



ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ – ПО10

Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	Перший (бакалаврський)
Галузь знань	11 математика і статистика
Спеціальність	111 математика
Освітня програма	Страхова та фінансова математика
Статус дисципліни	Нормативна
Форма навчання	очна(денна)
Рік підготовки, семестр	3 курс, осінній семестр
Обсяг дисципліни	6 кредитів/180 год. (54 год.-лекції, 54 год.-практичні заняття, СРС 72 год.)
Семестровий контроль/ контрольні заходи	екзамен / РГР, МКР, поточний контроль
Розклад занять	https://schedule.kpi.ua/
Мова викладання	Українська
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: доктор фіз.-мат. наук, професор, Лось Валерій Миколайович, v_los@yahoo.com Практичні / Семінарські: доктор фіз.-мат. наук, професор, Лось Валерій Миколайович, v_los@yahoo.com
Розміщення курсу	Telegram

Програма навчальної дисципліни

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Функціональний аналіз є одним із центральних розділів сучасної математики. Він переважно вивчає нескінченномірні простори і оператори в них. Поняття та методи функціонального аналізу дозволяють на строгому математичному рівні формувати постановки як класичних, так і сучасних математичних задач та будувати їх розв'язки. Функціональний аналіз знаходить свої застосування в таких суміжних областях, як диференціальні та інтегральні рівняння, рівняння математичної фізики, обчислювальна математика, теорія ймовірностей тощо.

Предметом дисципліни є властивості метричних, лінійних нормованих, гільбертових просторів та лінійних функціоналів в них.

Мета та завдання кредитного модуля

Метою навчальної дисципліни є формування у студентів таких

знань:

- ~ основних понять теорії метричних і лінійних нормованих просторів;
- ~ базових понять теорії лінійних функціоналів;
- ~ зв'язків між основними поняттями в цих теоріях;
- ~ формулювань теорем теорії та наслідків з них;

та умінь:

- ~ застосовувати отримані знання до розв'язання конкретних задач з теорії нескінченномірних лінійних просторів та лінійних функціоналів в них;
- ~ використовувати методи функціонального аналізу в теоретичних і прикладних дослідженнях;
- ~ самостійно працювати з підручниками, довідковою літературою, інтернет-ресурсами.

Основні завдання навчальної дисципліни.

Після засвоєння навчальної дисципліни студенти набудуть такі **компетентності**:

- здатність навчатися, здобувати нові знання, уміння, у тому числі в галузях, відмінних від математики (ЗК1);
- здатність вирішувати проблеми у професійній діяльності на основі абстрактного мислення, аналізу та прогнозу (ЗК3);
- здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями (ЗК7);
- здатність спілкуватися державною мовою і усно, і письмово (ЗК8);
- здатність приймати обґрунтовані рішення (ЗК9);
- здатність працювати автономно (ЗК12);
- здатність проявляти творчий підхід та ініціативу (ЗК16);
- здатність формулювати проблеми математично та в символічній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання (ФК1);
- здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок (ФК3);
- спроможність розуміти наукові проблеми та виділяти їхні суттєві риси (ФК4);
- здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів (ФК8).

Програмними результатами навчання є:

- розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми (РН4);
- розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями (РН10);
- усно й письмово спілкуватися рідною та іноземною мовами в науковій, виробничій та соціально-суспільній сферах діяльності із професійних питань; читати спеціальну літературу; знаходити, аналізувати та використовувати інформацію з різних довідкових джерел (РН11);
- відшуковувати потрібну науково-технічну інформацію у науковій літературі, базах даних та інших джерелах інформації (РН12);
- знати теоретичні основи і застосовувати методи топології, функціонального аналізу й теорії диференціальних рівнянь для дослідження динамічних систем (РН16).

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

Дисципліна «Функціональний аналіз» викладається в першому семестрі третього курсу підготовки бакалаврів за освітньою програмою «Страхова та фінансова математика». У структурно-логічній схемі освітньої програми підготовки за даною спеціальністю їй передують дисципліни «Математичний аналіз: функції однієї змінної», «Математичний аналіз: функції кількох змінних».

Дисципліна «Функціональний аналіз» передуює освітнім компонентам «Методи математичної фізики» і вивченню вибіркової дисципліни «Теорія операторів та інтегральні рівняння».

3. Зміст навчальної дисципліни

Розділ 1. Метричні простори і їх відображення.

Тема 1.1. Метричні простори. Метрика. Збіжність в метричному просторі. Відкриті множини. Замкнені множини і замикання. Сепарабельні метричні простори. Повні метричні простори. Поповнення метричного простору.

Тема 1.2. Відображення метричних просторів. Неперервні відображення. Рівномірна неперервність. Принцип стискаючих відображень та його застосування. Компактні множини і їх властивості. Критерії компактності. Неперервні відображення компактних множин та їх властивості. Теорема Арцела-Асколі. Теорема Стоуна-Вейерштрасса.

Розділ 2. Лінійні нормовані і гільбертові простори.

Тема 2.1. Лінійні нормовані простори. Лінійні простори. Базис Гамеля. Вимірність простору. Приклади. Норма на лінійному просторі. Банахові простори. Лінійні нормовані простори функцій і послідовностей. Скінченновимірні лінійні нормовані простори.

Тема 2.2. Гільбертові простори. Скалярний добуток. Нерівність Коші-Буняковського. Норма, породжена скалярним добутком. Рівність паралелограма. Неперервність скалярного добутку за двома аргументами. Гільбертові простори. Ортогональність. Ортогональне доповнення. Ортонормовані системи. Нерівність Бесселя. Ортонормовані базиси. Повні і замкнені ортонормовані системи. Рівність Парсеваля. Теорема Шмідта про ортогоналізацію. Ізоморфізм гільбертових просторів.

Розділ 3. Лінійні функціонали і спряжений простір.

Тема 3.1. Неперервні лінійні функціонали. Неперервність і обмеженість лінійного функціоналу. Рівносильність неперервності і обмеженості. Ядро лінійного функціоналу. Норма лінійного функціоналу. Приклади лінійних неперервних функціоналів.

Тема 3.2. Спряжений простір. Простір лінійних функціоналів і його повнота. Загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів в гільбертовому просторі і просторі $C[a,b]$. Продовження лінійного функціоналу за неперервністю. Теорема Гана-Банаха та її наслідки. Лінійні неперервні функціонали в конкретних просторах функцій і послідовностей. Другий спряжений простір. Рефлексивні простори.

Тема 3.3 Слабка збіжність лінійних неперервних функціоналів. Теорема Банаха-Штейнгауза. Критерій слабкої збіжності. Теореми Геллі. Критерій слабкої збіжності в лінійному нормованому просторі.

4. Навчальні матеріали та ресурси

Базова література

1. Березанський Ю. М. Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функціональний аналіз. – Львів, Видавець І. Є. Чижиков, 2014. – 559 с.
2. Богданський Ю. В. та ін. Функціональний аналіз. Збірник вправ з функціонального аналізу. – Київ : КПП ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 67 с. https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/27816/1/FA_zbirnyk_vprav.pdf
3. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. – Київ: Либідь, 1994. Т2. – 304 с.

Допоміжна література

1. Городецький В. В., Нагнибида Н. И., Настасиєв П. П. Методи розв'язування задач з функціонального аналізу. – Київ : «Вища школа», 1990. – 479с.
2. Колмогоров А. М., Фомін С. В. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – Київ : «Вища школа», 1974. – 456 с.

5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Лекційні заняття

№ з/п	Назва теми лекції та перелік основних питань
1	Нерівність Ієнсена. Нерівності Гельдера та Мінковського.
2	Означення метричного простору. Основні приклади метричних просторів. Збіжність в метричних просторах.
3	Відкриті та замкнені кулі. Відкриті множини. Замкнені множини. Замикання. Сепарабельні метричні простори.
4	Повнота метричних просторів. Приклади повних та неповних метричних просторів. Теорема про поповнення метричного простору.
5	Компактні простори. Покриття множини. Секвенціальна компактність. Властивості компактних множин. Приклади.
6	Критерії компактності Кантора та Хаусдорфа. Критерій компактності в R^n .
7	Неперервні відображення метричних просторів. Рівномірна неперервність. Неперервні відображення компактних множин та їх властивості. Теорема Арцела.
8	Принцип стискаючих відображень та його застосування. Стискаюче відображення. Нерухома точка. Теорема Банаха.
9	Застосування принципу стискаючих відображень.
10	Теорема Стоуна-Вейєрштрасса та її застосування.
11	Лінійні простори. Базис Гамеля. Вимірність простору. Приклади. Норми на лінійному просторі.
12	Банахові простори. Лінійні нормовані простори функцій і послідовностей. Скінченновимірні лінійні нормовані простори.
13	Скалярний добуток. Нерівність Коші-Буняковського. Норми, породжені скалярним добутком. Рівність паралелограма. Неперервність скалярного добутку за двома аргументами.
14	Квазіскалярний добуток. Напівнорми.
15	Гільбертові простори. Ортогональність. Ортогональне доповнення. Теорема

№ з/п	Назва теми лекції та перелік основних питань
	про ортогональну проекцію.
16	Ортонормовані системи. Нерівність Бесселя. Ортонормовані базиси. Повні і замкнені ортонормовані системи. Рівність Парсеваля.
17	Теорема Шмідта про ортогоналізацію. Ізоморфізм гільбертових просторів.
18	Теорема про майже ортогональний вектор.
19	Лінійний функціонал. Неперервність і обмеженість лінійного функціоналу. Рівносильність неперервності і обмеженості. Ядро лінійного функціоналу.
20	Норма лінійного функціоналу. Приклади лінійних неперервних функціоналів.
21	Простір лінійних функціоналів і його повнота. Загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів в гільбертовому просторі (теорема Ріса). Продовження лінійного функціоналу за неперервністю.
22	Теорема Гана-Банаха.
23	Наслідки теореми Гана-Банаха.
24	Лінійні неперервні функціонали в конкретних просторах функцій і послідовностей.
25	Вкладення лінійного нормованого простору у другий спряжений простір. Рефлексивні простори.
26	Слабка збіжність лінійних неперервних функціоналів. Теорема Банаха-Штейнгауза. Слабка збіжність лінійних неперервних функціоналів. Критерій слабкої збіжності.
27	Теореми Геллі. Критерій слабкої збіжності в лінійному нормованому просторі.

Практичні заняття

№ з/п	Назва теми заняття та перелік основних питань
1	Поняття метричного простору. Аксиоми метрики.
2	Збіжність в метричному просторі.
3	Збіжність в конкретних просторах функцій і послідовностей.
4	Відкриті множини і їх властивості. Замкнені множини і їх властивості. Замикання множини.
5	Сепарабельні і несепарабельні метричні простори.
6	Повні і неповні метричні простори. Теорема про поповнення.
7	Оператор стиску. Теорема Банаха, застосування до рівнянь і систем.
8	Теорема Банаха, застосування до диференціальних рівнянь.
9	Теорема Банаха, застосування до інтегральних рівнянь.
10	Компактні множини.
11	Відносно компактні і передкомпактні множини. Неперервні відображення компактних множин.
12	Лінійні простори. Скінченновимірні і нескінченновимірні лінійні простори.
13	Лінійні нормовані простори. Аксиоми норми.
14	Збіжність в нормованих просторах. Еквівалентність норм.
15	МКР
16	Скалярний добуток. Нерівність Коші-Буняковського. Норма, породжена скалярним добутком.
17	Гільбертові простори. Метрика і ортогональна проекція.
18	Ортонормовані системи. Нерівність Бесселя.
19	Ортонормовані базиси. Повні і замкнені ортонормовані системи. Рівність Парсеваля.
20	Ортонормовані системи. Теорема про ортогоналізацію.
21	Лінійний функціонал. Неперервність і обмеженість лінійного функціоналу.

22	Норма лінійного функціоналу.
23	Норми лінійних функціоналів в конкретних просторах.
24	Загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів в гільбертовому просторі. Продовження лінійного функціоналу за неперервністю.
25	Слабка збіжність лінійних неперервних функціоналів.
26	Слабка збіжність лінійних неперервних функціоналів.
27	МКР

6. Самостійна робота студента

Самостійна робота студента полягає:

- підготовка до лекційних та практичних занять – систематично до 2 год. на заняття,
- виконання розрахункової роботи до 10 год.,
- підготовка до модульних контрольних робіт - до 5 год. на роботу,
- підготовка до колоквиуму - до 5 год.
- підготовка до екзамену - до 10 год.

Політика та контроль

7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

1. Систематичне відвідування лекційних і практичних занять.
2. Перескладання (переписування) модульної контрольної роботи не передбачене.
3. У випадку дистанційного навчання і недостатньої кількості балів (менше 60) в кінці семестру може бути дано додаткові завдання, щоб добрати бали до 60.

8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

Рейтинг студента з кредитного модуля складається з:

- 1) балів за виконання розрахункової роботи;
- 2) балів за виконання модульної контрольної роботи;
- 3) балів за активність на практичних заняттях
- 4) балів за відповідь на екзамені (очна форма навчання) або на колоквиумі (дистанційна форма навчання)

СИСТЕМА РЕЙТИНГОВИХ БАЛІВ

1. Бали за розрахункову роботу

Розрахункова робота містить 10 практичних прикладів.
Кількість балів за розв'язання кожного прикладу: 1 бал.

Критерії оцінювання:

1 – правильне розв'язання;

0 – неправильне або відсутнє розв'язання;

Максимальна кількість балів за розрахункову роботу:

1 бал × 10 завд. = **10 балів.**

2. Бали за модульну контрольну роботу

Модульна контрольна робота поділяється на дві контрольні роботи, що проводяться у вигляді тестів. Завдання на тестові контрольні роботи містять по 10 типових практичних прикладів.

Кількість балів за розв'язання кожного прикладу: 1 бал.

Критерії оцінювання:

1 – правильна відповідь;

0 – неправильна відповідь;

Викладач має право після завершення тесту вибірково запросити фотокопії студентських робіт та поставити нуль балів за завдання, розв'язання яких буде відсутнє чи неправильне.

Максимальна кількість балів за модульний контроль:

1 бал × 10 завд. × 2 тест. контр. роб. = **20 балів**.

3. Бали за активність на практичних заняттях

Бали нараховуються за плідну роботу та відповіді на практичних заняттях. Але не більше ніж **10 балів** протягом усього семестру.

1 бал --- самостійно правильно розв'язане завдання і прокоментоване розв'язання

0.5 бала --- плідна робота на практичному занятті (ці бали нараховуються, якщо студент виконав усі практичні завдання, які розв'язувалися на практичному занятті)

0 балів --- пасивна робота на практичному занятті

4. Бали за відповідь на колоквіумі (дистанційна форма навчання)

Колоквіум відбувається у формі усної співбесіди викладача із студентом з використанням засобів онлайн зв'язку (Zoom, Meet тощо). Викладач задає студенту поступово декілька питань, на які студент відразу повинен надавати свою відповідь. Питання викладача можуть бути як продовженням опитування за попереднім питанням, так і бути на іншу тему.

За відповідь на кожне питання студент отримує певну кількість балів. Питання, в залежності від їх складності можуть вартувати від 1 до 5 балів.

Максимальна кількість балів за відповідь на колоквіумі дорівнює **10 балів**.

Під час відповіді на питання колоквіуму максимальну кількість балів студент отримує у випадку, якщо він надав повні та правильні відповіді на всі запитання викладача або припустився незначних похибок, які не вплинули на саму відповідь.

Нуль балів студент отримує у випадку, коли відповідь на запитання взагалі не була надана або містить грубі помилки. Якщо відповідь частково правильна, то студент за неї отримує, як правило, кількість балів, вдвічі меншу за максимально можливу за відповідне запитання.

5. Бали за відповідь на екзамені (очна форма навчання)

Екзаменаційний білет складається з 4 питань – 2 теоретичних та 2 практичних.

Відповідь на кожне теоретичне та практичне запитання оцінюється в 15 балів.

Максимальна кількість балів за відповідь на екзамені: 15 балів × 4 запитання = **60 балів**.

За відповідь на кожне запитання білету студент отримує:

- 12-15 балів, якщо він надав повну та правильну відповідь або припустився незначних похибок, які істотно не вплинули на саму відповідь,
- 8-11 балів, якщо відповідь правильна лише частково або не є повною (наприклад, наведена лише схема необхідного доведення теореми або під час розв'язання прикладу не перевірена можливість застосування відповідного методу),
- 4-7 бали, якщо відповідь частково правильна, але містить значні прогалини (наприклад, відсутнє необхідне доведення теореми чи під час розв'язання прикладу враховані не всі можливі випадки),
- 0-3 бали, якщо відповідь на запитання взагалі не була надана або містить грубі помилки.

6. Розрахунок шкали (R) рейтингу у випадку дистанційного навчання

Семестрова складова рейтингової шкали $R_C = 50$ балів, вона визначається як сума балів, отриманих за виконання розрахункової роботи, модульної контрольної роботи, активність на практичних заняттях та відповіді на колоквіумі.

Рейтингова шкала з дисципліни дорівнює:

$$R = 60 + 40 * (R_{\max} - R_{\text{доп}}) / (R_C - R_{\text{доп}}) = 100 \text{ балів},$$

тут $R_{\max} = 50$ – максимальний можливий семестровий рейтинг студента,

$R_{\text{доп}} = 25$ – мінімальна кількість балів, необхідна для допуску.

7. Умова допуску до семестрової атестації та визначення оцінки у випадку дистанційного навчання

Необхідною умовою допуску студента до семестрової атестації є семестровий рейтинг студента ($R_{\text{СТ}}$) не менше 50 % від R_C , тобто не менше **25 балів**. В іншому разі студент повинен виконати додаткову роботу та підвищити свій рейтинг.

Сумарний рейтинг студента R_D визначається за формулою

$$R_D = 60 + 40 * (R_{\text{СТ}} - R_{\text{доп}}) / (R_C - R_{\text{доп}}) = 20 + 1,6 * R_{\text{СТ}}.$$

8. Розрахунок шкали (R) рейтингу у випадку очного навчання

Семестрова складова рейтингової шкали $R_C = 40$ балів, вона визначається як сума балів, отриманих за виконання модульної контрольної роботи та активність на практичних заняттях.

Рейтингова шкала з дисципліни дорівнює:

$$R = R_C + R_E = 100 \text{ балів},$$

тут $R_E = 60$ – максимальна можлива кількість балів, отримана на екзамені.

9. Умова допуску до семестрової атестації та визначення оцінки у випадку очного навчання

Необхідною умовою допуску студента до семестрової атестації є семестровий рейтинг студента ($R_{\text{СТ}}$) не менше 63 % від R_C , тобто не менше **25 балів**. В іншому разі студент повинен виконати додаткову роботу та підвищити свій рейтинг.

Сумарний рейтинг студента R_D визначається за формулою

$$R_D = R_{\text{СТ}} + R_{\text{СТЕ}}. \quad (R_{\text{СТЕ}} - \text{бали, набрані студентом на екзамені})$$

Оцінка виставляється відповідно до значення R_D :

Сумарний рейтинг R_D	Оцінка
95-100	Відмінно
85-94	Дуже добре
75-84	Добре
65-74	Задовільно
60-64	Достатньо
$25 \leq R_D \leq 59$	Незадовільно
$R_{\text{СТ}} < 25$	Не допущений

9. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компонента)

Перелік теоретичних питань, що виносяться на іспит:

1. Нерівності Ієнсена, Гельдера та Мінковського.

2. Означення метричного простору. Приклади метричних просторів. Збіжність в метричних просторах.
3. Відкриті та замкнені кулі. Відкриті множини. Замкнені множини. Замикання. Сепарабельні метричні простори.
4. Повнота метричних просторів. Приклади повних та неповних метричних просторів. Теорема про поповнення метричного простору.
5. Покриття множини. Секвенціальна компактність. Властивості компактних множин. Приклади. Критерії компактності Кантора та Хаусдорфа. Критерій компактності в R_n .
6. Неперервні відображення метричних просторів. Рівномірна неперервність. Неперервні відображення компактних множин та їх властивості. Теорема Арцела.
7. Стискаюче відображення. Нерухома точка. Теорема Банаха.
8. Застосування теореми Банаха.
9. Лінійні простори. Базис Гамеля. Вимірність простору. Приклади. Норми на лінійному просторі.
10. Лінійні нормовані простори функцій і послідовностей. Скінченновимірні лінійні нормовані простори. Банахові простори.
11. Евклідові простори. Скалярний добуток. Нерівність Коші-Буняковського. Норми, породжені скалярним добутком. Рівність паралелограма. Неперервність скалярного добутку за двома аргументами.
12. Гільбертові простори. Ортогональність. Ортогональне доповнення. Теорема про ортогональну проекцію.
13. Ортонормовані системи. Нерівність Бесселя. Ортонормовані базиси.
14. Повні і замкнені ортонормовані системи. Рівність Парсеваля.
15. Теорема Шмідта про ортогоналізацію. Ізоморфізм гільбертових просторів.
16. Лінійний функціонал. Неперервність і обмеженість лінійного функціоналу. Рівносильність неперервності і обмеженості. Ядро лінійного функціоналу.
17. Норми лінійного функціоналу. Приклади лінійних неперервних функціоналів.
18. Простір лінійних неперервних функціоналів і його повнота.
19. Загальний вигляд лінійних неперервних функціоналів в гільбертовому просторі (теорема Ріса).
20. Продовження лінійного функціоналу за неперервністю.
21. Теорема Гана-Банаха та її наслідки.
22. Лінійні неперервні функціонали в конкретних просторах функцій і послідовностей.
23. Слабка збіжність лінійних неперервних функціоналів. Теорема Банаха-Штейнгауза.
24. Теореми Геллі. Критерій слабкої збіжності в лінійному нормованому просторі.

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено проф. д.ф.-м.н., проф. Лось Валерій Миколайович.

Ухвалено кафедрою математичного аналізу та теорії ймовірностей (протокол № 14 від 25.06.2025)

Погоджено Методичною комісією фізико-математичного факультету (протокол № 10 від 27.06.2025)