Лекція 9

МЕТОД ТРАЄКТОРІЙ

Розглянемо множину E векторів $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n})$, координати яких приймають тільки два значення: $+1$ та -1. За правилом множення існує 2^{2n} векторів з такими властивостями (розділ 5.3), тобто $|E| = 2^{2n}$. Розглянемо підмножину E_0 множини E, яка складається з векторів $\vec{\varepsilon}$, для яких

$$\sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i = 0. \tag{1}$$

Кількість таких векторів дорівнює C_{2n}^n, оскільки серед координат таких векторів є рівно n таких, що дорівнюють -1, та n таких, що дорівнюють $+1$. Тому кількість елементів множини E_0 дорівнює кількості розстановок n чисел -1 по $2n$ місцям, що і дорівнює C_{2n}^n (розділ 6.3), тобто $|E_0| = C_{2n}^n$.

Розглянемо підмножину E_0, яка складається з векторів $\vec{\varepsilon}$, для яких

$$\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \geq 0, \qquad k = 1, 2, \dots, 2n-1. \tag{2}$$

Позначимо цю підмножину через $E_{\geq 0}$. Зрозуміло для кожного вектора $\vec{\varepsilon} \in E_{\geq 0}$ виконана рівність (1). Кількість C_n векторів $\vec{\varepsilon}$ у множині $E_{\geq 0}$ називається n-тим *числом Каталана*, тобто $|E_{\geq 0}| = C_n$. Наше найближче завдання —

[0] Printed from the file [discretka_L=08.tex] on 15.8.2013

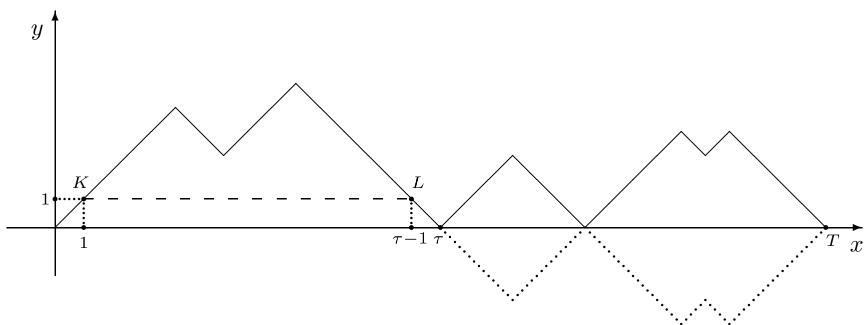
знайти формулу для рекурентного обчислення C_n. Зрозуміло, що $C_1 = 1$.

Поставимо у відповідність кожному вектору $\vec{\varepsilon}$ геометричну траєкторію на папері в клітинку: якщо $\varepsilon_i = 1$, то траєкторія йде вгору і вправо на i-ій ділянці; якщо ж $\varepsilon_i = -1$, то траєкторія йде вниз і вправо на i-ій ділянці. Траєкторії, які починаються в точці $(0,0)$ і для яких виконані умови (1) і (2), будемо називати *траєкторіями Каталана довжини* $2n$ *відносно прямої* $y = 0$. Така відповідність між векторами та траєкторіями є бієкцією $\boxed{\text{чому?}}$ і тому кількість траєкторій Каталана довжини $2n$ дорівнює C_n.

Частину траєкторії, яка починається в точці (x_0, y_0) і закінчується в точці (x_1, y_0), назвемо траєкторією Каталана відносно прямої $y = y_0$, якщо

$$\sum_{i=1}^{x_1} \varepsilon_i = y_0, \qquad \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \geq y_0, \qquad k = x_0, \ldots, x_1.$$

Одну з траєкторій Каталана зображено на рис. 1, де позначено $T = 2n$.



Нехай $(\tau, 0)$ — це точка на прямій $y = 0$, у якій траєкторія вперше її дотикається. $\boxed{\text{чому таке } \tau \text{ існує?}}$ Зауважимо, що τ

є парним числом, тобто $\tau = 2r$ для деякого $1 \le r \le n$. $\boxed{\text{чому?}}$ Точки K та L на траєкторії мають координати $(1,1)$ та $(\tau - 1, 1)$.

Частина траєкторії від $x_0 = 1$ до $x_1 = \tau - 1$ є траєкторією Каталана довжини $2r - 2$ відносно прямої $y = 1$. Так само, частина траєкторії від τ до T є траєкторією Каталана довжини $2n - 2r$ відносно прямої $y = 0$. Згідно до введених вище позначень, кількість перших траєкторій дорівнює C_{r-1}, а других — C_{n-r}. Тому за правилом множення кількість траєкторій Каталана, які вперше дотикаються прямої $y = 0$ у точці $(2r, 0)$, дорівнює $C_{r-1}C_{n-r}$.

За правилом додавання (розділ 5.2), отримуємо рекурентне рівняння:

$$(3) \qquad C_1 = 1, \qquad C_n = \sum_{r=1}^{n} C_{r-1}C_{n-r}, \quad n \ge 2.$$

Зауваження 1. Послідовність $\{C_n\}$ носить ім'я бельгійського математика XIX сторіччя Е. Каталана, який вивчав задачу про дужки (див. розділ 5). Першим, хто вивчав цю послідовність, був Л. Ойлер, який у XVIII сторіччі розв'язав задачу про розбиття багатокутника на трикутники (див. розділ 4).

1. Метод відбиття (дзеркального відображення)

Щоб отримати формулу для C_n, можна розв'язати рівняння (3). Ми застосуємо інший спосіб. Для цього розв'яжемо наступну задачу.

Задача 1. *Біля театральної каси зібралась черга з $m + n$ осіб, причому n з них мають монети вартістю 50 копійок, а інші m*

мають монети вартістю 1 гривня, $m \leq n$. На початку в касі немає грошей. Білет коштує 50 копійок. Скільки існує способів такого розташування покупців в чергу до каси, при яких жодному покупцеві не доведеться чекати здачі?

Припустимо, що покупці певним способом розташовані в чергу до каси. Нехай $\varepsilon_i = 1$, якщо i-й покупець має 50 коп., і $\varepsilon_i = -1$, якщо i-й покупець має 1 гривню. Розглянемо суму $S_k = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_k$. Очевидно, S_k є різниця між кількістю монет 50 коп. і кількістю монет вартістю 1 гривня, які подані до каси першими k покупцями.

Розглянемо систему координат XOY. Побудуємо в ній точки $A_k = (k, S_k)$, $k = 1, 2, \ldots, m+n$, і розглянемо ламану лінію (траєкторію), яка сполучає точки $O(0,0)$ та $A_{m+n} = (n+m, n-m)$ і проходить через точки $A_1, A_2, \ldots, A_{m+n-1}$. Кожна траєкторія містить $m+n$ відрізків, n з яких піднімаються вгору, а m опускаються вниз. Якщо вказати номери тих відрізків, які піднімаються вгору, то траєкторія буде визначена повністю, тобто загальне число траєкторій дорівнює C_{m+n}^n (розділ 6.3).

Траєкторії, що відповідають тим способам розташування покупців, при яких жоден покупець не чекає здачі, не мають спільних точок з прямою $y = -1$. Справді, якщо $S_{k-1} = 0$ та $S_k = -1$ для якогось k, то це означає, що перші $k-1$ покупців подали до каси однакову кількість монет 50 копійок і 1 гривня, а k-й покупець вимушений чекати здачу.

Знайдемо число траєкторій, які мають спільні точки з прямою $y = -1$. Поставимо у відповідність кожній траєкторії (назвемо її старою), яка перетинає або дотикається до прямої $y = -1$, іншу траєкторію (назвемо її *відбиттям відносно прямої* $y = -1$) за таким правилом: до першої точки дотику з прямою $y = -1$ відбиття збігається зі старою траєкторією, а далі є її симетричним образом відносно прямої $y = -1$.

Уявлення про відбиття дає рис. 1, де воно позначено пунктирною лінією. Зверніть увагу, що на рис. 1 відбиття зображено відносно прямої $y = 0$, а не $y = -1$. Крім того, на рис. 1 зображено випадок $m = n$.

Всі нові траєкторії закінчуються в точці $A'_{m+n} = (n + m, m - n - 2)$, яка є симетричним образом точки A_{m+n} відносно прямої $y = -1$.

Задача 2. *Довести, що встановлена відповідність між старими траєкторіями та їхніми відбиттями є біекцією.*

Тому число траєкторій, що мають спільні точки з прямою $y = -1$, дорівнює числу ламаних, які сполучають точки O і A'_{m+n}. Це число легко підрахувати: якщо така траєкторія містить y відрізків, які йдуть вниз, і x відрізків, які йдуть вгору, то $x + y = m + n$, $y - x = n - m + 2$, звідки $y = n + 1$. Це означає, що кількість ламаних, які сполучають точки O і A'_{m+n}, дорівнює C_{m+n}^{n+1}. Тому відповіддю до задачі 1 є

$$C_{m+n}^{n} - C_{m+n}^{n+1} = \frac{n+1-m}{n+1} C_{m+n}^{m}. \tag{4}$$

2. Формула для чисел Каталана

Якщо $m = n$, то у попередній задачі підраховано кількість траєкторій, які сполучають точки $(0, 0)$ та $(2n, 0)$ і не мають спільних точок з прямою $y = -1$, тобто траєкторій Каталана, тому

$$C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}, \qquad n \geq 1. \tag{5}$$

3. Задача про вибори

Задача 3. *Кандидат A зібрав на виборах a голосів, а кандидат B — b голосів, причому $a > b$. Виборці голосували послідовно. Скільки існує таких способів подачі голосів, при яких A завжди буде попереду від B за кількістю поданих за нього голосів?*

Нехай $\varepsilon_i = 1$, якщо i-й голос подано за A, і $\varepsilon_i = -1$, якщо i-й голос подано за B. Як і раніше $S_k = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_k$. В системі координат XOY розглянемо ламану лінію, яка проходить через точки точки O, $(1, S_1), \ldots, (a+b, S_{a+b})$. Очевидно, $S_{a+b} = a - b$.

Кожному способу подачі голосів відповідає траєкторія, яка сполучає точки O і $(a+b, a-b)$. Траєкторія містить $a+b$ відрізків, причому a з них йдуть вгору. Тому загальне число траєкторій дорівнює C^a_{a+b}. Кандидат A завжди буде попереду від B, якщо відповідна траєкторія проходить через точку $(1,1)$ (перший голос повинен бути за A) і не має спільних точок з віссю OX. Число таких траєкторій може бути підраховане за формулою (4), в якій треба покласти $n = a - 1$, $m = b$. Отже, шукане число способів подачі голосів дорівнює

$$\frac{a-1+1-b}{a-1+1} C^{a-1}_{a+b-1} = \frac{a-b}{a+b} C^a_{a+b}.$$

Зауваження 2. Результат задачі 3 називається також *теоремою Бертрана про вибори.* Французький математик Жозеф Бертран опублікував її доведення у 1887 році, але першим це зробив у 1878 році англійський математик Уільям Уайтворт. Розв'язання Бертрана основано на рекурентному співвідношенні

$$P_{a+1,a+b+1} = P_{a,a+b} + P_{a+1,a+b},$$

де $P_{i,j}$ — це загальна кількість варіантів, при яких A випереджав B весь час протягом виборів. Бертран зауважив, що йому здається ймовірним, що існує пряме доведення цього результату. Таке доведення опублікував Дезіре Андре в 1887 році. Варіант цього доведення відомий зараз як *принцип відбиття Андре*, хоча сам він ніяке відбиття не згадував. Ми розглянули цей принцип в розділі 1.

Цікаво, що в тому ж номері Comptes Rendus (Доповіді Академії наук Франції), у якому Бертран опублікував свій результат, вийшла стаття Еміля Барб'є, в якій він зформулював (без доведення) узагальнення теореми Бертрана: якщо $a > kb$ для деякого натурального k, то ймовірність, що кандидат A випереджав кандидата B в k разів весь час протягом виборів, дорівнює

$$\frac{a-kb}{a+b}.$$

До речі, стаття Андре вийшла в тому ж номері Comptes Rendus.

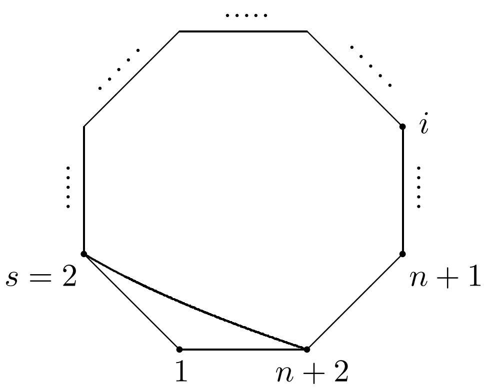
4. Задача Ойлера про розбиття багатокутника

Задача 4. *Скільки існує способів розбиття опуклого $(n+2)$-кутника на трикутники діагоналями, які не перетинаються?*

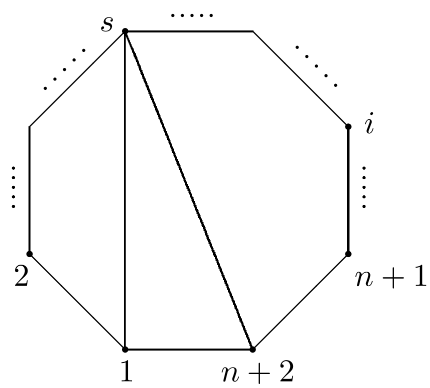
Підрахуємо число способів T_n розбиття опуклого $(n+2)$-кутника з поміченими вершинами на трикутники діагоналями, які не перетинаються. Очевидно, $T_1 = 1$, $T_2 = 2$. Перенумеруємо вершини $(n+2)$-кутника числами $1, 2, \ldots, n+1, n+2$.

Нехай сторона $(1, n+2)$ разом з вершиною s утворює трикутник розбиття. Кількість розбиттів, для яких $s = 2$

або $s = n+1$ (рис. 2(a)), дорівнює кількості розбиттів $(n+1)$-кутника $2 \to \cdots \to i \to \cdots \to n+2 \to 2$ або $1 \to n+1 \to \cdots \to i \to \cdots \to 1 \to n+1$, тобто T_{n-1}.



(**a**)



(**b**)

Кількість розбиттів, для яких $3 \le s \le n$ (рис. 2(b)), дорівнює добутку числа розбиттів s-кутника $1 \to 2 \to \cdots \to s \to 1$ на число розбиттів $(n-s+3)$-кутника $n+2 \to s \to \cdots \to i \to \cdots \to n+2$, тобто $T_{s-2}T_{n-s+1}$. Поклавши $T_0 = 1$, отримуємо

$$
\begin{aligned}
T_n &= T_0 T_{n-1} + \sum_{s=3}^{n} T_{s-2} T_{n-s+1} + T_{n-1} T_0 \\
&= \sum_{s=0}^{n-1} T_s T_{n-s-1}, \qquad n \ge 3.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Порівнюючи (6) із (3), прийдемо до висновку, що $T_n = C_n$.

5. Задача про дужки

Розглянемо послідовність символів $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Позначимо через Q_n число усіх способів розставити $n-1$ пар дужок в цій системі для виконання бінарної операції над кожною з пар отриманих виразів. Очевидно, що $Q_2 = 1$, а $Q_3 = 2$, бо при $n = 3$ існує тільки 2 способа розставити дужки: $((x_1x_2)x_3)$ та $(x_1(x_2x_3))$. Покладемо також $Q_1 = 1$.

Зазначимо, що зовнішні дужки об'єднують два вирази. Позначимо кількість елементів у першому виразі через s, $s = 1, 2, \ldots, n-1$. Тоді в іншому виразі буде $n-s$ елементів. Звідси випливає рекурентне співвідношення

$$Q_n = \sum_{s=1}^{n-1} Q_s Q_{n-s}, \qquad n \geq 2. \tag{7}$$

Порівнюючи (7) з (3), доводимо, що $Q_n = C_{n-1}$.

ВПРАВИ

Вправа 1. Розглянемо траєкторію Каталана довжини $2n$, яка починається не в точці $(0,0)$, а в точці $(x_0, 0)$ (і, відповідно, закінчується в точці $(x_0 + 2n, 0)$). Довести, що таких траєкторій стільки ж, скільки справжніх траєкторій Каталана.

Вправа 2. Розглянемо траєкторію Каталана довжини $2n$ відносно прямої $y = y_0$ (вона починається не в точці $(0,0)$, а в точці $(0, y_0)$ і, відповідно, закінчується в точці $(2n, y_0)$). Довести, що таких траєкторій стільки ж, скільки справжніх траєкторій Каталана.

Вправа 3. Довести, що

$$C_n = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n+1} \quad \text{для } n \geq 0.$$

Вправа 4. Довести, що

$$C_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \left(C_n^i\right)^2 .$$

Вправа 5. Довести, що числа Каталана задовільняють таке рекурентне співвідношення:

$$C_0 = 1 \quad \text{та} \quad C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n .$$

Вправа 6. Довести, що

1. C_n є непарним числом, якщо $n = 2^k - 1$,
2. C_n є парним числом, якщо $n = 2^k \neq 1$.

Вправа 7. За допомогою формули Стірлінга довести, що

$$C_n \sim \frac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}, \qquad n \to \infty.$$

Вправа 8. Знайти генератрису послідовності чисел Каталана. Застосовуючи метод генератрис, знайти формулу для C_n.

Вправа 9. Перевірити, що числа (5) дійсно задовольняють рекурентне рівняння (3).

Вправа 10. Довести, $T_n = C_n$ в розділі 4.

Вправа 11. Довести, $Q_n = C_{n-1}$ в роділі 5.

ВІДПОВІДІ

3. Безпосередньо перевіряється, що $C_{2n}^{n+1} = \frac{n}{n+1} C_{2n}^{n}$. Задача тепер випливає з (5).

4. Вибір n чисел з множини, яка складається з $2n$ чисел, можна розбити на дві дії:

1. спочатку обрати i чисел з перших n чисел,
2. потім обрати $n - i$ чисел з інших n чисел.