



## Диференціальні рівняння. Частина 2. Системи диференціальних рівнянь. Застосування

### Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

#### Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Перший (бакалаврський)</i>
Галузь знань	<i>11 Математика та статистика</i>
Спеціальність	<i>111 Математика</i>
Освітня програма	<i>Страхова та фінансова математика</i>
Статус дисципліни	<i>Нормативна</i>
Форма навчання	<i>очна(денна), дистанційна/змішана</i>
Рік підготовки, семестр	<i>2 курс, весняний семестр</i>
Обсяг дисципліни	<i>150/ 5 кредитів (36 годин – Лекції, 54 години – Практичні, 60 годин – СРС)</i>
Семестровий контроль/ контрольні заходи	<i>Екзамен/2 модульні контрольні роботи, розрахункова робота</i>
Розклад занять	<a href="http://rozklad.kpi.ua/Schedules/ScheduleGroupSelection.aspx">http://rozklad.kpi.ua/Schedules/ScheduleGroupSelection.aspx</a>
Мова викладання	Українська
Інформація про керівника курсу / викладачів	<p>Лектор: Станжицький Олександр Миколайович, професор кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ, доктор. фіз.-мат. наук <a href="mailto:ostanzh@gmail.com">ostanzh@gmail.com</a> ORCID <a href="http://orcid.org/0000-0002-1456-729X">http://orcid.org/0000-0002-1456-729X</a></p> <p>Практичні: : Станжицький Олександр Миколайович, професор кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ, доктор. фіз.-мат. наук <a href="mailto:ostanzh@gmail.com">ostanzh@gmail.com</a> ORCID <a href="http://orcid.org/0000-0002-1456-729X">http://orcid.org/0000-0002-1456-729X</a></p> <p>Могильова Вікторія Віталіївна, доцент кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ, кандидат фіз.-мат. наук <a href="mailto:mogylova.viktoria@gmail.com">mogylova.viktoria@gmail.com</a> ORCID <a href="https://orcid.org/0000-0003-3757-4561">https://orcid.org/0000-0003-3757-4561</a></p>
Розміщення курсу	Сайт кафедри, інформаційні ресурси в бібліотеці

#### Програма навчальної дисципліни

### 1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчання та результати навчання

#### Цілі дисципліни

Метою навчальної дисципліни є оволодіння студентами основними поняттями та положеннями теорії систем диференціальних рівнянь та їх застосувань до дослідження математичних моделей процесів природознавства. Оволодіння базовими теоретичними та практичними методами дослідження та розв'язування окремих класів систем диференціальних рівнянь, формування здатності розв'язувати складні спеціалізовані теоретичні та прикладні задачі та практичні проблеми професійної діяльності на страхових та фінансових ринках, використовувати методи диференціальних рівнянь.

### **Предмет навчальної дисципліни**

Системи диференціальних рівнянь, стійкість розв'язків, рівняння у частинних похідних першого порядку.

### **Програмні компетентності:**

#### **Загальні компетентності (ЗК)**

ЗК1 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу

ЗК3 Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності

ЗК7 Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями

ЗК12 Здатність працювати автономно.

ЗК17 Здатність критично оцінювати результати своєї діяльності в професійній сфері, навчанні і нести відповідальність за вироблення та ухвалення рішень в навчальних контекстах та/або професійній діяльності з урахуванням наукових, соціальних, етичних, правових, економічних аспектів.

#### **Фахові компетентності (ФК)**

ФК1 Здатність формулювати проблеми математично та в символній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання.

ФК3 Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок.

ФК4 Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганих.

ФК5 Здатність до кількісного мислення.

ФК6 Здатність розробляти і досліджувати математичні моделі явищ, процесів та систем.

ФК8 Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів.

ФК14 Здатність демонструвати математичну грамотність, послідовно пояснити іншим математичні теорії або їх складові частини, взаємозв'язок та відмінність між ними, навести приклади застосувань у природничих науках.

### **Програмні результати навчання**

РН4 Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми

PH6 Знати методи математичного моделювання природничих та/або соціальних процесів

PH10 Розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями

PH11 Розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей

PH12 Відшукувати потрібну науково-технічну інформацію у науковій літературі, базах даних та інших джерелах інформації

PH16 Знати теоретичні основи і застосовувати методи топології, функціонального аналізу й теорії диференціальних рівнянь для дослідження динамічних систем

## 2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

**Пререквізити:** Дисципліна «Диференціальні рівняння-2. Системи диференціальних рівнянь. Застосування» (ПО8.2) викладається у четвертому семестрі другого курсу підготовки бакалаврів і базується на знаннях, отриманих при вивченні дисципліни «Диференціальні рівняння-1. Диференціальні рівняння першого та вищих порядків» (ПО8.1)

**Постреквізити:** Дисципліна «Диференціальні рівняння-2. Системи диференціальних рівнянь. Застосування» (ПО8.2), передую дисципліні «Методи математичної фізики» (ПО12).

## 3. Зміст навчальної дисципліни

Назва розділів і тем	Кількість годин			
	Всього	у тому числі		
		Лекції	Практичні	СРС
1	2	3	4	5
<b>Розділ 1 Основи загальної теорії систем диференціальних рівнянь.</b>				
<i>Тема 1.1. Поняття про системи диференціальних рівнянь, розв'язок, загальний розв'язок, задача Коші.</i>	4	2	0	2
<i>Тема 1.2. Інтегровні типи систем</i>	26	6	8	12
<i>Тема 1.3. Теореми існування, єдиності та продовжуваності розв'язку задачі Коші для систем у нормальній формі. Залежність</i>	18	8	4	6

<i>розв'язків від початкових даних та параметрів.</i>				
<i>Тема 1.4. Системи в симетричній формі. Перші інтеграли.</i>	17	5	8	4
<i>Тема 1.5. Лінійні системи</i>	17	5	8	4
<i>Модульна контрольна робота</i>	2	-	2	
<b>Розділ 2. Якісний аналіз систем диференціальних рівнянь.</b>				
<i>Тема 2.1. Поняття стійкості за Ляпуновим розв'язків систем диференціальних рівнянь. Стійкість лінійних систем</i>	12	2	2	8
<i>Тема 2.2. Дослідження стійкості нелінійних систем</i>	16	4	4	8
<i>Тема 2.3. Фазові портрети на площині.</i>	28	4	10	14
<i>Тема 2.4 Квазілінійні рівняння у частинних похідних першого порядку</i>	8	2	4	2
<i>Модульна контрольна робота</i>	2	-	2	
<i>Екзамен</i>	2		-	
<b>Всього годин</b>	150	36	54	60

#### **4. Навчальні матеріали та ресурси**

##### **Основна література**

1. Диференціальні рівняння та елементи математичної фізики : навч.-метод. посібник / М-во освіти і науки України, Чернівець. нац. ун-т ім. Юрія Федьковича ; уклад.: С.Г. Блажевський, О.М. Ленюк. – Чернівці : Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 2021. – 248 с. – Бібліогр.: с. 246
2. Лиходєєва Г.В. Диференціальні рівняння: працюємо самостійно : навч. посібник / Ганна Лиходєєва, Катерина Пастирєва ; М-во освіти і науки України, Бердян. держ. пед. ун-т. – Київ : Центр учбової літератури. – ISBN 978-617-673-753-7 Ч. 1 : Звичайні диференціальні рівняння першого порядку. – 2018. – 144, [1] с. : портр., іл., табл. – Бібліогр.: с.143-144
3. Kenneth B. Howell. ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS. An Introduction to the Fundamentals. Second edition published 2020 by CRC Press 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300, Boca Raton, FL 33487-2742
4. Robert Magnus. Essential Ordinary Differential Equations. Springer Undergraduate Mathematics Series, 2023.

### Додаткова література

1. Диференціальні та інтегральні рівняння : навч. посібник / С.А. Щоголев, Н.Г. Дрік, Арк.О. Кореновський ; М-во освіти і науки України, Одес. нац. ун-т ім. І.І. Мечникова, Ін-т математики, економіки та механіки. – Одеса : ОНУ, 2017. – 399, [1] с. : іл., табл. – Бібліогр.: с. 394. – ISBN 978-617-689-241-0
2. Лиходєєва Г.В. Диференціальні рівняння: працюємо самостійно : навч. посібник / Ганна Лиходєєва, Катерина Пастирєва ; М-во освіти і науки України, Бердян. держ. пед. ун-т. – Київ : Центр учбової літератури. – ISBN 978-617-673-754-4 Ч. 2 : Диференціальні рівняння вищих порядків, системи звичайних диференціальних рівнянь. – 2018. – 140, [1] с. : портр., табл. – Бібліогр.: с. 139-140
3. 5. Suman Kumar Tumuluri. A First Course in Ordinary Differential Equations. - First edition published 2021 by CRC Press 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300, Boca Raton, FL 33487-2742

## Навчальний контент

### 5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

#### 5.1. Дидактичні матеріали:

На лекційних заняттях – Лекція (електронний варіант), пояснення, мозковий штурм, проблемні завдання

#### Перелік лекцій

##### *Змістовий модуль 1. Основи загальної теорії систем диференціальних рівнянь*

*Лекція 1.* Означення системи диференціальних рівнянь Поняття розв'язку. Задача Коші.

Геометричні та фізичні задачі, які приводять до систем звичайних диференціальних рівнянь.

*Лекція 2.* Загальна теорія лінійних однорідних систем. Теорема існування та єдиності розв'язку лінійної однорідної системи (ЛОС). Фазовий простір.

*Лекція 3.* Лінійна система диференціальних рівнянь, еквівалентна лінійному рівнянню вищого порядку. Доведення теореми про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для ЛОР.

Фундаментальна система розв'язків ЛОС, її існування. Фундаментальна матриця. Теорема про загальний розв'язок. Формула Якобі.

*Лекція 4.* Формула Якобі. Матрицант.

*Лекція 5.* Лінійні однорідні системи зі сталими коефіцієнтами. Побудова фундаментальної системи розв'язків. Метод Ейлера та його узагальнення.

*Лекція 6.* Експонента матриці. Її властивості та структура.

*Лекція 7.* Лінійні неоднорідні системи (ЛНС). Лінійна система зі сталою матрицею та квазіполіноміальним вільним членом. Метод невизначених коефіцієнтів. Метод варіації довільних сталих для ЛНС.

*Лекція 8.* Існування розв'язку задачі Коші. Теорема Пеано. Єдиність та продовжуваність розв'язків. Локальна умова Ліпшица та теорема про єдиність розв'язку задачі Коші. Теорема Пікара. Продовжуваність розв'язків

*Лекція 9.* Поняття про коректність задачі Коші. Теорема про стійкість на відрізку розв'язку задачі Коші відносно збурень початкових даних та правих частин.

*Лекція 10.* Залежність розв'язків від початкових даних та параметрів. Неперервна залежність розв'язку задачі Коші від початкових даних та параметрів у природній області визначення. Теорема про диференційовність розв'язку задачі Коші за початковими значеннями, за початковими даними та параметрами.

*Лекція 11.* Доведення теореми Пікара. Обґрунтування збіжності методу послідовних наближень. Оцінка відхилення точного і наближеного розв'язку. Єдиність розв'язку.

*Лекція 12* Асимптотичні розв'язки розв'язків. Система у варіаціях. Існування вищих похідних розв'язків за початковими даними та параметрами. Асимптотичні розв'язки за незалежною змінною та за параметрами.

*Лекція 13.* Перші інтеграли нормальних систем. Означення першого інтеграла. Його геометричний зміст. Аналітичний критерій інтеграла. Функціонально незалежні перші інтеграли. Умова незалежності перших інтегралів. Теорема про відшукування розв'язку задачі Коші за допомогою повного набору перших інтегралів.

## ***Змістовий модуль 2. Якісний аналіз систем диференціальних рівнянь.***

*Лекція 14* Стійкість за Ляпуновим. Асимптотична стійкість. Стійкість лінійних систем. Стійкість лінійної системи зі сталою матрицею.

*Лекція 15.* Теорема про стійкість за першим наближенням

*Лекція 16.* Основи прямого методу Ляпунова в теорії стійкості. Знаковизначені функції. Перша теорема Ляпунова про стійкість. Теорема про асимптотичну стійкість. Теорема Ляпунова про асимптотичну стійкість. Про теорему Четаєва про нестійкість та теорему про нестійкість за першим наближенням.

*Лекція 17.* Відшукування загальних розв'язків лінійних та квазілінійних лінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку. ЛОР з частинними похідними першого порядку. Система характеристик. Загальний розв'язок. Квазілінійне рівняння з частинними похідними першого порядку. Система характеристик. Інтегральні поверхні системи характеристик як розв'язки.

*Лекція 18.* Задача Коші для рівняння з частинними похідними першого порядку та її розв'язання методом характеристик. Теорема існування локального розв'язку задачі Коші. Рівняння Гопфа.

### ***Перелік практичних занять***

#### ***Змістовий модуль 1. Диференціальні рівняння вищих порядків. Теорія лінійних диференціальних рівнянь та систем***

##### *Практичне заняття 1,2.*

. Лінійна залежність та незалежність функцій. Вронскіан. Побудова ЛОР за його фундаментальною системою розв'язків.

*Практичне заняття 3* Інтегрування лінійних рівнянь за допомогою формули Абеля та шляхом послідовного зниження порядку, якщо відомі лінійно незалежні частинні розв'язки.

*Практичне заняття 4.* Розв'язування ЛОР зі сталими коефіцієнтами та рівняння Ейлера.

*Практичне заняття 5.* Розв'язування ЛНР методом невизначених коефіцієнтів.

*Практичне заняття 6.* Розв'язування ЛНР методом варіації довільних сталих.

*Практичне заняття 7.* Відшукування розв'язків ЛОР 2-го порядку у вигляді степеневих та узагальнено степеневих рядів

*Практичне заняття 8.* Задачі на коливність розв'язків ЛОР.

*Практичне заняття 9.* Розв'язування крайових задач.

*Практичне заняття 10.* Розв'язування ЛОС зі сталими коефіцієнтами методом Ейлера.

*Практичне заняття 11.* Матрична експонента. Її властивості та структура.

*Практичне заняття 12.* Відшукання експонент матриць

*Практичне заняття 13,14.* Розв'язування ЛНС методом невизначених

*Практичне заняття 15,16.* Розв'язування ЛНС методом варіації довільних сталих

*Практичне заняття 17.* Модульна контрольна робота.

**Змістовий модуль 2. Основи загальної теорії систем диференціальних рівнянь.**

*Практичне заняття 18,19.* Асимптотичні розвинення розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь за незалежною змінною та за параметрами.

*Практичне заняття 20.* Інтегрування нелінійних систем диференціальних рівнянь

*Практичне заняття 21.* Перші інтеграли. Метод інтегровних комбінацій.

**Змістовий модуль 3 Якісний аналіз систем диференціальних рівнянь.**

*Практичне заняття 22.* Стійкість положень рівноваги автономних систем

*Практичне заняття 23.* Дослідження стійкості за допомогою функцій Ляпунова.

*Практичне заняття 24.* . Особливі точки. Лінеаризована система. Типи її фазових портретів.

*Практичне заняття 25.* Визначення типів і побудова фазових портретів лінеаризованих систем.

*Практичне заняття 26.* Відшукання розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними.

*Практичне заняття 27.* Модульна контрольна робота.

На практичних заняттях - Завдання до виконання (згідно до вказаного списку основної літератури).

**5.2. Технічне забезпечення:** Microsoft Office Word, будь яке програмне забезпечення для виконання графічного матеріалу (за бажанням студента)

### **6. Самостійна робота студента**

Види самостійної роботи – опрацювання лекційного матеріалу, підготовка до аудиторних занять, розв'язок задач, виконання розрахункової роботи (розбивається на дві частини відповідно до семестрових планових атестацій).

## **Політика та контроль**

### **7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)**

Дотримання положень «Кодексу честі КПІ ім. Ігоря Сікорського» (розділи 2 та 3)

Співпраця студентів у розв'язанні проблемних завдань дозволена, але відповіді кожний студент захищає самостійно. Взаємодія студентів під час іспиту категорично забороняється і будь-яка така діяльність буде вважатися порушенням академічної доброчесності згідно принципів університету щодо академічної доброчесності.

### **Академічна доброчесність**

Політика та принципи академічної доброчесності визначені у розділі 3 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>

## Норми етичної поведінки

Норми етичної поведінки студентів і працівників визначені у розділі 2 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>

### 8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

Розподіл навчального часу за видами занять і завдань з дисципліни згідно з робочим навчальним планом.

Семестр	Навч. час		Розподіл навчальних годин			Контрольні заходи		
	Кредити	Акад. год.	Лекції	Практичні	СРС	МКР	ДКР	Семестр. атест.
3	5	150	36	54	60	2	1	екзамен

На першому занятті здобувачі ознайомлюються із рейтинговою системою оцінювання (PCO) дисципліни, яка побудована на основі Положення про систему оцінювання результатів навчання [https://document.kpi.ua/files/2020\\_1-273.pdf](https://document.kpi.ua/files/2020_1-273.pdf).

Поточний контроль: фронтальний (усний, письмовий), МКР, ДКР.

Календарний контроль: проводиться двічі на семестр як моніторинг поточного стану виконання вимог силабусу, результати якого відображаються в системі Електронний кампус <https://campus.kpi.ua>.

Рейтингова система оцінювання включає всі види тестування: опитування на заняттях, модульні контрольні роботи, якість виконання ДКР. Кожний студент отримує свій підсумковий рейтинг з дисципліни.

Рейтинг студента з кредитного модуля розраховується виходячи із 100-бальної шкали складається з балів, які він отримує за:

- роботу на практичних заняттях;
- виконання додаткових задач;
- написання модульної контрольної роботи;
- виконання розрахункової роботи (ДКР);
- екзамен.

#### Відповіді під час практичних занять

- якщо задача повністю розв'язана, то здобувач отримує максимальну кількість запланованих балів;
- якщо відповідь правильна, але у розв'язку є неточності, то здобувач отримує 0,5 запланованих балів;
- якщо незадовільна відповідь, метод розв'язування задачі неправильний – 0 балів

Максимальний бал  $6=2 \times 3$ .



### Виконання додаткових задач

Включає виконання задач підвищеної складності, поставлених на лекціях чи під час гурткової роботи.

Максимальний бал 8.

### Модульні контрольні роботи

МКР складаються із п'яти задач, одна із яких носить теоретичний характер, інші практичний.

Відсутність на контрольній роботі – 0 балів.

Максимальний бал за кожний модуль 20.

### Розрахункова робота

Розрахункова робота виконується і захищається частинами, що за змістом відповідають кожній темі, і складається з 6 завдань. Кожна частина РР здається в терміни, встановлені викладачем.

При виконанні менше 60% РР вона не зараховується і повинна бути доопрацьована.

Максимальний бал 6.

### Іспит

Екзаменаційна складова 40 балів.

### Штрафні та заохочувальні бали

- несвоєчасне (пізніше ніж на тиждень) подання розрахункової роботи -1 бал
- заохочувальні бали за виконання задач підвищеної складності
- успішна участь у олімпіаді з математики математики

Максимальна кількість штрафних (заохочувальних) балів не перевищує 10% (10 балів)

### Форма семестрового контролю – іспит

Якщо виконано усі передбачені види робіт, то іспит виставляється «автоматом», де сумарна підсумкова оцінка вираховується за формулою: сумарні бали за семестр помножені на  $5/3$ , з переведенням в оцінку за університетською шкалою. В разі недостатньої кількості балів або з метою підвищення рейтингу, дозволяється написання екзаменаційної роботи, за результатами якої здобувач отримує остаточний рейтинговий бал.

### Умови позитивної оцінки календарного контролю

Для отримання “задовільно” з першої (8 тиждень) та другої проміжної атестації (14 тиждень) студент повинен мати не менше ніж 50% можливих балів на момент проведення календарного контролю.

Перескладання позитивної підсумкової семестрової атестації з метою її підвищення не допускається.

### Розрахунок шкали рейтингу (R):

Сума вагових балів контрольних заходів протягом семестру складає:

$$R = 6 + 8 + 40 + 6 + 40 = 100 \text{ балів.}$$

### Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:

Кількість балів	Оцінка
100-95	Відмінно
85-94	Дуже добре
75-84	Добре
65-74	Задовільно
60-64	Достатньо
Менше 60	Незадовільно

### 9. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компонента)

- *можливість зарахування сертифікатів проходження дистанційних чи онлайн курсів за відповідною тематикою;*

### Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

**Складено** професором кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ, доктором фіз.-мат. наук *Станжицьким Олександром Миколайовичем*

**Ухвалено** кафедрою математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ (протокол № 8 від 23.05.2024 р.)

**Погоджено** Методичною комісією ФМФ (протокол №10 від 25.06.2024 р.)