Лекция 11

ПРОЦЕСС БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ ИЛИ ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС

1. Масштабированное случайное движение

Пусть $n \geq 1$. Рассмотрим симметричное случайное блуждание $S_1, \dots, S_n$, которое начинается в точке $x = 0$. Шаги блуждания обозначим $X_1, \dots, X_n \in \mathrm{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$. Одна из траекторий случайного блуждания представлена на рис. 1.

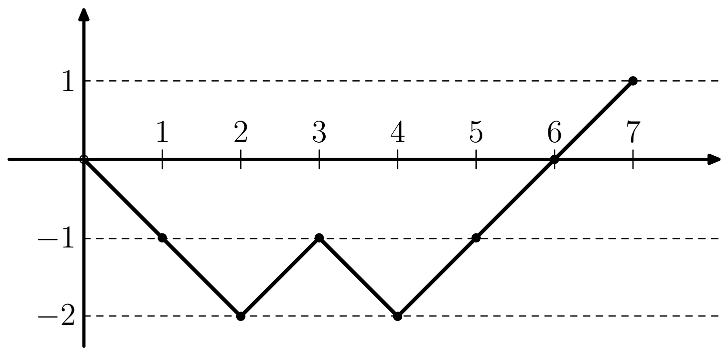

Рис. 1. Траектория случайного блуждания

Положим

$$w_n(t) = \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}$$

для $t = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1$, то есть для тех t, для которых nt является целым числом. Соединим точки плоскости $\left(\frac{k}{n}, \frac{S_k}{\sqrt{n}}\right)$ и $\left(\frac{k+1}{n}, \frac{S_{k+1}}{\sqrt{n}}\right)$, $0 \leq k < n$, отрезками прямых. Значение $w_n(t)$ для любого t определяется пересечением полученной ломаной и прямой $x = t$, то есть $\boxed{\text{проверить!}}$

$$w_n(t) = \frac{S_k}{\sqrt{n}} + X_{k+1}\frac{nt-k}{\sqrt{n}}, \qquad \frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}.$$

Несколько траекторий $w_n(t)$ представлены на рис. 2. Самая левая из них построена из траектории, изображенной на рис 1.

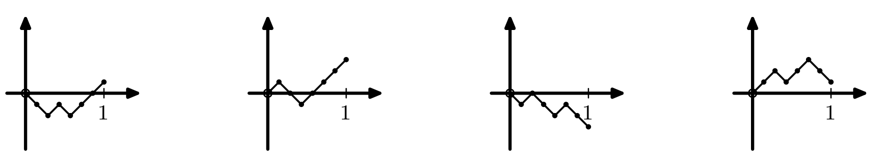

Рис. 2. Траектории масштабированного случайного блуждания

[0]Printed from the file [TSP-00-11.tex] on 19.11.2014

Определение 1. Семейство случайных величин $\{w_n(t), t \in [0,1]\}$ называется *масштабированным случайным блужданием.*

Процесс $\{w_n(t)\}$ "копирует" поведение случайного блуждания с n шагами, но в "ускоренном" времени: вся "история" масштабированного блуждания умещается в единичном интервале времени. Вторую особенность блужданию $\{w_n(t)\}$ придает нормирующий множитель $n^{-1/2}$, который уменьшает величину смещений на каждом шаге. Таким образом, величина каждого смещений за один шаг уменьшается, но самих смещений в единицу времени становится больше.

2. Свойства масштабированного случайного блуждания

Блуждание $\{w_n(t)\}$ имеет такие свойства:

(w_{n1}) $w_n(0) = 0$;

(w_{n2}) $w_n(t,\omega)$ — непрерывная функция каким бы ни было элементарное случайное событие $\omega \in \Omega$;

(w_{n3}) если $m \geq 1$ и $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_m \leq 1$ такие, что все nt_i являются целыми числами, то случайные величины

$$w_n(t_1) - w_n(t_0), \quad \ldots, \quad w_n(t_m) - w_n(t_{m-1})$$

являются независимыми;

(w_{n4}) если $ns, nt \in \mathbf{N}$, то $\mathsf{E}[w_n(t) - w_n(s)] = 0$, $\mathsf{var}[w_n(t) - w_n(s)] = t - s$ и

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(w_n(t) - w_n(s) < x) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t-s}}\right). \tag{1}$$

Тут Φ — стандартная гауссовская функция распределения.

Доказательство свойств (w_{n3}) *и* (w_{n4}). Если $ns, nt \in \mathbf{N}$ и $s < t$, то

$$w_n(t) - w_n(s) = \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}} - \frac{S_{ns}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{ns < i \leq nt} X_i. \tag{2}$$

Применяя это равенство для $s = t_{k-1}$ и $t = t_k$ при $k = 1, \ldots, m$, доказываем свойство (w_{n3}), так как отрезки $(t_{k-1}, t_k]$ не пересекаются, а случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы в совокупности. $\boxed{\text{объяснить!}}$

Так как $\mathsf{E}[X_k] = 0$ и $\mathsf{var}[X_k] = 1$, то из (2) получаем $\mathsf{E}[w_n(t) - w_n(s)] = 0$ и $\mathsf{var}[w_n(t) - w_n(s)] = t - s$. $\boxed{\text{проверить!}}$

Наконец, поскольку сумма в правой части (2) содержит $nt - ns$ слагаемых, то из центральной предельной теоремы (теоремы 6.1) с $p = q = \frac{1}{2}$ вытекает, что

$$\mathsf{P}\left(\frac{w_n(t) - w_n(s)}{\sqrt{n(t-s)}} < x\right) \to \Phi(x),$$

что эквивалентно (1). $\boxed{\text{почему?}}$ $\square$

3. Винеровский процесс

Изменяя n, мы меняем и процесс $\{w_n(t)\}$, вовлекая в его определение все больше значений случайного блуждания $S_1, \dots, S_n$. При этом интервал, в котором меняется аргумент t, все время остается одним и тем же. Если существует предел процессов $\{w_n(t)\}$ при $n \to \infty$, то естественно предположить, что он сохраняет свойства (w_{n1})–(w_{n4}). При этом можно ожидать, что предельный процесс обладает свойством (w_{n3}) для любых аргументов, так как с увеличением n возникает все больше тех t, для которых nt является целым числом, причем такие t располагаются все плотнее. Свойство (w_{n4}) в пределе означает, что распределение предельного процесса является гауссовским.

Замечание 1. Для других нормализаций, существенно отличающихся от $\sqrt{n}$, предел процессов $w_n(t)$ не существует.

Задача* 1. *Рассмотреть случай нормализаций вида n^r.*

Определение 2. Семейство случайных величин $w(t)$, $t \in [0,1]$, называется *винеровским процессом*, если

- (w_1) $w(0,\cdot) = 0$ почти наверное;
- (w_2) $w(t,\cdot)$ — непрерывная функция почти наверное;
- (w_3) случайные величины $w(t_1)-w(t_0), \dots, w(t_m)-w(t_{m-1})$ независимы для любых $m \ge 1$ и любых $0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_m \le 1$.
- (w_4) $w(t)-w(s) \in \mathcal{N}(0, t-s)$ для любых $0 \le s < t \le 1$.

Здесь запись $\xi \in \mathcal{N}\left(a, \sigma^2\right)$ означает, что ξ является *гауссовской случайной величиной с параметрами a и σ^2*, то есть

$$\mathsf{P}(\xi < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(u-a)^2/2\sigma^2}\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-v^2/2}\, dv = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Сравнивая свойства (w_1)–(w_4) и (w_{n1})–(w_{n4}), легко увидеть значительные сходства между ними, но можно также заметить и различия. Например, если свойства (w_{n1}) и (w_{n2}) выполняются для всех $\omega \in \Omega$, то их аналоги (w_1) и (w_2) верны лишь почти наверное. С другой стороны, свойство (w_3) справедливо для любых точек $\{t_k\}$ в то время как (w_{n3}) — лишь для точек вида $t_k = \frac{k}{n}$. Наконец, свойство (w_4) определяет точное распределение случайной величины $w(t)$, к которому с ростом n приближаются распределения, отмеченные в (w_{n4}).

Замечание 2. Слова “*свойство выполняется почти наверное*” означают, что это свойство не обязательно выполняется для всех $\omega \in \Omega$. Тем не менее, совокупность тех $\omega \in \Omega$, для которых свойство неверно, имеет вероятность 0.

4. Ковариационная матрица процесса броуновского движения

Утверждение 1.

(i) $w(t) \in \mathcal{N}(0,t)$; *в частности,* $\mathsf{E}\,[w(t)] = 0$ *и* $\mathsf{var}\,[w(t)] = t$, $t \in [0,1]$;

(ii) $\mathsf{cov}\,[w(t), w(s)] = \min\{t, s\}$.

Доказательство. Свойство (i) вытекает из (w_1) и (w_4), так как $w(t) = w(t) - w(0) \in \mathcal{N}(0,t)$.

Докажем теперь (ii). Случай $s = t$ вытекает непосредственно из (i). Пусть $s < t$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathsf{cov}\,[w(t), w(s)] &= \mathsf{E}\,[w(s)w(t)] = \mathsf{E}\,[w(s)(w(t) - w(s) + w(s))] \\ &= \mathsf{E}\,[(w(s) - w(0))(w(t) - w(s)] + \mathsf{E}\left[w^2(s))\right] \\ &= \mathsf{E}\,[w(s) - w(0)]\,\mathsf{E}\,[w(t) - w(s)] + s = s\end{aligned}$$

в силу свойств (w_1), (w_3) и (w_4). Случай $s > t$ рассматривается аналогично. □

Траектории винеровского процесса нигде не дифференцируемы

Траектории масштабированного случайного блуждания $\{w_n(t)\}$ непрерывны, но в точках $t = \frac{k}{n}$ могут быть недифференцируемыми: если звенья ломаной, которые сходятся в точке $t = \frac{k}{n}$, разнонаправлены, то производная в этой точке не существует. Поскольку таких точек становится больше с ростом n, то можно ожидать, что траектории винеровского процесса также будут недифференцируемыми для некоторых $t \in [0, 1]$. Оказывается, что производная типичной траектории винеровского процесса не существует ни в одной точке!

Теорема 1. *Для любого* $t_0 \in [0, 1)$

$$\limsup_{t \downarrow t_0} \left| \frac{w(t) - w(t_0)}{t - t_0} \right| = \infty \qquad \text{почти наверное.} \tag{3}$$

Следствие 1. *С вероятностью единица производная* $w'(t_0)$ *не существует для любого* $t_0 \in [0, 1]$.

Доказательство следствия 1. Мы ограничимся доказательством случая $t \neq 1$. Если бы с положительной вероятностью производная $w'(t_0)$ существовала в какой-либо точке $t_0 \in [0, 1]$, то это означало бы, что для некоторого случайного события $A \in \mathscr{F}$, $\mathsf{P}(A) > 0$, и любого $\omega \in A$ предел

$$\lim_{t \to t_0} \frac{w(t, \omega) - w(t_0, \omega)}{t - t_0}$$

существует и является конечным. Это противоречит (3). $\boxed{\text{объяснить!}}$ □

Доказательство теоремы 1. Доказательство проведем только для $t_0 \in [0, 1)$. Рассмотрим монотонно убывающую последовательность $\{t_n, n \geq 1\}$, сходящуюся к t_0. Положим

$$\eta_n = \sup_{t_0 < t \leq t_n} \left| \frac{w(t) - w(t_0)}{t - t_0} \right|, \qquad A_n = \{\omega \colon \eta_n(\omega) < \infty\}\,.$$

Задача 2. *Доказать, что* $A_{n+1} \subseteq A_n$.

Задача* 3. *Доказать, что* A_n *является случайным событием для любого* $n \geq 1$.

Задача 4. *Доказать, что* $\eta_{n+1} \le \eta_n$.

Возможны два взаимоисключающих случая: $\mathsf{P}(A_n) = 0$ для всех $n \ge 1$ или $\mathsf{P}(A_{n_0}) > 0$ для некоторого $n_0 \ge 1$. Рассмотрим каждый из них.

Случай $\mathsf{P}(A_n) = 0$ **для всех** $n \ge 1$. Положим $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$. Тогда

$$\mathsf{P}(\overline{B}) = \mathsf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_n) = 0.$$

Значит $\mathsf{P}(B) = 1$ (в частности, $B \ne \varnothing$). Зафиксируем $\omega \in B$. Тогда $\eta_n(\omega) = \infty$ для всех $n \ge 1$. $\boxed{\text{объяснить!}}$ Это означает, что для любого $n \ge 1$ существует точка $\tau_n \in [0, t_n]$, при которой

$$\left| \frac{w(\tau_n, \omega) - w(t_0, \omega)}{\tau_n - t_0} \right| \ge n.$$

$\boxed{\text{доказать!}}$ Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{w(\tau_n, \omega) - w(t_0, \omega)}{\tau_n - t_0} \right| = \infty.$$

Так как

$$\limsup_{t \downarrow t_0} \left| \frac{w(t, \omega) - w(t_0, \omega)}{t - t_0} \right| \ge \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{w(\tau_n, \omega) - w(t_0, \omega)}{\tau_n - t_0} \right|$$

$\boxed{\text{убедиться!}}$ и $\mathsf{P}(B) = 1$, то (3) действительно выполнено. $\boxed{\text{показать!}}$

Случай $\mathsf{P}(A_{n_0}) > 0$ **для некоторого** $n_0 \ge 1$. Покажем, что такое предположение приводит к противоречию.

Не теряя общности можно считать, что $n_0 = 1$. $\boxed{\text{почему?}}$ Обозначим $A = A_1$ и определим случайные величины

$$\xi_n(\omega) = \begin{cases} \eta_n(\omega), & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Задача* 5. *Доказать, что* ξ_n *является случайной величиной для любого* $n \ge 1$.

Поскольку $\eta_{n+1} \le \eta_n$, то и $\xi_{n+1} \le \xi_n$, $\boxed{\text{убедиться!}}$ а значит предел $\xi(\omega) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega)$ существует для любого $\omega \in \Omega$. Заметим, что этот предел является конечным для любого $\omega \in \Omega$, так как

$$\xi(\omega) \le \xi_1(\omega) = \eta_1(\omega) < \infty, \qquad \omega \in A,$$

$\boxed{\text{объяснить!}}$ и $\xi(\omega) = 0$, $\omega \notin A$. $\boxed{\text{показать!}}$ Значит ξ — случайная величина. $\boxed{\text{что это означает?}}$ Поскольку для любого $x > 0$

$$\{\omega \colon \xi(\omega) \ge x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega \colon \xi_n(\omega) \ge x\}, \qquad \boxed{\text{доказать!}}$$

$$\{\omega \colon \xi_{n+1}(\omega) \ge x\} \subseteq \{\omega \colon \xi_n(\omega) \ge x\}, \qquad \boxed{\text{убедиться!}}$$

то $\mathsf{P}(\xi \geq x) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\xi_n \geq x)$ в силу свойства непрерывности вероятности. $\boxed{\text{вспомнить!}}$ Пусть

$$C_n = \{\omega: \xi_n(\omega) \geq x\}, \qquad B_n = \left\{\omega: \left|\frac{\gamma_n}{\sqrt{t_n - t_0}}\right| \geq x\right\}, \qquad \gamma_n \overset{\text{def}}{=} \frac{w(t_n) - w(t_0)}{\sqrt{t_n - t_0}}.$$

Тогда $\gamma_n \in \mathcal{N}(0,1)$ $\boxed{\text{почему?}}$ и для $\omega \in A$

$$\xi_n(\omega) \geq \left|\frac{w(t_n,\omega) - w(t_0,\omega)}{t_n - t_0}\right|, \qquad \boxed{\text{доказать!}}$$

откуда $\mathsf{P}(A \cap C_n) \geq \mathsf{P}(A \cap B_n)$. $\boxed{\text{проверить!}}$ Поэтому

$$\mathsf{P}(\xi \geq x) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\xi_n \geq x) \overset{\star_1}{\geq} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}(A \cap C_n) \geq \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}(A \cap B_n).$$

$\boxed{\text{почему верно } \star_1\text{?}}$

Зафиксируем $x > 0$ и $y > 0$. При больших n справедливо неравенство $x\sqrt{t_n - t_0} < y$, $\boxed{\text{проверить!}}$ значит для достаточно больших n

$$\mathsf{P}(B_n) \overset{\star_2}{\geq} \mathsf{P}(|\gamma_n| \geq y) = 2\int_y^\infty \varphi(v)\,dv, \qquad \boxed{\text{почему верно } \star_2\text{?}}$$

где φ — стандартная гауссовская плотность. Следовательно

$$\liminf_{n\to\infty} \mathsf{P}(B_n) \geq 2\int_y^\infty \varphi(v)\,dv.$$

Переходя к пределу при $y \downarrow 0$, видим, что $\mathsf{P}(B_n) \to 1$, $n \to \infty$, для любого $x > 0$. $\boxed{\text{почему?}}$ А поскольку

$$\mathsf{P}(A \cap B_n) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B_n) - \mathsf{P}(A \cup B_n) \overset{\star_3}{\to} \mathsf{P}(A), \qquad n \to \infty,$$

$\boxed{\text{почему верно } \star_3\text{?}}$ то и

$$\mathsf{P}(\xi \geq x) \geq \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}(A \cap B_n) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(A \cap B_n) = \mathsf{P}(A) > 0$$

для любого $x > 0$. Это невозможно, так как $\mathsf{P}(\xi \geq x) \to 0$, $x \to \infty$, в силу одного из свойств функции распределения. $\boxed{\text{какого?}}$ □

Задача 6. *Доказать теорему 1 также и для $t_0 = 1$.*

5. Замечание о пространстве элементарных исходов

Для бесконечного случайного блуждания вероятностное пространство построено в лекции 8. Каким же будет вероятностное пространство для винеровского процесса? Чтобы представить себе каким оно может быть, рассмотрим иное пространство элементарных исходов для бесконечного случайного блуждания, а именно элементарным исходом считаем его траекторию $S(t)$, построенную линейной интерполяцией точек (n, S_n), $n \geq 1$. Совокупность допустимых траекторий для блуждания описывается условиями:

(i) траектория $S(t)$ кусочно линейна;
(ii) $|S(k+1) - S(k)| = 1$.

Поскольку винеровский процесс получается предельным переходом из случайного блуждания, то для него элементарными исходами являются непрерывные функции. Теорема 1 позволяет сузить пространство до семейства непрерывных функций, которые не имеют производных ни в одной точке отрезка $[0,1]$.

6. К истории винеровского процесса

Во второй половине XIX века в научных кругах шла дискуссия о природе атомов. Одна сторона утверждала, что атомы — это просто математическая абстракция, с помощью которой удается описать некоторые физические явления.

Этой точке зрения противостояла другая сторона, которая настаивала на том, что атомы представляют собой физические реалии.

Ни одна из двух сторон не сознавала, что уже за десятки лет до начала их спора были получены экспериментальные результаты, решающие вопрос в пользу существования атомов как физической реальности. Правда, эти данные были получены в смежной с физикой дисциплине естествознания ботаником Робертом Броуном.

Еще летом 1827 года Броун, занимаясь изучением поведения цветочной пыльцы под микроскопом, обнаружил, что отдельные споры совершают абсолютно хаотичные импульсные движения. Он установил, что эти движения никак не связаны ни с завихрениями и токами воды, ни с ее испарением. Описав характер движения частиц, Броун не смог объяснить его. Тем не менее он заметил, что подобное хаотичное движение свойственно любым микроскопическим частицам, проведя эксперименты с пыльцой растений, взвесями минералов, некоторыми другими измельченными субстанциями. Кроме того, он показал, что подобное движение присуще не только "*живым*" частичкам, но также и явно "*неживым*".

Наблюдение Броуна подтвердили другие ученые. Мельчайшие частички вели себя, как живые, причем "*танец*" частиц ускорялся с повышением температуры и с уменьшением размера частиц и явно замедлялся при замене воды более вязкой средой. Это удивительное явление никогда не прекращалось: его можно было наблюдать сколь угодно долго

В 1905 году Альберт Эйнштейн стал первым, кто осознал, что это таинственное явление служит наилучшим экспериментальным подтверждением правоты атомной теории строения вещества. Теоретическая статья Эйнштейна заканчивалась прямым призывом к экспериментаторам проверить его выводы на опыте: "Если бы какому-либо исследователю удалось вскоре ответить на поднятые здесь вопросы!"

Экспериментатором, который подтвердил правоту Эйнштейна, стал французский физик Жан Батист Перрен, впоследствии ставший лауреатом Нобелевской премии по физике 1926 года. В 1908 году он смог окончательно проверить и установить, что броуновское движение в жидкостях вызвано движением молекул. Тем самым он дал решающее доказательство действительного существования молекул и атомов. Проводя свои опыты с гуммигутом[1] Перрен сумел сделать также то, что ранее казалось совершенно невозможным — взвесить молекулы и атомы.

Как часто бывает в науке, отталкиваясь от математической "*абстракции*" — атомов — физики установили их существование и объяснили природу броуновского движения, для которой, в свою очередь, понадобилась математическая абстракция. Честь построения математической модели броуновского движения принадлежит американскому математику Норберту Винеру.

Ниже приведена обширная цитата из русского перевода его книги "Я математик".

Н. Винер: "Чтобы понять, что такое броуновское движение, представим себе сперва игру в пушбол[2] на поле, кишащем игроками. Некоторые из них толкают мяч в одну сторону, некоторые в другую, и в результате большинство толчков гасят друг друга. Однако равновесие шара под действием противоположно направленных ударов будет все же лишь приближенным, так как не все толчки точно компенсируют друг друга. Поэтому шар будет все-таки медленно передвигаться по полю, причем движение его будет сильно напоминать движение пьяницы, о котором мы говорили выше. Иначе говоря, оно будет представлять собой пример беспорядочного движения, при котором будущие перемещения очень мало зависят от того, как двигался шар раньше.

---

[1]смолистый сок растения Garcinia Morella

[2]командная игра, в которой участвуют две команды на поле размером $128 \times 47,5$ м с мячом 183 см в диаметре и весом 22,7 кг. Ворота состоят из двух вертикальных палок 5,5 м высотой, стоящих на расстоянии в 6,1 м друг от друга, и с закреплённой перекладиной в 2,1 м от земли. Игра длится в течение двух периодов с перерывом. Попадание шара под перекладину даёт 5 очков, перелёт через неё — 8. Приземление позади ворот даёт 2 очка атаковавшей стороне. *Мое прим.*

Рассмотрим теперь молекулы жидкости или газа. Эти молекулы не находятся в покое, но совершают случайные, беспорядочные движения, подобные движению людей в толпе. Движение это будет тем более интенсивным, чем выше температура. Предположим, далее, что в жидкость помещен крохотный шарик, который отдельные молекулы толкают точно так же, как толпа игроков толкает мяч при игре в пушбол. Если наш шарик будет совсем уж крошечным, то мы его просто не сможем увидеть, а если он будет слишком большим, то столкновения молекул с ним будут в среднем весьма точно уравновешивать друг друга, так что они не вызовут никакого движения. Существует, однако, промежуточная область размеров, при которых наш шарик является достаточно большим, чтобы его можно было увидеть в микроскоп, и достаточно малым, чтобы толчки молекул вызвали его непрекращающееся беспорядочное движение. Это движение, отражающее непрекращающееся беспорядочное перемещение молекул, называется броуновским движением. Впервые его наблюдали в микроскоп ученые XVIII века,[3] причем оказалось, что такое движение присуще всем без исключения достаточно малым частицам, наблюдаемым с помощью этого прибора.

Таким образом, броуновское движение дает нам ситуацию, в которой частицы описывают кривые, принадлежащие к некоторому статистическому множеству кривых. ...

... Само по себе броуновское движение вовсе не было совсем неисследованной областью физики. Но в фундаментальных работах Эйнштейна и Смолуховского, посвященных этой проблеме, изучалось или поведение некоторой частицы в какой-то фиксированный момент времени, или же зависящие от времени статистические характеристики большой совокупности частиц, математические же свойства траекторий отдельных частиц никак не затрагивались.

В этом последнем направлении почти ничего не было известно, если не считать глубокого замечания французского физика Перрена, отметившего в своей книге "*Атомы*", что крайне нерегулярные траектории частиц, совершающих броуновское движение, заставляют вспомнить непрерывные, нигде не дифференцируемые кривые математиков. В этом замечании говорится о непрерывности, поскольку частицы не совершают никаких мгновенных скачков, и о недифференцируемости, поскольку кажется, что ни в какой момент времени эти частицы не обладают точно определенным направлением движения.

В случае физического броуновского движения частицы, разумеется, не во все моменты времени сталкиваются с молекулами — за каждым столкновением следует какой-то промежуток времени, в течение которого никаких столкновений не происходит. Эти промежутки, однако, слишком малы, чтобы их можно было наблюдать каким-нибудь обычным способом. Естественно поэтому идеализировать броуновское движение, предположив молекулы бесконечно малыми, а столкновения — происходящими непрерывно. Именно такое идеализированное броуновское движение я и изучал, обнаружив при этом, что его свойства являются прекрасным суррогатом загадочных свойств истинного броуновского движения.

К моему удивлению и удовольствию, я убедился, что при таком понимании броуновского движения его формальная теория может быть доведена до высокой степени совершенства и изящества. В рамках этой теории мне удалось подтвердить замечание Перрена, показав, что, за исключением множества случаев, имеющих суммарную вероятность нуль, все траектории броуновского движения являются непрерывными нигде не дифференцируемыми кривыми."

[3] Существует мнение, что задолго до Броуна, еще в XVIII столетии, движение частиц наблюдал голландский ученый Антони ван Левенгук, изобретатель микроскопа. *Мое прим.*