# Лекция 8

## ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ

В решении задачи о разорении, рассмотренной в лекции 7, мы получили рекуррентные уравнения для вероятностей разорения каждого из игроков в игре, состоящей из $n$ раундов (см. уравнения (7.4) и (7.6)). Перейдя к пределу при $n \to \infty$, мы свели эти уравнения к более простым, которые смогли решить в явном виде (см. (7.11) и (7.16)). Каждое из этих асимптотических уравнений можно неформально рассматривать как отвечающее бесконечной последовательности раундов, то есть мы неявно допускали возможность, что игра Пети и Васи продолжается бесконечно долго. Фактически мы тем самым рассматривали случайное блуждание с бесконечным количеством шагов. Однако вероятностное пространство для этого случая построено не было. Каким же оно может быть?

Каждый элементарный исход в стохастическом эксперименте, отвечающем бесконечной последовательности раундов, можно описать бесконечной последовательностью $\omega = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots)$, составленной из 0 и 1. Смысл координаты $\varepsilon_n$ таков: если раунд $n$ выиграл Петя, то $\varepsilon_n = 0$. Если же раунд $n$ выиграл Вася, то $\varepsilon_n = 1$. Множество таких последовательностей можно считать пространством $\Omega$ элементарных исходов для бесконечного блуждания.

### 1. Первые замечания о вероятностном пространстве

Напомним, что через $\mathsf{P}_n$ мы обозначали вероятностную меру, отвечающую стохастическому эксперименту, состоящему из $n$ раундов игры Пети и Васи. Обозначим теперь через $\mathsf{P}_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{P}$ меру, отвечающему стохастическому эксперименту с бесконечным количеством раундов.

**1.1. Мера.** Прежде всего определим значение вероятностной меры для фиксированного элементарного стохастического исхода $\omega = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots)$. Как обычно, обозначим через $X_n$ результат $n$-ого раунда игры Пети и Васи.

Если случайное событие $A = \{\omega\}$ содержит только одно элементарное событие, то $A = \{\omega\colon X_i = \varepsilon_i, i \ge 1\}$, где $\{\varepsilon_n\}$ некоторая фиксированная последовательность, состоящая из 0 и 1. Таким образом

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(A) &\stackrel{(*)_1}{\le} \mathsf{P}(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_n = \varepsilon_n) \\ &= \mathsf{P}_n(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_n = \varepsilon_n) = \frac{1}{2^n}, \qquad n \ge 1, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathsf{P}_n$ — это вероятностная мера для случайного блуждания с $n$ шагами. $\boxed{\text{объяснить неравенство } (*)_1}$ Значит

$$\mathsf{P}(\omega) = 0 \quad \text{для любого} \quad \omega \in \Omega. \tag{2}$$

[0]Printed from the file [TSP-00-08.tex] on 9.11.2014

почему? Как мы знаем из курса теории вероятностей, такой эффект характерен для абсолютно непрерывных распределений. Какова же вероятностная мера $\mathsf{P}_\infty$ в рассматриваемом случае? Чтобы ответить на этот вопрос, мы сначала построим еще одно вероятностное пространство для конечного случайного блуждания.

## 2. Стандартное пространство элементарных исходов для конечного блуждания

Вероятностное пространство $(\Omega_n, \mathscr{F}_n, \mathsf{P}_n)$ для случайного блуждания с $n$ шагами построено в разделе 4.3. Для случая $p = q = \frac{1}{2}$ имеем

$$\Omega_n = \{0,1\}^n, \qquad \mathscr{F}_n = 2^{\Omega_n}, \qquad \mathsf{P}_n(A) = \frac{|A|}{|\Omega_n|} = \frac{|A|}{2^n} \quad \text{для} \quad A \in \mathscr{F}_n.$$

Вероятностные пространства $(\Omega_n, \mathscr{F}_n, \mathsf{P}_n)$ отличаются друг от друга: поскольку элементарные случайные события $\omega \in \Omega_n$ — это векторы размерности $n$, которая для каждого $\Omega_n$ своя, то каждый элемент $\sigma$-алгебры $\mathscr{F}_n$ — это совокупность векторов размерности $n$ и поэтому ни один элемент из $\mathscr{F}_n$ не может принадлежать другой $\sigma$-алгебре $\mathscr{F}_m$, $m \neq n$.

Когда мы записываем событие $\{\omega\colon X_1 = 1\}$ для случайного блуждания с $n$ шагами, мы фактически считаем, что $\{\omega\colon X_1 = 1\} \in \mathscr{F}_n$. Поскольку $n$ произвольно, а в записи этого события никакого упоминания об $n$ нет, то мы таким образом подразумеваем, что событие $\{\omega\colon X_1 = 1\}$ принадлежит всем $\sigma$-алгебрам $\mathscr{F}_n$. Однако только что мы видели, что все эти $\sigma$-алгебры разные. Как же объяснить это противоречие?

Чтобы прояснить ситуацию, заметим, что событие $\{\omega\colon X_1 = 1\}$ — это совокупность тех элементарных исходов $\omega \in \mathscr{F}_n$, $\omega = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, для которых $\varepsilon_1 = 1$. Таким образом событие $\{\omega\colon X_1 = 1\}$ для случайного блуждания с $n$ шагами на самом деле отличается от события $\{\omega\colon X_1 = 1\}$ для случайного блуждания с $m$ шагами, хотя форма записи у них одинаковая. Тем не менее все вероятности $\mathsf{P}_n(X_1 = 1)$, $n \geq 1$, одинаковы, что согласуется с интуитивными представлениями:

$$\mathsf{P}_n(X_1 = 1) = \sum_{\omega \in \{\omega\colon X_1 = 1\}} \mathsf{P}_n(\omega) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}.$$

Именно это обстоятельство отчасти оправдывает отмеченную выше неточность в записи. С другой стороны, даже уточненная запись

$$\mathsf{P}_n(X_1 = 1) = \mathsf{P}_{n+1}(X_1 = 1)$$

все еще не является абсолютно корректной, поскольку события $\{\omega\colon X_1 = 1\}$ в левой части и в правой части фактически разные. Чтобы придать смысл этой формуле, обозначим $A = \{\omega\colon X_1 = 1\}$ в пространстве $(\Omega_n, \mathscr{F}_n, \mathsf{P}_n)$. Рассмотрим $B = A \times \{0,1\}$, где $\times$ обозначает прямое произведение множеств. Таким образом $B$ — это совокупность всех векторов, первая “координата” которых принадлежит $A$, а вторая — множеству $\{0,1\}$. На самом деле деле первая “координата” элементов из $B$ — это набор $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$. Таким образом, $B \subset \Omega_{n+1}$ и формулу следовало бы записывать $\mathsf{P}_n(A) = \mathsf{P}_{n+1}(A \times \{0,1\})$.

Некоторые из отмеченных сложностей исчезают, если использовать иное вероятностное пространство, с которым мы и познакомимся ниже. Для этого необходимы минимальные сведения о бинарных числах.

**2.1. Бинарные числа степени $n$.** Пусть $n$ фиксировано. Назовем $x \in [0,1)$ *бинарным числом степени* $n$, если $x = \frac{k}{2^n}$ для некоторого $0 \le k \le 2^n - 1$. Обозначим через $B_n$ множество бинарных чисел степени $n$. Ясно, что

$$|B_n| = \mathrm{card}\,(B_n) = 2^n.$$

**Теорема 1.** *Каждое бинарное число степени $n$ имеет единственное представление вида*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{2^i}, \tag{3}$$

*где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ принимают значения $0$ или $1$.*

*Замечание 1.* Все доказательства, относящиеся к бинарным числам, содержатся в разделе 4.

**2.2. $B_n$ как вероятностное пространство.** Вероятностное пространство для случайного блуждания с $n$ шагами можно представить многими способами. Например, можно считать, что пространство элементарных событий это $\{-1,1\}^n$, а не$\{0,1\}^n$. В этом случае элементарным исходом мы считаем вектор размерности $n$, координаты которого либо $-1$, либо $1$. Такое представление имеет определенное преимущество перед $\{0,1\}^n$, поскольку $-1$ лучше соответствует нашему представлению о том, что частица сдвигается влево (а не остается на месте, чему лучше соответствует число $0$).

Еще одно представление для $\Omega_n$ можно описать с помощью бинарных чисел. В силу теоремы 1 между $\Omega_n$ и $B_n$ существует взаимно однозначное соответствие, поэтому каждый элементарный исход $\omega$ однозначно определяет бинарное число степени $n$. Можно даже говорить о том, что мы кодируем $\omega \in \Omega_n$ с помощью формулы (3). Итак, в качестве пространства элементарных исходов для случайного блуждания с $n$ шагами можно выбрать $B_n$, в качестве $\sigma$-алгебры — $2^{B_n}$ (множество всех подмножеств из $B_n$), в качестве $\mathsf{P}_n$ — классическую вероятность на $B_n$ (то есть $\mathsf{P}_n(x) = \frac{1}{2^n}$ для каждого $x \in B_n$).

Преимущество $B_n$ как пространства элементарных исходов для случайного блуждания проявляется, если снова вернуться к задаче о событии $\{\omega\colon X_1 = 1\}$, рассмотренную в разделе 2. Поскольку $B_n \subset B_{n+1}$, то любое событие из $\sigma$-алгебры $2^{B_n}$ является событием из $\sigma$-алгебры $2^{B_{n+1}}$, значит $\{\omega\colon X_1 = 1\} \in 2^{B_n}$ для любого $n \ge 1$, то есть необходимость использовать понятие прямого произведения отпадает, когда мы записываем $\mathsf{P}_n(X_1 = 1) = \mathsf{P}_{n+1}(X_1 = 1)$.

**2.3. Двоичные разложения действительных чисел.** В дальнейшем нам понадобятся некоторые сведения о двоичных разложениях чисел из единичного отрезка $[0,1)$.

Любое число $x \in [0,1)$ можно представить в виде

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{2^i}, \tag{4}$$

где каждое из чисел $\varepsilon_i$ равно $0$ или $1$ (см. доказательство в разделе 4).

**Теорема 2.** *Если $x \notin B$, то представление* (3) *единственно.*

**Задача 1.** *Используя идею доказательства теоремы 1, доказать теорему 2.*

**2.4. Два особых класса бинарных чисел.** Среди чисел $x \in [0,1]$ можно выделить два специальных класса. Первый состоит из тех $x \in [0,1)$, для которых $0 = \varepsilon_m = \varepsilon_{m+1} = \dots$ в представлении (4) для некоторого $m \geq 1$. Этот класс совпадает с $B = \bigcup_{m \geq 1} B_m$ согласно теореме 1.

Второй класс (обозначим его $B'$) состоит из тех $x \in [0,1)$, для которых $1 = \varepsilon_m = \varepsilon_{m+1} = \dots$ в представлении (4) для некоторого $m > 1$.

**Теорема 3.** *Для каждого $x \in B$, $x \neq 0$, существует ровно два представления вида (4), причем одно из них имеет вид (3), а для второго выполнено $\varepsilon_i = 1$ для всех $i$, начиная с некоторого места.*

**Теорема 4.** $B' = B$.

**2.5. Пространство элементарных исходов для бесконечного блуждания.** Кажется целесообразным выбрать в качестве пространства элементарных исходов $\Omega_\infty$ для бесконечного случайного блуждания множество последовательностей $\{\varepsilon_n\}$, состоящих исключительно из 0 и 1. Однако это множество обладает одной неприятной особенностью.

В теореме 3 мы установили, что каждое бинарное число $x \neq 0$ имеет два представления вида (4), одно из которых характеризуется свойством $\varepsilon_i = 0$, $i \geq m$, при некотором $m$, а другое — свойством $\varepsilon_i = 1$, $i \geq m$, при некотором $m$. Это означает, что для каждого бинарного числа $x \neq 0$ существуют две разные бесконечные последовательности $\omega_1$ и $\omega_2$ из 0 и 1, представляющие $x$ по формуле (4). С другой стороны, числа $x \notin B$ имеют единственное бинарное представление (4). Это "*неравноправие*" и есть той неприятной особенностью, которую следовало бы устранить.

Исключим из $\Omega$ множество $\Omega_*$ тех исходов $\omega$, для которых $\varepsilon_i = 1$, $i \geq m$, при некотором $m$. Оставшееся множество обозначим $\Omega_1$. Множество $\Omega_*$ является счетным, $\boxed{\text{почему?}}$ а представление (4) задает взаимно однозначное соответствие между $\Omega_1$ и $[0,1)$. $\boxed{\text{доказать!}}$

В силу счетности множества $\Omega_*$ $\boxed{\text{почему } \Omega_* \text{ счетно?}}$ из равенства (2) вытекает, что $\mathsf{P}(\Omega_*) = 0$. Значит, если в качестве пространства элементарных исходов мы выберем $\Omega_1$ вместо $\Omega$, то мы откажемся от события, вероятность которого равна 0. Преимуществом $\Omega_1$ перед $\Omega$ является то, что каждому элементу $\Omega_1$ можно поставить единственное число из отрезка $[0,1)$. В таком случае отрезок $[0,1)$ можно выбрать в качестве пространства элементарных исходов для бесконечного случайного события.

**2.6. Цилиндрические множества.** Чтобы продолжить построение меры $\mathsf{P}_\infty$, нам необходимы несколько вспомогательных результатов. В дальнейшем мы рассматриваем только канонические разложения для бинарных чисел: это значит, что разложения с $\varepsilon_i = 1$, $i \geq m$, не рассматриваются.

**Лемма 1** (*свойство монотонности коэффициентов бинарного разложения*). *Пусть $x, y \in [0,1)$, $y < x$. Обозначим через $\varepsilon_i(x)$ коэффициенты двоичного разложения для $x$, а через $\varepsilon_i(y)$ — коэффициенты двоичного разложения для $y$. Тогда*

(i) *либо $\varepsilon_1(x) = 0$ и $\varepsilon_1(y) = 1$;*

(ii) *либо существует $i_0 \geq 1$, для которого $\varepsilon_i(x) = \varepsilon_i(y)$, $i < i_0$, и $\varepsilon_{i_0}(x) = 0$, $\varepsilon_{i_0}(y) = 1$.*

**Лемма 2.** *Положим* $A = \{x \in [0,1) : \varepsilon_1(x) = 0\}$. *Тогда* $A = \left[0, \frac{1}{2}\right)$. *Кроме того,* $\overline{A} = \{x \in [0,1) : \varepsilon_1(x) = 1\} = \left[\frac{1}{2}, 1\right)$.

**Определение 1.** Пусть $n \geq 1$ и $\varepsilon_1^0, \dots, \varepsilon_n^0 \in \{0,1\}$ фиксированы. *Цилиндрическим множеством* ранга $n$ с основанием $(\varepsilon_1^0, \dots, \varepsilon_n^0)$ называется совокупность чисел $x \in [0,1)$, для которых $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_1^0, \dots, \varepsilon_n(x) = \varepsilon_n^0$.

*Замечание 2.* В лемме 2 утверждается, что цилиндрическими множествами ранга 1 являются интервалы $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ и $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$.

**Теорема 5 (*о виде цилиндрических множеств*).** *Пусть* $n \geq 1$ *и числа* $\varepsilon_1^0, \dots, \varepsilon_n^0 \in \{0,1\}$ *фиксированы. Тогда цилиндрическое множество*

$$I_n = \{x \in [0,1) : \varepsilon_1(x) = \varepsilon_1^0, \dots, \varepsilon_n(x) = \varepsilon_n^0\}$$

*является интервалом длины* $\frac{1}{2^n}$, *причем*

(i) *левая граничная точка* $I_n$ *является бинарным числом степени* $n$;
(ii) *правая граничная точка* $I_n$ *равна* 1, *если* $\varepsilon_1^0 = \dots = \varepsilon_n^0 = 1$, *или является бинарным числом степени* $n$ *во всех других случаях.*

Осталось рассмотреть еще один вспомогательный результат для построения меры в случае бесконечного случайного блуждания.

**Лемма 3.** *Пусть* $n \geq 1$ *и две последовательности* $\varepsilon_1', \dots, \varepsilon_n' \in \{0,1\}$ *и* $\varepsilon_1'', \dots, \varepsilon_n'' \in \{0,1\}$ *фиксированы. Определим цилиндрические множества* $I_k'$ *и* $I_k''$, *как в теореме* 5, *для оснований* $\varepsilon_1', \dots, \varepsilon_n'$ *и* $\varepsilon_1'', \dots, \varepsilon_n''$. *Если наборы* $\varepsilon_1', \dots, \varepsilon_n'$ *и* $\varepsilon_1'', \dots, \varepsilon_n''$ *разные, то* $I_n' \neq I_n''$.

*Замечание 3.* Всего существует $2^n$ интервалов вида $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$, $0 \leq k < 2^n$. Столько же существует $n$-мерных векторов, координаты которых принадлежат множеству $\{0,1\}$. Поэтому между этими множествами существует взаимно однозначное соответствие.

**Задача 2.** *Описать взаимно однозначное соответствие между этими множествами.*

## 3. Вероятностная мера для бесконечного блуждания

Меру $\mu_\infty$ построим сначала для бинарных интервалов, а затем перенесем ее на другие множества.

**3.1. Вероятностная мера на бинарных интервалах.** Если мы выбираем $[0,1)$ в качестве пространства элементарных исходов для бесконечного случайного блуждания, то построение вероятностной меры $\mu_\infty$ становится проще. В этом случае целесообразно и все меры $\mu_n$ "*перенести*" на интервал $[0,1)$.

Пусть сначала $a = \frac{k}{2^n}$ и $b = \frac{k+1}{2^n}$. Мера $\mu_n$, порожденная случайным блужданием с $n$ шагами, определяется таким образом:

$$\mu_n(A) = \frac{|A \cap B_n|}{2^n},$$

где $A \subseteq [0,1)$, а $B_n$ — множество бинарных чисел степени $n$. В частности, $\mu_n([a,b)) = b - a$. Более того, $\mu_m([a,b)) = b - a$ для любого $m \geq n$. $\boxed{\text{проверить!}}$

**Задача 3.** *Найти $\mu_m([a,b))$ для $m < n$.*

Рассуждая так же, как и при выводе формулы (1), мы доказывем, что

$$\mu_\infty([a,b)) = \lim_{m\to\infty} \mu_m([a,b)) = b - a.$$

Отсюда сразу же вытекает, что $\mu([a,b)) = b - a$ для любых бинарных чисел $a$ и $b$. Действительно, не теряя общности можно считать, что $a$ и $b$ имеют одинаковую $\boxed{\text{почему?}}$ степень $n$: $a = \frac{l}{2^n}$ и $b = \frac{m}{2^n}$. Представляя произвольный интервал в виде объединения непересекающихся интервалов вида $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$ и пользуясь аддитивностью меры, доказываем, что $\mu([a,b)) = b - a$.

**3.2. Вероятностная мера на алгебре интервалов.** Если, наконец, $a$ и $b$ произвольны, то выберем двоично рациональные числа $a_n \le a_{n+1}$, $a_n \to a$ и $b_n \ge b_{n+1}$, $b_n \to b$. Поскольку интервалы $[a_n, b_n)$ вложены друг в друга, то по свойству непрерывности вероятности

$$\mu_\infty([a,b)) = \lim_{n\to\infty} \mu([a_n,b_n)) = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = b - a.$$

**3.3. Продолжение меры на $\sigma$-алгебру.** Таким образом, вероятностная мера должна совпадать с мерой Лебега на интервалах отрезка $[0,1)$. Значит она должна совпадать с ней на алгебре, порожденной интервалами. $\boxed{\text{что это значит?}}$ Применяя процедуру продолжения меры с алгебры на $\sigma$-алгебру, доказываем, что полученная мера совпадает с мерой Лебега. $\boxed{\text{вспомнить эту процедуру}}$

Следовательно вероятностным пространством для бесконечного блуждания может служить $(\Omega, \mathscr{F}, \mathsf{P})$, где

$$\Omega = [0,1),$$
$$\mathscr{F} \text{ — борелевская } \sigma\text{-алгебра на } [0,1),$$
$$\mathsf{P} \text{ — мера Лебега.}$$

**Задача 4.** *Объяснить почему в качестве $\mathscr{F}$ выбрана именно борелевская $\sigma$-алгебра на $[0,1)$?*

## 4. Доказательства свойств бинарных чисел

*Доказательство теоремы* 1. Пусть $X$ — множество чисел вида (3). Приводя к общему знаменателю в (3), доказываем, что любое $x \in X$ имеет вид

$$x = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i 2^{n-i} = \frac{k}{2^n}, \qquad k = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i 2^{n-i}.$$

Поскольку

$$0 \le k \le \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i} = \sum_{j=0}^{n-1} 2^j = 2^n - 1,$$

то $x \in B_n$, то есть $X \subseteq B_n$. Значит $|X| \le 2^n$.

Теперь докажем, что формула (3) задает взаимно однозначное соответствие между $X$ и $\Omega_n$ (пространством $n$-мерных векторов, координаты которых равны

0 или 1). Для этого достаточно $\boxed{\text{почему?}}$ показать, что $|X| = 2^n$. Если бы это было не так, то нашлись бы два разных вектора $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \Omega_n$ и $(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \Omega_n$, которые представляют одно и то же число $x$. Пусть $i_0$ — минимальный индекс $i$, для которого $\varepsilon_i \neq \delta_i$. Заметим, что $i_0 \neq n$. $\boxed{\text{почему?}}$ Тогда

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i - \delta_i}{2^i} = \frac{\varepsilon_{i_0} - \delta_{i_0}}{2^{i_0}} + \sum_{i=i_0+1}^{n} \frac{\varepsilon_i - \delta_i}{2^i}, \qquad \left| \frac{\delta_{i_0} - \varepsilon_{i_0}}{2^{i_0}} \right| = \left| \sum_{i=i_0+1}^{n} \frac{\varepsilon_i - \delta_i}{2^i} \right|$$

Однако это невозможно, так как $|\delta_{i_0} - \varepsilon_{i_0}| = 1$ и

$$\left| \sum_{i=i_0+1}^{n} \frac{\varepsilon_i - \delta_i}{2^i} \right| \leq \sum_{i=i_0+1}^{n} \frac{1}{2^i} < \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{i_0}}.$$

Следовательно между множествами $\Omega_n$ и $X$ (то есть между множествами $\Omega_n$ и $B_n$) существует взаимно однозначное соответствие, задаваемое формулой (3). $\square$

*Доказательство представления* (4). Если $x$ является бинарным числом какого-либо порядка $n$, то представление (4) доказано в теореме 1. Для этого представления характерно, что $\varepsilon_i = 0$, $i > n$. Обозначим $B = \bigcup_{n \geq 1} B_n$. Получим представление (4) для $x \notin B$. Как обычно $[z]$ — это целая часть $z$.

Положим $x_0 = x$ и

$$\varepsilon_i = \left[2^i x_{i-1}\right], \quad x_i = x_{i-1} - \frac{\varepsilon_i}{2^i} \qquad \text{для } i \geq 1. \tag{5}$$

Поскольку $x_i \geq x_{i-1} - 2^i x_{i-1} \cdot \frac{1}{2^i} = 0$, $i \geq 1$, то $\varepsilon_i \geq 0$, $i \geq 1$. Так как $x_i \leq x_{i-1}$, то $\{x_i\}$ — невозрастающая последовательность неотрицательных чисел. Значит эта последовательность имеет неотрицательный предел.

Покажем, что $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ и $x_i < \frac{1}{2^i}$, $i \geq 1$. Для $i = 1$ это просто: если $x < \frac{1}{2}$, то $\varepsilon_1 = 0$ и $x_1 = x_0 < \frac{1}{2}$; если же $x > \frac{1}{2}$, то $\varepsilon_1 = 1$ и $x_1 = x_0 - \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$. Случай $x = \frac{1}{2}$ невозможен, так как $x \notin B$. Используем теперь индукцию по $i$. Предположим, что $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ и $x_i < \frac{1}{2^i}$; докажем, что $\varepsilon_{i+1} \in \{0, 1\}$ и $x_{i+1} < \frac{1}{2^{i+1}}$. Действительно $2^{i+1} x_i < 2$, значит $\varepsilon_{i+1} = \left[2^{i+1} x_i\right] \leq 1$. А поскольку $\varepsilon_{i+1}$ целое число, то $\varepsilon_{i+1} = 0$ или 1. Если $\varepsilon_{i+1} = 0$, то $x_{i+1} = x_i$ и $x_i < \frac{1}{2^{i+1}}$, то есть $x_{i+1} < \frac{1}{2^{i+1}}$. Если же $\varepsilon_{i+1} = 1$, то $x_{i+1} = x_i - \frac{1}{2^{i+1}}$ и поэтому $x_{i+1} < \frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2^{i+1}}$.

Таким образом $\lim_{i \to \infty} x_i = 0$, причем все числа $\varepsilon_i$ равны либо 0, либо 1. Итерируя определение (5), получаем $x_i = x - \sum_{j=1}^{i} \frac{\varepsilon_j}{2^j}$, откуда и вытекает (4). $\square$

*Доказательство теоремы* 3. Поскольку $x \in B$, то существует $n$, для которого $x \in B_n$ и значит справедливо представление (3). Это и есть одно из представлений вида (4) для $x$. Пусть $n_0$ — это последний индекс $i$ в представлении (3), для которого $\varepsilon_i = 1$. Тогда $x \in B_{n+0}$ и соответсвующее представление числа $x$ называется *каноническим*. Имеем

$$x = \sum_{i=1}^{n_0} \frac{\varepsilon_i}{2^i} = \sum_{i=1}^{n_0-1} \frac{\varepsilon_i}{2^i} + \frac{1}{2^{n_0}} = \sum_{i=1}^{n_0-1} \frac{\varepsilon_i}{2^i} + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}. \tag{6}$$

Это есть второе представление вида (4) для $x$.

Докажем, что других представлений не существует. Обозначим через $\varepsilon_i$, $i \le n_0$, коэффициенты канонического разложения для $x$ (напомним, что $\varepsilon_i = 0$, $i > n_0$). Рассмотрим какое-либо разложение вида (4) с коэффициентами $\delta_i$, $i \ge 1$. Имеем

$$2^{n_0} x = \sum_{i=1}^{n_0} 2^{n_0 - i}\delta_i + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \delta_i 2^{n_0-i} \equiv u + v.$$

Поскольку $x \in B_{n_0}$, то $2^{n_0}x$ является натуральным числом. А так как $u$ — целое число, то и $v$ является целым числом.

Рассмотрим три возможных случая. Если $\delta_i = 0$, $i > n_0$, то в силу теоремы 1 $\delta_i = \varepsilon_i$, $i \le n_0$. Если же $\delta_i = 1$, $i > n_0$, то $v = 1$, то есть

$$x = \sum_{i=1}^{n_0} \delta_i 2^{-i} + 2^{-n_0}.$$

Значит $x \in B_{n_0}$ и опять-таки в силу теоремы 1 $\delta_i = \varepsilon_i$, $i < n_0$, и $\delta_{n_0} = 0$. $\boxed{\text{объяснить!}}$

Если, наконец, среди $\delta_i$, $i > n_0$, встречаются и 0, и 1, то $0 < v < 1$, $\boxed{\text{почему?}}$ то есть $v$ — нецелое число. Следовательно для числа $x$ существует ровно два представления вида (3). □

*Доказательство теоремы* 4. Пусть $x \in B'$. Тогда для некоторого $m \ge 1$

$$x = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\varepsilon_i}{2^i} + \sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\varepsilon_i}{2^i} + \frac{1}{2^{m-1}}, \tag{7}$$

то есть $x$ является бинарным числом порядка $m$ и поэтому $B' \subseteq B$. Обратное включение доказывается равенством (6) в теореме 3. □

*Доказательство леммы* 1. Положим $\varepsilon_0(y) = \varepsilon_0(x) = 0$. Если утверждение леммы не верно, то найдется $i_0 \ge 1$, для которого $\varepsilon_i(y) = \varepsilon_i(x)$, $i < i_0$, и $\varepsilon_{i_0}(y) = 1$, $\varepsilon_{i_0}(x) = 0$. $\boxed{\text{но ведь еще возможен случай } \varepsilon_i(x) = \varepsilon_i(y) \text{ для всех } i!}$ Поэтому

$$y < x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2^{i_0}} + \sum_{i>i_0} \frac{\varepsilon_i(y)}{2^i} \overset{(*_2)}{<} \sum_{i>i_0} \frac{\varepsilon_i(x)}{2^i} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2^{i_0}} < \sum_{i>i_0} \frac{\varepsilon_i(x)}{2^i} \le \sum_{i>i_0} \frac{1}{2^i}.$$

$\boxed{\text{объяснить } (*_2)}$ Последнее неравенство не может выполняться, так как сумма справа не превосходит $2^{-i_0}$. $\boxed{\text{посчитать!}}$ □

*Доказательство леммы* 2. Если $x \in A$, то $x = \sum_{i>1} \frac{\varepsilon_i(x)}{2^i} < \sum_{i>1} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}$ поскольку не все коэффициенты $\varepsilon_i(x)$ равны 1. $\boxed{\text{почему не все?}}$ Значит $A \subseteq \left[0, \frac{1}{2}\right)$.

С другой стороны, если $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, $x \ne 0$, но $\varepsilon_1(x) = 1$, то

$$x = \frac{1}{2} + \sum_{i>1} \frac{\varepsilon_i(x)}{2^i} \ge \frac{1}{2}.$$

Это противоречие доказывает, что $\left[0, \frac{1}{2}\right) \subseteq A$, то есть $\left[0, \frac{1}{2}\right) = A$.

Поскольку $\overline{A} = \{x \in [0,1) : \varepsilon_1(x) = 1\}$, то из уже доказанной части леммы вытекает, что $\overline{A} = \left[\frac{1}{2}, 1\right)$. $\square$

*Доказательство теоремы* 5. Положим $I_0 = [0,1)$ и

$$I_k = \left\{x \in [0,1) : \varepsilon_1(x) = \varepsilon_1^0, \ldots, \varepsilon_k(x) = \varepsilon_k^0\right\}, \qquad 1 \le k \le n.$$

Таким образом, каждое $I_k$ — это цилиндрическое множество ранга $k$ с основой $(\varepsilon_1^0, \ldots, \varepsilon_k^0)$. Положим также $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ и

$$(8) \qquad a_k = \begin{cases} a_{k-1}, & \text{если } \varepsilon_k^0 = 0, \\ a_{k-1} + \frac{1}{2^k}, & \text{если } \varepsilon_k^0 = 1, \end{cases} \qquad b_k = \begin{cases} a_{k-1} + \frac{1}{2^k}, & \text{если } \varepsilon_k^0 = 0, \\ b_{k-1}, & \text{если } \varepsilon_k^0 = 1 \end{cases}$$

для $1 \le k \le n$. Числа $a_k$ и $b_k$ являются бинарными. $\boxed{\text{убедиться!}}$ Докажем, что

$$(9) \qquad I_k = [a_k, b_k), \qquad 0 \le k \le n.$$

Прежде всего заметим, что

$$(10) \qquad b_k - a_k = \frac{1}{2^k}, \qquad 0 \le k \le n.$$

Действительно, равенство (10) выполняется для $k = 0$. Предположим, что оно выполняется для некоторого $k = k_0 - 1$, докажем его для $k = k_0$. Согласно определению (8) имеем $b_k - a_k = \frac{1}{2^k}$, если $\varepsilon_k^0 = 0$; или $b_k - a_k = b_{k-1} - a_{k-1} - \frac{1}{2^k}$, если $\varepsilon_k^0 = 1$. Используя индукционное предположение, доказываем (10) для $k = k_0$.

Теперь докажем, что $a_k \uparrow$ и $b_k \downarrow$. Действительно, $a_k = a_{k-1} + \frac{\varepsilon_k^0}{2^k}$, поэтому последовательность $\{a_k\}$ действительно монотонна. Отсюда получаем

$$(11) \qquad a_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon_i^0}{2^i}, \qquad 1 \le k \le n.$$

Неравенство $b_k \le b_{k-1}$ очевидно, если $\varepsilon_k^0 = 1$. Оно выполнено и в случае $\varepsilon_k^0 = 0$, так как $b_k = a_{k-1} + \frac{1}{2^k} = b_{k-1} - \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} = b_{k-1} - \frac{1}{2^k}$ в силу (10).

Теперь мы готовы доказать (9). Для этого воспользуемся индукцией по $k$. При $k = 0$ свойство (9) очевидно. Предположим, что оно справедливо при каком-то $k$, докажем его и для $k+1$. Заметим, что

$$(12) \qquad \frac{a_k + b_k}{2} = a_k + \frac{1}{2^{k+1}}$$

в силу (10). Разделим интервал $J_k = [a_k, b_k)$ на два равных интервала $J_k^{\text{left}} = \left[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}\right)$ и $J_k^{\text{right}} = \left[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k\right)$. В силу (12) и (11) имеем

$$(13) \qquad \frac{a_k + b_k}{2} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon_i^0}{2^i} + \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Пусть $x \in I_k$, то есть $\varepsilon_i(x) = \varepsilon_i^0$, $1 \le i \le k$. Разберем сначала случай $\varepsilon_{k+1}^0 = 0$. Тогда $x \in J_k^{\text{left}}$ в силу леммы 1 и равенства (13). $\boxed{\text{почему?}}$ Это означает, что $I_{k+1} \subseteq J_k^{\text{left}}$. $\boxed{\text{объяснить!}}$

Для доказательства обратного включения $I_{k+1} \supseteq J_k^{\text{left}}$ предположим, что $z \in J_k^{\text{left}}$. Тогда $\varepsilon_i(z) = \varepsilon_i^0$, $1 \le i \le k$, (ведь $z \in I_k$) и $\varepsilon_{k+1}(z) = 0$ в силу леммы 1 (иначе $z \ge \frac{a_k+b_k}{2}$). Таким образом $\varepsilon_i(z) = \varepsilon_i^0$, $1 \le i \le k+1$, значит $z \in I_{k+1}$. Поэтому $J_k^{\text{left}} \subseteq I_{k+1}$ и значит $I_{k+1} = J_k^{\text{left}}$. Это и есть равенство (9) для $k+1$, которое необходимо было доказать.

Случай $\varepsilon_{k+1}^0 = 1$ рассматривается аналогично (в этом случае $I_{k+1} = J_k^{\text{right}}$).

**Задача 5.** *Рассмотреть случай* $\varepsilon_{k+1}^0 = 1$

**Задача 6.** *Почему правая граничная точка интервала* $I_n$ *в теореме 5 является бинарным числом степени* $n$*, если выполняются не все равенства* $\varepsilon_1^0 = \dots = \varepsilon_n^0 = 1$*?*

Осталось разобрать тот случай утверждения (ii) в теореме 5, когда правая граничная точка равна 1. Заметим, что $b_n = 1$ только в том случае, если $b_n = b_{n-1} = \dots = b_0$, то есть в случае $\varepsilon_1^0 = \dots = \varepsilon_n^0 = 1$. $\square$

*Доказательство леммы* 3. Пусть $i_0 = \min\{i : \varepsilon_i' \neq \varepsilon_i''\}$. Тогда $I_k' = I_k''$, $k < i_0$, по построению. Пусть, например, $\varepsilon_{i_0}' = 1$, а $\varepsilon_{i_0}'' = 0$. Тогда $I_{i_0}' = \left[a_{i_0-1}' + \frac{1}{2^{i_0}}, b_{i_0-1}'\right)$, а $I_{i_0}'' = \left[a_{i_0-1}'', a_{i_0-1}'' + \frac{1}{2^{i_0}}\right)$ в силу (8). Поскольку $a_{i_0-1}' = a_{i_0-1}''$, то $I_{i_0}' \cap I_{i_0}'' = \varnothing$.

Воспользуемся теперь свойствами $I_{k+1}' \subseteq I_k'$ и $I_{k+1}'' \subseteq I_k''$, $k > i_0$. Значит $I_n' \subseteq I_{i_0}'$ и $I_n'' \subseteq I_{i_0}''$, откуда $I_n' \cap I_n'' = \varnothing$. $\square$