Лекція 1

МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ

Метод математичної індукції часто використовується у математичних доведеннях. Продемонструємо ідею цього принципу на прикладі розв'язання наступної задачі.

Задача 1. *Елементами множини A є натуральні числа. Відомо, що*

i_1) $1 \in A$;
i_2) *якщо* $k \in A$, *то* $k+1 \in A$.

Довести, що довільне натуральне число належить A.

Розв'язання задачі 1. Необхідно довести, що кожне натуральне число належить множині A. Доведемо, спочатку, що $2 \in A$. Дійсно, оскільки $1 \in A$ за умовою i_1), то з i_2) при $k = 1$ випливає, що $2 \in A$. Аналогічно доводиться, що $3 \in A$: оскільки $2 \in A$, то, застосовуючи i_2) для $k = 2$, доводимо, що $3 \in A$.

За такою ж схемою доводиться те,що довільне натуральне число належить множині A.

1. Принцип математичної індукції

Позначимо через A деяке твердження, яке відноситься до довільного натурального числа n, наприклад

(1)
$$A = \langle \text{сума кутів у випуклому многокутнику з } n+2 \text{ сторонами дорівнює } 180^\circ \cdot n \rangle.$$

[0]Printed from the file [discretka_L=00.tex] on 25.7.2013

Для того, щоб довести справедливість твердження A для довільного значення n, недостатньо довести його для перших 10, або 100, або навіть 1000 значень n. Нам потрібно користуватись строгими математичними міркуваннями, основні ідеї яких продемонстровано при розвязуванні задачі 1. Якщо $n = 1$, то мова в (1) йде про трикутник, а ми знаємо з елементарної геометрії, що сума його кутів дорівнює $180^\circ \cdot 1$. Тобто твердження A є вірним для $n = 1$.

У випадку $n = 2$ (тобто, чотирикутника), ми проводимо діагональ, яка ділить чотирикутник на два трикутника. Зрозуміло, що сума кутів чотирикутника дорівнює сумі кутів двох трикутників, а сама сума дорівнює $180^\circ + 180^\circ = 180^\circ \cdot 2$. Це означає, що твердження A є вірним і для $n = 2$.

Переходячи до випадку $n = 3$ (тобто, до п'ятикутника), ми розбиваємо його на два багатокутники, чотирикутник та трикутник. Оскільки перший з цих багатокутників за доведенням має суму кутів $180^\circ \cdot 2$, а другий — $180^\circ \cdot 1$, то сума кутів п'ятикутника дорівнює $180^\circ \cdot 3$, тобто A є вірним також і для $n = 3$.

Тепер стає зрозуміло, що ці міркування можна повторювати безмежно. Таким чином ми доведемо твердження A для випадку $n = 4$, потім для випадку $n = 5$, і так далі. Як і раніше, кожний наступний висновок випливає з попереднього, і твердження A виявляється доведеним при довільному значенні n.

1.1. Формулювання принципу математичної індукції. І в задачі 1, і в доведенні істинності твердження (1), ми використали такий прийом: твердження A справедливе для довільного натурального числа n, якщо

i_1) відомо, що воно є вірним для $n = 1$;

$i_2)$ існує загальний метод доведення того, що якщо твердження є вірним для $n = r$, то воно є вірним також і для $n = r + 1$.

Принцип математичної індукції складається з двох частин: перша частина, яка міститься в $i_1)$, називається *базою індукції*, а друга частина, яка міститься в $i_2)$, — *індуктивним переходом.*

2. Декілька найпростіших застосувань

Складно перелічити всі математичні твердження, які доводяться методом математичної індукції. Ми розглянемо лише декілька прикладів доведення властивостей одного із цікавих числових сімейств. Інші приклади доведень методом математичної індукції з'являться пізніше в інших лекціях.

2.1. Трикутні числа. Кількість зірочок, які можуть бути розставлені у формі рівностороннього трикутника, називається*трикутним числом.* Приклади таких розстановок наведені нижче.

★ ★ ★	★ ★ ★ ★	★ ★ ★ ★ ★
★ ★	★ ★ ★	★ ★ ★ ★
★	★ ★	★ ★ ★
	★	★ ★
		★

Таким чином, числа 6, 10 і 15 — трикутні. Нескладно помітити, що з арифметичної точки зору трикутними є числа $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$ й взагалі

$$T_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n, \qquad n > 3.$$

Назвемо n-им трикутним числом n-ий член послідовності $\{T_n\}$. З означення n-го трикутного числа зрозуміло, що воно обчислюється з $(n-1)$-го трикутного числа, якщо додати до нього число n, тобто

$$T_n = T_{n-1} + n, \qquad n \geq 2. \tag{2}$$

Для визначення більш простого виразу для T_n, проведемо такі геометричні перетворення трикутника, утвореного T_3 зірочками:

$$\begin{array}{ccccc}
\star\ \star\ \star & & \star\ \star\ \star\ \ \ & & \star\ \star\ \star\ \square \\
\star\ \star & \longrightarrow & \star\ \star\ \ \ \ \ \ \ \ & \longrightarrow & \star\ \star\ \square\ \square \\
\star & & \star\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ & & \star\ \square\ \square\ \square
\end{array}$$

Перше перетворення — це зсув всіх символів в кожному рядку і вирівнювання по лівому краю. Друге — це доповнення кожного рядка так, щоб всі вони містили однакову кількість символів.

Перші дві конфігурації мають однакову кількість символів, а третя — в два рази більше. Кількість символів в третій конфігурації підрахувати просто, якщо помітити, що вона складається із трьох рядків, в кожному з яких міститься чотири символи. Тому в цій конфігурації 12 символів, значить в першій — 6.

Оскільки в цьому прикладі підрахувати кількість точок можна і безпосередньо, то проведене міркування може здатися недоречним. Але воно має важливу властивість: його можна узагальнити на довільну конфігурацію.

Якщо виконати геометричні перетворення, описані вище, але для трикутника, складеного з T_n точок, то ми доведемо формулу

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad n \geq 1. \tag{3}$$

Продемонструємо інше доведення формули (3) за допомогою метода математичної індукції. В даному випадку твердження A, яке необхідно довести за допомогою принципа математичної індукції, виражається рівністю (3). Безпосередньо перевіряємо, що $T_1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$, тобто (3) виконано для $n = 1$. Тим самим ми перевірили базу індукції i_1). Індуктивний перехід i_2) перевіряється таким чином: якщо твердження (3) виконується для $n = r$, то

$$T_r = \frac{r(r+1)}{2}.$$

Використовуючи (2), отримуємо

$$T_{r+1} = T_r + (r+1) = \frac{r(r+1)}{2} + (r+1) = \frac{(r+1)(r+2)}{2}.$$

Ця рівність і є властивість (3) для $n = r+1$. Таким чином ми перевірили справедливість індуктивного переходу, значить рівність (3) є справедливою для довільного $n \geq 1$ в силу принципу математичної індукції.

Задача про рукопотискання. У приміщенні знаходиться n людей, кожні двоє з них обмінялись рукопотисканнями. Тоді загальна кількість рукопотискань дорівнює T_{n-1}. $\boxed{\text{впр. 1}}$

Повнозв'язна топологія. Топологія комп'ютерної мережі, в якій кожна робоча станція підключена до кожної з усіх інших, називається *повнозв'язною.* Цей варіант побудови мережі є громіздким і неефективним, незважаючи на свою логічну простоту. Для кожної пари робочих станцій необхідно виділити незалежну лінію, а кожний комп'ютер повинен мати стільки комунікаційних портів, скільки комп'ютерів включено в мережу. По цим причинам мережа з такою топологією не може мати велику кількість вузлів. Найчастіше повнозв'язна топологія використовується в багатомашинних комплексах або глобальних мережах при малій кількості робочих станцій. Кількість з'єднань в такій мережі дорівнює

$$T_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2.2. Сума трикутних чисел. Сума всіх трикутних чисел до n-го включно дорівнює

$$\sum_{k=1}^{n} T_k = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}, \qquad n \geq 1. \tag{4}$$

Доведемо формулу (4) методом математичної індукції. База індукції, тобто рівність (4) при $n = 1$, очевидно є справедливою. Перевіримо індуктивний перехід: якщо (4) виконується при $n = r$, то з (3) випливає

$$\sum_{k=1}^{r+1} T_k = \sum_{k=1}^{r} T_k + T_{r+1} = \frac{r(r+1)(r+2)}{6} + \frac{(r+1)(r+2)}{2}$$
$$= \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{6}.$$

Ця рівність і є властивістю (4) для $n = r + 1$. Таким чином ми перевірили справедливість індуктивного переходу, тобто (4) справедлива для довільного $n \geq 1$ в силу принципу математичної індукції.

2.3. Сума обернених трикутних чисел. Сума чисел обернених до трикутних дорівнює

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{T_k} = 2 - \frac{2}{n+1}. \tag{5}$$

Доведемо формулу (5) методом математичної індукції. База індукції, тобто рівність (5) при $n = 1$, є істиною. Перевіримо індуктивний перехід: якщо (5) виконується при $n = r$, то з (3) випливає

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{r+1} \frac{1}{T_k} = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{T_k} + \frac{1}{T_{r+1}} &= 2 - \frac{2}{r+1} + \frac{2}{(r+1)(r+2)} \\ &= 2 - \frac{2}{r+2}.\end{aligned}$$

Ця рівність і є властивістю (5) для $n = r + 1$. Таким чином ми перевірили справедливість індуктивного переходу, тобто рівність (5) є справедливою для довільного $n \geq 1$ в силу принципу математичної індукції.

2.4. Сума кубів. Сума кубів натуральних чисел від 1 до n дорівнює квадрату n-го квадратного числа, тобто

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = T_n^2, \qquad n \geq 1. \tag{6}$$

Доведемо формулу (6) методом математичної індукції. База індукції, тобто рівність (6) при $n = 1$, є істиною. Перевіримо індуктивний перехід: якщо (6) виконується при $n = r$, то з (3) випливає

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{r+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{r} k^3 + (r+1)^3 = T_r^2 + (r+1)^3 \\ &= \left(\frac{r(r+1)}{2}\right)^2 + (r+1)^3 = (r+1)^2\left(\frac{r^2}{4} + r + 1\right) \\ &= \left(\frac{(r+1)(r+2)}{2}\right)^2 = T_{r+1}^2.\end{aligned}$$

Ця рівність і є властивістю (6) для $n = r + 1$. Таким чином ми перевірили справедливість індуктивного переходу, тобто рівність (6) є справедливою для довільного $n \geq 1$ в силу принципу математичної індукції.

3. Рекурентні рівності

З індукцією тісно пов’язані так звані *рекурентні рівності.* Ми познайомимося з ними на прикладі додаткових властивостей трикутних чисел.

Міркування ми почнемо з формули (2), за допомогою якої кожне трикутне число можна виразити через попереднє. Якщо члени деякої послідовності $\{a_n\}$ дорівнюють сумам членів іншої послідовності $\{b_n\}$, тобто

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} b_k,$$

то

$$a_n = a_{n-1} + b_n. \tag{7}$$

Якщо числа b_n відомі, то (7) — це *рекурентне рівняння* для послідовності $\{a_n\}$, яке дозволяє підрахувати кожне a_n за попереднім a_{n-1}. Наприклад, суму кубів $a_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} k^3$ натуральних чисел можна записати у вигляді рекурентної рівності

$$a_n = a_{n-1} + n^3.$$

Саме цю рівність ми використовували при доведені рівності (6) методом математичної індукції. Точно так само ми доводили рівність (4), використовуючи *рекурсію*

$$a_n = a_{n-1} + T_n.$$

Цей самий прийом був використаний для доведення рівності (5) за допомогою рекурсії

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{T_n}.$$

3.1. Трикутні числа, які є квадратами. Рекурентні рівності, як правило, мають складнішу структуру, ніж (7). Ми побачимо це на наступному прикладі.

Деякі трикутні числа є квадратами, наприклад $T_1 = 1^2$ і $T_8 = 6^2$. Можна довести, що трикутних чисел з такою властивістю нескінченно багато. Просте доведення цього твердження основане на такій лемі. $\boxed{\text{впр. 6}}$

Лема 1. *Нехай s — трикутне число. Тоді*

$$t = 4s(8s+1)$$

також трикутне число. Якщо, крім того, s — квадрат натурального числа, то і t квадрат натурального числа.

Означимо тепер послідовність $\{S_n\}$ таким чином: $S_1 = 1$,

$$S_{n+1} = 4S_n(8S_n+1), \qquad n > 1. \tag{8}$$

Згідно до леми 1, всі члени цієї послідовності є трикутними числами, які дорівнюють квадратам натуральних чисел. Таким чином, чисел з такими властивостями дійсно нескінченно багато.

Рівність (8) дозволяє знайти S_{n+1} за допомогою S_n, тобто є рекурентною рівністю. Зрозуміло також, що (8) зовсім не схожа на (7), оскільки включає S_n^2 в правій частині, тоді як (7) включає лише перші степені членів послідовності.

Не всі трикутні числа, які дорівнюють квадратам натуральних чисел, можна отримати за допомогою формули (8). Дійсно, перші три члени цієї послідовності дорівнюють 1, 36, 41616. Перші чотири трикутних числа, які дорівнюють квадратам натуральних чисел, дорівнюють 1, 36, 1225, 41616. Таким чином, число 1225 не входить в послідовність (8).

Існує інша формула, за якою можна знайти всі трикутні числа, які є квадратами. Якщо n-те число з такою властивістю позначити через Q_n, то[1] $Q_0 = 0$,

$$Q_n = 34Q_{n-1} - Q_{n-2} + 2, \qquad n > 1. \tag{9}$$

[1] Це твердження ми не доводимо.

Формула (9) відрізняється і від (7), і від (8), оскільки в правій частині включає два попередніх члени послідовності, тоді як (7) і (8) включають лише один. Тим не менш, (9) також називається рекурентною рівністю: вона дозволяє підрахувати кожний член послідовності за попереднім. Нескладно перевірити, що $Q_2 = 36$, $Q_3 = 1225$ та $Q_4 = 41616$.

3.2. Рівняння Пелля. Нехай T_n — це n-те трикутне число, яке є квадратом. Тоді

$$\frac{n(n+1)}{2} = m^2 \quad \text{або} \quad (2n+1)^2 = 8m^2 + 1.$$

Позначивши $x = 2n + 1$ і $y = 2m$, приходимо до рівняння

$$x^2 - 2y^2 = 1, \tag{10}$$

яке називається *рівнянням Пелля.* Можна показати, що всі розв'язки цього рівняння можна виразити через *числа Пелля* $\{P_k\}$ наступним чином: $\boxed{\text{впр. 7}}$

$$x = P_{2k-1} + P_{2k}, \qquad y = P_{2k}. \tag{11}$$

Самі ж числа Пелля визначаються через таку рекурентну рівність: $P_0 = 0$, $P_1 = 1$,

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, \qquad n > 1. \tag{12}$$

4. Розв’язання найпростіших рекурентних рівнянь

4.1. Арифметична прогресія. Розглянемо послідовність $\{a_n\}$, задану рекурентною рівністю: $a_0 = 0$,

$$a_n = d + a_{n-1}, \qquad n \geq 1. \tag{13}$$

Методом математичної індукції доведемо, що $a_n = nd$, $n \geq 1$. База індукції перевіряється безпосередньо підстановкою $n = 1$ в (13). Індуктивний крок також нескладний:

$$a_n = d + a_{n-1} = d + (n-1)d = nd.$$

4.2. Геометрична прогресія. Нехай послідовність $\{a_n\}$ задана рекурентною рівністю: $a_0 = 1$,

$$a_n = qa_{n-1}, \qquad n \geq 1. \tag{14}$$

Тут q — деяке дійсне число. Доведемо, що $a_n = q^n$. Для цього скористаємося методом математичної індукції. База індукції перевіряється безпосередньо: $a_1 = qa_0 = q^1$. Для перевірки індуктивного переходу запишемо

$$a_{r+1} = qa_r = q \cdot q^r = q^{r+1}.$$

Таким чином ми перевірили справедливість індуктивного переходу та істиність потрібної формули для довільного натурального числа $n \geq 1$.

Розглянемо більш складне рекурентне рівняння: $a_0 = 1$, $a_1 = 1$,

$$a_n = q_1 a_{n-1} + q_2 a_{n-2}, \qquad n > 1.$$

Розв'язання такого рівняння розглянемо на прикладі $q_1 = 2$ та $q_2 = -1$, тобто

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, \qquad n > 1.$$

Тоді $a_1 - a_0 = 1$ і

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2}, \qquad n > 1.$$

Звідси випливає, що всі різниці $a_n - a_{n-1}$ рівні між собою і дорівнюють 1, тобто

$$a_n - a_{n-1} = 1, \qquad n > 1.$$

Методом математичної індукції звідси нескладно вивести, що $a_n = n$, $n \geq 1$.

4.3. Арифметично-геометричні прогресії. Комбінація умов (13)–(14) приводить до іншого типу послідовностей, а саме

$$a_n = d + qa_{n-1}, \qquad n \geq 1. \tag{15}$$

Розглянемо частковий випадок $d = 1$, $q = 2$. Нехай a_0=0. Щоб розв'язати рекурентне рівняння

$$a_n = 2a_{n-1} + 1, \qquad n \geq 1, \tag{16}$$

перепишемо його у такому вигляді

$$b_n = 2b_{n-1}, \quad \text{де} \quad b_n = a_n + 1.$$

Таким чином, $\{b_n\}$ — це геометрична прогресія, тобто

$$b_n = 2^n, \qquad a_n = 2^n - 1.$$

4.4. Задача про Ханойську вежу. Рекурентне рівняння (16) пов'язане з відомою головоломкою, яка називається *Ханойською вежею.* Сама головоломка утворена трьома стрижнями і кількома дисками різних розмірів, які можна насунути на будь-який стрижень. У початковому стані два стрижні є порожніми, а всі диски розташовано на третьому в монотонно спадному порядку їхніх діаметрів, якщо відлік починати знизу. Така конструкція нагадує вежу.

Метою головоломки є перенести весь стос дисків на інший стрижень, дотримуючись таких правил:

a: за один раз можна рухати лише один диск.

b: Кожен крок полягає в перенесенні верхнього диска з одного зі стрижнів і насування його на інший стрижень зверху.

c: Диск не можна класти на інший, якщо той має менший діаметр.

Відомо, що найменша кількість рухів a_n, необхідних для того, щоб розв'язати задачу про Ханойську вежу з n дисками, задовольняє рекурентне рівняння (15). Тому $a_n = 2^n - 1$.

Зауваження 1. На Заході цю задачу вперше опублікував французький математик Едуард Люка у 1863 році. Існує легенда про храм в Індії, який містить велику кімнату з трьома стовпами і 64 золотими дисками на них. Жрець брагман, виконує команду давнього пророцтва, переставляючи ці диски згідно з правилами головоломки. У легенді сказано, що після завершального руху настане кінець світу.

Уявімо, що в легенді, яку опублікував Люка, жрець пересуває кожен диск за одну секунду. Тоді він закінчить своє завдання за $2^{64} - 1 \approx 10^{18}$ секунд. Щоб уявити величину цього числа, зауважимо, що у хвилині менше, ніж 100 секунд, у годині менше, ніж 100 хвилин, у добі менше, ніж 100 годин, у році менше, ніж 1000 діб. Таким чином, кожен рік містить менше, ніж 10^9 секунд, тобто своє завдання жрець закінчить більше, ніж за 10^9 (один мільярд) років.

Ці обчислення дають надто грубе наближення. Більш точний підрахунок приводить до відповіді 2×10^{13} (20 трільйонів) років.

ВПРАВИ

Вправа 1. В кімнаті знаходиться n людей, кожні двоє з яких обмінялись рукопотисканнями. Довести, що загальна кількість рукопотискань дорівнює T_{n-1}.

Вправа 2. З'єднаємо відрізками прямих всіх сусідів в трикутнику T_n (по горизонталям, вертикалям і діагоналям). Кількість відрізків позначимо через L_n, $L_0 = 0$. Довести, що

1) $L_n = L_{n-1} + 3(n-1)$, $n \geq 1$;
2) $L_n = 3T_{n-1}$, $n \geq 2$.

Вправа 3. Довести, що $T_n + T_{n-1} = (T_n - T_{n-1})^2 = n^2$.

Вправа 4. Довести, що $T_{i+j} = T_i + T_j + ij$.

Вправа 5. Довести, що $T_{ij} = T_i T_j + T_{i-1} T_{j-1}$.

Вправа 6. Довести лему 1.

Вправа 7. Довести, що x і y, визначені в (11), задовольняють рівняння Пелля (10), де $\{P_k\}$ — це числа Пелля, визначені рекурентною рівністю (12).

Вправа 8. Довести, що яким би не було $n > 1$, десятковий запис числа $2^{2^n} + 1$ закінчується цифрою 7.

Вправа 9. Довести, що найменша кількість рухів a_n, необхідних для того, щоб розв'язати задачу про Ханойську вежу з n дисками, задовольняє рекурентне рівняння (15).