Лекция 7

ЗАДАЧИ О РАЗОРЕНИИ И ПОГЛОЩЕНИИ

1. Задача о разорении

Пример 1. Напомним формулировку задачи о разорении (см. §1.4, лекция 2). Петя и Вася играют в игру, которая состоит из последовательности раундов. В каждом раунде Петя выигрывает с вероятностью p, а Вася — с вероятностью $q = 1 - p$. Считаем, что результаты раундов независимы друг от друга. После каждого раунда проигравший платит победителю 1 коп. В начале игры Петя имеет a коп., а Вася — b коп. Игра продолжается до тех пор, когда один из игроков не разорится, но не более n раундов. Какова вероятность разорения Пети?

1.1. Аналог для случайного блуждания. Капитал Пети (как и капитал Васи) в примере 1 меняется на 1 коп. после каждого раунда. Рассмотрим частицу, которая в начальный момент времени находится в точке $x = a$ и которая на каждом шаге сдвигается вправо, если Петя выигрывает, и влево, если он проигрывает. Тогда капитал Пети равен координате частицы в каждый момент времени. Если частица достигает точки $x = 0$ раньше, чем точки $x = a + b$, то Петя разорен. В этот (случайный) момент времени блуждание прекращается. Блуждание заканчивается и при достижении точки $x = a + b$ (в этом случае разорен Вася).

1.2. Второй аналог для случайного блуждания. На плоскости рассмотрим случайную траекторию, выходящую из начала координат. Пусть $A \le 0 \le B$ — два целых числа. Обозначим через N_k^+ количество звеньев траектории среди первых k, которые направлены вверх, а через N_j^- — количество звеньев траектории среди первых k, направленных вниз. Выход случайного блуждания на уровень B в момент k означает, что $N_k^+ - N_k^- = B$. Это, в свою очередь, равносильно тому, что в момент k у Васи на $b = B$ проигрышей больше, чем выигрышей, а это и означает его разорение.

Аналогично, выход случайного блуждания на уровень A в момент k означает, что $N_k^+ - N_k^- = A$. Это равносильно тому, что в момент k Петя имеет на $a = -A$ больше проигрышных раундов, чем выигрышных, а это равносильно его разорению.

2. Решение задачи о разорении

Будем рассматривать постановку задачи, рассмотренную в §1.2. Сначала введем некоторые обозначения в терминах случайного блуждания.

Рассмотрим случайное блуждание $S_1, \dots, S_n$; пусть p — вероятность сдвига вправо, $q = 1 - p$ — вероятность сдвига влево. Считаем, что $S_0 = 0$.

Пусть $A \le 0 \le B$, $A < B$, и $x \in [A, B] \cap \mathbf{Z}$. Свяжем со случайным блужданием $S_1, \dots, S_n$ и числом x последовательность $\tau(x) = \tau_n(x)$, $A \le x \le B$,

[0]Printed from the file [TSP-00-07.tex] on 19.11.2014

определенную следующим образом: $\tau(A) = \tau(B) = 0$ и для $x \in (A, B)$

$$(1) \quad \tau(x) = \begin{cases} j, & \text{если } x + S_j = A \text{ или } x + S_j = B, \\ & \quad \text{но } x + S_i \in (A, B) \text{ для всех } 1 \le i < j, \\ n + 1, & \text{если } x + S_i \in (A, B) \text{ для всех } 1 \le i \le n. \end{cases}$$

как корректно определить событие $\{\omega\colon \tau(x) = 1\}$? Таким образом, $\tau(x)$ — это момент первого выхода блуждания на границу интервала $[A, B]$. В тех случаях, когда этого не происходит, мы полагаем $\tau(x) = n + 1$.

Замечание 1. Мы используем индекс n в обозначении $\tau_n(x)$ в том случае, если необходимо специально указать максимальное количество шагов у случайного блуждания. Ниже мы рассматриваем случайные блуждания, которые имеют переменное количество шагов $k \le n$. Все введенные выше определения легко адаптируются и для таких блужданий.

Для $0 \le k \le n$ рассмотрим случайные события

$$(2) \quad \begin{aligned} A_k(x) &= \bigcup_{j=0}^{k} A_{kj}(x), \qquad A_{kj}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega\colon \tau_k(x) = j,\ x + S_j = A\}, \\ B_k(x) &= \bigcup_{j=0}^{k} B_{kj}(x), \qquad B_{kj}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega\colon \tau_k(x) = j,\ x + S_j = B\}. \end{aligned}$$

Таким образом, $A_n(x)$ — это событие, заключающееся в том, что блуждание $S_1, \ldots, S_n$ впервые выходит на границу интервала $[A, B]$ в точке A, а $B_n(x)$ — это событие, заключающееся в том, что оно впервые выходит на границу интервала $[A, B]$ в точке B.

Одна из траекторий события $A_n(x)$ представлена на рис. 1.

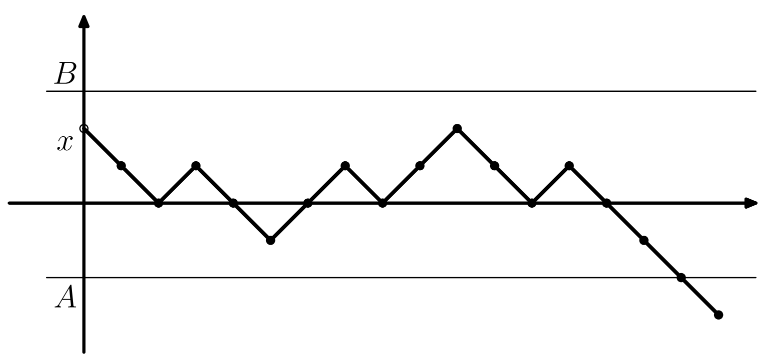

Рис. 1. Траектория из $A_n(x)$

Обозначим также через $\alpha_n(x)$ и $\beta_n(x)$ вероятности событий $A_n(x)$ и $\beta_n(x)$, соответственно:

$$(3) \qquad \alpha_n(x) = \mathsf{P}(A_n(x)), \qquad \beta_n(x) = \mathsf{P}(B_n(x)).$$

Одна из траекторий случайного блуждания $S_1, \ldots, S_{16}$, приводящая к разорению второго игрока, показана на рис. 2.

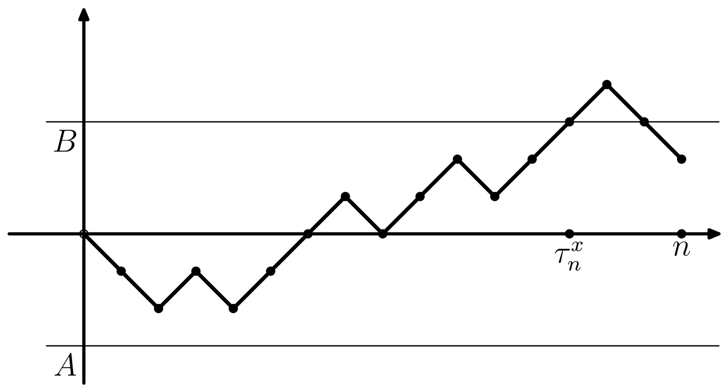

Рис. 2. Разорение второго игрока: $n = 16$, $x = 0$, $\tau_n(x) = 13$

Теорема 1. *Для всех $x \in (A, B)$ и $1 \le k \le n$*

$$\beta_k(x) = p\beta_{k-1}(x+1) + q\beta_{k-1}(x-1), \tag{4}$$

причем

$$\begin{aligned} \beta_j(B) &= 1, \qquad 0 \le j \le n, \\ \beta_j(A) &= 0, \qquad 0 \le j \le n. \end{aligned} \tag{5}$$

Аналогично, для всех $x \in (A, B)$ и $1 \le k \le n$

$$\alpha_k(x) = p\alpha_{k-1}(x+1) + q\alpha_{k-1}(x-1), \tag{6}$$

причем

$$\begin{aligned} \alpha_j(A) &= 1, \qquad 0 \le j \le n, \\ \alpha_j(B) &= 0, \qquad 0 \le j \le n. \end{aligned} \tag{7}$$

Таким образом, в формулах (4) и (6) вероятности достижения границ интервала за k шагов выражены через вероятности достижения этих же границ, но за $k-1$ шагов, причем с измененным начальным положением.

Замечание 2. Определим непосредственно $\alpha_0(x)$ и $\beta_0(x)$. Для $x = A$ и $x = B$ эти вероятности заданы формулами (5) и (7). Если же $x \in (A, B)$, то из (2) вытекает, что $A_n(x) = \varnothing$ и $B_n(x) = \varnothing$, $\boxed{\text{почему?}}$ поэтому $\alpha_0(x) = \beta_0(x) = 0$, $x \in (A, B)$.

Замечание 3. Рекуррентные соотношения (4) и (6) можно использовать для последовательного вычисления вероятностей выхода на границу. Покажем эту процедуру для $k = 1$. Если $B = A + 1$, то $(A, B) \cap \mathbf{Z} = \varnothing$ и поэтому все вероятности $\alpha_1(x)$ и $\beta_1(x)$, $x \in [A, B]$, определены в равенствах (5) и (7). Если же $B = A + 2$, то $(A, B) \cap \mathbf{Z} = \{A + 1\}$ и согласно формулам (4)–(7)

$$\begin{aligned} \beta_1(A+1) &= p\beta_0(B) + q\beta_0(A) = p, \\ \alpha_1(A+1) &= p\alpha_0(B) + q\alpha_0(A) = q. \end{aligned}$$

Наконец, если $B > A+2$ и $x \in (A,B) \cap \mathbf{Z}$, то согласно замечанию 2

$$\beta_1(x) = p\beta_0(x+1) + q\beta_0(x-1) = \begin{cases} 0, & A+1 \le x < B-1, \\ p, & x = B-1, \end{cases}$$

и

$$\alpha_1(x) = p\alpha_0(x+1) + q\alpha_0(x-1) = \begin{cases} q, & x = A+1, \\ 0, & A+1 < x \le B-1. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 1. Согласно замечанию 2, $\alpha_0(x) = \beta_0(x) = 0$ для всех $x \in (A,B)$. Пусть теперь $1 \le k \le n$. По формуле полной вероятности

$$\begin{aligned}\beta_k(x) &= \mathsf{P}(B_k(x)) = \mathsf{P}\left(B_k(x)/\varepsilon_1 = 1\right)\mathsf{P}(\varepsilon_1 = 1) + \mathsf{P}\left(B_k(x)/\varepsilon_1 = -1\right)\mathsf{P}(\varepsilon_1 = -1) \\ &= p\mathsf{P}\left(B_k(x)/\varepsilon_1 = 1\right) + q\mathsf{P}\left(B_k(x)/\varepsilon_1 = -1\right).\end{aligned}$$

Покажем, что

$$\mathsf{P}\left(B_k(x)/\varepsilon_1 = 1\right) = \mathsf{P}(B_{k-1}(x+1)), \tag{8}$$

$$\mathsf{P}\left(B_k(x)/\varepsilon_1 = -1\right) = \mathsf{P}(B_{k-1}(x-1)). \tag{9}$$

Заметим, что события $B_{kj}(x)$ в (2) являются непересекающимися. Событие $B_{kj}(x)$ состоит из траекторий

$$(x, x+S_1, x+S_2, \ldots, x+S_{k-1}, x+S_k),$$

координаты которых удовлетворяют условиям: $x \in (A,B)$ и

$$x+S_1 \in (A,B),\ x+S_2 \in (A,B),\ \ldots,\ x+S_{j-1} \in (A,B),\ x+S_j = B.$$

В свою очередь, каждое из событий $B_{kj}(x)$ представимо в виде объединения непересекающихся случайных событий $B^-_{kj}(x)$ и $B^+_{kj}(x)$, где

$$B^-_{kj}(x) = B_{kj}(x) \cap \{\omega \colon \varepsilon_1 = -1\}, \qquad B^+_{kj}(x) = B_{kj}(x) \cap \{\omega \colon \varepsilon_1 = 1\}.$$

Каждая траектория

$$(x, x+1, x+1+\varepsilon_2, \ldots, x+1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_k) \in B^+_{kj}(x)$$

находится во взаимно однозначном соответствии с траекторией

$$(x+1, x+1+\varepsilon_2, \ldots, x+1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_k) \in B_{k-1,j-1}(x+1).$$

Аналогичное взаимно однозначное соответствие можно установить между траекториями из событий $B^-_{kj}(x)$ и $B_{k-1,j-1}(x-1)$. Поэтому

$$\mathsf{P}(B^+_k(x)) = \mathsf{P}(B_{k-1}(x+1)), \qquad \mathsf{P}(B^-_k(x)) = \mathsf{P}(B_{k-1}(x+1)). \tag{10}$$

$\boxed{\text{это надо объяснить в случае } p \ne q}$ Чтобы закончить доказательство, заметим, что

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left(B_k(x)/\varepsilon_1 = 1\right) &= \mathsf{P}\left((x, x+S_1, \ldots, x+S_k) \in B^+_k(x)/\varepsilon_1 = 1\right) \\ &= \mathsf{P}\left((x, x+1, \ldots, x+1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_k) \in B^+_k(x)/\varepsilon_1 = 1\right) \\ &= \mathsf{P}((x, x+1, x+1+\varepsilon_2, \ldots, x+1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_k) \in B^+_k(x)),\end{aligned}$$

так как случайная величина ε_1 не зависит от $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$. Если учесть равенство (10), то получим (8).

Проводя аналогичные рассуждения для $\mathsf{P}\left(B_k(x)/\varepsilon_1 = -1\right)$, приходим к (9) и заканчиваем доказательство рекуррентного соотношения (4).

Тот же метод применим и для доказательства соотношения (6). $\square$

3. Асимптотическое рекуррентное уравнение

3.1. Уравнение (4)–(5). Ясно, что $B_{k-1}(x) \subseteq B_k(x)$, $k \le n$. Поэтому $\beta_{k-1}(x) \le \beta_k(x) \le 1$, $k \le n$. Следовательно, естественно считать, что $\beta_n(x)$ при больших n близко к решению $\beta(x)$ уравнения

$$\beta(x) = p\beta(x+1) + q\beta(x-1), \qquad A < x < B, \tag{11}$$

с граничными условиями

$$\beta(A) = 0, \qquad \beta(B) = 1. \tag{12}$$

Замечание 4. Поскольку n — это количество шагов случайного блуждания, то переход к пределу при $n \to \infty$ можно интерпретировать как переход к "*бесконечному*" случайному блужданию. Сами вероятности $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ можно рассматривать как вероятности разорения игроков при "*бесконечном*" количестве раундов. Понятие "*бесконечное случайное блуждание*" будет рассмотрено в следующей лекции.

Решение уравнения (11). Поскольку $\beta(x) = (p+q)\beta(x)$, мы выводим из (11)

$$q(\beta(x) - \beta(x-1)) = p(\beta(x+1) - \beta(x)).$$

Положив

$$r = \frac{q}{p}, \qquad d_x = \beta(x+1) - \beta(x), \quad A \le x < B,$$

приходим к рекуррентному уравнению

$$d_x = r d_{x-1}, \qquad A < x \le B.$$

Итерируя его, получаем $d_x = r^{x-A} d_A$, $A \le x \le B$. Значит, при $A < x \le B$,

$$\begin{aligned} -\beta(x) = \beta(A) - \beta(x) &= \sum_{i=A}^{x-1} (\beta(i) - \beta(i+1)) = \sum_{i=A}^{x-1} d_i = \sum_{i=A}^{x-1} r^{i-A} d_A \\ &= \frac{1 - r^{x-A}}{1-r} d_A \end{aligned} \tag{13}$$

при условии, что $r \ne 1$. Используя полученное равенство с $x = B$, находим $d_A = -(1-r)/(1-r^{B-A})$. Подставляя этот результат в (13), получаем

$$\beta(x) = \frac{1 - r^{x-A}}{1 - r^{B-A}} = \frac{r^x - r^A}{r^B - r^A}, \qquad A \le x \le B. \tag{14}$$

Например, вероятность разорения второго игрока раньше, чем первого, равна

$$\beta(0) = \frac{1 - (q/p)^A}{(q/p)^B - (q/p)^A}, \qquad p \ne q.$$

Если $r = 1$, то $d_j = d_A$, $j \ge A$, и поэтому цепочка равенств (13) приводит к $-\beta(x) = (x-A)d_A$. При $x = B$ имеем $-1 = (B-A)d_A$. Значит

$$\beta(x) = (x-A)d_A = \frac{x-A}{B-A}. \tag{15}$$

В частности, вероятность разорения второго игрока раньше, чем первого, равна

$$\beta(0) = -\frac{A}{B-A}, \qquad p = q.$$

□

Задача 1. *Получить* (15) *из* (14) *предельным переходом при* $r \to 1$.

3.2. Уравнение (6)–(7). Тем же методом, что и в §3.1, можно рассмотреть асимптотическое уравнение и для α:

$$\begin{gathered} \alpha(x) = p\alpha(x+1) + q\alpha(x-1), \qquad A < x < B, \\ \alpha(A) = 1, \qquad \alpha(B) = 0. \end{gathered} \tag{16}$$

В результате мы получим решение

$$\alpha(x) = \frac{r^x - r^A}{r^B - r^A}, \qquad A \le x \le B, \tag{17}$$

в случае $p \ne q$ или

$$\alpha(x) = \frac{B - x}{B - A}, \qquad A \le x \le B, \tag{18}$$

в случае $p = q$.

Заметим, что в любом случае

$$\alpha(x) + \beta(x) = 1, \qquad A \le x \le B.$$

Задача 2. *Применить тот же метод, что и в §3.1, и найти решение уравнения (16) в виде (17) при $p \ne q$ или (18) при $p = q$.*

Замечание 5. Решения (17) и (18) можно получить непосредственно как следствия результатов §3.1. Для этого необходимо поменять Петю и Васю местами.

Задача 3. *Объяснить как получить решения (17) и (18) с помощью метода, упомянутого в замечании 5.*

3.3. Ответы в случае первой постановки. Приведем ответы для задачи, рассмотренной в §1.1. Вероятность u_j, $0 \le j \le c$, того, что частица, стартующая из точки j достигнет точки 0 раньше, чем точки $c > 0$, равна

$$u_j = \begin{cases} \dfrac{r^j - r^c}{1 - r^c}, & p \ne q, \\ \dfrac{c - j}{c}, & p = q. \end{cases} \tag{19}$$

Эти результаты получаются из (17) и (18) заменой $x \to j + A$ и $B - A \to c$. $\boxed{\text{объяснить!}}$ Числа u_j в (19) можно интерпретировать как вероятности разорения Пети, если допустить, что игра может "*продолжаться бесконечно*".

Вероятность v_j, $0 \le j \le c$, того, что частица, стартующая из точки j достигнет точки $c > 0$ раньше, чем точки 0, равна

$$v_j = \begin{cases} \dfrac{1 - r^j}{1 - r^c}, & p \ne q, \\ \dfrac{j}{c}, & p = q. \end{cases} \tag{20}$$

Эти результаты получаются из (14) и (15) заменой $x \to j + A$ и $B - A \to c$. $\boxed{\text{объяснить!}}$ Аналогично, числа v_j в (20) можно интерпретировать как вероятности разорения Васи, если допустить, что игра может "*продолжаться бесконечно*".

Замечание 6. Числа v_j в (20) можно получить из чисел u_j в (19) заметив, что победа Пети равносильна поражению Васи и наоборот. Поэтому (p, q) блуждание начинается из $x = j$ и заканчивается в $x = c$ с такой же вероятностью с какой (q, p) блуждание начинается из $x = c - j$ и заканчивается в $x = 0$. Это означает, что $v_j(p, q) = u_{c-j}(q, p)$ (аргументы в скобках указывают к какому блужданию, (p, q) или (q, p) относятся вероятности v_j и u_{c-j}). Используя (19), приходим к (20).

Замечание 7. Складывая числа из (19) и (20), получаем

$$u_j + v_j = 1, \qquad 0 \le j \le c. \tag{21}$$

Этот результатможно интерпретировать таким образом, что при “*бесконечной игре*” вероятность разорения одного из игроков равна 1 каким бы капиталом они не обладали в начале игры. Сами вероятности разорения в этом случае равны

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(\texttt{разорение Пети}) = u_a &= \begin{cases} \dfrac{r^a - r^{a+b}}{1 - r^{a+b}}, & p \ne q, \\ \dfrac{a}{a+b}, & p = q, \end{cases} \\ \mathsf{P}(\texttt{разорение Васи}) = v_a &= \begin{cases} \dfrac{1 - r^a}{1 - r^{a+b}}, & p \ne q, \\ \dfrac{b}{a+b}, & p = q. \end{cases} \end{aligned} \tag{22}$$

Таким образом, вероятность разорения в “*бесконечной игре*” пропорциональна капиталу противника, если $p = q$.

4. Парадокс увеличения ставки

Предположим, что $q > p$, то есть игра неблагоприятна для Пети. Какие ставки ему целесообразно делать, чтобы минимизировать неизбежные потери? Кажется естественным, что ставки необходимо уменьшать. Эту гипотезу можно исследовать математически.

Обозначим вероятность разорения Пети через α'. Согласно (22)

$$\alpha' = \frac{r^{a+b} - r^a}{r^{a+b} - 1}.$$

Если Петя принимает решение удвоить ставку и играть на две копейки, то

$$\mathsf{P}(\varepsilon_i = 2) = p, \qquad \mathsf{P}(\varepsilon_i = -2) = q.$$

Обозначим вероятность разорения Пети в этом случае через α''. Так как капитал игрока исчерпывается вдвое быстрее, то увеличение ставок вдвое равносильно уменьшению капиталов вдвое. Поэтому

$$\alpha'' = \frac{r^{(a+b)/2} - r^{a/2}}{r^{(a+b)/2} - 1}.$$

Сравним α' и α'':

$$\alpha' = \frac{(r^{(a+b)/2} - r^{a/2})(r^{(a+b)/2} + r^{a/2})}{(r^{(a+b)/2} - 1)(r^{(a+b)/2} + 1)} = \alpha'' \cdot \frac{r^{(a+b)/2} + r^{a/2}}{r^{(a+b)/2} + 1} > \alpha'',$$

так как $q > p$.

Значит, если $q > p$, то Пете выгодно увеличить ставку, поскольку это уменьшает вероятность его разорения. Эта стратегия кажется парадоксальной, так как противоречит нашей гипотезе.

Задача 4. *Исследовать как меняется вероятность проигрыша при изменении ставки в θ раз.*

5. Игра против бесконечно богатого соперника

Пусть $c \to \infty$ в (19) и (20). При фиксированном a это означает, что $b \to \infty$, то есть Петя играет против "*бесконечно богатого*" противника.

Обозначая пределы в (20) через $\widehat{\alpha}_j$, получаем

$$\widehat{\alpha}_j = \begin{cases} 1, & \text{если } r \geq 1, \\ r^j, & \text{если } r < 1. \end{cases} \tag{23}$$

Числа $\widehat{\alpha}_j$ можно интерпретировать как вероятности разорения игрока, имеющего начальный капитал j, при игре с бесконечно богатым соперником. Таким образом у Пети, имеющего начальный капитал j, есть шанс не проиграть бесконечно богатому сопернику, если $r < 1$ (вероятность этого шанса равна $1-r^j$).

6. Неограниченность случайного блуждания

Полученным результатам можно дать интерпретацию в терминах неограниченности случайного блуждания.

Следствие 1. *Пусть случайное блуждание начинается в $x = 0$. Вероятность достичь $x = j > 0$ равна 1 при $p \geq q$ и $(p/q)^j$ при $p < q$.*

Доказательство. Достижение точки $x = j$ из $x = 0$ случайным блужданием с параметрами (p, q) (p — это вероятность сдвига вправо) равносильно достижению точки $x = 0$ из $x = j$ случайным блужданием с параметрами (q, p). Вероятность последнего события равносильно разорению игрока, имеющего начальный капитал j, в игре против бесконечно богатого противника. Поэтому следствие 1 вытекает из (23). $\square$

Теорема 2. *Какие бы ни были p, $a > 0$ и $c > a$, случайное блуждание, стартующее из a, с вероятностью единица достигает границы интервала $[0, c]$.*

Доказательство. Используя равенство (21), доказываем,что вероятность того, что блуждание достигнет границы интервала $[0, c]$, то есть либо точки $x = 0$, либо точки $x = c$, равна 1. $\square$

Теорема 3. *Какое бы ни было p, случайное блуждание покидает любой конечный интервал с вероятностью единица.*

Доказательство. Докажем, что если случайное блуждание начинается в интервале $[u, v]$, то оно покидает его с вероятностью 1, где $u < v$ — произвольные числа. Рассмотрим случай $u > 0$. Выберем $c > v$. Граница интервала $[0, c]$ достигается тогда и только тогда, когда блуждание покидает интервал $[u, v]$. В силу теоремы 2 эта вероятность равна 1. □

Задача⋆ 5. *Рассмотреть случаи $u < 0$ и $u = 0$.*

7. Средняя продолжительность игры

В соответствии с задачей из примера 1 соответствующее случайное блуждание прекращается в момент достижения границы интервала $[0, c]$. В этом случае говорят, что случайное блуждание *поглощается границей* или что оно *исчезает в непрозрачной среде.* Сам момент, когда блуждание исчезает в непрозрачной среде, называется *моментом поглощения.* Если использовать игровую терминологию, то следует говорить о *продолжительности игры* вместо момента поглощения.

Пусть τ_j — это (случайный) момент, в который блуждание, начинаясь из $x = j$, достигает либо точки $x = 0$, либо $x = c$. Согласно теореме 3 $\tau_j < \infty$ с вероятностью 1. Найдем “среднее” время достижения границы, то есть $e_j = \mathsf{E}[\tau_j]$. Математические ожидания e_j удовлетворяют таким рекуррентным уравнениям

$$e_j = pe_{j+1} + qe_{j-1} + 1, \qquad 1 \le j \le c-1, \tag{24}$$

с такими краевыми условиями $e_0 = 0$ и $e_c = 0$. Эти граничные условия объясняются равенствами $\tau_0 = 0$ и $\tau_c = 0$.

Чтобы доказать (24) для $1 \le j \le c-1$, применим формулу полной вероятности для группы событий $H = \{\omega : \varepsilon_1 = 1\}$ и $\overline{H}$. Имеем $\mathsf{P}(\tau_j = k) = p\mathsf{P}(\tau_j = k/H) + q\mathsf{P}\left(\tau_j = k/\overline{H}\right)$, $k \ge 1$. Ясно, что

$$\mathsf{P}(\tau_j = k/H) = \mathsf{P}(\tau_{j+1} = k-1), \qquad \mathsf{P}\left(\tau_j = k/\overline{H}\right) = \mathsf{P}(\tau_{j-1} = k-1), \quad k \ge 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} e_j = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathsf{P}(\tau_j = k) = p\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}(\tau_{j+1} = k-1) + p\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\mathsf{P}(\tau_{j+1} = k-1) \\ + q\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}(\tau_{j-1} = k-1) + q\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\mathsf{P}(\tau_{j-1} = k-1). \end{aligned}$$

Докажем, что первое слагаемое равно p. В случае $j+1 = c$ это вытекает из $\mathsf{P}(\tau_{j+1} = 0) = 1$ и $\mathsf{P}(\tau_{j+1} = k) = 0$, $k \ge 1$. В случае же $j + 1 < c$ оно равно $p\mathsf{P}(\tau_{j+1} < \infty) = p$ в силу теоремы 2. Аналогичные соображения доказывают, что третье слагаемое равно q. Поскольку второе и четвертое слагаемые равны pe_{j+1} и qe_{j-1}, соответственно, то (24) доказано.

Мы решаем рекуррентное уравнение (24) только для случая $p = \frac{1}{2}$. Обозначим $d_j = e_j - e_{j+1}$. Тогда из (24) вытекает, что $d_j = d_{j-1} + 2$, откуда $d_j = d_0 + 2j$ и поэтому

$$0 = e_0 - e_c = \sum_{j=0}^{c-1} d_j = \sum_{j=0}^{c-1} (d_0 + 2j) = cd_0 + c(c-1) = c(d_0 + c - 1).$$

Следовательно $d_0 = 1 - c$ и значит

$$(25)\quad e_j = \sum_{i=j}^{c-1} d_i = \sum_{i=j}^{c-1} (1 - c + 2i) = (c-j)(1-c) + c(c-1) - j(j-1) = j(c-j).$$

Замечание 8. В силу симметрии естественно ожидать, что $e_j = e_{c-j}$. Это действительно так, что и подтверждается формулой (25).

Задача 6. *Найти* min *и* max *математического ожидания* e_j *как функции от* j.

Задача* 7. *Решить рекуррентое уравнение* (24) *для произвольного* p.

8. Скорость сходимости

Как мы увидим ниже, отличие $\alpha_n(x)$ от $\alpha(x)$ и $\beta_n(x)$ от $\beta(x)$ невелико (не более, чем ε^n при некотором $\varepsilon \in (0,1)$).

Теорема 4. *Пусть* $p \in (0,1)$. *Тогда существует число* $\varepsilon \in (0,1)$, *при котором*

$$0 \le \alpha(x) - \alpha_n(x) \le \varepsilon^n, \qquad 0 \le \beta(x) - \beta_n(x) \le \varepsilon^n$$

для всех $n > (|A| + B)/(1 - (p-q)^2)$.

Доказательство. Теорему докажем для блуждания, которое начинается из начала координат $x = 0$. Общий случай сводится к этому.

Для простоты обозначим $\alpha_n(0) = \alpha_n$, $\beta_n(0) = \beta_n$, $\gamma_n = 1 - \alpha_n - \beta_n$. Иными словами, γ_n — это вероятность того, что частица не выходит на границу интервала $[A, B]$:

$$\gamma_n = \mathsf{P}\{A < S_0 < B,\ A < S_1 < B,\ \ldots,\ A < S_n < B\}.$$

Ясно, что

$$\{\omega\colon A < S_0 < B,\ A < S_1 < B,\ \ldots,\ A < S_n < B\} = \bigcap_{0 \le k \le n} \{\omega\colon A < S_k < B\}.$$

Зафиксируем натуральное число $m > C/(1 - (p-q)^2)$. Дальнейшее доказательство проведем только для случая $n = rm$, где $r\mathbf{N}$.

Определим случайные величины

$$\zeta_1 = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i, \qquad \zeta_2 = \sum_{i=m+1}^{2m} \varepsilon_i, \qquad \ldots, \qquad \zeta_r = \sum_{i=m(r-1)}^{rm} \varepsilon_i.$$

Если обозначить совокупное богатство игроков через $C = |A| + B$, то

$$\{A < S_0 < B,\ A < S_1 < B,\ \dots,\ A < S_n < B\} \subseteq \{|\zeta_1| < C, \dots, |\zeta_r| < C\}.$$

Так как случайные величины $\zeta_1, \dots, \zeta_r$ независимы и одинаково распределены, $\boxed{\text{почему?}}$ то

$$\gamma_n \le \mathsf{P}(|\zeta_1|; \dots ; |\zeta_r| < C) = \prod_{i=1}^{r} \mathsf{P}(|\zeta_i| < C) = (\mathsf{P}(|\zeta_1| < C))^r.$$

Докажем, что при достаточно больших m

$$\mathsf{P}(|\zeta_1| < C) \le \varepsilon_1 \tag{26}$$

для некоторого $\varepsilon_1 < 1$. Действительно, если $\mathsf{P}(|\zeta_1| < C) = 1$, то $\mathsf{var}[|\zeta_1|] \le C^2$. $\boxed{\text{почему?}}$ С другой стороны,

$$\mathsf{var}[|\zeta_1|] = \mathsf{var}[\zeta_1] = m\,\mathsf{var}[\varepsilon_1] = m(1 - (p-q)^2)) > C,$$

так как $m > C/(1-(p-q)^2)$. Поэтому из (26) следует, что $\gamma_n \le \varepsilon^n$, где $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_1^{\frac{1}{m}} < 1$.

Так как $\alpha + \beta = 1$, то $(\alpha - \alpha_n) - (\beta - \beta_n) = \gamma_n$. Поскольку $\alpha \ge \alpha_n$ и $\beta \ge \beta_n$, $\boxed{\text{почему?}}$ то

$$0 \le \alpha - \alpha_n \le \varepsilon^n, \qquad 0 \le \beta - \beta_n \le \varepsilon^n,$$

причем $\varepsilon < 1$. $\square$

Задача 8. *Доказать теорему 4 в общем случае без предположения $n = rm$.*

Задача 9. *Доказать теорему 4 и для $x \ne 0$.* **Указание**. Свести случай $x \ne 0$ к $x = 0$, положив $A_1 = A - x$, $B_1 = B - x$.

9. Средняя длительность игры

Рассмотрим среднюю длительность блуждания нашей частицы. Введём математическое ожидание момента, когда игра прекращается: $\mathsf{E}[\tau_k(x)] = m_k(x)$ для $k \le n$. Выведем рекуррентное соотношение для математического ожидания продолжительности игры:

$$\begin{aligned}
m_k(x) = \mathsf{E}[\tau_k^x] &= \sum_{1 \le l \le k} l\mathsf{P}(\tau_k^x = l) \\
&= \sum_{1 \le l \le k} l(p\mathsf{P}(\tau_k^x = l/\varepsilon_1 = 1) + q\mathsf{P}(\tau_k^x = l/\varepsilon_1 = -1)) \\
&= \sum_{1 \le l \le k} l\left(p\mathsf{P}(\tau_{k-1}^{x+1} = l-1) + q\mathsf{P}(\tau_{k-1}^{x-1} = l-1)\right) \\
&= \sum_{0 \le l \le k-1} (l+1)\left(p\mathsf{P}(\tau_{k-1}^{x+1} = l) + q\mathsf{P}(\tau_{k-1}^{x-1} = l)\right) \\
&= pm_{k-1}(x+1) + qm_{k-1}(x-1) + \sum_{0 \le l \le k-1} (p\mathsf{P}(\tau_{k-1}^{x+1} = l) + q\mathsf{P}(\tau_{k-1}^{x-1} = l)) \\
&= pm_{k-1}(x+1) + qm_{k-1}(x-1) + 1.
\end{aligned}$$

Для $x \in (A; B)$ и $k \in [0; n]$ мы получили рекуррентное соотношение для функции $m_k(x) : m_k(x) = pm_{k-1}(x+1) + qm_{k-1}(x-1) + 1$ при $m_0(x) = 0$.

Введём граничные условия: если игра начинается в точке A или B, то тогда она тут же и завершится — её длительность будет равна 0: $m_k(A) = m_k(B) = 0$. Из рекуррентного соотношения и граничных условий можно один за другим вычислить $m_i(x)$. Так как $m_{k+1}(x) \geq m_k(x)$, то существует предел $m(x) = \lim_{n\to\infty} m_n(x)$, который удовлетворяет соотношению $m_k(x) = pm_{k-1}(x+1) + qm_{k-1}(x-1) + 1 : m(x) = 1 + pm(x+1) + qm(x-1)$ при выполнении $m(A) = m(B) = 0$. Данные переходы аналогичны тем, что мы рассмотрели при переходе к $n \to \infty$ в уравнении вероятности проигрыша. Для того чтобы решить данное уравнение, надо ввести ещё одно условие: матожидание количества ходов должно быть конечным, то есть $m(x) < \infty$, $x \in (A; B)$.

Решим данное уравнение. В уравнении вероятности проигрыша ($p \neq q$) уже были получены частные решения a и $b\left(\frac{q}{p}\right)^x$. Здесь же появляется ещё один претендент на роль частного решения:

$$\begin{aligned}\frac{x}{q-p} &= \frac{q-p+(p+q)x+p-q}{q-p} = \frac{q-p}{q-p} + \frac{p(x+1)}{q-p} + \frac{q(x-1)}{q-p} \\ &= 1 + p\frac{x+1}{q-p} + q\frac{x-1}{q-p},\end{aligned}$$

поэтому $m(x) = \frac{x}{q-p} + a + b\left(\frac{q}{p}\right)^x$. С учётом граничного условия $m(A) = m(B) = 0$ находим при помощи ранее полученных соотношений $m(x) : m(x) = \frac{1}{p-q}(B\beta(x) + A\alpha(x) - x)$. В случае идеальной монетки получаем следующее выражение: $m(x) = a + bx - x^2$. Применение граничного условия даёт: $m(x) = (B-x)(x-A)$. Из этого следует, что в случае равных стартовых капиталов $m(0) = B^2$. Например, если у каждого игрока есть по 5 рублей, а ставка — 1 рубль, то в среднем разоряться игроки будут через 25 ходов.

При рассмотрении вышеуказанных формул подразумевалась конечность математического ожидания числа ходов: $m(x) < \infty$. Теперь будет предложено доказательство этого факта. Задача о конечности ожидаемого числа ходов

Лемма 1. *$m(x) < \infty$ для всех A, B.*

Доказательство. Достаточно доказать это для случая $x = 0$ (так как ранее было уже продемонстрировано, что случаи $x \neq 0$ могут быть сведены к $x = 0$ вариацией A и B) и $p = q$, а затем рассмотреть случай $p \neq q$.

Итак, рассмотрим случайное блуждание $S_1, \ldots, S_n$ и введём случайную величину $S_{\tau_n} = S_{\tau_n}(\omega)$, где $\tau_n = \tau_n^0$ — момент остановки. Далее, пусть

$$S_{\tau_n}(\omega) = \sum_{k=0}^{n} S_k(\omega)\mathbb{1}_{\{\tau_n = k\}}(\omega).$$

Интерпретация такова: S_{τ_n} — это значение случайного блуждания в момент τ_n. Если $\tau_n < n$, то $S_{\tau_n} \in \{A; B\}$; если $\tau_n = n$, то $A \leq S_{\tau_n} \leq B$. Вспомним, что $p = q = \frac{1}{2}$, и докажем, что $\mathsf{E}\left[S_{\tau_n}\right] = 0$, $\mathsf{E}\left[S_{\tau_n}^2\right] = \mathsf{E}\left[\tau_n\right]$.

Для доказательства первого равенства напишем:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[S_{\tau_n}\right] &= \sum_{k=0}^{n} \mathsf{E}\left[S_k \mathbb{I}_{\{\tau_n=k\}}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathsf{E}\left[S_n \mathbb{I}_{\{\tau_n=k\}}\right] + \sum_{k=0}^{n} \mathsf{E}\left[(S_k - S_n)\mathbb{I}_{\{\tau_n=k\}}\right] \\
&= \mathsf{E}\left[S_n\right] + \sum_{k=0}^{n} \mathsf{E}\left[(S_k - S_n)\mathbb{I}_{\{\tau_n=k\}}\right]).
\end{aligned}$$

Совершенно очевидно, что $\mathsf{E}\left[S_n\right] = 0$, так как $S_n = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n, \varepsilon_i = \pm 1$ при $p = q$. Осталось доказать, что

$$\sum_{k=0}^{n} \mathsf{E}\left[(S_k - S_n)\mathbb{I}_{\{\tau_n=k\}}(\omega)\right] = 0.$$

Для $0 \le k < n$ справедливо, что

$$\{\omega\colon \tau_n > k\} = \{\omega\colon A < S_1 < B, \ldots, A < S_k < B\}.$$

Последнее событие может быть представлено в виде $\left\{\omega\colon (\varepsilon_1; \ldots; \varepsilon_n) \in J\right\}$, где J — некоторое подмножество множества $\{-1; +1\}^k$. Это множество определяется только ε_i при $i = \overline{1; k}$. Для больших i значения $\varepsilon_{k+1}; \ldots; \varepsilon_n$ не влияют на J. Множество вида $\{\tau_n = k\} = \{\tau_n > k-1\} \backslash \{\tau_n > k\}$ также может быть представлено в виде $\left\{\omega\colon (\varepsilon_1; \ldots; \varepsilon_n) \in J\right\}$. Благодаря независимости ε_i вытекает, что $\forall 0 \le k < n$ случайные величины $S_n - S_k$ и $\mathbb{I}_{\{\tau_n=k\}}$ независимы. Отсюда

$$\mathsf{E}\left[S_k \cdot \mathbb{I}_{\{\tau_n=k\}}(\omega)\right] = \mathsf{E}\left[S_k\right] \cdot \mathsf{E}\left[\mathbb{I}_{\{\tau_n=k\}}(\omega)\right] = 0$$

в силу того, что первый множитель нулевой.

Теперь

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[S_{\tau_n}^2\right] &= \sum_{k=0}^{n} \mathsf{E}\left[S_k^2 \mathbb{I}_{\{\tau_n=k\}}\right] = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{E}\left[S_n + (S_k - S_n)^2 \mathbb{I}_{\{\tau_n=k\}}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} (\mathsf{E}\left[S^2\right] \mathbb{I}_{\{\tau_n=k\}} + 2\mathsf{E}\left[S_n(S_k - S_n)\mathbb{I}_{\{\tau_n=k\}}\right] + \mathsf{E}\left[(S_n - S_k)^2 \mathbb{I}_{\{\tau_n=k\}}\right] \\
&= \mathsf{E}\left[S^2\right] - \sum_{k=0}^{n} \mathsf{E}\left[(S_n - S_k)^2\right] \mathbb{I}_{\{\tau_n=k\}} = n - \sum_{k=0}^{n} \mathsf{E}\left[(n-k)\right] \mathsf{P}(\tau_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\mathsf{P}(\tau_n = k) = \mathsf{E}\left[\tau_n\right].
\end{aligned}$$

Установлено, что для идеальной монетки $\mathsf{E}\left[S_{\tau_n}\right] = 0$, $\mathsf{E}\left[S_{\tau_n}^2\right] = \mathsf{E}\left[\tau_n\right]$. В случае же $p \ne q$ имеют место соотношения $\mathsf{E}\left[S_{\tau_n}\right] = (p-q)\mathsf{E}\left[\tau_n\right]$ (поскольку $\mathsf{E}\left[\varepsilon_1\right] = p - q$) и

$$\mathsf{E}\left[(S_{\tau_n} - \tau_n \mathsf{E}\left[\varepsilon_1\right])^2\right] = \mathsf{var}\left[\varepsilon_1\right] \cdot \mathsf{E}\left[\tau_n\right],$$

поскольку $\mathsf{var}\left[\varepsilon_1\right] = 1 - (p-q)^2$.

Теперь покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} m_n(0) = m(0) < \infty.$$

В случае справедливой игры в силу соотношения $\mathsf{E}\left[S^2_{\tau_n}\right] = \mathsf{E}\left[\tau_n\right]$ верно, что $\mathsf{E}\left[\tau_n\right] \le \max\{A^2; B^2\}$. Тогда же

$$\mathsf{E}\left[\tau_n\right] = \mathsf{E}\left[S^2_{\tau_n}\right] = A^2\alpha_n + B^2\beta_n + \mathsf{E}\left[S_n^2 \mathbb{I}_{\{A<S_n<B\}}\right] \mathbb{I}_{\{\tau_n=n\}},$$

поэтому

$$A^2\alpha_n + B^2\beta_n \le \mathsf{E}\left[\tau_n\right] \le A^2\alpha_n + B^2\beta_n + \max\{A^2; B^2\} \cdot \gamma_n.$$

Из неравенства $\gamma_n < \varepsilon^n$ следует, что математическое ожидание $\mathsf{E}\left[\tau_n\right]$ сходится при $n \to \infty$ к предельному значению

$$m(0) = A^2\alpha + B^2\beta = A^2 \cdot \frac{B}{B-A} - B^2 \cdot \frac{A}{B-A} = |AB|.$$

В случае несправедливой игры $\mathsf{E}\left[\tau_n\right] \le \frac{\max\{|A|;B\}}{|p-q|}$. Так как за τ_n обозначался момент первого вылета частицы за пределы коридора, то математическое ожидание его меньше определённых чисел, следовательно, меньше бесконечности. При таком условии $\mathsf{E}\left[\tau_n\right] \to m(0) = \frac{\alpha A + \beta B}{p-q}$. $\square$