Лекція 7

ПЕРЕСТАНОВКИ З ПОВТОРЕННЯМИ

1. Поліноміальні коефіцієнти

Задача 1. *Множина A складається з n елементів. Нехай $k_1+k_2=n$, $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$. Скільки існує представлень вигляду $A = B_1 \cup B_2$, де $|B_1| = k_1$, $|B_2| = k_2$, $B_1 \cap B_2 = \varnothing$?*

`Розв'язання задачі 1`. Кількість вказаних представлень дорівнює кількості різних способів вибрати множину B_1, оскільки $B_2 = A \setminus B_1$ однозначно визначається через B_1. Тому відповіддю до задачі є $C_n^{k_1} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} = \frac{n!}{k_1!k_2!}$.

Теорема 1. *Нехай множина A складається з n елементів. Нехай $m \geq 2$; $k_1+k_2+\cdots+k_m = n$, $k_1 \geq 0, \ldots, k_m \geq 0$. Тоді існує*

$$C_n(k_1, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \ldots k_m!} \tag{1}$$

різних представлень множини A у вигляді $A = B_1 \cup \cdots \cup B_m$, де $|B_1| = k_1, \ldots, |B_m| = k_m$, причому $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$.

Доведення. Розглянемо операцію $O = \{$утворити зазначене представлення$\}$ та дії $D_i = \{$утворити множину $B_i\}$, $1 \leq i \leq m$. Тоді $O \stackrel{?}{=} D_1 \otimes \cdots \otimes D_m$, тому за правилом множення

[0]Printed from the file `[discretka_L=06.tex]` on 15.8.2013

$|O| = |D_1| \cdot \ldots \cdot |D_m|$. Зрозуміло, що

$$|D_1| = C_n^{k_1} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!},$$
$$|D_2| = C_{n-k_1}^{k_2} = \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|D_m| = C_{n-k_1-\cdots-k_{m-1}}^{k_m} = \frac{(n-k_1-\cdots-k_{m-1})!}{k_m!(n-k_1-\cdots-k_m)!}.$$

Крім того,

$$\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-k_1-\cdots-k_{m-1})!}{k_m!(n-k_1-\cdots-k_m)!} \stackrel{?}{=} \frac{n!}{k_1!\ldots k_m!}.$$

Тому
$$|O| = |D_1| \times \cdots \times |D_m| = \frac{n!}{k_1!\ldots k_m!}.$$

□

Означення 1. Числа $C_n(k_1, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!\ldots k_m!}$, означені формулою (1), називаються *поліноміальними коефіцієнтами порядку* $n \geq 0$. Поліноміальні коефіцієнти визначені для $k_1 \geq 0, \ldots, k_m \geq 0$, $k_1 + \cdots + k_m = n$.

Приклад 1. Скількома способами можна розселити 8 студентів у трьох кімнатах: одномісній, тримісній, чотиримісній? Позначимо через A множину 8-ми студентів. Тоді питання зводиться до кількості представлень A у вигляді

$A = B_1 \cup B_2 \cup B_3$, де B_1 — студент, якого поселено в одномісній кімнаті, B_2 — множина студентів, яких поселено в тримісній кімнаті, B_3 — множина студентів, яких поселено в чотиримісній кімнаті. Тому відповідь така: $C_8(1,3,4) = \frac{8!}{1!3!4!} = 280$.

2. Поліноміальна теорема

Теорема 2. *Вираз* $(x_1 + \dots + x_m)^n$ *дорівнює сумі всіх можливих доданків виду* $C_n(k_1, \dots, k_m) x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m}$, *де* $k_1 + \dots + k_m = n$, $k_1 \ge 0, \dots, k_m \ge 0$, *тобто*

$$(x_1 + \dots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_m = n \\ k_1 \ge 0, \dots, k_m \ge 0}} \frac{n!}{k_1! \dots k_m!} x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m}.$$

Доведення. Помножимо вираз $x_1 + \dots + x_m$ послідовно m разів сам на себе. Одержимо доданки виду $d_1 \dots d_n$, де кожний співмножник d_i може бути або x_1, або x_2, … , або x_m. Зафіксуємо $k_1 \ge 0, \dots, k_m \ge 0$, $k_1 + \dots + k_m = n$ і розглянемо всі доданки $d_1 \dots d_n$, в яких x_i зустрічається k_i разів, $1 \le i \le m$, тобто ті доданки, для яких $d_1 \dots d_n = x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m}$.

Щоб підрахувати кількість таких доданків, покладемо $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Встановимо відповідність між доданками вигляду $x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m}$ та представленнями множини A у вигляді $A = B_1 \cup \dots \cup B_m$, де множини попарно не перетинаються тобто ($B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \ne j$) і $|B_1| = k_1, \dots, |B_m| = k_m$. А саме, $x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m} \leftrightarrow (B_1, \dots, B_m)$, де $B_1 = \{i \colon d_i = x_1\}, \dots, B_m = \{i \colon d_i = x_m\}$.

Задача 2. *Довести, що така відповідність між доданками та представленнями дійсно є бієкцією.*

Кількість зазначених представлень є $C_n(k_1, \ldots, k_m)$ (теорема 1). Тому за правилом бієкції 5.1 коефіцієнт при доданку $x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m}$ є $C_n(k_1, \ldots, k_m)$. $\square$

3. Перестановки з повтореннями

Задача 3. *Скільки різних анаграм можна утворити, переставляючи букви в слові "мама"? (Анаграмою називають $\langle$слово$\rangle$, яке утворюється з заданого слова переставлянням його букв).*

Розв'язання задачі 3. Можливими анаграми є: $\langle$мама$\rangle$, $\langle$ммаа$\rangle$, $\langle$маам$\rangle$, $\langle$амма$\rangle$, $\langle$амам$\rangle$, $\langle$аамм$\rangle$; тому відповіддю до задачі є 6.

Інший розв'язок задачі 3. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Встановимо бієкцію між можливими $\langle$словами$\rangle$ і представленнями множини A у вигляді $A = B_1 \cup B_2$, де $|B_1| = 2$, $|B_2| = 2$, $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. А саме, $\langle$слово$\rangle \leftrightarrow (B_1, B_2)$, де B_1 — це номери позицій у $\langle$слові$\rangle$, на яких стоїть буква "*м*", а B_2 — це номери позицій у $\langle$слові$\rangle$, на яких стоїть буква "*а*". На підставі задачі 1 кількість таких представлень є $C_4(2, 2) = 6$, тому за правилом бієкції відповідь до задачі є 6.

Теорема 3. *Нехай є k_1 букв a_1, k_2 букв $a_2, \ldots, k_m$ букв a_m, причому $k_1 + \cdots + k_m = n$. Тоді з цих букв можна утворити $C_n(k_1, \ldots, k_m)$ різних $\langle$слів$\rangle$.*

Доведення. Встановимо бієкцію між можливими $\langle$словами$\rangle$ і представленнями множини A у вигляді $A = B_1 \cup \cdots \cup B_m$, де $|B_1| = k_1, \ldots, |B_m| = k_m$ та $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$. А саме, $\langle$слово$\rangle \leftrightarrow (B_1, \ldots, B_m)$, де B_i — це номери позицій у $\langle$слові$\rangle$, на яких стоїть буква a_i. Оскільки таких представлень є $C_n(k_1, \ldots, k_m)$ (теорема 1), то за правилом бієкції 5.1 кількість ⟨слів⟩ є $C_n(k_1, \ldots, k_m)$. $\square$

Задача 4. *Довести, що зазначена відповідність між словами та представленнями дійсно є бієкцією.*

Задача 5. *Скільки можна утворити різних ⟨слів⟩, переставляючи букви у слові "математика"? Теж саме питання стосовно слова "комбінаторика".*

В теоремі 3 можна говорити не про букви, які складають слова, а про предмети різних типів, які переставляються. Еквівалентне твердження є таким.

Теорема 4. *Кількість різних перестановок n предметів, серед яких є k_1 предметів першого типу, k_2 предметів другого типу, ..., k_m предметів m-ого типу, дорівнює*

$$C_n(k_1, \ldots, k_m).$$

Доведення. Наведемо інше доведення цієї теореми (і теореми 3 також). Позначимо через $B_n(k_1, \ldots, k_m)$ кількість зазначених перестановок. Розглянемо певну перестановку. Замінимо в ній всі предмети першого типу на якісь інші предмети, які відрізняються між собою та від усіх інших. Тоді з цієї перестановки можна отримати $k_1!$ інших перестановок. Для кожної з таких перестановок замінимо всі предмети другого типу на інші предмети, які відрізняються між собою та від усіх інших. Тепер існує вже $k_1!k_2!$ перестановок вихідної перестановки. Продовжуючи процедуру, отримаємо з вихідної перестановки $k_1! \ldots k_m!$ перестановок n різних предметів. Загальна кількість перестановок, які можна отримати у такій спосіб, є $B_n(k_1, \ldots, k_m)k_1! \ldots k_m!$. З іншого боку, існує $n!$ перестановок n різних предметів, звідки $B_n(k_1,\ldots,k_m)k_1!\ldots k_m! = n!$, тобто $B_n(k_1,\ldots,k_m) = C_n(k_1,\ldots,k_m)$. $\square$

Задача 6. *Скільки існує різних розташувань білих фігур на першому рядку шахової дошки? (Білі фігури — це 2 тури, 2 коня, 2 офіцери, король та королева).*

4. Комбінації з повтореннями

Задача 7. *У дітсадку 100 дітей. Кожному з них можна купити один з 10 можливих подарунків. Скільки існує способів придбати подарунки для діток цього дітсадка?*

Цю задачу можна узагальнити наступним чином: є n позицій та m типів предметів. Скільки існує способів розподілити предмети по позиціям? Позначимо кількість таких способів через f_n^m. Кажуть також, що f_n^m — це кількість n-*елементних комбінацій з можливими повтореннями елементів m типів.*

Для невеликих значень n та m числа f_n^m можна обчислити безпосередньо. Щоб, наприклад, підрахувати f_2^2 та f_2^3, позначимо елементи першого, другого, третього типів через a, b, c відповідно. Тоді у випадку $n = m = 2$ можливими 2-елементними комбінаціями з повтореннями елементів 2-ох типів є aa, ab, bb, тобто $f_2^2 = 3$. У випадку ж $n = 2, m = 3$ можливими 2-елементними комбінаціями з повтореннями елементів 3-ох типів є aa, ab, bb, cc, ac, bc, тобто $f_2^3 = 6$.

У загальному випадку числа f_n^m підраховані у наступному результаті.

Теорема 5. $f_n^m = C_{n+m-1}^{m-1} = C_{n+m-1}^n$.

Доведення. Кожна n-елементна комбінація з повтореннями елементів m типів однозначно визначається, якщо вказати скільки вона включає елементів кожного типу. Кожній такій комбінації поставимо у відповідність послідовність символів $\star$ та $|$, яка будується таким чином: спочатку записуємо таку кількість $\star$, скільки елементів першого типу містить комбінація; потім ставимо $|$; потім записуємо таку кількість $\star$, скільки елементів другого типу містить комбінація; потім ставимо $|$; і так далі. Після елементів останнього m-ого типу символ ставити $|$ не будемо. Наприклад, для випадку $n = m = 2$: $aa \leftrightarrow \star\star\,|$, $ab \leftrightarrow \star|\star$, $bb \leftrightarrow |\,\star\star$.

Задача 8. *Довести, що ця відповідність є бієкцією.*

В кожній зазначеній послідовності є n символів $\star$ та $m-1$ символів $|$, загалом $n + m - 1$ символів. Кожна така послідовність відповідає представленню (B_1, B_2) множини $A = \{1, 2, \dots, n + m - 1\}$ у вигляді об'єднання підмножин B_1 та B_2, де $B_1 = \{$номери позицій, на яких стоять символи $\star\}$, $B_2 = \{$номери позицій, на яких стоять символи $|\}$. Наприклад, для випадку $n = m = 2$: $\star\star\,| \leftrightarrow (\{1, 2\}, \{3\})$, $\star|\star \leftrightarrow (\{1, 3\}, \{2\})$, $|\star\star \leftrightarrow (\{2, 3\}, \{1\})$. Згідно до задачі 1 і правила бієкції 5.1, існує C^n_{n+m-1} різних n-елементних комбінацій з повтореннями m типів. $\square$

Задача 9. *Довести, що відповідність між послідовностями символів $\star$ та $|$ та представленнями (B_1, B_2) є бієкцією.*

5. Модель Максвела–Больцмана

Є n фізичних частинок, які *можна* розрізнити, і m комірок. Тоді

(MB_1) існує m^n різних розміщень частинок по комірках;

(MB_2) існує $C_n(k_1, \dots, k_m)$ таких розміщень, що k_1 частинок знаходяться в першій комірці, k_2 — у другій, ..., k_m — у m-ій комірці.

Доведення. Розглянемо операцію $O = \{$розмістити всі частинки$\}$ та дії $D_i = \{$обрати комірку для частинки $i\}$, $1 \leq i \leq n$. Тоді $O = D_a \otimes \cdots \otimes D_n$ та $|D_i| = m$. . Тому за правилом множення $|O| = m^n$ і (MB_1) доведено.

Існує бієкція між розміщеннями частинок по m комірках і представленнями $(B_1, \ldots, B_m)$ множини $A = \{1, \ldots, n\}$ у вигляді об'єднання $A = B_1 \cup \cdots \cup B_m$ її підмножин, що не перетинаються. Підмножини означаються так: $B_i = \{$номери частинок, які потрапили в комірку $i\}$, $1 \leq i \leq m$.

Задача 10. *Довести, що така відповідність між розміщеннями і представленнями дійсно є бієкція.*

Кількість таких представлень дорівнює $C_n(k_1, \ldots, k_m)$ (теорема 1). Тому (MB_2) також доведено за правилом бієкції 5.1. $\square$

Задача 11. $\sum C_n(k_1, \ldots, k_m) = m^n$; *сума розповсюджується на ті вектори* $(k_1, \ldots, k_m)$, *для яких* $k_1 + \cdots + k_m = n$, $k_1 \geq 0, \ldots, k_m \geq 0$. *Вивести цей же результат з теореми 2.*

6. Модель Ейнштейна–Бозе

Є n фізичних частинок, які *не можна* розрізнити, і m комірок. Тоді

(EB_1) існує f_n^m розміщень n частинок по m комірках;

(EB_2) існує f_{n-m}^m таких розміщень, що кожна комірка є непорожньою.

Доведення. Оскільки частинки не розрізняються, то кожне розміщення характеризується числами $x_1, \ldots, x_m$, де x_i — це кількість частинок в i-ій комірці.

Задача 12. *Довести, що кількість розміщень n частинок по m комірках дорівнює кількості невід'ємних розв'язків рівняння $x_1 + \cdots + x_m = n$.*

Задача 13. *Довести, що кількість розміщень n частинок по m комірках, що кожна комірка є непорожньою, дорівнює кількості позитивних розв'язків того ж рівняння.*

Кожному розв'язку $x_1, \ldots, x_m$ поставимо у відповідність n-елементну комбінацію, у якій є рівно x_i елементів i-ого типу.

Задача 14. *Довести, що зазначена відповідність є біекцією.*

Тому (EB_1) доведено на підставі правила біекції 5.1 та теореми 5.

Кількість позитивних розв'язків рівняння $x_1 + \cdots + x_m = n$ дорівнює кількості невід'ємних розв'язків рівняння

$$(x_1 - 1) + \cdots + (x_m - 1) = n - m.$$

На підставі задачі 13 та (EB_1) відповідь до (EB_2) є $f_{n-m}^m = C_{n-1}^{m-1}$.
$\square$