням інтерактивний підхід, як-от технологія «Прогулянка галереєю» [1]. У ході «прогулянки» учні виконують завдання: створюють власні малюнки чи аплікації з елементами симетрії (наприклад, орнаменти чи сніжинки), а результат своєї роботи кріплять на стіну, як полотно в галереї. Решта учнів прогулюється галереєю, аналізує роботи своїх однокласників, залишає коментарі чи запитання авторам роботи. Після завершення

вчитель разом з учнями може обговорити всі або окремі роботи, дати змогу учням відповісти на поставлені запитання.

Завдяки цій технології учні стають активними учасниками навчального процесу. Практичні завдання, такі як пошук осей симетрії в геометричних фігурах або створення симетричних малюнків, допомагають засвоїти матеріал через залучення до творчої діяльності.

Результати психолого-педагогічних досліджень стверджують, що візуалізація як метод навчання має значний вплив на розвиток когнітивних процесів учнів: уваги, пам'яті, логіки, уяви, асоціативного мислення [2]. Завдяки цьому учні краще структурують інформацію, бачать взаємозв'язки між окремими поняттями, а головне — вчаться працювати з навчальним матеріалом творчо. Візуальні методи сприяють формуванню індивідуального стилю пізнання, самостійного аналізу та формулювання висновків. Навіть традиційні математичні вправи за умови використання візуальних прийомів набувають іншого, більш доступного і привабливого вигляду.

Ефективність візуальних методів навчання залежить також від педагогічної майстерності вчителя. Необхідно враховувати вік учнів, рівень сформованості навчальної мотивації, особливості класу. Важливо не перевантажувати заняття надмірною кількістю візуального матеріалу, а вдумливо й методично грамотно планувати етапи уроку, на яких ці методи будуть найбільш доречними. Варто зазначити, що самостійне створення учнями візуальних об'єктів, наприклад ментальних мап або коміксів, значно підвищує їхню активність і зацікавленість у навчанні.

Отже, візуальні методи навчання є не просто додатковим інструментом у роботі педагога, а важливою складовою сучасного освітнього процесу. Вони сприяють глибшому засвоєнню матеріалу, розвитку творчих здібностей та критичного мислення. Такі методи дають змогу формувати в учнів цілісний і водночас індивідуалізований погляд на навчання, мотивують до самостійного пізнання та пошуку нових рішень.

На нашу думку, широке упровадження візуальних технологій у навчальний процес відкриває нові можливості для створення інноваційного освітнього середовища, що відповідає потребам сучасного школяра.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Букалова Л.Л., Васильєва Д.В. *Групові форми роботи на уроках математики у 6 класі*. : Метод. посібник. — Київ: Видавничий дім «Освіта», 2023. — 80 с. : іл.
- [2] Безуглий Д. *Візуалізація як сучасна стратегія навчання* // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. — Суми : СумДПУ ім. А.С. Макаренка, 2014. — № 1 (2). — С. 5–11.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: 20fmf.t.lavryniuk@std.npu.edu.ua

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ У МЕДИЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

С.Є. ЛЕБЕДЕНКО, Т.Г. ПРИГАЛІНСЬКА

Розвиток інформаційних технологій, збільшення обсягів медичних даних та потреба у точному прогнозуванні зумовлюють необхідність використання математичних моделей у дослідженнях біомедичних систем. Завдяки своїй універсальності та здатності узагальнювати складні процеси, математика стала ефективним інструментом для аналізу та опису різноманітних біологічних і клінічних явищ. Математичні моделі допомагають глибше розуміти складні біологічні системи, прогнозувати перебіг захворювань та оптимізувати стратегії лікування.

Математичні моделі у медичних дослідженнях виконують декілька функцій: опис біологічних процесів, моделювання динаміки захворювання та прогнозування результатів втручання. Наприклад, в епідеміології такі моделі, як модель SIR (Susceptible-Infectious-Recovered) є основою для розуміння та контролю інфекційних захворювань [1]. В онкології математичні моделі допомагають визначити ріст пухлин та реакцію на лікування, сприяючи розробці персоналізованих методів лікування [2]. У фармакокінетиці та фармакодинаміці моделювання дозволяє спрогнозувати, як лікарські засоби впливають на організм людини. Це дає можливість покращити розробку клінічних випробувань, визначити концентрацію препарату у крові, оптимальний інтервал між прийомами та час дії речовини [3].

Зазвичай у медичних дослідженнях використовують такі типи математичних моделей: детерміністичні, стохастичні та статистичні.

Детерміністичні моделі ефективні при моделюванні процесів на великих популяціях, де індивідуальні варіації мають менший вплив. Вони, як правило, засновані на системах диференціальних рівнянь, описують поведінку системи без урахування випадковості або мінливості. Наприклад, детерміністичні компартментальні моделі описують поширення інфекційних захворювань шляхом категоризації популяцій за групами: сприйнятливі, інфіковані і ті, які одужали [1].

Стохастичні моделі особливо корисні для моделювання початкових фаз спалахів інфекцій. Вони враховують невизначеність та властиву біологічним системам мінливість. Такі моделі важливі для невеликих популяційних досліджень або для досліджень на етапах ранньої стадії інфекційного захворювання, де випадкові події відіграють значну роль [3].

Статистичні моделі використовують для аналізу реальних медичних даних, вони допомагають знаходити закономірності, проводити оцінку ризиків, виявляти кореляції між змінними. Для виявлення закономірностей у таких складних галузях, як геноміка або нейровізуалізація, широко застосовують регресійний аналіз, аналіз виживання та алгоритми машинного навчання [4].

Попри свої переваги, математичні моделі стикаються із низкою викликів. Їхня точність істотно залежить від якості та повноти вихідних даних. Надмірне спрощення може призвести до хибних висновків, тоді як надто складні моделі стають непрактичними у використанні. Крім того, для забезпечення надійності моделі результати мають бути ретельно верифіковані за допомогою експериментальних або клінічних даних.

Отже, математичне моделювання є потужним інструментом для медичних досліджень і клінічної практики. Завдяки здатності точно описувати, аналізувати та прогнозувати біологічні процеси, математичні моделі сприяють розвитку персоналізованої медицини, оптимізації лікування та кращому розумінню механізмів захворювання.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Metcalf C.J.E., Morris D.H., Park S.W., *Mathematical models to guide pandemic response* — 2020. — Science, 369(6502), P. 368–369.
- [2] Altrock P.M., Liu L.L., Michor F., *The mathematics of cancer: integrating quantitative models* — 2015. — Nature Reviews Cancer, 15(12), P. 730–745.
- [3] Keeling M.J., Rohani P., *Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals* — Princeton University Press, 2008. — 400 с.
- [4] Winslow R.L., Trayanova N., Geman D., Miller M.I., *Computational medicine: translating models to clinical care* — 2012. — Science Translational Medicine, 4(158), 158rv11.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: s.lebedenko.zm42.fbmi28@111.kpi.ua

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: tania.krivorot@gmail.com

ФОРМУВАННЯ ГРОМАДЯНСЬКОЇ ІДЕНТИЧНОСТІ ПІД ЧАС НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ УЧНІВ 5–6 КЛАСІВ

К.В. МАРТИНЮК

У сучасному світі питання формування громадянської ідентичності стає надзвичайно актуальним. Одним із ключових аспектів її формування у школярів є розвиток важливих цінностей і норм поведінки, що сприяють їхньому інтегруванню в суспільне життя. Отже, стає важливою задача інтеграції елементів громадянської освіти в навчання математики.

Формування громадянської ідентичності в юних громадян України задеклароване в ряді нормативних державних документів. Це стосується, насамперед, Закону України «Про освіту», концепція Нової української школи (НУШ), Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти, модельних навчальних програм, а також концепції національно-патріотичного виховання.

***Громадянська ідентичність** визначається як складне соціально-психологічне явище, яке охоплює усвідомлення особистістю своєї належності до певної нації, держави, суспільства.*

Згідно з Державним стандартом та модельними програмами, навчання математики має на меті не лише оволодіння математичними знаннями, а й формування в учнів практичних навичок, які можуть бути застосовані в повсякденному житті та в громадянській діяльності.

Ми пропонуємо формувати громадянську ідентичність у 5–6 класах на уроках математики через прикладні задачі, що пов'язані з територіальною цілісністю України, національним складом її населення, природними ресурсами тощо. Розглянемо приклади таких задач і методичні рекомендації щодо їхнього розв'язування.

Приклад 1. *В українській родині місячний бюджет становить 25000 грн. На оплату комунальних платежів родина витратила $\frac{1}{20}$ бюджету, на благодійність — ще $\frac{1}{20}$, на їжу — $\frac{1}{4}$ бюджету, на одяг — $\frac{1}{10}$ бюджету. Яка частина залишилася для інших важливих потреб, якщо сім'я інвестує $\frac{1}{5}$ частину бюджету?*

Зразок розв'язання задачі.

1. Створення математичної моделі (математизація).

Проводимо аналіз умови задачі. Обчислимо, скільки грошей родина витратила на кожну категорію. Комунальні платежі — $\frac{1}{20} \cdot 25000 = 1250$

грн; благодійність — $1/20 \cdot 25000 = 1250$ грн; їжа — $1/4 \cdot 25000 = 6250$ грн; одяг — $1/10 \cdot 25000 = 2500$ грн; інвестиції — $1/5 \cdot 25000 = 5000$ грн.

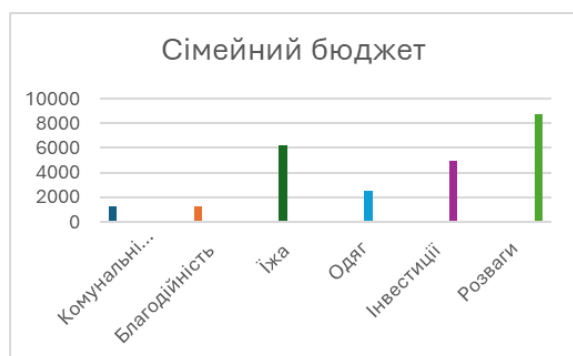
2. *Математичне опрацювання.* Обчислимо загальні витрати.

$$1250 + 1250 + 6250 + 2500 + 5000 = 16250 \text{ (грн)}$$

Обчислимо залишок для інших важливих потреб. Від загального бюджету віднімемо витрати: $25000 - 16250 = 8750$ (грн)

Відповідь: українська родина витрачає 8750 грн для інших витрат.

Залишок у 35% бюджету свідчить про те, що родина має можливість виділити значні кошти на інші важливі потреби, що є суттєвими для відновлення сил та підтримки психоемоційного стану.



Методичний коментар (робота за кадром). Задача підкреслює важливість участі кожного члена родини у фінансових рішеннях, що формує в учнів усвідомлення їхньої ролі в суспільстві. Учні розуміють, що витрати на благодійність та освіту є важливими для розвитку суспільства, що підкреслює цінність колективної відповідальності. Учні засвоюють поняття бюджету, заощаджень і інвестицій, що допомагає їм стати фінансово грамотними громадянами.

Таким чином, математична задача не тільки навчає учнів обчислювати та аналізувати витрати, але й виховує їх як свідомих громадян. Учні стають більш усвідомленими у своїх діях, що забезпечує їхню активну участь у суспільному житті. Отже, інтеграція громадянської освіти в навчання математики є важливим кроком у формуванні відповідальних та свідомих громадян. Використання спеціально розробленої добірки задач, над якою ми зараз працюємо, сприятиме розвитку в учнів не лише математичних навичок, а й усвідомлення власної ролі в громаді, відповідальності та активної громадянської позиції.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти: постанова Кабінету міністрів України № 898 від 30 вересня 2020 року.*
- [2] *Закон України «Про освіту» відомості Верховної Ради (ВВР), 2017, № 38-39, ст.380.*

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: 23fmif.k.martyniuk@std.udu.edu.ua

СТАН ПРОБЛЕМИ ФОРМУВАННЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ В УЧНІВ БАЗОВОЇ СЕРЕДНЬОЇ ШКОЛИ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

М.В. МИЦИК

Однією з найважливіших складових математичної компетентності є обчислювальна компетентність. Її можна розглядати як характеристику особистості, що проявляється в індивідуальній готовності та здатності виконувати обчислювальні операції в різних ситуаціях.

Формувати обчислювальну компетентність учнів починають на уроках математики ще з початкової школи, адже саме цей період є сприятливим для цього. Проте найвагоміший багаж знань, умінь та обчислювальних навичок учні здобувають у базовій середній школі. Це зумовлено розширенням кола предметів, що вивчаються. Зокрема, додаються суміжні з математикою предмети: фізика, хімія, біологія, географія та інші. Їхнє вивчення пов'язане з виконанням дослідів, практичних та лабораторних робіт, розв'язуванням різноманітних задач, що у свою чергу вимагає від учня використання раніше набутих умінь, зокрема застосування обчислювальної компетентності.

Мета дослідження: виявити та проаналізувати стан науково-педагогічного вивчення проблеми формування обчислювальної компетентності в учнів базової середньої школи в процесі навчання природничо-математичних дисциплін, окреслити основні труднощі та напрями подальших наукових пошуків у цьому напрямі.

Завдання дослідження: визначити роль природничо-математичних дисциплін у розвитку обчислювальної компетентності учнів базової середньої школи. Проаналізувати сучасний стан вітчизняних та зарубіжних досліджень, що стосуються формування обчислювальної компетентності. Виокремити основні проблеми, що ускладнюють ефективне формування цієї компетентності в умовах сучасної освіти.

Згідно з модельними навчальними програмами для 5–9 класів Нової української школи, формуванню обчислювальної компетентності під час навчання математики приділяється недостатня увага, хоча є необхідність в уміннях учнів працювати з точними та наближеними обчисленнями для розв'язування практичних та прикладних задач на уроках фізики, хімії, географії, інформатики тощо.

Досить серйозно проблему формування обчислювальної компетентності, зокрема тему наближених обчислень, вивчали українські дидактики. Так, Бевз В. Г., Корінь О.Г., Слєпкань З. І. [1] зазначають у своїх роботах, що загалом обчислювальна компетентність формується в учнів на неприпустимо низькому рівні, що йде в розріз з вимогами сучасності, створює перешкоди до розвитку загально-математичної компетентності, міжпредметних зв'язків та заважає впровадженню прикладної спрямованості навчання математики. Кліндухова В.М. [2] у своєму дисертаційному дослідженні зазначає, що наявний стан вивчення наближених обчислень у шкільному курсі математики має ряд недоліків і не відповідає сучасним освітнім пріоритетам, зокрема прикладній спрямованості навчання математики.

Таким чином, зазначене вище, проведений констатувальний експеримент, результати анкетування педагогів та спостереження за навчальним процесом у 7-8 класах під час вивчення природничо-математичних дисциплін доводять, що обчислювальна компетентність у переважної більшості учнів сформована на низькому рівні, методична підготовка педагогів потребує удосконалення, а також є необхідність у розробці додаткових методичних матеріалів для ефективного розвитку обчислювальної компетентності учнів.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Слєпкань З.І. *До проблеми вивчення наближених обчислень у школі* / Слєпкань З.І. // Математика в школі. — 2006. — № 10. — С. 8–10.
- [2] Кліндухова В.М. *Вивчення наближених обчислень в основній школі: дис. канд. пед. наук: 13.00.02 – теорія та методика навчання (математика)* / Валентина Миколаївна Кліндухова. — Київ, 2008. — 206 с.

УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна
Email address: m.v.mytsyk@npu.edu.ua

ВЕРЗІЄРА АНЬЄЗІ

С.Р. МОЛОШНА, О.Г. БІЛИЙ

Локон Аньєзі — математична краса в алгебраїчній кривій. Розглянемо просту й водночас дуже елегантну функцію, задану рівнянням:

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}, \quad a > 0.$$

Функція визначена на всій числовій прямій $\mathbb{R}$, є неперервною, нескінченно диференційованою та інтегрованою. Вона зручна для користування як приклад для дослідження монотонності, екстремумів, опуклості, а також для застосування методів диференціальної геометрії — при обчисленні кривини, закрученості та інших геометричних характеристик. Верзієру Аньєзі також часто використовують у прикладах на збіжність та застосування невластних інтегралів. У теорії ймовірностей вона слугує щільністю розподілу закону Коші (закон $\arctan$).

МАРІЯ ГАЕТАНА АНЬЄЗІ



Функція має ще й особливу історичну цінність. Вона пов'язана з ім'ям видатної жінки-математика — Марії Гаетани Аньєзі, яка стала однією з перших жінок-професорів у світі.

Марія Гаетана Аньєзі народилася 16 травня 1718 року в Мілані, у заможній та освіченій багатодітній родині. З раннього дитинства проявляла надзвичайні здібності до наук: вільно володіла щонайменше сімома мовами ще у юному віці, включаючи латину, грецьку, іврит, французьку, німецьку та іспанську. Під керівництвом свого батька, професора Болонського університету П'єтро Аньєзі, вона здобула глибоку математичну освіту, вивчала давні та східні мови, механіку, філософію та богослов'я, основи диференціального та інтегрального числення.

У 1748 році в Болоньї побачила світ її фундаментальна праця *«Istituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana»* (укр. «Аналітичні інституції для молоді Італії») обсягом понад 1000 сторінок, яка вважається

одним із перших повних курсів аналізу, написаних італійською. У ній, серед іншого, міститься доведення того, що будь-яке кубічне рівняння має рівно три корені (включаючи комплексні). Також у цій праці було досліджено криву, яка отримала назву «*versiera Agnesi*» (укр. «локон Аньєзі»). Ця крива належить до плоских алгебраїчних раціональних кривих третього порядку. За класифікацією Ньютона, вона є гіперболізмом кола і отримана як розв'язання задачі на геометричні місця точок.

В прямокутній декартовій системі координат XOY розглянемо $OA \subset OY$ — діаметр кола, і пряму $y = a$ та рухому січну OL , яка перетинає коло в точці C , а пряму $y = a$ — у точці L . Через точку C проведемо пряму, паралельну до осі OX , яка перетинає OA у точці B . Через точку L проведемо пряму, перпендикулярну до осі OX . Позначимо через M точку перетину цих двох останніх прямих. Точка $M(x, y)$ є рухомою і визначає криву Аньєзі, при цьому виконується співвідношення: $\frac{OA}{OB} = \frac{BM}{BC}$.

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СПОРІДНЕНІ КРИВІ

- Візієра Пеано (супровідна цисоїди): $(2y - a)(x^2 + y^2) = ay^2$.
- «Яйце Гренвіля»: крива четвертого порядку, що складається з локона Аньєзі та прямої, яка збігається з віссю абсцис;
- Псевдоверзієра: утворена подвоєнням ординат локона Аньєзі.
- Аньєзіана: якщо пряма $AL \perp OA$ займає довільне положення $y = b$, тоді $y(b^2 + x^2) = ab^2$.
- Агвінея Ньютона: пряма AL та початок координат O займають довільне положення.

ЦІКАВІ ФАКТИ

1. Через помилковий переклад слова *versiera* як *witch* (укр. відьма), крива в англomовній літературі відома як «*Witch of Agnesi*».
2. На честь Аньєзі названо кратер на Венері та астероїд *16765 Agnesi*.
3. Геометрія локона Аньєзі застосовувалась у проєктуванні злітно-посадкової рампи авіаносця.
4. Ефект Рунге було виявлено саме при інтерполяції цієї кривої.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Вірченко Н.О., Ляшко І.І., Швецов К.І. *Графіки функцій. Довідник*. Київ: Наук. думка, 1977. — 320 с.
- [2] Antonella Cupillari. *A Biography of Maria Gaetana Agnesi*. USA: Edwin Mellen Press, 2008. — 340 с.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: moloshnasofiia@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: belyi.oleksandr@gmail.com

ПЕРЕТВОРЕННЯ СИСТЕМ КООРДИНАТ ТА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ

Н.С. ОСТРОЛУЦЬКА

Перетворення простору (прямої, площини) відіграють важливу частину у математиці та математичній освіті школярів. Перетворення, як бієктивне, тобто взаємно однозначне відображення множини самої на себе, є фундаментальним математичним поняттям. Воно проявляється і в перетвореннях систем координат, а тому є важливим при дослідженні рівнянь та множин їх розв'язків, і в перетвореннях фігур (множин точок) тощо.

В шкільному курсі математики перетворення площини вивчаються в основному в 9 класі курсу геометрії. Набір означень, понять і фактів, що пропонують наявні підручники в темі «геометричні перетворення» не є задовільним, як в кількісному відношенні, так і в якісному. Геометричні перетворення площини в основному представлені як певні перетворення, трансформації фігур, що насправді кажучи, з точки зору фундаментальної науки є не зовсім коректними. А зв'язок цих перетворень з перетвореннями графіків функцій практично ніяк не відображений. Якщо оминати вже навіть і той факт, що друга тема передуює першій.

В університетському курсі аналітичної геометрії вивчаються перетворення прямокутних декартових систем координат. Вони задаються:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - \varepsilon y' \sin \alpha + x_0, \\ y = x' \sin \alpha + \varepsilon y' \cos \alpha + y_0, \end{cases}$$

де $\varepsilon = \pm 1$ відповідає за однакову орієнтованість або різну орієнтованість старої і нової систем координат, α — орієнтований кут між старою і новою віссю абсцис, $(x; y)$ — координати точки у старій системі, а $(x'; y')$ — координати цієї ж точки у новій системі координат, $(x_0; y_0)$ — координати нового початку координат у старій системі.

Перетворення системи координат і перетворення площини тісно пов'язані. А тому при геометричних перетвореннях графіків функції можна користуватись геометричною інтерпретацією перетворення площини.

У доповіді пропонуються результати аналізу змісту тем геометричні перетворення площини і перетворення графіків функцій, їхнього взаємозв'язку з перетвореннями систем координат.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: 17fmf.n.ostrolutska@std.npu.edu.ua

ОСОБЛИВОСТІ ОРГАНІЗАЦІЇ ДІЯЛЬНОСТІ ЩОДО ПОДОЛАННЯ ОСВІТНІХ ВТРАТ УЧНІВСТВА З МАТЕМАТИКИ В СТАРШІЙ ШКОЛІ

В. ПАВЛІЧЕНКО

Сучасна шкільна освітня система в Україні переживає непростий період, що спричинено наслідками пандемії, воєнним станом і нестабільністю навчального процесу. За цих умов проблема освітніх втрат, яку раніше пов'язували з канікулами чи тривалою хворобою учня чи учениці, набуває надзвичайної актуальності особливо з таких базових і водночас складних предметів як математика. Саме тому відновлення втрачених та компенсація неотриманих знань разом із формуванням цілісної системи математичних знань й математичної компетентності старшокласників є важливими завданням для кожного вчителя математики.

Зважаючи на масштабність проблеми освітніх втрат, її вирішення потребує уваги на державному рівні, зокрема МОН, і науковців АПН України у розробці загальних методичних рекомендацій. Також, на нашу думку, не менш важливою є цілеспрямована праця вчителів у кожному закладі освіти із втілення на практиці рекомендацій науковців.

Основними цілями організації діяльності з подолання освітніх втрат є: 1) виявлення прогалин у знаннях кожного учня; 2) створення безпечного емоційного навчального середовища для учнів; 3) відновлення базових математичних знань та навичок; 4) підвищення впевненості учнів у власних силах через поступове ускладнення завдань; 5) формування цілісної системи математичних знань та практичних умінь щодо їхнього застосування під час розв'язування практико-орієнтованих та прикладних завдань; 6) підготовка учнів до НМТ.

На думку науковців [1], ефективне подолання освітніх втрат з математики потребує поєднання різних форм і методів навчальної роботи: 1) діагностичне оцінювання знань для визначення індивідуального рівня підготовки учнів; 2) індивідуалізація навчання — персоналізовані завдання, адаптація темпу та обсягу навчального матеріалу; 3) регулярні консультації та факультативні заняття, спрямовані на пояснення складних тем; 4) застосування цифрових технологій: використання інтерактивних платформ, онлайн-симуляторів, тестів та відеоматеріалів; 5) метод проєктів, що дозволяє практично застосовувати математичні знання та розвивати критичне мислення тощо.

Одним із дієвих методів роботи щодо подолання освітніх втрат є тематичне повторення ключових тем із використанням прикладних завдань, які демонструють учням практичну значущість набуття математичних знань для повсякденного життя чи їхньої майбутньої професійної діяльності, що особливо важливо для старшокласників. Таке повторення можна провести на початку навчального року або під час підготовки до вивчення нової теми.

Ще одним дієвим способом подолання освітніх втрат з математики є широке використання внутрішньопредметних зв'язків різних видів: інформаційно-змістові між поняттями та операційно-діяльнісні між алгоритмами розв'язування типових завдань [2]. Робота із реалізації внутрішньопредметних зв'язків має бути систематичною на основі поєднання традиційного навчання з елементами інтерактивності, візуалізації, гейміфікації та самоперевірки, що у підсумку забезпечує кращу динаміку відновлення знань та навичок учнів.

Як свідчить шкільна практика, у процесі подолання освітніх втрат найбільше труднощів для учнів виникає під час вивчення теорії та розв'язування задач із курсу стереометрії. Це пов'язано із несформованістю у більшості учнів просторової уяви, вмінь проводити дедуктивні міркування і недостатнім рівнем засвоєння планіметричного матеріалу, який є опорним для вивчення стереометрії. Ефективним засобом, що може допомогти вчителю раціонально організувати процес подолання втрат зі стереометрії, на нашу думку, є метод доцільних задач [3]: мотиваційні задачі прикладного змісту; ключові — для засвоєння теорії; опорні — для опанування правилами-приписами використання теореми тощо.

З огляду на те, що старшокласники потребують чіткого розуміння цілей навчання, також доцільно розробляти індивідуальні учнівські навчальні траєкторії, які враховують рівень підготовки, плани щодо складання НМТ та подальшого вступу в ЗВО.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Комітет Верховної Ради України з питань освіти, науки та інновацій. (2023) *Освітні втрати й освітні розриви на рівні загальної середньої освіти: вимірювання та механізми подолання*. <https://kno.rada.gov.ua/uploads/documents/38605.pdf>.
- [2] Лук'янова, С. М., Філон, Л. Г. (2023). *Внутрішньопредметні зв'язки як засіб подолання освітніх втрат учнівства з математики та забезпечення системності їхніх знань* / Світлана Лук'янова. "Grail of Science. Periodical scientific journal", (33): 335-342. <https://doi.org/10.36074/grail-of-science.10.11.2023.53>
- [3] Лук'янова, С. М. *Використання методу доцільних задач задля надолуження освітніх втрат учнівства з математики. (2024). Дидактика математики: теорія, досвід, інновації, 1, 42-52*. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-1-42-52>

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: 19fmf.v.pavlichenko@std.npu.edu.ua

ОЦІНКА НЕЛЬСОНА-ААЛЕНА

О.О. ПЛУГАТОР, О.А. ЛАГОДА

Оцінка Нельсона-Аалена — це непараметрична оцінка функції кумулятивної інтенсивності ризику у випадку цензурованих або неповних даних [1, 2]. Її використовують у теорії виживання, інженерії надійності та страхуванні життя, щоб оцінити кумулятивну кількість очікуваних подій. «Подією» може бути відмова елемента непридатного для ремонту, смерть людини або будь-яке явище, після якого експериментальний об'єкт перебуває в «несправному» стані (наприклад, смерть), починаючи з моменту зміни його стану.

Оцінка задається формулою:

$$\tilde{H}(t) = \sum_{t_i \leq t} \frac{d_i}{n_i},$$

де:

- d_i — кількість подій у момент часу t_i ,
- n_i — загальна кількість осіб під ризиком у момент t_i .

За допомогою оцінки Нельсона-Аалена можна проінтерпретувати опуклість функції інтенсивності ризику. Опукла вгору форма є індикатором дитячої смертності, тоді як опукла вниз форма вказує на смертність від старіння. Також оцінку Нельсона-Аалена можна застосовувати, наприклад, для перевірки однорідності потоків Пуассона.

Дисперсію оцінки Нельсона-Аалена можна оцінити як:

$$\hat{\sigma}^2(t) = \sum_{t_j \leq t} \frac{(n_j - d_j)d_j}{(n_j - 1)n_j^2}.$$

У великих вибірках оцінка Нельсона-Аалена в заданий момент часу t апроксимується нормально розподіленою. Отже, стандартний $100(1 - \alpha)\%$ довірчий інтервал для $\tilde{H}(t)$ [2] має вигляд:

$$\tilde{H}(t) \pm z_{1-\alpha/2} \hat{\sigma}(t),$$

де $z_{1-\alpha/2}$ — квантиль стандартного нормального розподілу рівня $1 - \alpha/2$.

Апроксимацію до нормального розподілу можна покращити за допомогою логарифмічного перетворення, що дає довірчий інтервал у формі:

$$\tilde{H}(t) \cdot \exp \left(\pm z_{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}(t)}{\tilde{H}(t)} \right).$$

Цей інтервал є задовільним навіть для досить малих обсягів вибірки.

Прирости оцінки Нельсона-Аалена є некорельованими, невизначеність, викликана малими значеннями часу, не впливає на приріст

$$\hat{A}(t) - \hat{A}(s)$$

оцінки Нельсона-Аалена на півінтервалі $(s, t]$. Оцінку дисперсії цього приросту можна обчислити як

$$\hat{\sigma}^2(t) - \hat{\sigma}^2(s).$$

Оцінка була розроблена Вейном Нельсоном та Оддом Ааленом. Ці два провідних учених незалежно один від одного зробили фундаментальний внесок у розвиток методів оцінювання кумулятивної інтенсивності ризику на основі цензурованих даних.

Вейн Нельсон (народився в м. Чикаго, 1936) — американський статистик, відомий своїм доробком в теорії надійності та інженерній статистиці. Працював над контролем якості, аналізом похибок вимірювань, плановими експериментами, відбором зразків та аналізом даних. Він першим запропонував використовувати непараметричну оцінку кумулятивної інтенсивності ризику, яка згодом отримала назву оцінки Нельсона-Аалена. Його підхід дав змогу візуально перевіряти відповідність параметричних моделей на основі емпіричних даних. Його книга [3] стала класичною працею у галузі аналізу виживання.

Одд Аален (народився в м. Осло, 1947) — норвезький статистик і професор Університету Осло. Він незалежно від Нельсона вивів аналогічну оцінку в контексті процесів підрахунку, що дозволило узагальнити підхід до непараметричної оцінки кумулятивної функції ризику. Його підхід дав змогу сформулювати уніфіковану теорію для широкого класу моделей, включно з моделями з конкуруючими ризиками, залежними від часу змінними та непараметричними структурами. У подальших роботах він спільно з іншими авторами (зокрема, з Брешлоу і ван дер Вартом) розвинув математичну базу для моделей Кокса та сучасних моделей виживання.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Wikipedia. *Nelson-Aalen estimator*.
- [2] Bie, O., Borgan, O., Liestøl, K. *Confidence intervals and confidence bands for the cumulative hazard rate function and their small sample properties*. —// Scandinavian Journal of Statistics. — 1987. — Vol. 14. — P. 221–233.
- [3] Nelson W. *Applied Life Data Analysis*.. — New York, John Wiley & Sons, 1982.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: pluhatorolesya2003@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: lahodaao@gmail.com

КЛАСИФІКАЦІЇ АФІННИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ПЛОЩИНИ

Н.С. ПРАВИЦКА, М.В. ПРАЦЬОВИТИЙ

Афінні перетворення площини (або колінеації) — це перетворення, які зберігають колінеарність точок, тобто кожен три точки, що належать одній прямій, відображає у три точки, які теж належать одній прямій.

Очевидно, що кожен рух (переміщення, ізометричне перетворення) і кожне перетворення подібності, включаючи гомотетію, є афінним перетворенням.

Множина всіх афінних перетворень відносно операції «композиція» перетворень утворює некомутативну групу, нейтральним елементом якої є тотожне перетворення.

З педагогічних міркувань часто наводять наступне означення афінного перетворення: *«Перетворення площини називається афінним, якщо воно: 1) кожен три точки однієї прямої переводить в три точки, що лежать на одній прямій (тобто зберігає колінеарність точок), і 2) зберігає просте відношення трьох точок»* [3].

Вимога збереження простого відношення трьох точок в означенні афінного перетворення є надлишковою, але обґрунтування цього на початку викладу теорії достатньо громіздке і не виправдане затратами часу.

Для означення афінного перетворення площини існує альтернатива: відображення площини на себе, задане формулами:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + x_0, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + y_0, \end{cases} \quad \text{де} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (1)$$

називається афінним перетворенням площини.

Геометричні перетворення, взагалі кажучи, змінюють форму та властивості геометричних. А ті властивості геометричних об'єктів, які не змінюються, називаються інваріантними. Одним із завдань теорії геометричних перетворень є вивчення їхніх інваріантів. Вивчення інваріантних властивостей геометричних фігур під дією перетворень певної групи (підгрупи) — зміст окремих розділів геометрії (геометрій).

Класифікацію афінних перетворень (тобто розбиття множини всіх афінних перетворень на класи еквівалентності) можна здійснити на основі класифікаційного принципу «зберігати»:

- ті, що зберігають орієнтацію площини (тобто всі афінні реperi переводить в реperi тієї ж орієнтації) — афінні *перетворення 1-го роду* (відповідно афінні перетворення, що не зберігають — *2-го роду*);
- ті, що зберігають відстані — *рухи*;
- ті, що зберігають величини кутів — *перетворення подібності*;
- ті, що зберігають площі фігур — *еквіафінні перетворення*.

Окремої уваги заслуговують класифікації, що визначенні в локальних умовах, наприклад, відомо, що властивість «бути медіаною трикутника» є афінною, що не можна, взагалі кажучи, сказати про висоту і бісектрису. Проте можна провести класифікацію групи афінних перетворень, що зберігають властивість «бути бісектрисою трикутника» або «зберігати вид (тип) алгебраїчних кривих» тощо.

Іншим класифікаційним принципом може бути наявність і кількість інваріантних точок:

- Афінні перетворення площини, що не мають інваріантних точок, називаються *вільноафінними*.
- Афінні перетворення площини, що мають лише одну інваріантну точку, називаються *центрафінними*.
- Афінні перетворення площини, що мають безліч інваріантних точок і не співпадають з тотожним перетворенням, називаються *перспективно-афінними*.
- *Тотожне перетворення* (кожна точка площини є інваріантною).

У доповіді пропонується порівняльний аналіз різних підходів класифікацій афінних перетворень, в основі класифікаційного принципу яких є інваріантні властивості фігур площини та їхніх образів.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М.В., Правіцка Н.С. Метод геометричних перетворень — один з основних методів елементарної геометрії // Актуальні питання природничо-математичної освіти — 2024, 1 (23), 31-39.
- [2] Працьовитий М.В. Геометричні перетворення. Теоретико-груповий погляд на геометрію. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2007. — 18с.
- [3] Працьовитий М.В. Геометричні перетворення. Афінні перетворення площини. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2007. — 40с.
- [4] Працьовитий М.В., Правіцка Н.С., Ратушняк С.П. Еквіафінні перетворення площини у математичній освіті школярів та майбутніх вчителів математики// Фізико-математична освіта, Том 40, № 2 (2025). — С. 49–56.

УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна
Email address: n.pravitska@chnu.edu.ua

УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна
Email address: prats4444@gmail.com

КРИПТОГРАФІЯ ЯК ЕЛЕМЕНТ STEM-ОСВІТИ: ФОРМУВАННЯ ЦИФРОВИХ КОМПЕТЕНЦІЙ

А.М. СЕРГІЙЧУК

У сучасних умовах цифрової трансформації освіти особливого значення набуває формування у школярів навичок аналітичного мислення, логічного аналізу та алгоритмізації. Одним із перспективних шляхів цього може бути інтеграція елементів кодування та криптографії. До того ж це сприяє розвитку математичних здібностей, розширенню кругозору та мотивації учнів до вивчення точних наук.

Криптографія це розділ інформатики, який тісно пов'язаний з іншими дисциплінами математичної галузі. З погляду математики, криптографія охоплює такі розділи, як теорія чисел, комбінаторика, алгебра, теорія ймовірностей та математична логіка [1]. Наприклад, основи шифрування базуються на роботі з величинами, функціями та рівняннями, які є змістовими лініями шкільного курсу алгебри. Завдяки цьому криптографія може використовуватися як потужний інструмент для демонстрації практичної цінності математичних знань і розвитку аналітичного мислення учнів.

Для учнів 5–6 класів найбільш прийнятними є:

- числові шифри, що сприяють закріпленню навичок виконання арифметичних операцій (наприклад, «Розшифруйте повідомлення, де кожна цифра відповідає номеру букви в алфавіті: 29-15-19-16-1. Використовуйте український алфавіт», відповідь: «школа»);
- криптарифми, що розвивають аналітичне мислення та здатність до логічних висновків (наприклад, «БІТ+БАЙТ=СЛОВО», відповідь: «Б=9, І=2,3, Т=7, А=5, Й=3,2, С=1, Л=0, О=4, В=6»);
- шифри заміни, які демонструють принципи кодування та дешифрування інформації (наприклад, «За допомогою шифру Цезаря зі зсувом у 3 кроки та латини зашифруйте слово “Academia”», відповідь: «Dfdghpmd»).

Використання таких завдань на уроках математики дозволяє формувати пізнавальний інтерес до математики, сприяє розвитку креативності та гнучкості мислення, а також закладає основу для подальшого освоєння основ криптографії та програмування [2].

З метою ефективного використання криптографічних завдань у навчальному процесі розроблено кілька методичних підходів. Криптографічні задачі можуть бути використані як дидактичний матеріал для вивчення тем, пов'язаних з діями над числами, рівняннями та властивостями чисел. У рамках позакласної діяльності (гурткової роботи) є можливість глибше ознайомити учнів із різними методами шифрування та дешифрування, що сприятиме розвитку дослідницьких навичок та заохоченню до вивчення STEM-дисциплін.

Крім традиційних уроків, важливим компонентом є використання інтерактивних методів навчання. Наприклад, квести, ігри та змагання зі шифрування та дешифрування можуть значно підвищити інтерес учнів до математики. Одним із дієвих методів є навчальні ігри, у яких учні повинні розшифрувати секретні повідомлення, використовуючи знання з математики. Це формує навички логічного мислення, комунікації та командної роботи.

Варто зазначити, що вивчення знакових систем, роботи з ними та способів кодування передбачено Концепцією розвитку природничо-математичної (STEM-освіти) та Цілями сталого розвитку України. Це може відбуватися через впровадження міжгалузевого інтегрованого курсу «STEM» у системі базової загальної середньої освіти. Зокрема, О. Бутурліна та О. Артем'єва пропонують вивчати у 5 класі класифікацію знакових систем та діяльність професій у системі «людина-знак», популяризуючи цим вивчення криптографії та кодування [3]. Саме вивчення пропонується через інтеграцію уроків математики з уроками інформатики, що дає змогу забезпечувати міжпредметні зв'язки та покращувати сприйняття складних тем.

Отже, використання криптографії у навчанні математики є перспективним напрямом, що не лише підвищує мотивацію учнів, а й сприяє розвитку їхніх логічних та алгоритмічних навичок. Інтеграція криптографічних методів у шкільну програму дозволяє зробити навчальний процес більш захопливим і практично орієнтованим, забезпечуючи учнів важливими компетенціями, необхідними для сучасного цифрового світу.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Кожухівський А.Д. *Математичні методи криптології: навчальний посібник*. — Київ: Державний університет комунікацій, 2021. — 244 с.
- [2] Singh S. *The History of Cryptography* // *Mathematics in School*. — 2003. — Jan. 32, № 1. — pp. 2–6.
- [3] *Програма міжгалузевого інтегрованого курсу STEM* [Електронний ресурс]. — URL: <https://yakistosviti.com.ua/bazova-serednia-osvita/stem-7-klas/5-6-klasy/mizhhaluzevyi-intehrovanyi-kurs-stem-5-6-klas>.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
Email address: 21fmf.a.serhiichuk@std.npu.edu.ua

ФОРМУВАННЯ КОМПЕТЕНТНОСТІ ПІДПРИЄМЛИВІСТЬ ТА ФІНАНСОВА ГРАМОТНІСТЬ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ У СТАРШОКЛАСНИКІВ

О.В. ТКАЧ

Актуальним завданням сучасної школи стало формування у старшокласників ключових компетентностей, серед яких чільне місце займає компетентність — підприємливість та фінансова грамотність. У старшій профільній школі вивчається ряд навчальних предметів гуманітарного і природничо-математичного спрямування. Згідно освітнього стандарту [1] всі вони мають долучатись до виконання поставленого завдання. Виникає цілком слушне запитання — Як навчальний предмет математика, зі своїм науковим та світоглядним потенціалом сприяє формуванню в учнів старшої профільної школи компетентності підприємливість та фінансова грамотність? Відповідь на це запитання ми і намагаємося знайти проводячи власне наукове дослідження.

Формування підприємливості та фінансової грамотності передбачає розвиток в учнів ініціативності, відповідальності, вміння аналізувати ризики та можливості, ухвалювати самостійні рішення. Вивчення математики в старшій профільній школі, на нашу думку, має всі необхідні ресурси для реалізації таких підходів через розв'язання практико-орієнтованих завдань з економічним змістом, моделювання фінансових процесів, аналіз ситуацій з бізнес-середовища [4]. Таким чином учні, закінчивши школу, мають бути достатньо обізнаними і здатними долучатись до організації підприємництва та фінансової діяльності.

У своєму дослідженні ми пропонуємо (орієнтовно) наступну тематику наших завдань, прикладних задач та навчальних проектів під час вивчення алгебри і початків аналізу та геометрії (табл. 1).

Наші дослідження показують, що інтеграція елементів підприємливості та фінансової грамотності у зміст математичної освіти дозволяє не лише удосконалювати математичні навички учнів, але й готує їх до реального життя в сучасних економічних умовах. Цей підхід дає змогу учням на практиці відчувати взаємозв'язок математичних знань з їхніми практичним застосуванням, що значно підвищує мотивацію та інтерес до навчання.

Навчальний предмет	Змістові лінії курсу	Тематика завдань (практико-орієнтованих завдань, прикладних задач, проектів)
Алгебра і початки аналізу	Вирази і їхні перетворення	Розрахунок прибутку підприємства з урахуванням витрат, податків та амортизації.
		Обчислення чистої вартості інвестицій після сплати комісій і зборів.
	Рівняння і нерівності	Визначення точки беззбитковості для малого підприємства
	Функція і її графіки	Планування сімейного бюджету з урахуванням інфляції
	Похідна, інтеграл і їхнє застосування	Обчислення оптимального обсягу виробництва продукції з метою максимізації прибутку
Геометрія	Геометричні тіла і їхні властивості	Визначення вартості упаковки та транспортування
		Страховання майна та оцінка його вартості
	Геометричні величини, їхнє вимірювання та обчислення	Визначення вартості оренди залежно від площі
		Оцінювання витрат на комунальні послуги приміщення

ТАБЛ. 1

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Державний стандарт загальної середньої освіти URL: <https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898>
- [2] Д.В. Васильєва *Фінансова грамотність у загальноосвітніх закладах*. — Харків: Ранок, 2021. — 152 с.
- [3] О.В. Овчарук *Компетентнісно орієнтоване навчання: теорія і практика: методичні рекомендації*. — Київ: К.І.С., 2020. — 124 с.
- [4] В.О. Швець *Теорія та методика навчання математики в старшій профільній школі: курс лекцій*. — Київ: Видавництво УДУ імені Михайла Драгоманова, 2024. — 498 с.

УДУ ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА, КИЇВ, УКРАЇНА
 Email address: ms.helentkach@gmail.com

ВИБІР МОДЕЛІ MIRT ДЛЯ АНАЛІЗУ ТЕСТІВ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

С.Д. ШИМЧИК, Н.В. КРУГЛОВА, О.О. ДИХОВИЧНИЙ

Наразі комп'ютерні тести продовжують залишатись основною формою контролю знань студентів у дистанційній формі навчання, яка превалює у сучасній Україні. У цій царині найважливішою задачею є створення якісних тестів. Основу аналізу якості тестових завдань і тестів у цілому традиційно складають Класична Теорія Тестів (СТТ) [1] та так звана Сучасна Теорія Тестів (IRT) [2]. Але методи IRT допускають розвиток та уточнення. Цей розвиток реалізує Multidimensional Item Response Theory (MIRT) [3], Багатовимірна Теорія Тестів, в якій здібності студента, що кількісно описуються відповідними латентними параметрами, є векторами. Такий підхід дає можливість вирізнити окремі здібності студента під час тестування. Центральним питанням аналізу багатовимірних тестів є вибір найбільш адекватної моделі MIRT для аналізу якості. Дослідження вибору розмірності для тестів з вищої математики були зроблені в роботах [4] та [5].

Але в цих роботах пошук вимірності відповідних MIRT моделей був обмежений моделями двох типів. Для політомічних завдань безпосередньо застосовувалась GPCM (Generalized Partial Credit Model) модель. Окрім того, розкладаючи політомічні завдання на дихотомічні, було застосовано 2-PL (Two-Parameter Logistic Model) модель для дихотомічних завдань. За методикою, наведеною в [5], оптимальними розмірностями у тестах з вищої математики виявились розмірності $s = 1$ або $s = 2$.

У даній роботі за мету було поставлено розширити список політомічних моделей, не розкладаючи їх на дихотомічні. До того ж, збільшити набір алгоритмів Exploratory Factor Analysis (EFA) для попереднього визначення розмірності. У роботі [5] застосовувались три алгоритми: PA (Parallel Analysis), ЕКС (Empirical Kaiser Criterion), HULL (Hull Method).

Стратегія пошуку оптимальної вимірності моделі була збережена. Вона була підтверджена у роботі [6]. До того ж, в цьому дослідженні ми додаємо ще вибір самої моделі.

Зміст стратегії пошуку розмірності полягає у наступному:

- Проведення Exploratory Factor Analysis (EFA) для первинного вибору розмірності. На цьому етапі список вже використаних алгоритмів був поповнений наступними алгоритмами: CD (Comparison Data), NEVALSGT1 (Number of Eigenvalues Greater Than 1), SESCREE (Second Eigenvalue Scree), SMT (Sequential Mean Test).
- Проведення Confirmatory Factor Analysis (CFA). На цьому етапі проводиться оцінка параметрів шляхом розв'язання нелінійних систем рівнянь за допомогою алгоритмів ЕМ або NH-RM згідно [7]. Ми додаємо ще моделі: GRM (Graded Response Model), PCM (Partial Credit Model) та NRM (Nominal Response Model) різних розмірностей.
- Вибір оптимальної моделі й розмірності шляхом перевірки адекватності на підставі застосування критеріїв: AIC, BIC, RMSEA, TLI, CFI, які реалізовано в пакеті MIRT [7].

Для проведення дослідження було обрано дві КР, які проводились на РТФ КПІ імені Ігоря Сікорського у 2024 році. Загальний об'єм вибірки складав 80 студентів. У ході дослідження було знайдено можливі інші адекватні моделі, розмірність яких відмінна від знайдених раніше.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Crocker L., Algina J. *Introduction to Classical and Modern Test Theory* — Belmont, CA:Wadsworth, 2006. — 527 p.
- [2] W. Linden, R. Hambleton *Handbook of modern item response theory* — New York: Springer, 2018. — 1500 p.
- [3] Reckase M. D. *Multidimensional item response theory* — New York:Springer, 2009. — 354 p.
- [4] Kruglova N., Dykhovychnyi O. *Choosing MIRT Model for Analysis of Quality of Pedagogical and Psychological Tests* // 2022 IEEE 3rd International Conference on System Analysis & Intelligent Computing (SAIC) — 2022. — pp. 1–4.
- [5] Попрожок М. О., Круглова Н. В., Диховичний О. О. *Вибір розмірності моделі MIRT для аналізу тестів з вищої математики* //Тези XI Всеукраїнській науковій конференції молодих математиків, 11-13 травня 2023. Український державний університет імені Михайла Драгоманова, — 2023. — с.127-128.
- [6] Mahmood Ul H., Frank M. *Discrimination with unidimensional and multidimensional item response theory models for educational data* // Communications in Statistics - Simulation and Computation, — 2019. — с. 1–21.
- [7] Chalmers F. *Multidimensional Item Response Theory Workshop in R* — York University, 2015. — 88 p.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: serj28012000@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

ІСТОРИЧНИЙ ТА МЕТОДИЧНИЙ ПІДХОДИ ДО НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ: ФОРМУВАННЯ ЗМІСТОВОГО І МОТИВОВАНОГО ПІЗНАННЯ

Б.А. ШУМЕР

Математика в системі вищої освіти займає фундаментальне місце. Вона виступає не лише основою для вивчення природничих, технічних і економічних наук, але й формує у студентів здатність до абстрагування, побудови логічно послідовних суджень, аналітичного осмислення дійсності та вміння діяти в умовах формальної строгості. Університетський рівень вивчення математики передбачає більш глибоке занурення у структуру математичних знань, їхню систематизацію та розуміння внутрішньої логіки науки, що не завжди є інтуїтивно очевидним для студентів. Тому питання мотивації та усвідомленого пізнання математичних понять стає ключовим у процесі викладання. Сучасна методика викладання математики у навчальних закладах тяжіє до відходу від формального подання матеріалу у вигляді набору означень, теорем і доведень. Вона прагне зробити математичну освіту більш гнучкою та адаптивною. Особлива увага приділяється створенню таких навчальних умов, у яких студент виступає не пасивним, а активним суб'єктом пізнання, здатним формувати питання, будувати гіпотези, шукати власні способи розв'язання задач, критично аналізувати отримані результати. Одним із ефективних прийомів вважається аналіз типових помилок, які виникають у студентів під час вивчення складних тем. Помилка в цьому випадку не є проявом незнання, а навпаки — показником того, що студент перебуває у процесі активного пошуку, намагається інтерпретувати нову інформацію через призму вже наявних знань. Завдання викладача — не карати за помилку, а перетворити її на джерело розвитку, спрямувати розуміння в правильне русло, показати, чому певне міркування є некоректним, і тим самим навчити студента мислити обережно, строго і самокритично. Також важливою складовою методики є візуалізація математичних понять. На рівні університетської освіти це набуває ще більшої ваги, оскільки багато розділів математики (зокрема, математичний аналіз, лінійна алгебра, диференціальні рівняння...) оперують надзвичайно абстрактними об'єктами, які важко уявити без підтримки зорових образів. Візуалізація дозволяє студентам зв'язати формальні структури з геометричними чи фізичними аналогами, а це,

у свою чергу, полегшує процес розуміння і підвищує мотивацію до вивчення. Сюди належить використання графіків, просторових моделей, комп'ютерних симуляцій та анімацій. Інструменти на зразок GeoGebra, Mathematica чи Python із бібліотеками не лише ілюструють теоретичні побудови, а й відкривають шлях до практичного застосування знань у дослідницькій діяльності. Разом із цим варто зауважити, що особливу роль у методиці відіграє здатність викладача створити інтелектуальну атмосферу діалогу, пошуку, відкриття. Математика в університеті — це не набір формул, які треба зазубрити, а простір, де формується мова точного мислення, інструментарій раціонального аналізу, спосіб організації знань про світ. У цьому контексті постає питання про більш глибоке залучення історії математичних ідей до навчального процесу. Вивчення історії математичних концепцій дає змогу студентам зрозуміти, що жодне означення чи теорема не з'явилися випадково, що за кожним поняттям стоїть контекст, проблема, потреба. Такий підхід формує історичну свідомість, інтелектуальну емпатію, а також дозволяє побачити математику як процес, а не як застиглу систему істин. Справжня сила навчання математики проявляється тоді, коли методика викладання не лише передає зміст, а вводить студента у контекст виникнення знань, коли історія не є додатком, а основою розуміння.

З огляду на вищезазначене, можемо дійти висновку, що поєднання історичного і методичного підходів у викладанні математики відкриває нові горизонти у формуванні компетентного, мотивованого і мислячого фахівця. Такий підхід дозволяє побудувати навчальний процес як простір дослідження, де кожне математичне поняття постає не лише як об'єкт вивчення, але й як культурне явище, як результат тривалої інтелектуальної еволюції. Викладач, який вміє поєднати точність математичного формулювання з глибиною історичного осмислення, не просто передає знання — він формує нове покоління науковців, інженерів, аналітиків, здатних бачити зв'язки, критично мислити і цінувати інтелектуальну працю як важливу складову людського розвитку. Саме в цьому — головна мета математичної освіти в університеті.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Бевз А.В., Бевз Г.П. *Методика навчання математики в основній і старшій школі*. — Київ: Видавництво «Освіта», 2021. — 384 с.
- [2] Тризна Н.В. *Методика викладання математики у вищій школі*. — Харків: Вид-во НТУ «ХПІ», 2018. — 256 с.
- [3] Клайн М. *Математика: втрата певності*. — Київ: Наукова думка, 1990. — 352 с.
- [4] Skemp R.R. *The Psychology of Learning Mathematics*. — London: Penguin Books, 1976. — 224 p.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: boghdanahumer@gmail.com