Лекция 14

КОНСТРУКТИВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА

1. Разложение винеровского процесса в ряд

Теорема 1. *Пусть γ_n, $n \ge 0$, последовательность независимых стандартных гауссовских случайных величин, то есть $\gamma_n \in \mathcal{N}(0,1)$. Тогда*

s_1) *с вероятностью 1 ряд*

$$w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \gamma_n S_n(t) \quad \textit{или} \quad w(t,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \gamma_n(\omega) S_n(t) \tag{1}$$

сходится равномерно на $[0,1)$, где последовательность чисел λ_n, $n \ge 0$, определена соотношением (13.6), а $S_n(t)$, $n \ge 0$, — последовательность функций Шаудера;

s_2) $\mathsf{E}\,[w(t)] = 0$ *для любого $t \in [0,1)$;*

s_3) $\mathsf{E}\,[w(s)w(t)] = \min\{s,t\}$ *для всех $s,t \in [0,1)$; в частности,* $\mathsf{var}\,[w(t)] = t$;

s_4) *с вероятностью единица $w(\cdot)$ является непрерывной функцией;*

s_5) *$w(t)$ является винеровским процессом.*

Прежде всего докажем следующий вспомогательный результат.

Лемма 1. *Пусть γ_n, $n \ge 0$, последовательность независимых стандартных гауссовских случайных величин, то есть $\gamma_n \in \mathcal{N}(0,1)$. Тогда существует измеримое отображение $C\colon \Omega \to \mathbf{R}^1$, для которого $\mathsf{P}(C < \infty) = 1$ и*

$$|\gamma_n| \le C\sqrt{\ln(n)}, \qquad n \ge 2.$$

Доказательство. Пусть $\gamma \in \mathcal{N}(0,1)$ и $x > 0$. Ясно, что

$$\int_x^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt \sim \frac{e^{-x^2/2}}{x}, \qquad x \to \infty.$$

$\boxed{\text{доказать!}}$ Поэтому для любых $c_1 < \sqrt{\frac{2}{\pi}} < c_2$ существует такое $x^* > 0$, то

$$c_1 \frac{e^{-x^2/2}}{x} \le \mathsf{P}(|\gamma| \ge x) \le c_2 \frac{e^{-x^2/2}}{x} \tag{2}$$

для всех $x \ge x^*$. Положим

$$\eta_n = \max_{2^n \le k < 2^{n+1}} \frac{|\gamma_k|}{\sqrt{\ln(k)}}.$$

[0]Printed from the file `[TSP-00-13.tex]` on 19.11.2014

Пусть $x > \sqrt{2}$ и n настолько велико, что $\sqrt{\ln(2^n)} \geq x^*$ и $x\sqrt{\ln(2^n)} > 1$. Положим $x = x \ln \sqrt{2^n}$. Тогда

$$\mathsf{P}(|\eta_n| \geq x) \leq \mathsf{P}\left(\max_{2^n \leq k < 2^{n+1}} |\gamma_k| \geq x_n\right),$$

Далее

$$\mathsf{P}\left(\max_{2^n \leq k < 2^{n+1}} |\gamma_k| \geq x_n\right) = 1 - \mathsf{P}\left(\bigcap_{2^n \leq k < 2^{n+1}} \{\omega \colon |\gamma_k| < x_n\}\right)$$
$$= 1 - [\mathsf{P}(|\gamma| < x_n)]^{2^n} = 1 - [1 - \mathsf{P}(|\gamma| \geq x_n)]^{2^n},$$

так как $\{\gamma_k\}$ независимы и одинаково распределены. Применяя неравенство $1 - (1-z)^m \leq mz$, справедливое для $0 < z < 1$ и $m \geq 1$, $\boxed{\text{доказать!}}$ получаем

$$1 - [1 - \mathsf{P}(|\gamma| \geq x_n)]^{2^n} \leq 2^n \mathsf{P}(|\gamma| \geq x_n).$$

Используя асимптотику (2), доказываем, что

$$\mathsf{P}(|\eta_n| \geq x) \leq 2^n \cdot c_2 \frac{e^{-x_n^2/2}}{x_n} \leq c_2 2^n e^{-x_n^2/2} = c_2 e^{\ln 2^n - x^2 \ln 2^n/2} = e^{-n\theta},$$

где $\theta = \theta(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)\ln(2)$. Следовательно, для $x > \sqrt{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|\eta_n| \geq x) \leq \frac{1}{e^\theta - 1} < \infty.$$

Из леммы Бореля–Кантелли (лемма 11.2) вытекает, что $\mathsf{P}(|\eta_n| \geq x \text{ б.ч.р.}) = 0$. Пусть $\Omega_0 = \{\omega \colon |\eta_n| \geq x \text{ б.ч.р.}\}$, $\Omega_1 = \overline{\Omega}_0$. Понятно, что $\mathsf{P}(\Omega_1) = 1$. Кроме того, для любого $\omega \in \Omega_1$ имеем $|\eta_n(\omega)| < x$, начиная с некоторого $n = n_0$. Это означает, что для фиксированного $\omega \in \Omega_1$ найдется такое n_0, при котором

$$\sup_{n \geq 1} |\eta_n(\omega)| \leq \max\{x, |\eta_1(\omega)|, \ldots, |\eta_{n_0-1}(\omega)|\} < \infty.$$

$\boxed{\text{почему?}}$ А поскольку для любого $k \geq 1$

$$\frac{|\gamma_k(\omega)|}{\sqrt{\ln k}} \leq \sup_{k \geq 1} \frac{|\gamma_k(\omega)|}{\sqrt{\ln k}} = \sup_{n \geq 1} |\eta_n(\omega)| < \infty, \qquad \omega \in \Omega_1,$$

то лемма 1 выполнена с $C = \sup_{n \geq 1} |\eta_n|$. $\square$

Доказательство теоремы 1. Так как $S_n(t) \geq 0$ (см. (13.4)), то в силу леммы 1

$$\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n |\gamma_n| S_n(t) \leq C \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \sqrt{\ln(n)} S_n(t) = C \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{2^j \leq n < 2^{j+1}} \lambda_n \sqrt{(j+1)\ln(2)} S_n(t).$$

Для всех $2^j \le n < 2^{j+1}$ имеем $\ln(n) < (j+1)\ln(2)$ и $\lambda_n = \frac{1}{2}2^{-j/2}$, значит

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{2^j \le n < 2^{j+1}} \lambda_n \sqrt{\ln(n)} S_n(t) \le \frac{1}{2}\sqrt{\ln(2)} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j/2} \sqrt{(j+1)} \sum_{2^j \le n < 2^{j+1}} S_n(t).$$

Согласно (13.8) $S_n(t) = 0$ для любого $t \in [0,1)$ и для всех $2^j \le n < 2^{j+1}$, кроме одного. Более того, $S_n(t) \le 1$ в силу (13.4). Поэтому для всех $\omega \in \Omega_1$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n |\gamma_n| S_n(t) \le \frac{C}{2}\sqrt{\ln(2)} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j/2}\sqrt{j+1}.$$

Поскольку последний ряд является сходящимся (Фихтенгольц, т. II, глава XI, §368, стр. признак Даламбера) то по теореме о равномерной сходимости функционального ряда (Фихтенгольц, т. II, глава XII, §427, стр. признак Вейерштрасса) мы доказываем, что ряд (1) сходится равномерно для любого $\omega \in \Omega_1$. Тем самым s_1) доказано.

Далее, поскольку ряд (1) сходится равномерно для $\omega \in \Omega_1$, то

$$\mathsf{E}[w(t)] = \mathsf{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \gamma_n S_n(t)\right] \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \mathsf{E}[\gamma_n] S_n(t) = 0$$

поскольку $\mathsf{E}[\gamma_n] = 0$. Это доказывает s_2).

Докажем s_3). Зафиксируем $s > 0$ и $t > 0$. Поскольку ряд (1) сходится абсолютно и равномерно, то

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[w(s)w(t)] &= \mathsf{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \gamma_n S_n(s) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m \gamma_m S_m(t)\right] \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \lambda_n \lambda_m S_n(s) S_m(t) \mathsf{E}[\gamma_n \gamma_m] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 S_n(s) S_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^s H_n(u)\,du \cdot \int_0^t H_n(u)\,du, \end{aligned}$$

так как $\mathsf{E}[\gamma_n \gamma_m] = 0$, $n \ne m$, и $\mathsf{E}\left[\gamma_n^2\right] = 1$, $n \ge 1$.

Чтобы подсчитать сумму последнего ряда, воспользуемся равенством Парсеваля в $L_2([0,1))$ Колмогоров и Фомин, глава III, § 4, равенство (19): для любой ортонормированной полной системы φ_n, $n \ge 0$, в $L_2([0,1))$ и любых функций $f, g \in L_2([0,1))$ имеет место

$$(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} (f, \varphi_n) \cdot (g, \varphi_n),$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2([0,1))$. В качестве функций f и g выберем индикаторы отрезков $[0,s]$ и $[0,t]$ соответственно:

$$f(x) = \mathbb{1}_{[0,s]}(x), \qquad g(x) = \mathbb{1}_{[0,t]}(x).$$

В качестве системы φ_n, $n \geq 0$, выберем функции Хаара: согласно леммам 13.2 и 13.3 эта система является ортонормальной и полной.

Для так выбранных f, g, φ_n и любых $s, t \in [0, 1)$ справедливы равенства:

$$(f, g) = \min\{s, t\}, \qquad (f, \varphi_n) = \int_0^s H_n(u)\,du, \qquad (g, \varphi_n) = \int_0^t H_n(u)\,du,$$

то есть

$$\min\{s, t\} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^s H_n(u)\,du \cdot \int_0^t H_n(u)\,du. \tag{3}$$

Следовательно свойство s_3) доказано.

Докажем s_4). Ряд (1) сходится равномерно с вероятностью 1 и $S_n(t)$ — непрерывные функции (см. (13.7)), поэтому и w — непрерывная функция с вероятностью 1. Отсюда и вытекает свойство s_4).

Доказательство свойства s_5) разобьем на четыре шага.

Шаг 1. Так как $S_n(0) = 0$ (см. раздел 13.2), то и $w(0) = 0$, что и доказывает свойство (w_1) (лекция 18, стр. 74).

Шаг 2. Свойство (w_2) (лекция 18, стр. 74) совпадает с s_4).

Шаг 3. Пусть $m \geq 3$ и $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_m$. В лекции 17 мы докажем, что $w(t_2) - w(t_1), \ldots, w(t_m) - w(t_{m-1})$ являются независимыми случайными величинами, что эквивалентно свойству (w_3) (лекция 18, стр. 74).

Шаг 4. Пусть $m \geq 2$ и $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_m \leq 1$. В лекции 17 мы покажем, что случайный вектор $(w(t_1), \ldots, w(t_m))$ имеет многомерное гауссовское распределение, что и доказывает свойство (w_4) (лекция 18, стр. 74) (см. задачу 23.2).

В соответствии с определением 18.2 процесс w является винеровским. $\square$

2. Винеровский процесс на всей прямой

Мы определили винеровский процесс только для $t \in [0, 1]$. Чтобы распространить определение на все $t \geq 0$, заметим, что случайный процесс $X(t) = w(t - n)$, $n \leq t \leq n + 1$, определен на отрезке $[n, n+1]$ и обладает свойствами (w_2)–(w_4), а свойство (w_1) заменяется на свойство непрерывности в точке $t = n$.

Выберем теперь последовательность независимых винеровских процессов $w_n(t)$, $t \in [0, 1]$, $n \geq 0$. Положим $B_n(t) = w_n(t - n)$, $t \in [n, n+1]$, и

$$W(t) = \sum_{k=0}^{n} B_k(k+1) + B_{n+1}(t), \qquad t \in [n, n+1].$$

Случайный процесс W определен для всех $t \geq 0$; он также называется *винеровским процессом на бесконечном интервале.* Например, $W(3/2) = B_0(1) + B_1(3/2)$ или $W(5/2) = B_0(1) + B_1(2) + B_3(5/2)$.

Теорема 2. *Случайный процесс W обладает свойствами (w_1)–(w_4), в которых отрезок $[0, 1]$ заменяется на $[0, \infty)$.*