Лекція 10

БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ

1. Булеві функції для операцій з однією множиною

Нехай Ω — деяка множина; її елементи будемо позначати ω. Нехай підмножина $A \subset \Omega$ непустою та $A \neq \Omega$. Будемо вважати, що $x = 1$, якщо $\omega \in \Omega$, та $x = 0$, якщо $\omega \notin \Omega$.

Відомою операцією з однією множиною є доповнення:

$$A \rightsquigarrow \overline{A}.$$

Якщо покласти $g_1(x) = 1 - x$, то $g_1(x) = 0$, якщо $\omega \in A$, та $g_1(x) = 1$, якщо $\omega \notin \Omega$. Таким чином функцію g_1 можна задати за допомогою таблиці значень:

(1)

ω	x	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
$\in A$	1	0	1	1	0
$\notin A$	0	1	0	1	0

У цій же таблиці наведені значення всіх інших булевих функцій однієї змінної. Ясно, що функція g_2 відповідає тотожній операції над однією множиною: $A \rightsquigarrow A$; g_3 — відповідає операції $A \rightsquigarrow \Omega$; g_4 — відповідає операції $A \rightsquigarrow \varnothing$.

[0]Printed from the file [discretka_L=09.tex] on 15.8.2013

2. Булеві функції для операцій з двома множинами

Нехай Ω — деяка множина, яку ми будемо називати *універсальною*; її елементи будемо позначати ω. Розглянемо дві фіксовані подмножини $A, B \subset \Omega$: $A \neq \varnothing$, $A \neq \Omega$; $B \neq \varnothing$, $B \neq \Omega$. Для будь-якого $\omega \in \Omega$ виконується тільки одна з чотирьох можливих комбінацій:

1) $\omega \in A$, $\omega \in B$;
2) $\omega \in A$, $\omega \notin B$;
3) $\omega \notin A$, $\omega \in B$;
4) $\omega \notin A$, $\omega \notin B$.

В залежності від комбінації виконується або не виконується властивість: $\omega \in A \cup B$:

$$\begin{bmatrix} \omega \in A, \omega \in B & \Longrightarrow \omega \in A \cup B \\ \omega \in A, \omega \notin B & \Longrightarrow \omega \in A \cup B \\ \omega \notin A, \omega \in B & \Longrightarrow \omega \in A \cup B \\ \omega \notin A, \omega \notin B & \Longrightarrow \omega \notin A \cup B \end{bmatrix}.$$

Цю таблицю можна записати простіше, якщо використовувати *булеві* змінні. Булева змінна приймає тільки два значення; в подальшому будемо вважати, що цими значеннями є 0 та 1.

Введемо дві булеві змінні x_1 та x_2, вважаючи, що $x_1 = 0$, якщо $\omega \notin A$, та $x_1 = 1$, якщо $\omega \in A$; а також $x_2 = 0$, якщо $\omega \notin B$, та $x_2 = 1$, якщо $\omega \in B$. Оскільки значення x_1 та x_2 визначають $\omega \in A \cup B$ або $\omega \notin A \cup B$, то цей факт являється функцією від x_1 та x_2. Крім цього, ця функція сама є булевою та називається *булевою функцією.* Оскільки вона залежить від двох змінних, то вона називається *бінарною.* Якщо позначити цю функцію буквою f, то попередню таблицю можна записати так:

$$
(2) \qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & A \cup B & A \cap B & A\Delta B \\
\end{array}
\left|
\begin{array}{ccccc}
x_1 & x_2 & f_1(x_1,x_2) & f_2(x_1,x_2) & f_3(x_1,x_2) \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\right|.
$$

Аналогічним чином можна записати таблицю і для інших операцій з множинами:

$$
(3) \qquad
\left|
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & x_2 & f_4 & f_5 & f_6 & f_7 & f_8 & f_9 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array}
\right|.
$$

А саме

$$
\begin{aligned}
&f_4 \leftrightarrow (A,B) \rightsquigarrow A \setminus B;\\
&f_5 \leftrightarrow (A,B) \rightsquigarrow B \setminus A;\\
&f_6 \leftrightarrow (A,B) \rightsquigarrow \overline{A};\\
&f_7 \leftrightarrow (A,B) \rightsquigarrow \overline{B};\\
&f_8 \leftrightarrow (A,B) \rightsquigarrow \varnothing;\\
&f_9 \leftrightarrow (A,B) \rightsquigarrow \Omega.
\end{aligned}
$$

Функції f_6 та f_7 є фактично функціями однієї змінної:

$$
f_6(x_1,x_2) = g_1(x_1), \qquad f_6(x_1,x_2) = g_1(x_2),
$$

де g_1 та g_2 визначено в (1).

Твердження 1. *Загалом існує тільки 16 бінарних булевих функцій.*

Доведення. Кожна булева функція визначається таблицею своїх значень однозначно. Існує тільки одна таблиця, в якій третій стовпчик складається з одних нулів; чотири таблиці, в яких третій стовпчик складається з трьох нулів та однієї одиниці; шість таблиць, в яких третій стовпчик складається з двох нулів та двох одиниць; чотири таблиці, в яких третій стовпчик складається з одного нуля та трьох одиниць; тільки одна таблиця, в якій третій стовпчик складається з чотирьох одиниць. $\square$

Ось таблиці значень решти семи бінарних булевих функцій:

(4)

x_1	x_2	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1	1	1

Задача 1. *Довести, що* $f_{10} \leftrightarrow (A,B) \rightsquigarrow \overline{A\cup B}$; $f_{11} \leftrightarrow (A,B) \rightsquigarrow A$; $f_{12} \leftrightarrow (A,B) \rightsquigarrow B$; $f_{13} \leftrightarrow (A,B) \rightsquigarrow \overline{A\Delta B}$; $f_{14} \leftrightarrow (A,B) \rightsquigarrow \overline{A\cap B}$; $f_{15} \leftrightarrow (A,B) \rightsquigarrow \overline{A\setminus B}$; $f_{16} \leftrightarrow (A,B) \rightsquigarrow \overline{B\setminus A}$.

З цих функцій виділяються f_{10} та f_{14}. Перша відповідає операції над множинами, яка називається *стрілка Пірса*, а друга — *штрих Шеффера*, а множина $A \downarrow B$ складається з тих $\omega \in \Omega$, які не належать жодній з множин A та B. Множина $A|B$ містить всі елементиы $\omega \in \Omega$, крім $\omega \in A\cap B$.

Твердження 2.

(a) $\overline{A} = A \downarrow A$;

(b) $A \cap B = (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$;

(c) *операцію об'єднання двох множин можна здійснити, використовуючи тільки стрілку Пірса.*

Доведення. Дві булеві функції рівні, якщо співпадають їхі таблиці значень. Властивість (a) випливає з рівності

$$f_6(x_1, x_1) = f_{10}(x_1, x_1)$$

для всіх можливих x_1. Для властивості (b) необхідно показати, що

$$f_2(x_1, x_2) = f_{10}(f_{10}(x_1, x_1), f_{10}(x_2, x_2)).$$

Для доведення (c) треба скористатися $\boxed{\text{як?}}$ (a), (b) та правилами Де Моргана. □

Таким чином, операції доповнення, перетину та об'єднання можна здійснити, використовуючи тільки стрілку Пірса.

Задача 2. *Довести, що операції доповнення, перетину та об'єднання можна здійснити, використовуючи тільки штрих Шеффера.*

Теорема 1. *Єдиними бінарними булевими функціями, яких достатньо для побудови будь-якої іншої бінарної функції, є стрілка Пірса $\downarrow$ та штрих Шеффера $|$.*

Доведення. Нехай $h(x_1, x_2)$ є такою бінарною функцією, за допомогою якої можна побудувати будь-яку іншу бінарну функцію. Якщо $h(1,1) = 1$, то f_6 та f_7 не можна побудувати за допомогою однієї h. Доведемо це від супротивного. Нехай $h(1,1) = 1$. Оскільки f_6 виражається тільки через h, то $f_6(x_1, x_1) = h(\ldots, \ldots)$, де замість $\ldots$ стоять деякі комбінації виразів $h(x_1, x_1)$. Однак, якщо $\omega \in \Omega$, то $x_1 = 1$ і тому $h(x_1, x_1) = 1$ за припущенням. Застосовуючи послідовно це правило до виразів $\ldots$, приходимо до $h(\ldots, \ldots) = 1$, що протирічить значенню $f_6(x_1, x_1) = 0$ для $x_1 = 1$.

Задача 3. *Довести, що $h(0,0) = 1$.*

Таким чином таблиця значень функції h має вигляд

$$\begin{array}{|ccc|} x_1 & x_2 & h(x_1,x_2) \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Якщо у другому та третьому рядках таблиці стоять 0 та 0 або 1 та 1, то таблиці відповідають функціям f_{10} та f_{14}, тобто операціям $\downarrow$ та $|$ відповідно.

Якщо ж там стоїть 0 та 1, то ця таблиця відповідає функції f_6, тобто операції $\overline{A}$. Однак функція f_9 не може бути виражена через f_6. Найпростіше це можна довести, якщо перейти до відповідних операцій над множинами.

Припустимо від супротивного, що f_9 виражається тільки через f_6. Це відповідає умові, що Ω може бути отримана з A з використанням тільки операції доповнення: $\Omega = \overline{(\ldots)}$, де $\ldots$ означає деяку послідовність операцій доповнення. Якщо ця послідовність складається з парної кількості операцій доповнення, то отримуємо рівність $\Omega = A$, яка неможлива. (Приклад такої послідовності: $\overline{\overline{A}} = A$.)

Якщо ж у цій послідовності непарна кількість операцій доповнення, то приходимо до рівності $\Omega = \overline{A}$, яка також неможлива.

Задача 4. *Довести, що 1 та 0 у другому та третьому рядках також неможливі.*

$\square$

3. Булеві функції в електротехніці

Електричний ланцюг, що містить тільки двохпозиційні перемикачі, може бути представлений за допомогою діаграми, на якій біля кожного перемикача записується ідентифікатор булевої змінної (див. рис. 1).

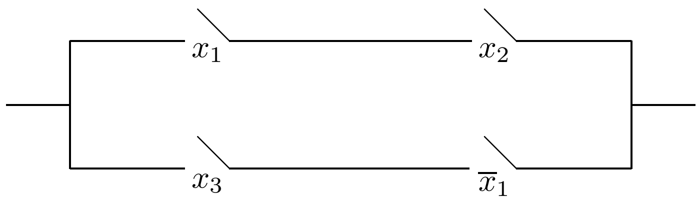

Рис. 1.

Якщо змінна x_1 приймає значення 1, то струм йде через цей перемикач; якщо ж вона приймає значення 0, то — ні. Аналогічне правило виконується для інших змінних. Умовою проходження струму верхньою гілкою схеми 1 є

$$f_2(x_1, x_2) = 1$$

(див. означення (2)). Умовою проходження струму нижньою гілкою є $f_2(x_3, g_1(x_1)) = 1$ (див. означення (1) та (2)). Умовою проходження струму для всієї схеми є

$$f_1(f_2(x_1, x_2), f_2(x_3, g_1(x_1))) = 1.$$

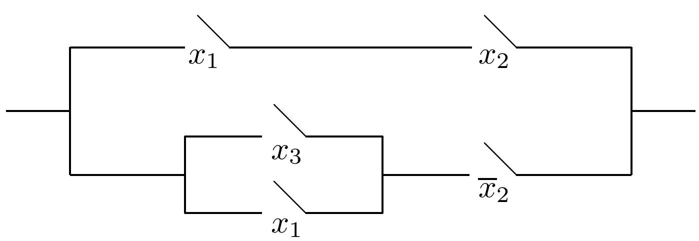

Рис. 2.

Умовою проходження струму для схеми 2 є

$$f_1(f_2(x_1, x_2), f_2(f_1(x_3, x_1), g_1(x_2))) = 1.$$

Легко переконатися, що ця рівність еквівалентна такій:

$$f_1(x_1, f_2(x_3, g_1(x_2)) = 1.$$

Тому схема 2 еквівалентна більш простій схемі 3:

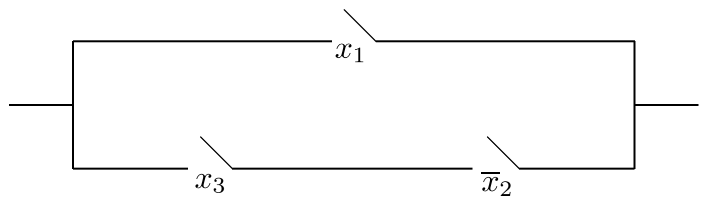

Рис. 3.

Задача 5. *Деяка країна населена мешканцями, кожен з яких або завжди говорить правду, або завжди бреше і які відповідають на питання тільки “так” чи “ні”. Мандрівник підходить до перехрестя доріг, одна з яких веде в столицю, а інша туди не веде. На перехресті немає жодного знаку, який би вказував напрямок. Проте тут стоїть місцевий мешканець. Яке питання, що потребує відповіді “так” чи “ні”, повинен задати мандрівник, щоб вибрати потрібну йому дорогу?*

Вказівка до задачі 5. Нехай x_1 означає висловлювання “зустрічний абориген завжди бреше”, x_2 означає висловлювання “дорога, що йде ліворуч, веде в столицю”. За допомогою відповідної таблиці істинності побудувати таку булеву функцію, аргументами якої є x_1 та x_2, щоб відповідь аборигена на питання чи істинна ця функція, був “так” тоді і тільки тоді, коли x_2 істинно.