Лекція 3

СКІНЧЕННІ МНОЖИНИ

Множина A називається *скінченною*, якщо вона має скінченну кількість елементів. Кількість елементів скінченної множини A позначаємо $|A|$ або $\operatorname{card}(A)$.

1. Кількість елементів в об'єднанні множин

Нехай A та B дві скінченні множини, які не мають спільних елементів. Тоді

$$|A \cup B| = |A| + |B|. \tag{1}$$

Цю формулу можна узагальнити на довільну кількість множин.

Теорема 1. *Нехай $n \geq 2$, а $A_1, \dots, A_n$ — скінченні множини, що попарно не перетинаються, тобто $A_i \cap A_j = \varnothing$ для будь-яких $i \neq j$. Тоді*

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + \dots + |A_n|. \tag{2}$$

Доведення теореми 1. Застосуємо метод математичної індукції.

База індукції: $n = 2$.

Припущення індукції. Припустимо, що рівність (2) виконується для деякого $n = N \geq 2$.

[0]Printed from the file `[discretka_L=02.tex]` on 25.7.2013

Крок індукції. Доведемо рівність (2) для $n = N+1$, тобто для множин $A_1, \ldots, A_{N+1}$, що попарно не перетинаються.

Позначимо $B_1 = A_1 \cup \cdots \cup A_N$, $B_2 = A_{N+1}$. Множини B_1 та B_2 не перетинаються: $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. Це твердження доведемо від супротивного: припустимо, що $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$. Тоді існує принаймні один елемент $x \in B_1 \cap B_2$. Тому $x \in B_1$ та $x \in B_2$ за означенням (2.5) перетину множин. За означенням об'єднання множин це означає, що елемент x належить принаймні одній з множин $A_1, \ldots, A_N$. Нехай цією множиною є A_i. Тоді за означенням перетину множин $x \in A_i \cap A_{N+1}$, що не можливо за припущенням. Таким чином до множин B_1 та B_2 можна застосувати формулу (1):

$$|B_1 \cup B_2| = |B_1| + |B_2| = |A_1 \cup \cdots \cup A_N| + |A_{N+1}|.$$

Застосувавши до першого доданку припущення індукції, доводимо формулу (2) для $n = N + 1$. За правилом математичної індукції це означає, що теорема 1 доведена для довільного n. $\square$

Формула (1) не справджується для множин, що перетинаються. Наприклад, якщо $A_1 = A_2 \neq \varnothing$, то $A_1 \cup A_2 = A_1$ і тому $|A_1 \cup A_2| \neq |A_1| + |A_2|$. В таких випадках треба використовувати іншу формулу:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{3}$$

Якщо множини не перетинаються, то $|A \cap B| = 0$ і формули (3) та (1) співпадають.

Доведення формули (3). Множина B містить $|B| - |A \cap B|$ елементів, які не входять в множину A. Звідси і випливає формула (3). $\square$

Формулу (3) можна узагальнити на випадок трьох множин. Позначимо $B_1 = A_1 \cup A_2$, $B_2 = A_3$. З формули (3) отримуємо

$$\begin{aligned}|B_1 \cup B_2| &= |B_1| + |B_2| - |B_1 \cap B_2| \\ &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| + |A_3| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3|.\end{aligned}$$

На підставі властивості дистрибутивності (2.15) $(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$. Ще раз застосувавши (3), отримуємо

$$|(A_1 \cup A_2) \cap A_3| = |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |(A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3)|.$$

Таким чином

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| &+ |A_2| + |A_3| \\ &- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\ &+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.\end{aligned} \tag{4}$$

2. Формула включень-виключень

Формули (3) та (4) називаються *формулами включень-виключень*. Пояснити цю назву можна на прикладі (3): при підрахунку кількості елементів множини $A_1 \cup A_2$ ми спочатку включаємо до суми кожен елемент з множин A_1 та A_2; після цього ми виключаємо з суми кожен елемент з множини $A_1 \cap A_2$.

Аналог формули (3) можна довести і у випадку довільної кількості множин, яка також називається формулою включень-виключень.

Теорема 2. *Нехай $n \geq 2$ та $A_1, \ldots, A_n$ — скінченні множини. Тоді*

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = S_1 - S_2 + \cdots + (-1)^{n-1} S_n, \tag{5}$$

де $S_1 = |A_1| + \cdots + |A_n|$, $S_2 = \sum |A_i \cap A_j|$ (сума розповсюджується на всі пари різних індексів), … , $S_n = |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$.

Зауваження 1. В теоремі визначені перші два числа S_1 та S_2, а також останнє S_n. Якщо $n = 4$, то в формулу (5) входять доданки S_1, S_2, S_3, S_4. В цьому випадку доданок S_3 визначається як $\sum |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}|$, де сума розповсюджується на всі можливі трійки індексів (i_1, i_2, i_3), жодні два з яких не є рівними. Аналогічно визначаються і інші числа $S_k = \sum |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$, де сума розповсюджується на всі можливі індекси $(i_1, \ldots, i_k)$, жодні два з яких не є рівними та для яких $1 \leq i_1 \leq n, \ldots, 1 \leq i_k \leq n$.

Зауваження 2. Числа $S_1, \ldots, S_n$ у формулі (5) змінюються разом з n. Тому більш точними позначеннями для $S_1, \ldots, S_n$ є $S_{1,n}, \ldots, S_{n,n}$, а сама формула формула (5) для таких позначень стає такою:

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = S_{n,1} - S_{n,2} + \cdots + (-1)^{n-1} S_{n,n},$$

Доведення теореми 2. Застосуємо метод математичної індукції.

База індукції: $n = 2$. Нескладно зрозуміти, що формула (5) при $n = 2$ співпадає з вже доведеною рівністю (3).

Припущення індукції. Припустимо, що (5) виконується для деякого $n = N \geq 2$.

Крок індукції. Доведемо (5) для $n = N + 1$. Покладемо $B_1 = A_1 \cup \dots \cup A_N$, $B_2 = A_{N+1}$. Використовуючи (3), отримуємо

$$\begin{aligned} |B_1 \cup B_2| &= |B_1| + |B_2| - |B_1 \cap B_2| \\ &= |A_1 \cup \dots \cup A_N| + |A_{N+1}| \\ &\qquad - |(A_1 \cup \dots \cup A_N) \cap A_{N+1}|. \end{aligned}$$

За припущенням індукції до першого доданку можна застосувати формулу (5). Відповідні числа $S_{N,1}, \dots, S_{N,N}$ позначимо $S'_{N,1}, \dots, S'_{N,N}$, щоб підкреслити, що вони побудовані за множинами $A_1, \dots, A_N$. До третього доданка застосуємо властивість дистрибутивності:

$$|(A_1 \cup \dots \cup A_N) \cap A_{N+1}| = |(A_1 \cap A_{N+1}) \cup \dots \cup (A_N \cap A_{N+1})|.$$

Тепер і до нього можна застосувати (5). Відповідні числа $S_{N,1}, \dots, S_{N,N}$ позначимо $S''_{N,1}, \dots, S''_{N,N}$, щоб підкреслити, що вони побудовані за множинами $A_1 \cap A_{N+1}, \dots, A_N \cap A_{N+1}$. Таким чином

$$\begin{aligned} &|A_1 \cup \dots \cup A_N \cup A_{N+1}| \\ &\quad = S'_{N,1} - S'_{N,2} + \dots + (-1)^{N-1} S'_{N,N} \\ &\qquad + |A_{N+1}| - \left[S''_{N,1} - S''_{N,2} + \dots + (-1)^{N-1} S''_{N,N}\right] \\ &\quad = [S'_{N,1} + |A_{N+1}|] - [S'_{N,2} + S''_{N,1}] + \dots \\ &\qquad + (-1)^{N-1}[S'_{N,N} + S''_{N,N-1}] + (-1)^N S''_{N,N}. \end{aligned}$$

Позначимо через $S_{N+1,1}, \dots, S_{N+1,N+1}$ відповідні числа у формулі (5), які побудовані за всіма множинами $A_1, \dots, A_{N+1}$. Зрозуміло, що

$$S'_{N,1} + |A_{N+1}| = |A_1| + \dots + |A_N| + |A_{N+1}| = S_{N+1,1}.$$

Далі, $S''_{N,1} = \sum |A_i \cap A_{N+1}|$, тому $S'_{N,2} + S''_{N,1} = S_{N+1,2}$. Аналогічно

$$S'_{N,k} + S''_{N,k-1} = S_{N+1,k}, \qquad 2 \le k \le N.$$

Останній доданок відрізняється від інших:

$$\begin{aligned} S''_{N,N} &= |(A_1 \cap A_{N+1}) \cap \cdots \cap (A_N \cap A_{N+1})| \\ &= |A_1 \cap \cdots \cap A_N \cap A_{N+1}| = S_{N+1,N+1}. \end{aligned}$$

Таким чином

$$\begin{aligned} &|A_1 \cup \cdots \cup A_N \cup A_{N+1}| \\ &\quad = S_{N+1,1} - S_{N+1,2} + \cdots + (-1)^{N+1} S_{N+1,N+1} \end{aligned}$$

і тому формула (5) доведена для $n = N + 1$. За правилом математичної індукції це і доводить теорему 2 для будь-якого n. $\square$

Задача 1. *Скільки існує натуральних чисел, які не перевищують 1000, і не діляться на жодне з чисел 3, 7, 11?*

Розв'язання задачі 1. Нехай $A_3 = \{n \le 1000 : n = 3k\}$, $A_7 = \{n \le 1000 : n = 7l\}$, $A_{11} = \{n \le 1000 : n = 11m\}$. Відповіддю на питання є число $1000 - |A_3 \cup A_7 \cup A_{11}|$, оскільки $A_3 \cup A_7 \cup A_{11}$ — це множина чисел, кожне з яких ділиться принаймні на одне з чисел 3, 7 або 11. Кількість точок у множині $A_3 \cup A_7 \cup A_{11}$ можна знайти за допомогою формули (4). $\boxed{\text{впр. 1}}$

3. Застосування формули включень-виключень

Задача 2. *З групи, яка складається з 35 студентів, 20 мають властивість з'являтись на першу пару, а 11 — з'являтись на другу, причому 10 студентів мають властивість не з'являтись на жодну. Скільки студентів мають властивість з'являтись на обидві пари?*

Подібні задачі можна розв'язувати за допомогою такого варіанту формули включень-виключень.

Нехай C — деякий набір об'єктів. Нехай $v_1, \ldots, v_r$ — деякі властивості, які можуть мати об'єкти з C (а можуть — не мати). Для обчислення кількості об'єктів, які мають принаймні одну з цих властивостей, позначимо: $N(i)$ — кількість об'єктів, що мають властивість v_i (сюди включаємо і такі об'єкти, що мають і інші властивості); $N(i,j)$ — кількість об'єктів, що мають властивості v_i та v_j (сюди включаємо і такі об'єкти, що мають і інші властивості); ... ; $N(1,\ldots,r)$ — кількість об'єктів, що мають всі властивості. Якщо M — це кількість об'єктів, що мають принаймні одну з властивостей, то

(6)
$$M = \left[\sum N(i)\right]_1 - \left[\sum N(i,j)\right]_2 + \cdots + (-1)^{r-1} N(1,\ldots,r),$$

де $[\sum N(i)]_1$ — це сума по всім $i\colon 1 \le i \le r$, $[\sum N(i,j)]_2$ — сума по всім можливим парам різних $i \le r$ та $j \le r$. В цю формулу входять доданки $[\sum N(i_1,\ldots,i_k)]_k$ — сума по всім можливим $i_1 \le r, \ldots, i_k \le r$, жодні два з яких не дорівнюють одне іншому. Рівність (6) випливає з формули включень-виключень (5). Дійсно, нехай

$$A_i = \{x \in C : x \text{ має властивість } v_i\}.$$

Тоді

$$A_1 \cup \dots \cup A_r = \{x \in C : x \text{ має принаймні одну з властивостей } v_1, \dots, v_r\}.$$

За формулою (5) $M = S_1 - S_2 + \dots + (-1)^{n-1} S_n$, причому $S_k = \left[\sum N(i_1, \dots, i_k)\right]_k$. Це і доводить рівність (6).

Зауваження 3. Якщо $r = 2$, то формула (6) має вигляд

$$M = N(1) + N(2) - N(1,2).$$

Якщо позначити через L кількість об'єктів, які не мають жодної властивості, то

$$L = |C| - M.$$

Розв'язання задачі 2. Позначимо через $N(1,2)$ кількість студентів, які мають властивість з'являтись на обидві пари, а через M — кількість студентів, які мають властивість з'являтись принаймні на одну пару. За умовами задачі $N(1) = 20$, $N(2) = 11$, $|C| = 35$. Тому $M = N(1) + N(2) - N(1,2) = 31 - N(1,2)$ за формулою (6) при $r = 2$. З іншого боку, $M + 10 = |C|$, тобто $M = 25$, звідки $N(1,2) = 6$.

4. Формула включення-виключення для добутку функцій

В математиці зустрічаються вирази вигляду

$$(1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n). \tag{7}$$

У найпростішому випадку $x_1, x_2, \dots, x_n$ є дійсними числами. Більш складною є ситуація, коли $x_1, x_2, \dots, x_n$ — це функції певного аргументу. Формулу включення-виключення можна довести, розкриваючи дужки у виразах (7). Цей спосіб ми зараз обговоримо.

Спочатку розглянемо випадок $n = 2$. Розкривши дужки у (7), отримуємо

$$(1 - x_1)(1 - x_2) = 1 - x_1 - x_2 + x_1 x_2.$$

Останній доданок у правій частині є добутком x_1 на x_2. Другий та третій доданки мають вигляд $x_1 \cdot 1$ та $x_2 \cdot 1$, а перший можна представити так $1 \cdot 1$. Зауважимо, що множина x-ів, з яких сформовано перший доданок, є порожньою. Аналогічними множинами для другого, третього та четвертого доданків є $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\{x_1, x_2\}$. Позначимо ці множини через Q_1, Q_2, Q_3, Q_4. Можна також помітити, що знак доданка визначається кількістю x-ів, з яких сформовано цей доданок, а саме, знак доданка дорівнює $(-1)^{\text{кількість } x\text{-ів}}$. Тому знак i-го доданка дорівнює $(-1)^{|Q_i|}$. Ці спостереження зведено нижче у таблицю.

доданок	кількість x-ів	знак	множина Q_i	$(-1)^{\|Q_i\|}$
1	0	$+$	$\varnothing$	$+$
2	1	$-$	$\{x_1\}$	$-$
3	1	$-$	$\{x_2\}$	$-$
4	2	$+$	$\{x_1, x_2\}$	$+$

Нарешті, i-ий доданок можна записати таким чином

$$(-1)^{|Q_i|} \prod_{x \in Q_i} x. \tag{8}$$

Останнім зауваженням є те, що Q_i вичерпують всі можливі підмножини з $\{x_1, x_2\}$. Таким чином,

$$(1 - x_1)(1 - x_2) = \sum_{Q \subseteq \{x_1, x_2\}} (-1)^{|Q|} \prod_{x \in Q} x.$$

Для $n = 2$ таке перетворення лівої частини здається невиправданно складним, але для інших n ситуація змінюється.

Випадок $n = 3$ приводить до такого розкладу добутка (7):

$$\begin{aligned}(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = 1 &- x_1 - x_2 - x_3 \\ &+ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ &- x_1x_2x_3.\end{aligned} \tag{9}$$

Таблиця знаків доданків в цьому випадку є такою:

доданок	кількість x-ів	знак	множина Q_i	$(-1)^{\lvert Q_i \rvert}$
1	0	$+$	$\varnothing$	$+$
2	1	$-$	$\{x_1\}$	$-$
3	1	$-$	$\{x_2\}$	$-$
4	1	$-$	$\{x_3\}$	$-$
5	2	$+$	$\{x_1, x_2\}$	$+$
6	2	$+$	$\{x_1, x_3\}$	$+$
7	2	$+$	$\{x_2, x_3\}$	$+$
8	3	$-$	$\{x_1, x_2, x_3\}$	$-$

Вираз (8) і в цьому випадку дорівнює i-ому доданку, а Q_i вичерпують всі підмножини з $\{x_1, x_2, x_3\}$ (див. попередню таблицю). Тому

$$(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = \sum_{Q \subseteq \{x_1, x_2, x_3\}} (-1)^{|Q|} \prod_{x \in Q} x.$$

Ми бачимо, що ускладнення правої частини майже не відбулося у порівнянні з випадком $n = 2$ (лише x_3 додався до множини під знаком суми). Аналогічна формула є справедливою і у загальному випадку.

Теорема 3. *Для будь-яких дійсних чисел* $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$(1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n) = \sum_{Q \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}} (-1)^{|Q|} \prod_{x \in Q} x,$$

де підсумовування ведеться за всіма можливими підмножинами Q *з* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $|Q|$ *— це кількість елементів в* Q, *а* $\prod_{x \in Q} x$ *— це добуток елементів з підмножини* Q (*вважаємо, що* $\prod_{x \in \varnothing} x = 1$). $\boxed{\text{впр. 6}}$

Наведемо наслідок цього результату для випадку індикаторних функцій.

Наслідок 1. *Нехай* $A_1, \ldots, A_n$ *— підмножини певної універсальної множини* Ω. *Елементи універсальної множини будемо позначати через* ω. *Нехай* $\mathbb{1}_{A_1}, \ldots, \mathbb{1}_{A_n}$ *— це індикаторні функції, тобто*

$$\mathbb{1}_{A_i}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \omega \in A_i, \\ 0, & \text{якщо } \omega \notin A_i. \end{cases}$$

Тоді

$$(1 - \mathbb{1}_{A_1})(1 - \mathbb{1}_{A_2})\ldots(1 - \mathbb{1}_{A_n}) = \sum_{Q \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}} (-1)^{|Q|} \prod_{i \in Q} \mathbb{1}_{A_i},$$

де підсумовування ведеться за всіма можливими підмножинами Q *з* $\{1, 2, \ldots, n\}$, $|Q|$ *— це кількість елементів в*

Q, а $\prod_{i\in Q}\mathbb{1}_{A_i}$ — це добуток тих індикаторних функцій підмножин A_i, чиї індекси належать Q (вважаємо, що $\prod_{i\in\varnothing}\mathbb{1}_{A_i}=1$). $\boxed{\text{впр. 7}}$

Зауваження 4. Важливим і досіть несподіваним є те, що у багатьох випадках праву частину підрахувати простіше, ніж ліву, хоча права частина виглядає більш складною.

Приклад 1. Розглянемо випадок $n=2$:

$$(1-\mathbb{1}_{A_1})(1-\mathbb{1}_{A_2}) = 1-\mathbb{1}_{A_1}-\mathbb{1}_{A_2}+\mathbb{1}_{A_1}\mathbb{1}_{A_2}.$$

Оскільки $1-\mathbb{1}_{A_i}=\mathbb{1}_{\overline{A_i}}$ (властивість (2.18)) та $\mathbb{1}_{\overline{A_1}}\mathbb{1}_{\overline{A_2}}=\mathbb{1}_{\overline{A_1}\cap\overline{A_2}}$ (властивість (2.19)), то ліва частина останньої рівності дорівнює $\mathbb{1}_{\overline{A_1}\cap\overline{A_2}}$, а це є характеристичною функцєю множини $\overline{A_1\cup A_2}$ (властивість (2.13)). Ще раз скориставшись властивостями характеристичних функцій $\mathbb{1}_{\overline{A_1\cup A_2}}=1-\mathbb{1}_{A_1\cup A_2}$ та $\mathbb{1}_{A_1}\mathbb{1}_{A_2}=\mathbb{1}_{A_1\cap A_2}$, отримуємо

$$\mathbb{1}_{A_1\cup A_2}=\mathbb{1}_{A_1}+\mathbb{1}_{A_2}-\mathbb{1}_{A_1\cap A_2}.$$

Якщо врахувати залежність характеристичних функцій від аргумента, то останню рівність можна записати так

$$\mathbb{1}_{A_1\cup A_2}(\omega)=\mathbb{1}_{A_1}(\omega)+\mathbb{1}_{A_2}(\omega)-\mathbb{1}_{A_1\cap A_2}(\omega), \qquad \omega\in\Omega.$$

Оскільки $\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{1}_B(\omega)=|B|$ для будь-якої підмножини $B\subseteq\Omega$, $\boxed{\text{впр. 8}}$ то підсумовуванням лівої та правої частин отримуємо

$$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|,$$

що повторює формулу включення-виключення (3).

Аналогічним чином можна довести формулу (4), використовуючи рівність (9). впр. 9

Загальний випадок формули включення-виключення (5) також випливає з наслідка 1. впр. 10

ВПРАВИ

Вправа 1. Нехай множини A_3, A_7 та A_{11} означені у розв'язанні задачі 1. Підрахувати $|A_3 \cup A_7 \cup A_{11}|$ за допомогою формули включень-виключень (4).

Вправа 2. Довести, що $(A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3) = A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

Вправа 3. Пояснити формулу (4).

Вправа 4. Довести, що $S'_{N,k} + S''_{N,k-1} = S_{N+1,k}$, $2 \le k \le N$, в доведенні теореми 2.

Вправа 5. Довести, що

$$(A_1 \cap A_{N+1}) \cap \cdots \cap (A_N \cap A_{N+1}) = A_1 \cap \cdots \cap A_N \cap A_{N+1}.$$

Вправа 6. За допомогою метода математичної індукції довести теорему 3.

Вправа 7. За допомогою метода математичної індукції довести наслідок 1.

Вправа 8. Нехай $B \subseteq \Omega$. Довести, що $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{1}_B(\omega) = |B|$.

Вправа 9. Довести формулу включення-виключення (4) за допомогою наслідка 1 при $n = 3$.

Вправа 10. Довести формулу включення-виключення (5) за допомогою наслідка 1.

Вправа 11. З точки проведено n променів. Скільки кутів вони утворюють?

Вправа 12. Скільки існує натуральних чисел, менших ніж 100, цифри яких ідуть у зростаючому порядку?