Лекция 13

ФУНКЦИИ ХААРА И ШАУДЕРА

1. Функции Хаара

Пусть

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 2^{-1}), \\ -1, & t \in [2^{-1}, 1), \\ 0, & \text{для остальных } t \in \mathbf{R}^1. \end{cases}$$

Каждое натуральное число n имеет единственное представление

$$n = 2^j + k, \qquad \text{где } j \ge 0, \quad \text{а} \quad 0 \le k < 2^j. \tag{1}$$

Используя это представление, определим функции Хаара $H_n(t)$, $n \ge 1$, $t \in \mathbf{R}^1$, через функцию $H(t)$: если n задано равенством (1), то

$$H_n(t) = 2^{j/2} H(2^j t - k), \qquad n \ge 1.$$

Положим также $H_0(t) = 1$, $t \in \mathbf{R}^1$. Ясно, что $H_1 = H$. В дальнейшем мы рассматриваем функции Хаара только на отрезке $[0, 1)$.

Расположим функции Хаара в виде треугольной матрицы

$$\begin{array}{c|llllllll} j=0 & H_1 \\ j=1 & H_2 & H_3 \\ j=2 & H_4 & H_5 & H_6 & H_7 \\ j=3 & H_8 & H_9 & H_{10} & H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} \\ \dots & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \tag{2}$$

Графики функций, расположенных в одной строке матрицы (2), отличаются друг от друга сдвигом по оси абсцисс. Пусть L_j это совокупность индексов функций H_n, расположенных в j-ой строке матрицы (2). Ясно, что $|L_j| = 2^j$.

Обозначим через $\operatorname{supp} f$ множество точек $t \in [0, 1)$, для которых $f(t) \ne 0$. Положим также $\Delta_{j,k} = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right)$ для $j \ge 0$, $0 \le k < 2^j$.

Лемма 1. *Пусть n фиксировано, а $j \ge 0$ и $0 \le k < 2^j$ определяются с помощью формулы (1). Тогда*

(i) $\operatorname{supp} H_n = \Delta_{j,k}$ *и* $[0, 1) = \bigcup_{n \in L_j} \operatorname{supp} H_n$.

В частности, если j фиксировано, то

(ii) $H_m(t) H_n(t) = 0$ *для любого* $t \in [0, 1)$ *и любых* $n, m \in L_j$, $n \ne m$.

(iii) $H_n(t) \ne 0$ *только для одного* $n \in L_j$ *какое бы ни было* $t \in [0, 1)$.

[0]Printed from the file `[TSP-00-12.tex]` on 19.11.2014

Доказательство. Так как $H_n(t) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $H(2^j t - k) \neq 0$, то есть когда $0 \leq 2^j t - k < 1$ или $t \in \Delta_{j,k}$, то $\operatorname{supp} H_n = \Delta_{j,k}$. Далее, поскольку интервалы $\Delta_{j,k}$, $0 \leq k < 2^j$, не пересекаются и в объединении дают $[0,1)$, то $[0,1) = \bigcup_{n \in L_j} \operatorname{supp} H_n$ для любого $j \geq 0$. Тем самым (i) доказано.

Для доказательства (ii) выберем два индекса $n, m \in L_j$, $n \neq m$. Тогда $n = 2^j + k_1$, $n = 2^j + k_2$ и $\operatorname{supp} H_n \cap \operatorname{supp} H_m = \varnothing$ согласно (i). Поэтому $H_n(t) H_m(t) = 0$ для любого $t \in [0,1)$.

Кроме того, в силу (i) для любого $t \in [0,1)$ существует n, для которого $t \in \operatorname{supp} H_n$. Поэтому $H_n(t) \neq 0$ для этого n и значит $H_m(t) = 0$ для всех остальных $m \in L_j$. $\square$

Лемма 2. *Система функций Хаара ортонормальна на отрезке* $[0,1)$, *то есть*

(iv) $\int_0^1 H_n^2(t)\,dt = 1$, $n \geq 0$,

(v) $\int_0^1 H_m(t) H_n(t)\,dt = 0$, $m \neq n$.

Доказательство. В силу (i) имеем

$$\int_0^1 H_n^2(t)\,dt = 2^j \int_{\Delta_{j,k}} dt = 1,$$

что и доказывает свойство (iv). Свойство (v) также вытекает из утверждения (i) леммы 1, если $m, n \in L_j$ для некоторого j. Пусть $n \in L_{j_n}$ и $m \in L_{j_m}$, $m \neq n$. Для определенности считаем, что $j_n < j_m$. Заметим, что в этом случае $n < m$. $\boxed{\text{объяснить!}}$ В силу утверждения (i) леммы 1

$$\operatorname{supp} H_n = \Delta_{j_n,k_n} = \bigcup_{k=2^{j_m - j_n} k_n}^{2^{j_m - j_n}(k_n+1)} \Delta_{j_m,k}.$$

Функция H_n постоянна на каждом из интервалов $\Delta_{j_n+1,k}$: она равна $2^{j_n/2}$ при $t \in \Delta_{j_n+1,2k_n}$ или $-2^{j_n/2}$ при $t \in \Delta_{j_n+1,2k_n+1}$. Для всех остальных $\Delta_{j_n+1,k}$ она равна 0. Аналогичным образом доказываем, что функция H_n постоянна на каждом из интервалов $\Delta_{j_n+i,k}$, $i > 1$. В частности, функция H_n постоянна на каждом из интервалов $\Delta_{j_m,k}$. Обозначим через h_n значение функции H_n на $\operatorname{supp} H_m$. Тогда

$$\int_0^1 H_m(t) H_n(t)\,dt = \int_{\operatorname{supp} H_m} H_m(t) H_n(t)\,dt = h_n \int_{\operatorname{supp} H_m} H_m(t)\,dt = 0. \qquad \square$$

Лемма 3. *Пусть* $\varepsilon > 0$ *и* $f \in L_2([0,1))$. *Тогда существует конечная линейная комбинация* g *функций* $\{\mathbb{1}_{[0,1)}, H_1, H_2, \dots\}$, *для которой* $\|f - g\| < \varepsilon$, *где*

$$\|f - g\|^2 = \int_0^1 (f(t) - g(t))^2\,dt.$$

Более того, эту линейную комбинацию g *можно сформировать только из функций, стоящих на одной строке* L_j *матрицы Хаара* (2) *при достаточно большом* j.

Доказательство. Будем пользоваться следующим известным утверждением (Натансон, теорема 6, § 2, глава VI, стр. 161).

Лемма 4. *Пусть $\varepsilon > 0$ и $f \in L_2([0,1))$. Тогда существует натуральное число $N \geq 1$, действительные числа $c_1, \ldots, c_N$ и интервалы $[a_1, b_1), \ldots, [a_N, b_N)$, для которых $\|f - g\| < \varepsilon$, где $g(t) = \sum_{i=1}^N c_i \mathbb{I}_{[a_i,b_i)}(t)$.*

Не теряя общности в лемме 4 можно считать, что $\boxed{\text{почему?}}$

(a) интервалы $[a_i, b_i)$ не пересекаются;
(b) $\bigcup_{i=1}^N [a_i, b_i) = [0, 1)$.

Шаг 1. Покажем, что для любой функции $f \in L_2([0,1))$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $j \geq 0$ и линейная комбинация индикаторов $\mathbb{I}_{\Delta_{j,k}}$, $0 \leq k < 2^j$, которая приближает f в $L_2([0,1))$ с точностью ε.

Пусть $f \in L_2([0,1))$ и $\varepsilon > 0$. С помощью леммы 4 найдем функцию g вида $g(t) = \sum_{i=1}^N c_i \mathbb{I}_{[a_i,b_i)}(t)$, которая приближает f с точностью $\varepsilon/2$. Считаем также, что выполнены условия (a) и (b). Выберем и зафиксируем j настолько большим, чтобы

(c) каждый интервал $\Delta_{j,k}$ пересекался с не более, чем двумя интервалами $[a_i, b_i)$ из представления функции g (для этого достаточно, чтобы j было настолько большим, что $\frac{1}{2^j} < \min(b_i - a_i)$);
(d) $\varepsilon^2 2^j \geq 8N \max_{1\leq i\leq N} c_i^2$.

Будем говорить, что интервал $\Delta_{j,k}$ принадлежит классу K_1, если он пересекается только с одним из интервалов $[a_i, b_i)$ (то означает, что $\Delta_{j,k} \subseteq [a_i, b_i)$); если же $\Delta_{j,k}$ пересекается с двумя интервалами $[a_i, b_i)$, то говорим, что $\Delta_{j,k}$ принадлежит классу K_2. Заметим, что количество интервалов в классе K_2 не превосходит $2N$. $\boxed{\text{объяснить!}}$ Определим теперь функцию

$$h(t) = \begin{cases} c_i, & \text{если } \Delta_{j,k} \in K_1 \text{ и } \Delta_{j,k} \cap [a_i, b_i) \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если } \Delta_{j,k} \in K_2. \end{cases}$$

Понятно, что $g(t) - h(t) = 0$ для всех $t \in \Delta_{j,k}$, если $\Delta_{j,k} \in K_1$. $\boxed{\text{почему?}}$ Кроме того, $|g(t) - h(t)| \leq \max_{1\leq i\leq N} |c_i|$ для всех $t \in \Delta_{j,k}$, если $\Delta_{j,k} \in K_2$. $\boxed{\text{доказать!}}$ Таким образом

$$\begin{aligned} \|g - h\|^2 &= \int_0^1 (g(t) - h(t))^2 \, dt = \sum_{\Delta_{j,k}\in K_2} \int_{\Delta_{j,k}} (g(t) - h(t))^2 \, dt \\ &\leq \max_{1\leq i\leq N} c_i^2 \cdot 2N \cdot \frac{1}{2^j} < \frac{\varepsilon^2}{4} \end{aligned}$$

в силу (d). Таким образом $\|g - h\| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\|f - h\| \leq \|f - g\| + \|g - h\| < \varepsilon$. Это и доказывает требуемое утверждение.

Шаг 2. Зафиксируем j и обозначим Пусть

$$\mathcal{M}_j = \{f \in L_2([0,1)) \colon f \text{ постоянна на каждом из интервалов } \Delta_{j,k}\}.$$

Понятно, что $\mathcal{M}_j$ состоит из функций f вида $f(t) = \sum_{0\leq k<2^j} c_k \mathbb{I}_{\Delta_{j,k}}(t)$. На шаге 1 доказано, что любую функцию $f \in L_2([0,1))$ можно приблизить с произвольной точностью линейной комбинацией из $\mathcal{M}_j$, если j подобрать достаточно большим. Кроме того,

(e) $\mathcal{M}_j$ линейное пространство,
(f) $\dim \mathcal{M}_j = 2^j$.

Последнее означает, что в $\mathcal{M}_j$ существует базис, состоящий из 2^j функций. Базис — это система линейно независимых элементов, причем любой иной элемент в $\mathcal{M}_j$ является их линейной комбинацией. Таким базисом в $\mathcal{M}_j$ является $\{\mathbb{1}_{\Delta_{j,k}},\ 0 \le k < 2^j\}$. $\boxed{\text{доказать!}}$ Любая другая система 2^j линейно независимых элементов в $\mathcal{M}_j$ также является базисом. $\boxed{\text{почему?}}$

Пусть теперь $\mathcal{H}_j = \{\mathbb{1}_{[0,1)},\ H_n,\ n \in \cup_{i<j} L_i\}$. Поскольку $\mathcal{H}_j \subset \mathcal{M}_j$ и $|L_i| = 2^i$, то $|\mathcal{H}_j| = 1 + \sum_{i<j} 2^i = 2^j$. Если бы элементы $\mathcal{H}_j$ были линейно зависимы, то нашлись бы константы $c_0, \ldots, c_{2^j-1}$, при которых

$$0 = c_0 \mathbb{1}_{[0,1)} + \sum_{n \in L_i, i<j} c_n H_n. \tag{3}$$

Взяв какое-либо $n_0 \in L_i$, $i < j$, и умножив это равенство на H_{n_0}, а затем проинтегрировав по отрезку $[0,1)$, получаем $0 = 0 + c_{n_0}$ силу (v) леммы 2, откуда $c_{n_0} = 0$. Поскольку n_0 произвольно, то $c_n = 0$ для всех $1 \le n < 2^j$. Отсюда сразу вытекает, что и $c_0 = 0$, то есть линейная комбинация (3) тривиальна. Следовательно элементы $\mathcal{H}_j$ линейно независимы.

Любая функция H_n, $n \in L_i$, не меняется на $\Delta_{i+1,k}$, значит любая функция из $\mathcal{H}_j$ не меняется на $\Delta_{j,k}$, то есть $\mathcal{H}_j \subset \mathcal{M}_j$. Поэтому $\mathcal{H}_j$ является базисом в $\mathcal{M}_j$, то есть каждая функция из $\mathcal{M}_j$ есть линейная комбинация элементов $\mathcal{H}_j$.

Шаг 3. Теперь можем доказать, что линейная оболочка системы функций $\{\mathbb{1}_{[0,1)}, H_1, H_2, \ldots\}$ совпадает с $L_2([0,1))$. Пусть $f \in L_2([0,1))$ и $\varepsilon > 0$. Выберем теперь j и $g \in \mathcal{M}_j$ согласно шагу 2 так, чтобы $\|f - g\| < \varepsilon$. Поскольку, как мы только что доказали, $g \in \operatorname{span} \mathcal{H}_j$, произвольная функция $f \in L_2([0,1))$ приближена функцией из $\operatorname{span} \mathcal{H}_j$ с произвольной точностью $\varepsilon > 0$. $\square$

2. Функции Шаудера

Пусть

$$S(t) = \begin{cases} 2t, & t \in [0, 2^{-1}), \\ 2(1-t), & t \in [2^{-1}, 1], \\ 0, & \text{для остальных } t \in \mathbf{R}^1. \end{cases}$$

Пусть натуральное число $n \ge 1$ представлено в виде (1). Определим функции Шаудера $S_n(t)$, $n \ge 1$, $t \in \mathbf{R}^1$, через функцию $S(t)$:

$$S_n(t) = S(2^j t - k), \qquad n \ge 1.$$

Положим также $S_0(t) = t$. Ясно, что $S_1 = S$.

Понятно, что $\int_0^t H(s)\,ds = \frac{1}{2} S(t)$. $\boxed{\text{проверить!}}$ Аналогичная связь имеет место и между функциями Хаара и Шаудера.

Лемма 5. *Для любого $n \ge 0$, имеющего представление* (1),

$$0 \le S_n(t) \le 1, \qquad t \in [0,1), \tag{4}$$

$$\int_0^t H_n(s)\,ds = \lambda_n S_n(t), \tag{5}$$

$$\lambda_0 = 1, \qquad \lambda_n = \frac{1}{2} 2^{-j/2}, \quad n = 2^j + k, \quad 0 \le k < 2^j, \tag{6}$$

$$S_n \textit{ является непрерывной функцией,} \tag{7}$$

$$\operatorname{supp} S_n = \Delta_{j,k} \setminus \{t_{j,k}\}, \qquad t_{j,k} = \frac{k}{2^j}. \tag{8}$$