Лекція 2

ДІЇ НАД МНОЖИНАМИ

Ми вважаємо, що поняття *множини* є відомим. Нехай A — деяка множина. Для елементів x множини A ми пишемо $x \in A$. Ми також вважаємо, що відомим є поняття *універсальної* множини, яку ми позначаємо Ω. Для тих елементів Ω, які не належать A, ми пишемо $x \notin A$. Для будь-якого елемента $x \in \Omega$ і будь-якої множини A виконується твердження

$$[x \in A] \vee [x \notin A]. \tag{1}$$

1. Належність множині та рівність множин

Нехай A та B деякі множини. Множина A *належить* множині B, якщо кожний елемент A належить також і B. З використанням логічних символів ми записуємо це означення так:

$$A \subset B \iff \forall\, x\colon x \in A \Rightarrow x \in B. \tag{2}$$

Належність множини A до множини B ми позначаємо $A \subset B$.

Множини A та B є *рівними*, якщо $A \subset B$ та $B \subset A$:

$$A = B \iff [\forall\, x\colon x \in A \Rightarrow x \in B] \wedge [\forall\, y\colon y \in B \Rightarrow y \in A]. \tag{3}$$

---

[0]Printed from the file `[discretka_L=01.tex]` on 25.7.2013

2. Означення основних дій над множинами

Доповнення. Нехай A — деяка множина. *Доповненням множини* A називається множина, яка позначається $\overline{A}$, і яка складається з тих елементів, які не належать A: таким чином,

$$\forall\, x\colon x \in \overline{A} \iff x \notin A. \tag{4}$$

Перетин. Нехай A та B деякі множини. *Перетином множин* A та B називається множина, яка позначається $A \cap B$ (або AB, або $A \cdot B$), і яка складається з тих елементів, які належать обом множинам A та B:

$$\forall\, x\colon x \in A \cap B \iff [x \in A] \wedge [x \in B]. \tag{5}$$

Часто доводиться розглядати перетин кількох множин. Перетином множин $A_1, \dots, A_n$ називається множина, яка позначається $A_1 \cap \dots \cap A_n$ або $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$, і яка складається з елементів, що належать кожній з множин $A_1, \dots, A_n$.

Запишемо умову $x \notin A \cap B$:

$$\begin{aligned} &\forall\, x\colon x \notin A \cap B \iff \\ &\quad [x \in A \wedge x \notin B] \vee [x \notin A \wedge x \in B] \vee [x \notin A \wedge x \notin B]. \end{aligned} \tag{6}$$

Дійсно, умова $x \notin A \cap B$ означає, що елемент x не належить зразу обом множинам A та B. Це може бути в одному з трьох випадків: $x \in A, x \notin B$, або $x \notin A, x \in B$, або $x \notin A, x \notin B$. Саме ці випадки і перераховані у правій частині (6).

2.1. Порожня множина. Якщо перетин множин $A \cap B$ не містить жодного елемента, то зручно писати $A \cap B = \varnothing$ і називати $\varnothing$ *порожньою множиною.*

2.2. Об’єднання. Нехай A та B — деякі множини. *Об’єднанням множин* A та B називається множина, яка позначається $A \cup B$ (або $A+B$), і яка складається з тих елементів, які належать принаймні одній з множин A або B:

$$(7) \qquad \forall\, x\colon x \in A \cup B \iff [x \in A] \vee [x \in B].$$

Часто доводиться розглядати об’єднання кількох множин. Об’єднанням множин $A_1, \ldots, A_n$ називається така множина, яка позначається $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ або $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$, що складається з елементів, що належать принаймні одній з множин $A_1, \ldots, A_n$.

Запишемо умову $x \notin A \cup B$: $\boxed{\text{впр. 1}}$

$$(8) \qquad \forall\, x\colon x \notin A \cup B \iff [x \notin A] \wedge [x \notin B].$$

2.3. Різниця. Нехай A та B деякі множини. *Різницею множин* A та B називається множина, яка позначається $A \setminus B$ (або $A - B$), і яка складається з тих елементів, які належать A, але не належать B:

$$(9) \qquad \forall\, x\colon x \in A \setminus B \iff [x \in A] \wedge [x \notin B].$$

2.4. Симетрична різниця. Нехай A та B деякі множини. *Симетричною різницею множин* A та B називається множина, яка позначається $A \Delta B$, і яка складається з тих елементів, які належать тільки одній з множин:

$$(10) \qquad \begin{aligned} &\forall\, x\colon x \in A \Delta B \iff \\ &\qquad [(x \in A) \wedge (x \notin B)] \vee [(x \notin A) \wedge (x \in B)]. \end{aligned}$$

3. Взаємозв'язки між діями над множинами

Деякі дії над множинами можна виконати за допомогою інших дій. Наприклад,

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}. \tag{11}$$

Доведення рівності (11). Позначимо $C = A \setminus B$ та $D = A \cap \overline{B}$. Згідно з означенням (3) необхідно довести, що $C \subset D$ та $D \subset C$.

Доведення $C \subset D$. Нехай $x \in C$. Тоді $x \in A$, $x \notin B$ згідно з означенням (9). Тому $x \in A$, $x \in \overline{B}$ згідно з означенням (4), тобто $x \in D$ згідно з означенням (5). Тому $C \subset D$ згідно з означенням (2).

Доведення $D \subset C$. Нехай $y \in D$. Тоді $y \in A$, $y \notin B$ згідно з означенням (5). Тому $y \in C$ згідно з означенням (9). Тому $D \subset C$ згідно з означенням (2). □

Інший приклад залежності дій над множинами: $\boxed{\text{впр. 2}}$

$$A \Delta B = [A \cap \overline{B}] \cup [\overline{A} \cap B]. \tag{12}$$

Таким чином всі означені дії над множинами можна виразити через три дії: $\cap$, $\cup$ та доповнення. Чи вистачить для цього двох дій? Відповідь позитивна, її можна отримати за допомогою правил де Моргана.

4. Правила де Моргана

Мають місце такі співвідношення, які називається *правилами де Моргана*:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \tag{13}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}. \tag{14}$$

Доведення рівності (13). Позначимо $C = \overline{A \cup B}$, $D = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Доведення $C \subset D$. Нехай $x \in C$. З означення (4) випливає, що $x \notin A \cup B$, тобто $x \notin A$, $x \notin B$ згідно з правилом (8).

Доведення $D \subset C$. Нехай $y \in D$. З означення (5) випливає, що $y \in \overline{A}$, $y \in \overline{B}$, тобто $y \notin A$, $y \notin B$ згідно з правилом (4) або $y \notin A \cup B$ у відповідності з правилом (8). На підставі означення (4) це і означає, що $y \in \overline{A \cup B}$.

Оскільки $C \subset D$ та $D \subset C$, то з означення (3) випливає, що $C = D$. $\boxed{\text{впр. 3}}$ $\square$

Таким чином вистачає двох дій, щоби виразити через них всі інші. Чи вистачить для цього однієї операції? $\boxed{\text{впр. 6}}$

5. Деякі властивості дій над множинами

5.1. Комутативність. Дія над множинами $\star$ називається *комутативною*, якщо $A \star B = B \star A$ для будь-яких множин A та B.

Теорема 1. *Дії* $\cap$, $\cup$ *та* Δ *є комутативними. Дія* $\setminus$ *не є комутативною.*

Доведення теореми 1. Доведемо теорему тільки для дії $\cap$. Позначимо $C = A \cap B$, $D = B \cap A$.

Доведення $C \subset D$. Нехай $x \in C$. З означення (5) випливає, що $x \in A$ та $x \in B$, тобто $x \in B$ та $x \in A$. Знову використаємо означення (5): $x \in D$.

Доведення $D \subset C$. Нехай $y \in D$. З означення (5) випливає, що $y \in B$ та $y \in A$, тобто $y \in A$ та $y \in B$. Знову використаємо означення (5): $y \in C$.

Таким чином $C = D$ згідно з означенням (3). $\square$

$\boxed{\text{впр. 7}}$

5.2. Асоциативність. Дія над множинами $\star$ називається *асоціативною*, якщо $A\star(B\star C) = (A\star B)\star C$ для будь-яких множин A, B та C.

Теорема 2. *Дії $\cap$, $\cup$ та Δ є асоціативними. Дія $\setminus$ не є асоціативною.*

Доведення теореми 2. Доведемо теорему тільки для дії $\cap$. Позначимо $V = (A \cap B) \cap C$, $W = A \cap (B \cap C)$.

Доведення $V \subset W$. Нехай $x \in V$. З означення (5) випливає, що $x \in A \cap B$, $x \in C$. Ще раз застосуємо означення (5): $x \in A$, $x \in B$, $x \in C$. Тому $x \in A$, $x \in B \cap C$ знову за означенням (5). В останній раз застосуємо означення (5): $x \in V$.

Доведення $W \subset V$. Нехай $y \in W$. З означення (5) випливає, що $y \in A$ та $y \in B \cap C$, тобто $y \in A$, $y \in B$, $y \in C$. Ще двічі застосуємо означення (5): $y \in A$, $y \in B \cap C$, звідки $y \in A$, $y \in B$, $y \in C$. Тепер залишається ще двічі застосувати означення (5): $y \in A \cap B$, $y \in C$, звідки $y \in V$.

Таким чином $V = W$ згідно з означенням (3). $\square$

$\boxed{\text{впр. 8}}$

5.3. Дистрибутивність. Властивостями комутативності та асоціативності дії над множинами $\cap$ та $\cup$ нагадують дії віднімання та додавання для чисел. Аналогію можна продовжити, якщо згадати закон дистрибутивності:

$$
\begin{gathered}
A \cap (B \cup C) = (A \cap C) \cup (B \cap C), \\
A \cdot (B + C) = A \cdot C + B \cdot C.
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Доведення закону (15). Покладемо $V = A \cap (B \cup C)$, $W = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Доведення $V \subset W$. Нехай $x \in V$. З означення (5) випливає, що $x \in A$, $x \in B \cup C$. Отримуємо тепер з означення (7), що x належить принаймні одній з множин B, C. Ще раз застосуємо означення (5): x належить принаймні одній з множин $A \cap B$, $A \cap C$. Нарешті використаємо означення (7): $x \in W$.

Доведення $W \subset V$. Нехай $y \in W$. З означення (7) випливає, що y належить принаймні одній з множин $A \cap B$, $A \cap C$. Тепер з означення (5) отримуємо, що y належить принаймні одній з пар множин A, B або A, C, тобто y належить принаймні одній з множин B, C, звідки $y \in B \cup C$ за означенням (7). Застосувавши означення (5), доводимо тепер, що $y \in V$.

Таким чином $V = W$ згідно з означенням (3). $\square$

Аналогія між діями з числами і множинами не є абсолютною, оскільки наступний закон дистибутивності, двоїстий до (15), для множин виконується, а для чисел — ні:

$$\begin{gathered} A \cup (B \cap C) = (A \cup C) \cap (B \cup C), \\ A + (B \cdot C) = (A + C) \cdot (B + C). \end{gathered} \tag{16}$$

$\boxed{\text{впр. 9}}$

6. Індикаторні функції множини

Індикаторною функцією множини A називається

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases} \tag{17}$$

6.1. Обчислення індикаторних функцій. Наведемо кілька правил, які дозволяють обчислити характеристичні функції.

$$\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A, \tag{18}$$

$$\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B, \tag{19}$$

$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B, \tag{20}$$

$$\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B), \tag{21}$$

$$\mathbb{1}_{A\,\Delta\,B} = \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B) + \mathbb{1}_B(1 - \mathbb{1}_A). \tag{22}$$

Доведення рівності (18). Доведемо, що $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$ для всіх x. Дійсно, якщо $x \in A$, то $\mathbb{1}_A(x) = 1$, а $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 0$ за означенням (17). Якщо ж $x \notin A$, то $\mathbb{1}_A(x) = 0$, а $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 1$ за тим же означенням. □

впр. 10

В П Р А В И

Вправа 1. Довести рівність (8).

Вправа 2. Довести рівність (12).

Вправа 3. Довести рівність (14).

Вправа 4. Довести, що дію $\cup$ можна виразити через $\cap$ та операцію доповнення.

Вправа 5. Довести, що дію $\cap$ можна виразити через $\cup$ та операцію оповнення.

Вправа 6. Придумайте таку дію над множинами, через яку можна виразити всі інші.

Вправа 7. Довести теорему 1 для дій $\cup$, Δ, $\setminus$.

Вправа 8. Довести теорему 2 для дій $\cup$, Δ, $\setminus$.

Вправа 9. Довести закон дистрибутивності (16).

Вправа 10. Довести рівності (19)–(22).

Вправа 11. Чи існують множини A, B і C, для яких одночасно виконуються співвідношення

$$C \neq \varnothing, \quad A \cap B \neq \varnothing, \qquad A \cap C \neq \varnothing, \quad (A \cap B) \setminus C = \varnothing?$$

Вправа 12. Довести, що $A \cup B \subseteq C$ тоді і тільки тоді, коли $A \subseteq C$ та $B \subseteq C$.

Вправа 13. Довести, що $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$.

Вправа 14. Довести, що $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.