



Національний технічний університет України  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»



Кафедра математичного  
аналізу та теорії  
ймовірностей

# ЗАСТОСУВАННЯ ПРАВИЛЬНО ЗМІННИХ ФУНКЦІЙ У ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

## Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

### Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	Другий (магістерський)
Галузь знань	11 Математика та статистика
Спеціальність	111 Математика
Освітня програма	«Страхова та фінансова математика»
Статус дисципліни	Вибіркова
Форма навчання	Очна (денна)/дистанційна
Рік підготовки, семестр	1 курс, весняний семестр
Обсяг дисципліни	150 годин (36 годин – лекції, 18 години – практичні, 96 годин – СРС)
Семестровий контроль/ контрольні заходи	Екзамен/модульна контрольна робота, РГР
Розклад занять	<a href="http://rozklad.kpi.ua/Schedules/ScheduleGroupSelection.aspx">http://rozklad.kpi.ua/Schedules/ScheduleGroupSelection.aspx</a>
Мова викладання	Українська
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: канд. фіз.-мат. наук, ст. викладач., Павленков Володимир Володимирович <a href="mailto:pavlenkov@matan.kpi.ua">pavlenkov@matan.kpi.ua</a> ; Практичні / Семінарські: канд. фіз.-мат. наук, ст. викладач., Павленков Володимир Володимирович <a href="mailto:pavlenkov@matan.kpi.ua">pavlenkov@matan.kpi.ua</a> .
Розміщення курсу	<a href="https://campus.kpi.ua">https://campus.kpi.ua</a>

## Програма навчальної дисципліни

### Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

<b>Цілі дисципліни</b>	<p>Метою кредитного модуля є формування у студентів здатностей:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- до логічного мислення, формування особистості студентів, розвиток їх інтелекту і здібностей;</li><li>- до необхідної інтуїції та ерудиції у питаннях застосування математики, виховання у студентів прикладної математичної культури;</li><li>- використовувати методи правильно змінних функцій у граничних задачах задач теорії ймовірностей;</li><li>- доводити розв'язок задачі до практично прийнятого результату – числа або алгоритма, точного якісного висновку із застосуванням для цього адекватних обчислювальних засобів, таблиць і довідників;</li><li>- уміння аналізувати одержані результати, здатності до узагальнення, постановки цілі та вибору шляхів її розв'язання, володіння культурою мислення;</li><li>- самостійно використовувати і вивчати літературу з математики, здатності до розвитку гнучкості мислення, творчої самостійності та дій.</li></ul>
<b>Предмет навчальної дисципліни</b>	<p>Предмет навчальної дисципліни – <i>основні поняття теорії правильно змінних функцій</i>: інтегральне представлення, рівномірна збіжність, зв'язок з рівнянням Коші, всюди щільними множинами, теорією математичних більярдів, а також <i>застосування до задач теорії ймовірностей</i>: центральної граничної теореми, слабкої збіжності, відносної стійкості, теорії екстремумів, теорії рекордів.</p>
<b>Компетентності</b>	<p>Метою навчальної дисципліни є формування у студентів компетентностей: ЗК1, ЗК5, ЗК6, ЗК7, ФК1, ФК3, ФК5, ФК9, ФК10, ФК14, ФК15, ФК18</p> <p>Детальний опис компетентностей можна знайти в Освітньо-науковій програмі</p> <p><a href="https://osvita.kpi.ua/111">https://osvita.kpi.ua/111</a></p>
<b>Програмні результати навчання</b>	<p>Студенти після засвоєння матеріалу дисципліни мають продемонструвати такі результати навчання:</p>

**знати:**

- основні результати теорії правильно змінних функцій, способи їхнього застосування до граничних теорем теорії ймовірностей;
- основи теорії всюди щільних множин;
- теорії рівняння Коші;
- концепції функціонального аналізу типу базису Гамеля;
- головні результати стосовно граничних переходів в інтегралах Лебега;
- найважливіші застосування правильно змінних функцій, теореми абелевого та тауберового типу з правильно змінними функціями;
- способи доведення рівномірної збіжності для правильно змінних функцій;

**уміти:**

- перевіряти властивості правильно змінних функцій;
- доводити властивості правильно змінних функцій;
- знаходити інтегральні представлення правильно змінних функцій;
- будувати правильно змінні функції для конкретних задач теорії ймовірностей;
- будувати апроксимації правильно змінних функцій;
- досліджувати множини на властивість всюди щільності;
- розв'язувати рівняння Коші та його споріднені;
- навчитися працювати самостійно з навчальними посібниками, довідниками та іншими інформаційними ресурсами;
- ефективно використовувати методи теорії правильно змінних функцій при розв'язанні задач теорії ймовірностей.

**Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)**

**Пререквізити:** Дисципліна «Застосування правильно змінних функцій у теорії ймовірностей» викладається у другому семестрі першого курсу навчання магістрів та базується на знаннях, здобутих при вивченні дисциплін «Математичний аналіз», «Функціональний аналіз», «Теорія міри та інтегралу».

**Постреквізити:** Дисципліна «Застосування правильно змінних функцій у теорії ймовірностей» передує освітньому компоненту «Наукова робота за темою магістерської дисертації» (ПО9).

### Зміст навчальної дисципліни

Назва розділів і тем	Кількість годин			
	Всього	у тому числі		
		Лекції	Практичні	СРС
1	2	3	4	5
<b>Розділ 1. Результати теорії ймовірностей з ПЗФ</b>				
<b>Тема 1.</b> Правильно змінні функції в центральній граничній теоремі.	6	2	2	2
<b>Тема 2.</b> Правильно змінні функції в теорії слабкої збіжності.	6	2	2	2
<b>Тема 3.</b> Правильно змінні функції в Санкт-Петербурзькому парадоксі.	7	2	1	4
<b>Тема 4.</b> Правильно змінні функції у теорії екстремумів.	6	2	1	3
<b>Тема 5.</b> Правильно змінні функції у теорії рекордів.	6	2	1	3
Разом за розділом 1	<b>31</b>	<b>10</b>	<b>7</b>	<b>14</b>
<b>Розділ 2. Результати з математичного аналізу, пов'язані з ПЗФ</b>				
<b>Тема 6.</b> Найпростіші правильно змінні функції.	8	2	2	4
<b>Тема 7.</b> Необхідні результати для загальної теорії правильно змінних функцій.	6	2	1	3
<b>Тема 8.</b> Теорема Кронекера.				

<b>Тема 9.</b> Функціональне рівняння Коші.	7	2	1	4
<b>Тема 10.</b> Теорема Банаха-Серпінського.	6	2	1	3
	6	2	1	3
Разом за розділом 2	<b>33</b>	<b>10</b>	<b>6</b>	<b>17</b>
<b>Розділ 3. Рівняння Коші</b>				
<b>Тема 11.</b> Рівняння, пов'язані з рівнянням Коші.	7	2	1	4
<b>Тема 12.</b> Невимірні розв'язки рівняння Коші.	6,5	2	0,5	4
<b>Тема 13.</b> Теорема Феллера.	6,5	2	0,5	4
Разом за розділом 3	<b>20</b>	<b>6</b>	<b>2</b>	<b>12</b>
<b>Розділ 4. Основні результати про ПЗФ</b>				
<b>Тема 14.</b> Загальна теорія правильно змінних функцій.	5,5	2	0,5	3
<b>Тема 15.</b> Монотонні правильно змінні функції.	5,5	2	0,5	3
<b>Тема 16.</b> Монотонні версії.	5,5	2	0,5	3
<b>Тема 17.</b> Інтегральне представлення правильно змінних функцій.	5,5	2	0,5	3
<b>Тема 18.</b> Функції з домінантною зміною.	3,5	2	0,5	1
Разом за розділом 4	<b>25,5</b>	<b>10</b>	<b>2,5</b>	<b>13</b>
МКР	<b>0,5</b>		<b>0,5</b>	
<i>Розрахункова робота</i>	10			10
<i>Екзамен</i>	30			30
<b>Всього годин</b>	<b>150</b>	<b>36</b>	<b>18</b>	<b>96</b>

### Навчальні матеріали та ресурси

#### Базова література

1. Клесов О. І. Застосування правильно змінних функцій у теорії ймовірностей // Клесов О. І. – (електронний конспект лекцій), 2016. – 90 с.
2. Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular Variation // Bingham N. H. – Cambridge: Cambridge University Press, 1985. – 491p.

- Hardy G. H., Wright E. M. An Introduction to the Theory of Numbers // Hardy G. H. – Oxford: Oxford University Press, 1979. – 438p.

#### Додаткова література

- Resnick S. Heavy-Tail Phenomena. Probabilistic and Statistical Modelling // Resnick S. – New York – Springer Verlag, 2007, 423 p.
- Resnick S. Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes // Resnick S. – New York – Springer Verlag, 2008, 334 p.

### Навчальний контент

Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Очна/дистанційна форма

Лекційні заняття

№ з/п	Назва теми лекції та перелік основних питань (перелік дидактичних матеріалів, посилання на літературу та завдання на СРС)
1-2	<p><b>Правильно змінні функції в центральній граничній теоремі.</b> Теорема Муавра-Лапласа. Критерій центральної граничної теореми у термінах повільно змінних функцій. Зв'язок з теоремою Муавра-Лапласа.</p> <p><i>Рекомендована література:</i> [1], розділ 1; [3].</p>
3-4	<p><b>Правильно змінні функції в теорії слабкої збіжності.</b> Поняття слабкої збіжності. Поняття типу розподілу випадкових величин. Стійкі розподіли. Теорема Леві про границі слабкої збіжності. Область притягнення. Критерій належності області притягнення в термінах слабо змінних функцій.</p> <p><i>Рекомендована література:</i> [1], розділ 1; [3].</p>
5-6	<p><b>Правильно змінні функції в Санкт-Петербурзькому парадоксі.</b> Поняття Санкт-Петербурзької гри. Середнє очікування виграшу. Середній виграш. Поняття відносної стійкості. Критерій відносної стійкості у термінах повільно змінних функцій.</p> <p><i>Рекомендована література:</i> [1], розділ 1; [3].</p>
7-8	<p><b>Правильно змінні функції у теорії екстремумів.</b> Означення екстремумів виборки. Максимальний та мінімальний члени виборки. Розподіл порядкових статистик. Границі для слабкої збіжності екстремумів. Области притягнення. Критерій належності області притягнення у термінах правильно збіжних функцій.</p> <p><i>Рекомендована література:</i> [1], розділ 1; [3].</p>
9-10	<p><b>Правильно змінні функції у теорії рекордів.</b> Означення рекорду та рекордного моменту. Слабкі границі для розподілів рекордів. Критерій збіжності у термінах</p>

	<p>правильно збіжних функцій.</p> <p><i>Рекомендована література:</i> [1], розділ 1; [3].</p>
11-12	<p><b>Найпростіші правильно змінні функції.</b> Зв'язок між правильно змінними функціями та повільно змінними. Арифметичні властивості правильно змінних функцій. Теорема про правильно змінні хвости функцій розподілу.</p> <p><i>Рекомендована література:</i> [1], розділ 2.</p>
13-14	<p><b>Необхідні результати для загальної теорії правильно змінних функцій.</b> Структура відкритих множин на прямій. Структура замкнених множин на прямій. Вимірні множини. Міра Лебега. Вимірні функції.</p> <p><i>Рекомендована література:</i> [1], розділ 3.</p>
15-16	<p><b>Теорема Кронекера.</b> Зв'язок між апроксимацією ірраціональних чисел та всюдищільними множинами. Задача про степені двійки. Математичний більярд. Задача про відбиття променів. Задача про кола малого радіусу.</p> <p><i>Рекомендована література:</i> [1], розділ 4; [4].</p>
17-18	<p><b>Функціональне рівняння Коші.</b> Аддитивні функції. Властивості розв'язків рівняння Коші. Дифференційовані розв'язки. Неперервні розв'язки. Теорема Дарбу. Монотонні аддитивні функції. Обмежені аддитивні функції.</p> <p><i>Рекомендована література:</i> [1], розділ 5.</p>
19-20	<p><b>Теорема Банаха-Серпінського.</b> Інтегровні аддитивні функції. Вимірні аддитивні функції. Рівняння Коші для невід'ємних аргументів. Аддитивність на інтервалі. Аддитивні функції комплексного аргументу.</p> <p><i>Рекомендована література:</i> [1], розділ 6.</p>
21-22	<p><b>Рівняння, пов'язані з рівнянням Коші.</b> Мультиплікативне рівняння. Рівняння з добутком аргументів. Характеризація гауссового розподілу. Характеризація геометричного розподілу. Застосування до дослідження процесу розпаду радіоактивної речовини.</p> <p><i>Рекомендована література:</i> [1], розділ 6.</p>
23-24	<p><b>Невимірні розв'язки рівняння Коші.</b> Теорема Островського. Теорема Штейнгауза. Базис Гамеля. Побудова невимірного розв'язку рівняння Коші за допомогою базиса</p>

	Гамеля. <i>Рекомендована література:</i> [1], розділ 7; [3].
25-26	<b>Теорема Феллера.</b> Розв'язок в ірраціональних числах. Властивості нелінійних розв'язків. <i>Рекомендована література:</i> [1], розділ 9.
27-28	<b>Загальна теорія правильно змінних функцій.</b> Структура правильно змінних функцій. Теорема про вигляд границі. Зв'язок з теорією рівняння Коші. Індекс функції. Правильно змінні функції у точці. <i>Рекомендована література:</i> [1], розділ 10.
29-30	<b>Монотонні правильно змінні функції.</b> Функції, які правильно змінюються у слабкому розумінні. Теорема про монотонні правильно змінні функції. Монотонні повільно змінні функції. Теорема Ландай. <i>Рекомендована література:</i> [1], розділ 11.
31-32	<b>Монотонні версії.</b> Умова відсутності монотонної версії. Достатні умови існування монотонної версії. <i>Рекомендована література:</i> [1], розділ 12.
33-34	<b>Інтегральне представлення правильно змінних функцій.</b> Інтегральне представлення монотонних правильно змінних функцій. Загальний випадок. Теорема Матушевської. Теорема про рівномірну збіжність. <i>Рекомендована література:</i> [1], розділ 13.; [3]
35-36	<b>Функції з домінантною зміною.</b> Тауберові теореми. <i>Рекомендована література:</i> [1], розділ 14; [3]

### Практичні заняття

№ з/п	Назва теми заняття та перелік основних питань (перелік дидактичних засобів, посилання на літературу та завдання на СРС)
1-4.	Правильно змінні функції в центральній граничній теоремі та слабкій збіжності. Завдання СРС: [1]



5.	Правильно змінні функції в Санкт-Петербурзькому парадоксі. Завдання СРС: [1]
6.	Правильно змінні функції у теорії екстремумів. Завдання СРС: [1]
7.	Правильно змінні функції у теорії рекордів. Завдання СРС: [1]
8-9.	Найпростіші правильно змінні функції. Завдання СРС: [1]
10.	Необхідні результати для загальної теорії правильно змінних функцій. Завдання СРС: [1]
11.	Теорема Кронекера. Завдання СРС: [1]
12.	Функціональне рівняння Коші. Завдання СРС: [1]
13.	Теорема Банаха-Серпінського. Завдання СРС: [1]
14.	Рівняння, пов'язані з рівнянням Коші Завдання СРС: [1]
15.	Невимірні розв'язки рівняння Коші та теорема Феллера Завдання СРС: [1]
16.	Загальна теорія правильно змінних функцій та монотонні ПЗФ Завдання СРС: [1]
17.	Монотонні версії та інтегральне представлення правильно змінних функцій. Завдання СРС: [1]
18.	Написання МКР.

### Самостійна робота студента/аспіранта

На самостійне опрацювання виноситься декілька важливих тем, з якими можна ознайомитись за підручником [1], але дозволяється використовувати інші джерела для поглибленого вивчення того чи іншого питання. Також передбачені індивідуальні завдання для студентів за темою дисципліни, які виконуються самостійно, результатом такого завдання є доповідь на практичному занятті.

### Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

**Рекомендовані методи навчання:** вивчення основної та допоміжної літератури за тематикою лекцій, розв'язування задач на практичних заняттях та при виконанні домашніх робіт. Студенту рекомендується вести докладний конспект лекцій. Важливим аспектом якісного засвоєння матеріалу, відпрацювання методів та алгоритмів вирішення основних завдань дисципліни є самостійна робота.

### Академічна доброчесність

Політика та принципи академічної доброчесності визначені у розділі 3 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>

### Норми етичної поведінки

Норми етичної поведінки студентів і працівників визначені у розділі 2 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>

### Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO) (очна\ дистанційна форма)

Розподіл навчального часу за видами занять і завдань з дисципліни згідно з робочим навчальним планом.

Семестр	Навч. час		Розподіл навчальних годин			Контрольні заходи		
	Кредити	Акад. год.	Лекції	Практичні	СРС	МКР	РГР	Семестр. атест.
1	5	150	36	36	78	1	1	екзамен

На першому занятті здобувачі ознайомлюються із рейтинговою системою оцінювання (PCO) дисципліни, яка побудована на основі Положення про систему оцінювання результатів навчання [https://document.kpi.ua/files/2020\\_1-273.pdf](https://document.kpi.ua/files/2020_1-273.pdf).

Поточний контроль: фронтальний (усний, письмовий), МКР, ДКР.

Календарний контроль: проводиться двічі на семестр як моніторинг поточного стану виконання вимог силабусу, результати якого відображаються в системі Електронний кампус <https://campus.kpi.ua>.

Рейтингова система оцінювання включає всі види тестування: контрольні роботи, якість виконання РГР. Кожний студент отримує свій підсумковий рейтинг з дисципліни.

Рейтинг студента з кредитного модуля розраховується виходячи із 100-бальної шкали складається з балів, які він отримує за:

- роботу на практичних заняттях;
- написання модульної контрольної роботи;
- виконання розрахункової роботи (РГР);
- написання екзаменаційної роботи.

### Відповіді під час практичних занять

Сюди входить робота студента на практичному занятті (усні відповіді, розв'язання задач біля дошки), виконання домашніх завдань, доповіді за темами індивідуальних завдань. Максимальна кількість балів – 20.

### Модульна контрольна робота

Модульна контрольна робота поділена на 2 частини, вона пишеться перед календарним контролем (атестацією) за пройденим на момент написання матеріалом. Кожна частина модульної контрольної оцінюється максимально в 10 балів. Переписування контрольної роботи з метою

підвищення балу не передбачене.

### Розрахункова робота

Виконується протягом семестру за запропонованими викладачем практичних занять завданнями. За її виконання можна заробити 10 балів.

### Форма семестрового контролю – екзамен

Екзамен проводиться в письмовій формі. Кожний білет містить 5 завдань, серед яких два теоретичних запитання та три задачі. Ваговий бал кожного запитання – 10.

Критерії оцінювання запитань:

-повна відповідь на всі завдання (не менше 90% потрібної інформації; повне, безпомилкове розв'язування завдань) 9 – 10 балів;

-достатньо повна відповідь (не менше 75% потрібної інформації) або є незначні неточності 7 – 8 балів;

-неповна відповідь на завдання (не менше 60%) та є помилки і певні недоліки 5 – 6 балів;

-відповідь не відповідає умовам до «задовільно» (незадовільна відповідь, неправильний метод розв'язування) 0 – 4 бали.

Максимальний бал  $10 \times 5 = 50$ .

**Розмір стартової шкали  $R_C = 50$  балів. Розмір екзаменаційної шкали  $R_E = 50$  бали.**

**Розмір шкали рейтингу  $R = R_C + R_E = 100$  балів.**

Умови позитивної проміжної атестації.

Для отримання “зараховано” з першої (8 тиждень) та другої проміжної атестації (14 тиждень) студент повинен мати не менше ніж 50% можливих балів на момент проведення календарного контролю.

Перескладання позитивної підсумкової семестрової атестації з метою її підвищення не допускається.

Студент допускається до екзамену, якщо його рейтинг семестру не менший 30 балів, при цьому він повинен мати зараховані модульні контрольні роботи та РГР (виконано не менше, ніж на 60%).

Студенти, які в кінці навчального семестру мають стартовий рейтинг  $R_C < 20$  балів до екзамену не допускаються і повинні виконати додаткові завдання до першого перескладання.

Студенти з рейтингом  $20 \leq R_C < 30$  мають можливість добрати бали до 30 допускових, шляхом виконання додаткових завдань.

**Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:**

Кількість балів	Оцінка
100-95	Відмінно
94-85	Дуже добре
84-75	Добре
74-65	Задовільно
64-60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно

### Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компоненту)

У випадку дистанційної форми навчання організація освітнього процесу здійснюється з

застосуванням електронної пошти, Telegram, відео-конференцій в Zoom. Поточний контроль та написання іспиту може бути проведено письмово або усно із залученням платформи Zoom для контролю. За бажанням лектора екзамен може бути проставлений автоматом (шляхом подвоєння семестрового рейтингу  $R_c$  студента), цей принцип може бути застосований не до всіх студентів.

**Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):**

**Складено** ст. викладачем кафедри МА та ТЙ, канд. фіз.-мат. наук, Павленковим В.В.

**Ухвалено** кафедрою МА та ТЙ (протокол № 13 від 11.06.2024 р.)

**Погоджено** Методичною комісією ФМФ (протокол № 10 від 25.06.2024 р.)