

---

Навчальний посібник

---

**О. І. Клесов**

**ВИБРАНІ ПИТАННЯ  
ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ  
ТА  
МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ**

**Київ      2013**

# З М І С Т

<b>Передмова</b> .....	<b>7</b>
<b>1. Простір елементарних подій</b> .....	<b>9</b>
1.1. Задача про справедливий розподіл ставок .....	9
1.2. Стохастичний експеримент .....	9
1.3. Ймовірність .....	14
1.4. Правила обчислення ймовірностей .....	19
<b>2. Ймовірнісна міра</b> .....	<b>25</b>
2.1. Дискретні ймовірності .....	25
2.2. Правила для обчислення ймовірностей .....	34
2.3. Неперервні ймовірності .....	37
<b>3. Умовна ймовірність</b> .....	<b>47</b>
3.1. Звуження ймовірнісного простору .....	47
3.2. Правило множення ймовірностей .....	51
3.3. Формула повної ймовірності .....	55
3.4. Незалежні події .....	63
<b>4. Випадкові величини</b> .....	<b>73</b>
4.1. Дискретні випадкові величини з скінченою кількістю значень .....	73
4.2. Схема Бернуллі .....	78
4.3. Дискретні випадкові величини з нескінченою кількістю значень .....	88
4.4. Неперервні випадкові величини .....	92

<b>5. Математичне сподівання</b> .....	<b>106</b>
5.1. Закон великих чисел .....	106
5.2. Математичне сподівання дискретних випадкових величин з скінченною кількістю значень .....	108
5.3. Математичне сподівання дискретних випадкових величин з нескінченною кількістю значень .....	114
5.4. Математичне сподівання неперервних випадкових величин .....	116
5.5. Залежні та незалежні випадкові величини .....	120
5.6. Дисперсія випадкової величини .....	125
<b>6. Нормальний розподіл</b> .....	<b>140</b>
6.1. Стандартна нормальна щільність .....	140
6.2. Стандартна нормальна функція розподілу .....	142
6.3. Сім'я нормальних розподілів .....	150
6.4. Сім'я нормальних функцій розподілу .....	152
6.5. Нормальні випадкові величини .....	153
6.6. Апроксимація біноміального розподілу нормальним .....	158
6.7. Центральна гранична теорема .....	162
<b>7. Вибіркові дослідження</b> .....	<b>169</b>
7.1. Різниця між теорією ймовірностей та математичною статистикою .....	169
7.2. Функції статистики .....	172
7.3. Діаграма .....	176
7.4. Гістограма .....	181
7.5. Варіаційний ряд .....	184
7.6. Кумулятивні характеристики .....	187

<b>8. Розподіли важливих статистик .....</b>	<b>190</b>
8.1. Розподіл Стьюдента.....	190
8.2. Розподіл хі квадрат .....	197
8.3. Розподіл Фішера .....	205
<b>9. Статистика однієї вибірки: оцінювання .....</b>	<b>216</b>
9.1. Оцінка середнього значення .....	216
9.2. Оцінка ймовірності.....	223
<b>10. Статистика однієї виборки: перевірка гіпотез .....</b>	<b>232</b>
10.1. Нульова гіпотеза та тестова статистика.....	233
10.2. $p$ -значення .....	237
10.3. Похибки I та II роду .....	238
10.4. Гіпотези про середнє значення.....	240
10.5. Приклад обчислення ймовірностей помилки II роду .....	248
10.6. Перевірка гіпотез про середнє значення для малих виборок.....	251
10.7. Перевірка гіпотез про ймовірність події .....	253
<b>11. Статистичні виводи на основі двох вибірок..</b>	<b>259</b>
11.1. Довірчий інтервал для різниці середніх значень	260
11.2. Перевірка гіпотез про різницю середніх значень	263
11.3. Порівняння двох дисперсій .....	270
11.4. Довірчий інтервал для відношення дисперсій...	278
11.5. Порівняння двох невідомих ймовірностей.....	279
11.6. Необхідний розмір вибірки.....	284
<b>12. Модель простої лінійної регресії .....</b>	<b>291</b>
12.1. Оцінки методу найменших квадратів .....	295

12.2. Модель лінійної залежності двох змінних.....	299
12.3. Оцінка дисперсії похибок .....	301
12.4. Перевірка гіпотези про значущість коефіцієнта лінійної регресії.....	303
12.5. Довірчий інтервал для коефіцієнта регресії ....	307
12.6. Коефіцієнт кореляції.....	308
12.7. Коефіцієнт детермінації .....	313
12.8. Використання регресійної моделі .....	315
12.9. Приклад аналізу на основі регресійної прямої..	319
<b>Список позначень.....</b>	<b>328</b>
<b>Рекомендована література.....</b>	<b>329</b>
<b>Предметний покажчик.....</b>	<b>330</b>

# Передмова

Курс *теорія ймовірностей та математична статистика* відіграє важливу роль у підготовці спеціалістів з економіки. Значення його полягає в ознайомленні з методами та прийомами математичного вивчення явищ та об'єктів ринкового середовища, яким об'єктивно притаманний стохастичний характер. Цей курс належить до базових і спирається на знання, уміння та навички, набуті при вивченні курсу *вища математика для економістів*. З іншого боку, він є базою для подальшого вивчення курсів *економетрика* та *статистика*.

Особливістю посібника є максимально швидкий перехід від теоретичних концепцій теорії ймовірностей до процедур математичної статистики в умовах вкрай обмеженого ресурсу лекцій. Математичні доведення, якщо представлені, демонструються на конкретних випадках, щоб уникнути недоречної “математизації”. З іншого боку, всі правила ймовірнісних та статистичних процедур пояснюються і демонструються на прикладах.

Приклади та розв'язані задачі підібрані таким чином, щоб наблизити їхні формулювання до предметної області студентів, у якій вони навчаються. Звичайно, що при цьому неможливо уникнути традиційних прикладів з підкиданням монети або грального кубика.

За рахунок прикладів у цьому посібнику матеріалу міститься набагато більше, ніж лектор зможе викласти про-

тягом короткого курсу лекцій. Наявність більшої кількості розглянутих прикладів дозволить зацікавленим студентам самостійно ознайомитись з різними задачами та способами їх розв'язання, які не увійшли до матеріалу лекцій.

У посібнику вміщено багато таких задач, формулювання яких є повчальним саме по собі, оскільки містить відомості з певних галузей знань, про які йдеться у задачах. Це допоможе студентам розширити “горизонти” своїх загальних знань. Студенти можуть досить швидко забути спосіб розв'язання конкретної задачі, але пригадають її формулювання, якщо воно подано у термінах тієї галузі знань, у якій вони навчаються. Це може прислужитися їм навіть через кілька років, коли у своїй практичній роботі вони зустрінуться зі схожими задачами.

Вправи, наведені в кінці кожної глави, можна використати під час аудиторних робіт та для самостійної роботи студентів.

Я сподіваюсь, що посібник знайде своїх зацікавлених читачів, від яких надійдуть зауваження та поради стосовно змісту та характеру викладення матеріалу.

*Автор*

## ДОДАТОК

### Обчислення функцій розподілу в Excel

НОРМРАСП ( $x; \mu; \sigma; i$ )	$\Phi_{\mu, \sigma^2}(x)$ , якщо $i = \text{false}$ або $\varphi_{\mu, \sigma^2}(x)$ , якщо $i = \text{true}$
НОРМОБР ( $q; \mu; \sigma^2$ )	$q$ -квантиль нормального розподілу з параметрами $(\mu, \sigma^2)$
СТЪЮДРАСП ( $x; m; i$ )	$P(X \geq x)$ або $2P(X \geq x)$ , якщо $i=1$ або $i=2$ ; де $X$ — випадкова величина, яка має розподіл Стьюдента з $m$ ступенями свободи
СТЪЮДРАСПОБР ( $p; m$ )	$p$ -критична точка розподілу Стьюдента з $m$ ступенями свободи
ХИ2РАСП ( $x; m$ )	$P(X \geq x)$ ; де $X$ — випадкова величина, яка має розподіл $\chi^2$ з $m$ ступенями свободи
ХИ2ОБР ( $p; m$ )	$p$ -критична точка розподілу $\chi^2$ з $m$ ступенями свободи
FРАСП ( $x; m; n$ )	$P(X \geq x)$ , де $X$ — випадкова величина, яка має розподіл Фішера з $(m, n)$ ступенями свободи
FРАСПОБР ( $p; m; n$ )	$p$ -критична точка розподілу Фішера з $(m, n)$ ступенями свободи