Лекція 12

ФОРМУЛИ АЛГЕБРИ ВИСЛОВЛЮВАНЬ

1. Двійкове представлення

У повсякденному житті ми вживаємо числа, записані у десятковій числовій системі, наприклад $2013 = (2013)_{10}$. Цей запис означає, що

$$(2013)_{10} = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^1.$$

Індекс 10 майже ніколи не використовується у запису чисел, а саме число 10 називається *основою числової системи*. Числа 2, 0, 1 та 3 називаються коефіцієнтами десяткового числа $(2013)_{10}$. Всі коефіцієнти у десятковій числовій системі строго менші її основи.

Існує інше представлення, яке називають *двійковим*, у якому замість 10 використовують 2. Коефіцієнти двійкового представлення можуть дорівнювати тільки 0 або 1. Кожне ціле невід'ємне число m можна записати у двійковому вигляді, наприклад $(2013)_{10} = (11111011101)_2$. Вважаємо, що $(0)_{10} = (0)_2$.

1.1. Алгоритм знаходження двійкового представлення числа. Опишемо алгоритм, за яким можна отримати двійкове представлення довільного натурального числа $m > 0$.

[0]Printed from the file `[discretka_L=11.tex]` on 15.8.2013

Початок. Покласти $n = m$; $k = 0$.

Цикл. Покласти $k \to k + 1$; знайти найбільше $i \geq 1$, для якого $2^i \leq n$; покласти $j_k = i$; покласти $n \to n - 2^k$.

Умова. Якщо $n = 0$, перейти на **Кінець**; якщо ж $n > 0$, повторити **Цикл**.

Кінець. Записати двійкове предствлення числа m: воно складається з $j_1 + 1$ позицій; ліва позиція має номер j_1, а права — 0. В позиціях $j_1, \dots, j_k$ стоять 1, а в решті — 0. Тому

$$m = 2^{j_1} + 2^{j_2} + \dots + 2^{j_k} = (\underset{j_1}{\boxed{1}}00\underset{j_2}{\boxed{1}}0\dots0\underset{j_k}{\boxed{1}}0\dots0)_2. \tag{1}$$

Приклад 1. Використаємо алгоритм для знаходження двійкового представлення числа 2013.

Початок	$n = 2013,\ k = 0$	$\to$ **Цикл**
Цикл	$k = 1,\ j_1 = 10,\ n = 989$	$\to$ **Цикл**
Цикл	$k = 2,\ j_2 = 9,\ n = 477$	$\to$ **Цикл**
Цикл	$k = 3,\ j_3 = 8,\ n = 221$	$\to$ **Цикл**
Цикл	$k = 4,\ j_4 = 7,\ n = 93$	$\to$ **Цикл**
Цикл	$k = 5,\ j_5 = 6,\ n = 29$	$\to$ **Цикл**
Цикл	$k = 6,\ j_6 = 4,\ n = 13$	$\to$ **Цикл**
Цикл	$k = 7,\ j_7 = 3,\ n = 5$	$\to$ **Цикл**
Цикл	$k = 8,\ j_8 = 2,\ n = 1$	$\to$ **Цикл**
Цикл	$k = 9,\ j_9 = 0,\ n = 0$	$\to$ **Кінець**

$$\begin{aligned} 2013 &= 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0 \\ &= \underset{10}{1}\ \underset{9}{1}\ \underset{8}{1}\ \underset{7}{1}\ \underset{6}{1}\ \underset{5}{0}\ \underset{4}{1}\ \underset{3}{1}\ \underset{2}{1}\ \underset{1}{0}\ \underset{0}{1} = (11111011101)_2. \end{aligned}$$

Задача 1. *Довести, що $j_1 > j_2 > \cdots > j_k$; довести формулу (1)*

Цифри в двійковому представленні називаються *розрядами.* Оскільки розряди у двійковому представленні приймають значення 0 або 1, то їх можна вважати бульовими змінними.

2. Додавання двійкових чисел

Для додавання двійкових чисел зручно користуватись алгоритмом додавання стовпчиком:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} x_n \dots x_1 x_0 \\ y_n \dots y_1 y_0 \end{array} \\ \hline z_{n+1} z_n \dots z_1 z_0 \end{array}$$

Тут $x_n \dots x_1 x_0$, $y_n \dots y_1 y_0$, $z_{n+1} z_n \dots z_1 z_0$ — двійкові представлення чисел. Залишається виразити значення розрядів суми через значення розрядів доданків.

Для розв'язання цієї задачі розглянемо допоміжні бульові змінні $w_n, \dots, w_0, w_{-1}$: $w_{-1} = 0$, а w_i — це результат переноса з i-ого розряду в (i+1)-ий. Покладемо $x_{n+1} = y_{n+1} = 0$. Тоді

$$z_i = ((x_i + y_i) + w_{i-1}), \qquad i = 1, \dots, n+1.$$

Тут символ "+" означає додавання $\mod 2$. Перенос з i-ого розряду в $(i+1)$-ий має місце тоді і тільки тоді, коли принаймні дві з трьох величин x_i, y_i, w_{i-1} дорівнюють 1. Це правило можна сформулювати так: для кожного $i = 1, \dots, n$ розряд w_i дорівнює

"x_i та y_i", або "x_i та w_{i-1}", або "y_i та w_{i-1}".

Якщо замінити “та” на квантор “&”, а “або” на квантор “$\vee$”, то отримаємо наступну формулу для w_i:

$$w_i = (((x_i \& y_i) \vee (x_i \& w_{i-1})) \vee (y_i \& w_{i-1})), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

3. Задача про виклик ліфта

У під’їзді є 3 ліфта, які обслуговують n поверхів. На кожному поверсі є кнопка виклику найближчого вільного ліфта. Як мовою алгебри логіки записати умову виклику i-ого ліфта, $i = 1, 2, 3$?

Для опису вихідної інформації введемо $3n$ аргументів:

$$x_1, y_1, z_1,\ x_2, y_2, z_2,\ \ldots,\ x_n, y_n, z_n,$$

де $x_i = 1$ тоді і тільки тоді, коли 1-ий ліфт знаходиться на i-ому поверсі і є вільним; $y_i = 1$ тоді і тільки тоді, коли 2-ий ліфт знаходиться на i-ому поверсі і є вільним; $z_i = 1$ тоді і тільки тоді, коли 3-ий ліфт знаходиться на i-ому поверсі і є вільним.

Розглянемо задачу для випадку виклику ліфта з першого поверху. Через $a_n = f_n(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n)$ позначимо функцію, що дорівнює 1 тоді і тільки тоді, коли викликається ліфт з номером 1. Умова виклику першого ліфта характеризується тим, що

> *“1-ий ліфт вільний і нема вільних ліфтів, що знаходяться на більш низькому поверсі, ніж 1-ий ліфт”*

Це висловлювання можна виразити докладніше наступним чином:

> *“1-ий ліфт викликається тоді і тільки тоді, коли*
>
> (a) *1-ий ліфт знаходиться на першому поверсі і є вільним; або*
>
> (b) *на першому поверсі ліфтів 2 та 3 немає або вони зайняті, а 1-ий ліфт знаходиться на другому поверсі і є вільним; або*
>
> (c) *на другому поверсі ліфтів 2 та 3 немає або вони зайняті, а 1-ий ліфт є вільним; або ... ”*

Запишемо це висловлювання через висловлювання для випадку $n = 2$:

$$\begin{aligned} f_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) &= (x_1 \vee ((\overline{y}_1 \& \overline{z}_1) \& x_2)) \\ &= (x_1 \vee ((\overline{y}_1 \overline{z}_1) x_2)). \end{aligned}$$

У загальному випадку зручно використовувати рекурсію, оскільки 1-ий ліфт можна викликати або з одного з поверхів $1, \dots, n-1$, або з поверху n:

$$f_n = (f_{n-1} \vee ((\overline{y}_n \& \overline{z}_n) \& x_n)) = (f_{n-1} \vee (\overline{y}_n \overline{z}_n) x_n)).$$

4. Двоїсті функції

Функція $f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)$ називається *двоїстою* до f. Щоб отримати таблицю істинності для двоїстої функції f^*, необхідно у стовпчику f замінити 0 на 1, а 1 на 0 і перевернути його. Наприклад, для $f(x, y) = x \vee y$ маємо

$f^{\mathrm{inv}}(x,y) = (\overline{f}(x,y))$ та $f^{*}(x,y) = f^{\mathrm{inv}}((\overline{x}),(\overline{y}))$:

$$\left|\begin{array}{ccc} x & y & f(x,y) \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \xrightarrow{\text{інверсія}} \left|\begin{array}{ccc} x & y & f^{\mathrm{inv}}(x,y) \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$$\xrightarrow{\text{переворот}} \left|\begin{array}{ccc} x & y & f^{*}(x,y) \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Теорема 1. $(f^{*})^{*} = f$.

Приклади двоїстих функцій.

$$\begin{array}{ccc} f(x,y) & f^{*}(x,y) & (f^{*})^{*} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ x & \overline{x} & x \\ x\&y & x \vee y & x\&y \end{array} \qquad (2)$$

Доведення для останнього рядку цієї таблиці випливає з правил де Моргана:

$$(x\&y)^{*} = \overline{((\overline{x})\&(\overline{y}))} = (\overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}}) = (x \vee y).$$

5. Принцип двоїстості

Нехай функція f записана у вигляді формули. Чи можна побудувати формулу для її двоїстої функції f^{*}?

Теорема 2. *Нехай є k наборів бульових змінних*

$$\{x_{11}, \ldots, x_{1n_1}\}, \quad \ldots, \quad \{x_{k1}, \ldots, x_{kn_k}\}.$$

Позначимо через $x_1, \ldots, x_n$ сукупність всіх змінних з цих наборів. Якщо

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = f(f_1(x_{11}, \ldots, x_{1n_1}), \ldots, f_k(x_{k1}, \ldots, x_{kn_k})),$$

то

$$\Phi^*(x_1, \ldots, x_n) = f^*(f_1^*(x_{11}, \ldots, x_{1n_1}), \ldots, f_k^*(x_{k1}, \ldots, x_{kn_k})).$$

Доведення. Оскільки $\Phi^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{\Phi}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$, то

$$\begin{aligned}
\Phi(x_1, \ldots, x_n) &= \overline{f}\left(f_1(\overline{x}_{11}, \ldots, \overline{x}_{1n_1}), \ldots, f_k\left(\overline{x}_{k1}, \ldots, \overline{x}_{kn_k}\right)\right) \\
&= \overline{f}\left(\overline{\overline{f}}_1(\overline{x}_{11}, \ldots, \overline{x}_{1n_1}), \ldots, \overline{\overline{f}}_k\left(\overline{x}_{k1}, \ldots, \overline{x}_{kn_k}\right)\right) \\
&= \overline{f}\left(\overline{f}_1^*(x_{11}, \ldots, x_{1n_1}), \ldots, \overline{f}_k^*\left(x_{k1}, \ldots, x_{kn_k}\right)\right) \\
&= f^*\left(f_1^*(x_{11}, \ldots, x_{1n_1}), \ldots, f_k^*\left(x_{k1}, \ldots, x_{kn_k}\right)\right).
\end{aligned}$$

□

Наслідок 1. *Якщо формула складається з підформул*

$$\{0, 1, \overline{x}, x\&y, x \vee y\},$$

то для отримання двоїстої формули необхідно замінити 0 *на* 1, 1 *на* 0, & *на* $\vee$ *и* $\vee$ *на* &.

Доведення випливає з теореми 2 та таблиці (2). □

Приклад 2. Відповідно до наслідку 1 двоїстою до формули $((x_1\&x_2) \vee (x_3\&x_4))$ є формула

$$((x_1 \vee x_2)\&(x_3 \vee x_4)).$$

6. Алгебра Жегалкіна

Множина бульових функцій, разом із операціями кон'юнкції та додавання за модулем 2, називається *алгеброю Жегалкіна.* Додавання за модулем 2 має такі властивості:

$$x + y = y + x, \tag{3}$$

$$\overline{x} = 1 + x, \tag{4}$$

$$x \vee y = x + y + xy, \tag{5}$$

$$x + y = \overline{x}y \vee x\overline{y}. \tag{6}$$

Рівність (3) зрозуміла. Порівнюючи третій та четвертий стовпчики у таблиці істинності

$$\left|\begin{array}{cccc} x & y & \overline{x} & 1+x \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right|,$$

доводимо (4).

Порівнюючи третій та шостий стовпчики у таблиці істинності

$$\left|\begin{array}{cccccc} x & y & x \vee y & x+y & xy & x+y+xy \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|,$$

доводимо (5).

Порівнюючи четвертий та восьмий стовпчики у таблиці істинності

x	y	$\overline{x}$	$x+y$	$\overline{y}$	$x\overline{y}$	$\overline{x}y$	$\overline{x}y \vee x\overline{y}$
1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0

доводимо (6).

Приклад 3. Формулу $\overline{(\overline{x} \vee (x\overline{y}))}$ звести до формули в алгебрі Жегалкіна, тобто виразити цю формулу через додавання за модулем 2 і логічний добуток. Використовуючи (4)–(5), отримаємо

$$\begin{aligned}\overline{(\overline{x} \vee (x\overline{y}))} &= 1 + (\overline{x} \vee (x\overline{y})) = 1 + \overline{x} + x\overline{y} + \overline{x}x\overline{y}\\ &= 1 + (1+x) + x(1+y) + (1+x)x(1+y).\end{aligned}$$

У силу комутативності та асоціативності

$$\begin{aligned}\overline{(\overline{x} \vee (x\overline{y}))} &= (1+1) + x + (x + xy) + (x + xx)(1+y)\\ &= 0 + (x+x) + xy + (x+x)(1+y)\\ &= 0 + 0 + xy + 0(1+y) = xy.\end{aligned}$$

7. Бульова алгебра

Множина бульових функцій, разом з операціями заперечення, кон’юнкції та диз’юнкції, називається *бульовою алгеброю.*

Приклад 4. Формулу $((x+1)y+(x+1))$ звести до формули в бульовій алгебрі, тобто виразити цю формулу через заперечення, кон'юнкцію та диз'юнкцію. Скористаємось (4), (6) та правилами де Моргана:

$$(x+1)y+(x+1) \overset{(4)}{=} ((\overline{x}y)+\overline{x}) \overset{(6)}{=} \left(\left(\overline{(\overline{x}y)}(\overline{x})\right) \vee (\overline{x}y)\overline{(\overline{x})}\right)$$
$$= (((\overline{x} \vee \overline{y})\overline{x}) \vee (\overline{x}y)x)\,.$$

Використовуємо тепер правила де Моргана, комутативність та правило поглинання:

$$((\overline{x} \vee \overline{y})\overline{x}) = ((\overline{x})(\overline{x})) \vee ((\overline{y})(\overline{x}))) = (\overline{x} \vee ((\overline{x})(\overline{y}))) = (\overline{y})(\overline{x}).$$

Тепер скористаємось асоціативністю та комутативністю:

$$(\overline{x}y)x = (x\overline{x})y = 0.$$

Тому

$$(x+1)y+(x+1) = ((\overline{x})(\overline{y})) \vee 0 = (\overline{x})(\overline{y}).$$