Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут”

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ТА ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

для студентів технічних факультетів

Укладачі:
к. ф.-м. н., доц. Ординська Зоя Павлівна
к. ф.-м. н., доц. Орловський Ігор Володимирович
к. ф.-м. н., ст. викл. Руновська Марина Костянтинівна

2014

Зміст

Частина I
Елементи лінійної алгебри

1 Матриці та дії над ними

1.1 Основні означення.

Означення 1.1. *Матрицею* називається прямокутна таблиця $m \cdot n$ чисел, що містить m рядків та n стовпців:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2j} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mj} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матриці позначаються великими латинськими літерами: A, B, C,..., та скорочено записуються наступним чином: $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$, або $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$. Числа a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, називаються *елементами матриці* A. Елемент a_{ij} знаходиться у i-му рядку та j-му стовпці.

Приклад 1.1. Розглянемо матрицю $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$. Вона має 2 рядка та 3 стовпці. Елемент $a_{21} = 1$ знаходиться у другому рядку та першому стовпці.

Означення 1.2. Матриця називається *нульовою*, якщо всі її елементи дорівнюють нулю. Позначається $O_{m\times n}$.

Приклад 1.2. Нульова матриця розміру 3×2: $O_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Означення 1.3. Матриця називається *квадратною*, якщо кількість стовпців цієї матриці дорівнює кількості її рядків, тобто $m = n$. Квадратну матрицю розміру $n \times n$ називають матрицею порядку n та позначають A_n:

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Числа $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ утворюють *головну діагональ* квадратної матриці A_n, а числа $a_{1n}, a_{2(n-1)}, ..., a_{n1}$ утворюють *побічну діагональ* матриці A_n.

Означення 1.4. Квадратна матриця називається *діагональною*, якщо всі її елементи окрім елементів головної діагоналі дорівнюють нулю.

Приклад 1.3. Діагональна матриця третього порядку:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -1,2 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

Означення 1.5. Діагональна матриця називається *одиничною*, якщо всі елементи головної діагоналі цієї матриці дорівнюють одиниці.

Одиничні матриці позначають літерами E або I.

Приклад 1.4. Одинична матриця порядку n:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Означення 1.6. Квадратна матриця називається *верхньою трикутною* (*нижньою трикутною*), якщо всі її елементи нижче (вище) головної діагоналі, рівні нулю.

Приклад 1.5. Розглянемо 2 матриці 4-го порядку:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 8 & 90 \\ 0 & 0 & 24 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}, \qquad B_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & 0 \\ 30 & 1 & -5 & 0 \\ 22 & 10 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Матриця A є верхньою трикутною матрицею, а матриця B є нижньою трикутною матрицею.

Означення 1.7. Елемент рядка матриці $A_{m\times n}$ називається *крайнім*, якщо він відмінний від нуля, а всі елементи цього рядка, які знаходяться зліва від нього, дорівнюють нулю.

Означення 1.8. Матриця $A_{m\times n}$ називається *східчастою*, якщо крайній елемент кожного рядка знаходиться справа від крайнього елемента попереднього рядка.

Приклад 1.6. Східчаста матриця розміру 3×4:

$$A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Елементи $a_{11} = 5$, $a_{23} = -7$, та $a_{34} = 16$, є крайніми елементами 1-го, 2-го та 3-го рядків відповідно.

Означення 1.9. Матриця, яка містить один рядок (стовпець), називається *матрицею-рядком* або вектор-рядком (*матрицею-стовпцем* або вектор-стовпцем).

Приклад 1.7. Матриця $A_{1\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$ є матрицею-рядком, що містить n елементів, а матриця $B_{m\times 1} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$ є матрицею-стовпцем, що містить m елементів.

1.2 Дії над матрицями.

I. Рівність матриць. (Вводиться тільки для матриць однакової розмірності.)

Означення 1.10. Матриці $A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}_{i,j=1}^{m,n}$ та $B_{m\times n} = \begin{pmatrix} b_{ij} \end{pmatrix}_{i,j=1}^{m,n}$ називаються рівними між собою, якщо всі відповідні елементи цих матриць рівні між собою, тобто $A = B$, якщо $a_{ij} = b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

II. Додавання (віднімання) матриць. (Вводиться тільки для матриць однакової розмірності.)

Означення 1.11. Сумою (різницею) матриць $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$ та $B_{m\times n} = \left(b_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$ називається матриця $C_{m\times n} = \left(c_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$, кожен елемент якої дорівнює сумі (різниці) відповідних елементів матриць A та B, тобто

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad (c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}), \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Позначається: $C = A + B, \quad (C = A - B)$.

Приклад 1.8. Нехай задано матриці: $A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$, та $B_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -1 & -6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Тоді

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -3 & -3 \\ 14 & 14 \end{pmatrix}, \qquad A - B = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -1 & 9 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

III. Множення матриці на число. (Вводиться для будь-яких матриць.)

Означення 1.12. Добутком матриці $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$ на число $\lambda \in \mathbb{R}$, називається матриця $C_{m\times n} = \left(c_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$, кожен елемент якої дорівнює добутку кожного елемента матриці A на число λ, тобто

$$c_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Приклад 1.9. Для матриці $A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$ та числа $\lambda = 4$:

$$\lambda A = 4A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \\ 40 & 36 \end{pmatrix}.$$

Означення 1.13. *Лінійною комбінацією* матриць $A_{m\times n} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$ та $B_{m\times n} = \left(b_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$ називається матриця $\alpha A + \beta B$, де α та β - деякі числа з $\mathbb{R}$.

Означення 1.14. Матриця $-A = (-1) \cdot A$ називається *протилежною* до матриці A.

Сформулюємо основні властивості операцій додавання матриць та множення матриці на число.

Теорема 1.1. *Для довільних матриць $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$, $C_{m\times n}$, та чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ виконується:*
1) *комутативність додавання матриць:* $A + B = B + A$;
2) *асоціативність додавання матриць:* $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3) $A + O = O + A = A$;
4) $A + (-A) = (-A) + A = O$;
5) $1 \cdot A = A$;
6) *дистрибутивність множення на число щодо додавання матриць:* $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
7) *дистрибутивність множення матриці на число щодо додавання чисел:* $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
8) *асоціативність множення матриці на число:* $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

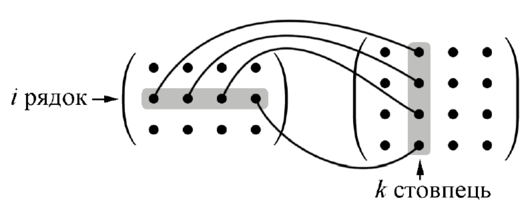
Доведення. Всі властивості операцій додавання матриць та множення на число випливають безпосередньо з означень цих операцій та властивостей операцій додавання дійсних чисел. □

IV. Множення матриць. (Вводиться тільки для *узгоджених* матриць, тобто таких, що число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої матриці.)

Означення 1.15. Добутком матриць $A_{m\times n} = \Big(a_{ij}\Big)_{i,j=1}^{m,n}$ та $B_{n\times p} = \Big(b_{jk}\Big)_{j,k=1}^{n,p}$ називається матриця $C_{m\times p} = \Big(c_{ik}\Big)_{i,k=1}^{m,p}$, кожен елемент якої дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи k-го стовпця матриці B, тобто

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{in}b_{nk}, \quad i = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,p}.$$

Схематично це можна проілюструвати наступним чином:



Приклад 1.10. Для матриць $A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$, та $B_{2\times 4} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 7 & -5 \end{pmatrix}$,

$$AB = \begin{pmatrix} 0\cdot 3 + 1\cdot(-1) & 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 2 + 1\cdot 7 & 0\cdot(-1) + 1\cdot(-5) \\ -2\cdot 3 + 3\cdot(-1) & -2\cdot 1 + 3\cdot 0 & -2\cdot 2 + 3\cdot 7 & -2\cdot(-1) + 3\cdot(-5) \\ 10\cdot 3 + 9\cdot(-1) & 10\cdot 1 + 9\cdot 0 & 10\cdot 2 + 9\cdot 7 & 10\cdot(-1) + 9\cdot(-5) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 & -5 \\ -9 & -2 & 17 & -13 \\ 21 & 10 & 83 & -55 \end{pmatrix} = C_{3\times 4}.$$

Сформулюємо основні властивості операції добутку матриць.

Теорема 1.2. *Для довільних узгоджених матриць* A, B, C, *та числа* $\alpha \in \mathbb{R}$ *виконується:*
1) *асоціативність добутку матриць:* $A_{m\times n}\cdot(B_{n\times p}\cdot C_{p\times r}) = (A\cdot B)\cdot C$;
2) *дистрибутивність множення матриць щодо додавання:* $A_{m\times n}(B_{n\times p} + C_{n\times p}) = AB + AC$;
3) *множення на одиничну матрицю:* $A_{m\times n}\cdot E_n = E_m\cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}$;
4) *множення на нульову матрицю:* $A_{m\times n}\cdot O_{n\times p} = O_{m\times p}$, $O_{l\times m}\cdot A_{m\times n} = O_{l\times n}$;
5) *асоціативність множення матриць щодо множення на число:* $\alpha(A\cdot B) = (\alpha A)\cdot B = A\cdot(\alpha B)$.

Доведення. Всі властивості безпосередньо випливають з означення операції множення матриць. □

Означення 1.16. Матриці A та B називаються *комутуючими* або *переставними*, якщо $AB = BA$.

Зауваження 1.1. В загальному випадку $AB \neq BA$.

Приклад 1.11. Нехай задано матриці: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, та $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тоді

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

звідки випливає, що $AB \neq BA$.

V. Піднесення до степеню. (Вводиться тільки для квадратних матриць.)

Означення 1.17. *Натуральним степенем k квадратної матриці A* називається квадратна матриця A^k, яка задається співвідношенням

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{k}.$$

Для $k = 0$ вважають $A_n^0 = E_n$.

Означення 1.18. Нехай є многочлен $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ та квадратна матриця A. Многочленом p від матриці A називається матриця $p(A)$, яка задається співвідношенням

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + ... + a_1 A + a_0 E,$$

де E — одинична матриця того ж самого порядку, що і матриця A.

Зауваження 1.2. З того, що $AB = O$ не випливає, що $A = O$ або $B = O$. Зокрема, з того, що $A^2 = A \cdot A = O$ не обов'язково $A = O$. Наприклад, для матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, маємо $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$.

Приклад 1.12. Знайти значення матричного многочлену $f(A)$ для квадратної матриці $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, якщо $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$.

Обчислюємо

$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -4 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$f(A) = 3A^2 + 4A - 2E = 3 \begin{pmatrix} 17 & -4 \\ -8 & 9 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & -4 \\ -8 & 29 \end{pmatrix}.$$

VI. Транспонування. (Вводиться для будь-яких матриць.)

Означення 1.19. *Транспонування* — перехід від матриці $A = A_{m \times n}$ до матриці $A^T = (A^T)_{n \times m}$, при якому рядки та стовпці матриці міняються місцями зі збереженням порядку, тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

При цьому, матриця A^T називається *транспонованою* до матриці A.

Приклад 1.13. До матриці $A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$ транспонованою буде матриця

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 10 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Сформулюємо властивості операції транспонування.

Теорема 1.3. *Для довільних матриць A, B та числа $\alpha \in \mathbb{R}$ виконується:*
1) $\left(A^T\right)^T = A$*;*
2) $\left(A_{m\times n} + B_{m\times n}\right)^T = A^T + B^T$;
3) $\left(\alpha A\right)^T = \alpha A^T$;
4) $\left(A_{m\times n} \cdot B_{n\times p}\right)^T = B^T \cdot A^T$;

Доведення. Всі властивості операції транспонування випливають безпосередньо з означення операції транспонування. □

Означення 1.20. Квадратна матриця A називається *симетричною*, якщо $A^T = A$, і *кососиметричною*, якщо $A^T = -A$.

1.3 Елементарні перетворення матриць.

Означення 1.21. *Елементарними перетвореннями* матриці $A_{m\times n}$ є:
— перестановка місцями двох рядків (стовпців);
— множення всіх елементів деякого рядка (стовпця) на число відмінне від нуля;
— додавання до елементів деякого рядка (стовпця) елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне і те саме число.

Означення 1.22. Матриці $A_{m\times n}$ та $B_{m\times n}$ називаються *еквівалентними*, якщо одна з них може бути отримана з іншої за допомогою елементарних перетворень. Позначається: $A \sim B$.

За допомогою елементарних перетворень будь-яку матрицю можна звести до східчастого вигляду.

Приклад 1.14. Зведемо матрицю $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ до східчастого вигляду. Отже,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ | \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :(-3) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 Визначники

2.1 Визначники 1-го, 2-го та 3-го порядку.

Будь-якій квадратній матриці $A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ можна поставити у відповідність число, що називається її *визначником* або *детермінантом* та позначається $\det A$, ΔA, Δ або

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Означення 2.1. *Визначником 1-го порядку* матриці $A_1 = (a_{11})$ називається число $\det A = a_{11}$.

Означення 2.2. *Визначником 2-го порядку* матриці $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називається число $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Приклад 2.1. Обчислимо визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$.

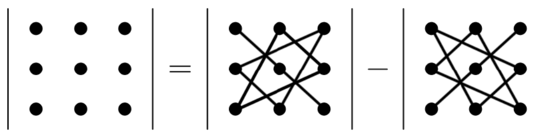
Означення 2.3. *Визначником 3-го порядку* матриці $A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ називається число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}. \tag{2.1}$$

Методи обчислення визначників 3-го порядку.

1) Правило трикутників (Саррюса): зі знаком "+" у формулі (2.1) беруться добуток елементів головної діагоналі та два добутки елементів, які знаходяться у вершинах трикутників з основами, паралельними головній діагоналі; зі знаком "−" у формулі (2.1) беруться добуток елементів побічної діагоналі та два добутки елементів, які знаходяться у вершинах трикутників з основами, паралельними побічній діагоналі. Схематично це можна проілюструвати наступним чином:



2) Правило "дописування стовпців" полягає у дописуванні справа від визначника 1-го та 2-го стовпців зі збереженням порядку. Зі знаком "+" у формулі (2.1) беруться добутки елементів головної діагоналі та паралельних їй; зі знаком "−" у формулі (2.1) беруться добутки елементів побічної діагоналі та паралельних їй. Проілюструємо це правило на прикладі.

Приклад 2.2. Обчислимо визначник

$$\begin{array}{ccc|cc} & & - & - & - \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \\ & & + & + & + \end{array} = 1\cdot5\cdot9+2\cdot6\cdot7+3\cdot4\cdot8-3\cdot5\cdot7-1\cdot6\cdot8-2\cdot4\cdot9=0.$$

2.2 Поняття визначника n-го порядку.

Перейдемо до введення поняття визначника n-го порядку.

Означення 2.4. *Перестановкою* з n натуральних чисел $(1, 2, 3, ..., n)$ називається довільна впорядкована множина цих чисел. Позначається $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$.

Загальна кількість перестановок з n натуральних чисел: $n!$.

Приклад 2.3. Нехай є множина $(1, 2, 3)$. Всі можливі перестановки множини $(1, 2, 3)$:

$$(1,2,3),\quad (1,3,2),\quad (2,1,3),\quad (2,3,1),\quad (3,1,2),\quad (3,2,1).$$

Означення 2.5. Пара чисел (i, j) у перестановці $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ називається інверсією, якщо $i > j$.

Виберемо з перестановки $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ всі можливі пари зі збереженням порядку. Кількість всіх пар: $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Позначимо через J — кількість всіх інверсій серед вибраних пар.

Приклад 2.4. Нехай є перестановка $(1, 4, 3, 2)$. Всі можливі пари: $(1, 4)$, $(1, 3)$, $(1, 2)$, $(4, 3)$, $(4, 2)$, $(3, 2)$. Серед них є лише 3 інверсії: $(4, 3)$, $(4, 2)$, $(3, 2)$, тобто $J = 3$.

Означення 2.6. *Визначником n-го порядку* матриці $A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ називається число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)} (-1)^J a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} ... a_{n\alpha_n},$$

де сума береться по всіх можливих перестановках з елементів множини $(1, 2, 3, ..., n)$, а J — кількість інверсій у відповідній перестановці.

Зауваження 2.1. Сума містить $n!$ доданків, кожен з яких складається з добутків n елементів матриці, взятих по одному і лише одному з кожного рядка та кожного стовпця.

Означення 2.7. *Мінором* деякого елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається визначник $(n-1)$-го порядку, що отримується з даного визначника шляхом викреслювання рядка та стовпця, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}. Позначається: M_{ij}.

Означення 2.8. *Алгебраїчним доповненням* до елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається його мінор, взятий за знаком “+”, якщо число $(i + j)$ – парне, і зі знаком “$-$”, якщо число $(i + j)$ – непарне. Позначається: A_{ij}. Таким чином,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Приклад 2.5. Знайдемо мінор та алгебраїчне доповнення до елемента $a_{31} = 7$ визначника $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. Отже,

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -2, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = -2.$$

Означення 2.9. Квадратна матриця A називається *невиродженою*, якщо $\det A \neq 0$. Якщо $\det A = 0$, то матриця A називається *виродженою*.

Теорема 2.1 (**Лапласа про розклад визначника за рядком або стовпцем**). *Визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на відповідні їм алгебраїчні доповнення, тобто*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \ldots & \mathbf{a_{ij}} & \ldots & \mathbf{a_{in}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \mathbf{a_{i1}} A_{i1} + \mathbf{a_{i2}} A_{i2} + \ldots + \mathbf{a_{ij}} A_{ij} + \ldots + \mathbf{a_{in}} A_{in}, \quad i = \overline{1, n},$$

або

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \mathbf{a_{1j}} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \mathbf{a_{2j}} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & \mathbf{a_{ij}} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \mathbf{a_{nj}} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \mathbf{a_{1j}} A_{1j} + \mathbf{a_{2j}} A_{2j} + \ldots + \mathbf{a_{ij}} A_{ij} + \ldots + \mathbf{a_{nj}} A_{nj}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Доведення. Для наочності доведемо теорему на прикладі визначника 3-го порядку, вибравши для розкладу 3-ій рядок (для інших рядків (стопців) аналогічно). За означенням

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} =$$

$$= a_{31}(a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22}) - a_{32}(a_{23} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{13}) + a_{33}(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) =$$

$$= a_{31} \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{32} \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33},$$
звідки отримаємо справедливість твердження. □

Для визначника порядку n теорема Лапласа може бути доведена за допомогою метода математичної індукції.

Приклад 2.6. Обчислити визначник за допомогою теореми Лапласа

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 9 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо визначник за першим рядком:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 9 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} =$$

$$= (-1) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 5 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 9 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{vmatrix} +$$

$$+2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 9 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 8 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 9 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 121 + 0 + 62 + 36 = 219.$$

2.3 Властивості визначників.

1) *Визначник не змінюється при транспонуванні*, тобто $\det(A^T) = \det A$, або

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доведення. За означенням

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} (-1)^J a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n},$$

де J — кількість інверсій у перестановці $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Розглянемо визначник транспонованої матриці:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)} (-1)^{J'} a_{\beta_1 1} a_{\beta_2 2} ... a_{\beta_n n},$$

де J' — кількість інверсій у перестановці $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$. Переставимо елементи добутку $a_{\beta_1 1} a_{\beta_2 2} ... a_{\beta_n n}$ так, щоб індекси рядків $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ стояли у порядку зростання: $(1, 2, ..., n)$. Тоді індекси стовпців утворять перестановку з елементів множини $(1, 2, ..., n)$. Таким чином, у правій частині останнього виразу можна брати суму по всіх можливих перестановках $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ індексів стовпців $(1, 2, ..., n)$. Звідси випливає, що визначники рівні. $\square$

Властивість 1) говорить про те, що рядки і стовпці визначника є рівноправними.

2) *Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю*, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Доведення. Нехай в i-му рядку визначника матриці A всі елементи дорівнюють нулю, тобто $a_{ij} = 0$, $j = \overline{1, n}$. Тоді за означенням

$$\det A = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)} (-1)^J a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} ... a_{i\alpha_i} ... a_{n\alpha_n} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)} (-1)^J a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} ... \cdot 0 \cdot ... a_{n\alpha_n} = 0,$$

де J — кількість інверсій у перестановці $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. $\square$

3) *При перестановці двох рядків (стовпців) місцями визначник змінює* *знак*, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & ... & \mathbf{a_{ij}} & ... & \mathbf{a_{in}} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{a_{k1}} & \mathbf{a_{k2}} & ... & \mathbf{a_{kj}} & ... & \mathbf{a_{kn}} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{a_{k1}} & \mathbf{a_{k2}} & ... & \mathbf{a_{kj}} & ... & \mathbf{a_{kn}} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & ... & \mathbf{a_{ij}} & ... & \mathbf{a_{in}} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доведення. За означенням

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & ... & \mathbf{a_{ij}} & ... & \mathbf{a_{in}} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{a_{k1}} & \mathbf{a_{k2}} & ... & \mathbf{a_{kj}} & ... & \mathbf{a_{kn}} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_i,...,\alpha_k,...,\alpha_n)} (-1)^J a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} ... a_{i\alpha_i} ... a_{k\alpha_k} ... a_{n\alpha_n},$$

де J — кількість інверсій у перестановці $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, ..., \alpha_k, ..., \alpha_n)$, а

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{a_{k1}} & \mathbf{a_{k2}} & ... & \mathbf{a_{kj}} & ... & \mathbf{a_{kn}} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & ... & \mathbf{a_{ij}} & ... & \mathbf{a_{in}} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k,...,\alpha_i,...,\alpha_n)} (-1)^{J'} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} ... a_{k\alpha_k} ... a_{i\alpha_i} ... a_{n\alpha_n},$$

де J' — кількість інверсій у перестановці $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, ..., \alpha_i, ..., \alpha_n)$. Очевидно, обидві суми складаються з однакових добутків елементів визначника. Помітимо, що перестановки $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i, ..., \alpha_k, ..., \alpha_n)$ та $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k, ..., \alpha_i, ..., \alpha_n)$ відрізняються лише інверсією 2-х елементів i та k. Таким чином, кількість інверсій J та J' у обох перестановках має різну парність. Звідси випливає справедливість властивості 3). □

4) *Якщо визначник має 2 однакових рядка (стовпці), то він дорівнює ну-*

лю, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{ij}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{ij}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Доведення. Нехай визначник матриці A має 2 однакових рядки: i-ий та j-ий. Переставимо місцями i-й та j-ий рядки. Тоді за властивістю 3) $\det A = -\det A$, звідки випливає, що $\det A = 0$. □

5) *Спільний множник деякого рядка (стовпця) визначника можна винести за знак визначника*, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{c \cdot a_{i1}} & \mathbf{c \cdot a_{i2}} & \dots & \mathbf{c \cdot a_{ij}} & \dots & \mathbf{c \cdot a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \mathbf{c} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{ij}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доведення. Нехай кожен елемент i-го рядка визначника матриці A має спільний множник c. Тоді за означенням

$$\det A = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n)} (-1)^J a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots c \cdot a_{i\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n} =$$

$$= c \cdot \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots,\alpha_n)} (-1)^J a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{i\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n},$$

що і доводить властивість 5). □

Властивість 5) називається *властивістю однорідності.*

6) *Визначник, який містить 2 пропорційних рядки (стовпця), дорівнює нулю*, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{ij}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{ca_{i1}} & \mathbf{ca_{i2}} & \dots & \mathbf{ca_{ij}} & \dots & \mathbf{ca_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Доведення. Безпосередньо випливає з властивостей 4) та 5). □

7) *Якщо елементи деякого рядка (стовпця) визначника є сумою двох доданків, то визначник можна розкласти на суму двох визначників*, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{b_{i1}+c_{i1}} & \mathbf{b_{i2}+c_{i2}} & ... & \mathbf{b_{in}+c_{in}} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{b_{i1}} & \mathbf{b_{i2}} & ... & \mathbf{b_{in}} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{c_{i1}} & \mathbf{c_{i2}} & ... & \mathbf{c_{in}} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доведення. Нехай кожен елемент i-го рядка визначника матриці A дорівнює сумі двох доданків, тобто $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, $j = \overline{1, n}$. Тоді за означенням

$$\det A = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)} (-1)^J a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} ... a_{i\alpha_i} ... a_{n\alpha_n} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)} (-1)^J a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} ... (b_{i\alpha_i} + c_{i\alpha_i}) ... a_{n\alpha_n} =$$

$$= \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)} (-1)^J a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} ... b_{i\alpha_i} ... a_{n\alpha_n} + \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)} (-1)^J a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} ... c_{i\alpha_i} ... a_{n\alpha_n},$$

звідки випливає справедливість властивості 7). □

Властивість 7) називається *властивістю лінійності.*

8) *Визначник не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число*, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{a_{k1}} & ... & \mathbf{a_{kj}} & ... & \mathbf{a_{kn}} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & ... & a_{ij} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \mathbf{a_{k1}+ca_{i1}} & ... & \mathbf{a_{kj}+ca_{ij}} & ... & \mathbf{a_{kn}+ca_{in}} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доведення. Безпосередньо випливає з властивостей 6) та 7). □

9) *Визначник трикутної матриці дорівнює добутку діагональних елементів*, тобто

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \mathbf{a_{22}} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \mathbf{a_{33}} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{a_{nn}} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Доведення. Згідно з теоремою Лапласа поступово розкладаючи визначник за 1-им стовпцем і тим самим понижуючи його порядок, отримаємо

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \mathbf{a_{22}} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \mathbf{a_{33}} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{a_{nn}} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{a_{22}} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & \mathbf{a_{33}} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{a_{nn}} \end{vmatrix} = \dots = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn},$$

що і доводить властивість 9). □

10) Теорема Біне-Коші. *Визначник добутку квадратних матриць дорівнює добутку їх визначників*, тобто

$$\det(A_n \cdot B_n) = \det A_n \cdot \det B_n.$$

11) Теорема анулювання. *Сума добутків елементів рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю*, тобто

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0, \quad i \neq j.$$

Доведення. Нехай $i \neq j$. Помітимо, що сума $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}$ є розкладом визначника

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{il}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{j1}} & \mathbf{a_{j2}} & \dots & \mathbf{a_{jl}} & \dots & \mathbf{a_{jn}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nl} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

за j-им рядком, причому кожен елемент j-го рядка дорівнює відповідному елементу i-го рядка, тобто $a_{jl} = a_{il}$, $l = \overline{1, n}$. Отже, визначник містить два однакових рядки, і за властивістю 4), дорівнює нулю. □

Приклад 2.7. Обчислити визначник шляхом зведення його до трикутного вигляду

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 9 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \end{vmatrix}.$$

Використовуючи властивості визначників, отримаємо

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \\ 9 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \end{vmatrix} \begin{array}{ll} \cdot 2 & \cdot 9 \\ \leftarrow + & \mid \\ & \leftarrow + \\ & \end{array} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & 5 & 19 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \end{vmatrix} \begin{array}{ll} & \\ \cdot(-5) & \cdot 1 \\ \leftarrow + & \mid \\ & \leftarrow + \end{array} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -21 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot 1 \\ \leftarrow + \end{array} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \end{vmatrix} = (-3) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & -7 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-7) \\ \leftarrow + \end{array} =$$

$$= (-3) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -73 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-73) = 219.$$

3 Обернена матриця. Матричні рівняння. Ранг матриці

3.1 Обернена матриця.

Означення 3.1. Матриця A^{-1} називаються *оберненою* до квадратної матриці A, якщо $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Зауваження 3.1. Матриця A^{-1} має той самий порядок, що і матриця A.

Теорема 3.1 (**про єдиність оберненої матриці**). *Якщо до матриці A існує обернена матриця, то вона едина.*

Доведення. Доведемо від супротивного. Нехай до матриці A існує дві обернені матриці A_1^{-1} та A_2^{-1}, причому $A_1^{-1} \neq A_2^{-1}$. Тоді

$$A_1^{-1} = A_1^{-1} \cdot E = A_1^{-1} \cdot A \cdot A_2^{-1} = E \cdot A_2^{-1} = A_2^{-1}.$$

Отримане протиріччя доводить теорему. □

Означення 3.2. Матрицею, *приєднаною* до матриці $A_n = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, називається матриця

$$A^* = \Big(A_{ij}\Big)^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} — алгебраїчне доповнення до елемента a_{ij} матриці A, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

Теорема 3.2 (**критерій існування оберненої матриці**). *Матриця A має обернену тоді і тільки тоді, коли вона невироджена* ($\det A \neq 0$). *При цьому*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*. \tag{3.1}$$

Доведення. Доведемо необхідність. Нехай матриця A має обернену. Тоді $A\cdot A^{-1}=E$. Звідси $\det(A\cdot A^{-1})=\det A\cdot\det A^{-1}=\det E=1$. Звідси випливає, що $\det A\neq 0$ та $\det A^{-1}\neq 0$. Таким чином, матриця A є невиродженою.

Доведемо достатність. Нехай матриця A є невиродженою, тобто $\det A\neq 0$. Покажемо, що матриця $A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*$ є оберненою до матриці A.

Дійсно,

$$A\cdot A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A\cdot A^*=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&...&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&...&a_{2n}\\...&...&...&...\\a_{n1}&a_{n2}&...&a_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&...&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&...&A_{n2}\\...&...&...&...\\A_{1n}&A_{2n}&...&A_{nn}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}\det A&0&...&0\\0&\det A&...&0\\...&...&...&...\\0&0&...&\det A\end{pmatrix}=E.$$

Остання рівність випливає з теореми Лапласа про розклад визначника за рядком або стовпцем та теореми анулювання (властивість 11) визначників.

Аналогічно перевіряємо, що

$$A^{-1}\cdot A=E.$$

Теорему доведено. □

Приклад 3.1. Знайти матрицю обернену до матриці $\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&0&2\\0&1&4\end{pmatrix}$.

Обчислюємо визначник матриці $\det A=3\neq 0$. Таким чином, A^{-1} існує. Обчислюємо окремо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&2\\1&4\end{vmatrix}=-2,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1&2\\0&4\end{vmatrix}=4,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1&0\\0&1\end{vmatrix}=-1,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&3\\1&4\end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&3\\0&4\end{vmatrix}=4,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&3\\0&2\end{vmatrix}=4,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&3\\-1&2\end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\-1&0\end{vmatrix}=2.$$

Підставляємо отримані значення у формулу (3.1):

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 4 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Властивості оберненої матриці:
1) $\mathbf{E^{-1} = E}$;

Доведення. Випливає з того, що $E \cdot E = E$. □

2) $\det \mathbf{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\det \mathbf{A}}$;

Доведення. Оскільки матриця A^{-1} — обернена до матриці A, то $A^{-1} \cdot A = E$. Тому з властивості 10) визначників випливає, що $\det(A^{-1} \cdot A) = \det(A^{-1}) \cdot \det A$, а з іншого боку, $\det E = 1$. Тому $\det(A^{-1}) \cdot \det A = 1$, звідки $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$. □

3) $\mathbf{(A^{-1})^{-1} = A}$;

Доведення. Ця властивість випливає з того, що $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$. □

4) $\mathbf{(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}$;

Доведення. Дійсно, $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = (A \cdot A^{-1}) = E$, і навпаки $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = (B \cdot B^{-1}) = E$. Тому матриця $B^{-1} \cdot A^{-1}$ — обернена до матриці $A \cdot B$. □

5) $\mathbf{(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}}$.

Доведення. Дійсно, $(A^{-1})^T \cdot A^T = (A \cdot A^{-1})^T = E^T = E$, і навпаки $A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1} \cdot A)^T = E^T = E$. □

3.2 Матричні рівняння.

1) Розглянемо рівняння відносно невідомої матриці $X = X_{m\times n}$:

$$\mathbf{AX = B}, \tag{3.2}$$

де $A = A_{m\times m}$ та $B = B_{m\times n}$ — відомі матриці. Якщо матриця A є невиродженою ($\det A \neq 0$), то помноживши рівняння (3.2) зліва на матрицю A^{-1}, отримаємо

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

звідки

$$\mathbf{X = A^{-1} \cdot B}.$$

2) Розглянемо рівняння відносно невідомої матриці $X = X_{m\times n}$:

$$\mathbf{XA} = \mathbf{B}, \tag{3.3}$$

де $A = A_{n\times n}$ та $B = B_{m\times n}$ — відомі матриці. Якщо матриця A є невиродженою ($\det A \neq 0$), то помноживши рівняння (3.3) справа на матрицю A^{-1}, отримаємо

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1},$$

звідки

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}.$$

3) Розглянемо рівняння відносно невідомої матриці $X = X_{m\times n}$:

$$\mathbf{AXB} = \mathbf{C}, \tag{3.4}$$

де $A = A_{m\times m}$, $B = B_{n\times n}$ та $C = C_{m\times n}$— відомі матриці. Якщо матриці A та B є невиродженими ($\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$), то помноживши рівняння (3.4) зліва на матрицю A^{-1} та справа на матрицю B^{-1} отримаємо

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1},$$

звідки

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^{-1}.$$

Рівняння (3.2) — (3.4) називаються *матричними рівняннями.*

Приклад 3.2. Розв'язати матричне рівняння

$$X \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Введемо позначення: $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$. Тоді задане матричне рівняння можна подати у вигляді: $XA = B$, звідки $X = B \cdot A^{-1}$. Отже, знайдемо спочатку обернену матрицю до матриці A:

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Таким чином,

$$X = B \cdot A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 7 \\ -\frac{7}{2} & \frac{9}{4} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.3 Ранг матриці.

Розглянемо матрицю

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Виділимо в ній k рядків та k стовпців, $k \le \min\{m, n\}$.

Означення 3.3. *Мінором* порядку k матриці $A_{m\times n}$ називається будь-який визначник k-го порядку, що складається з елементів матриці, які стоять на перетині виділених k рядків та k стовпців.

Матриця розміру $m \times n$ має всього $C_m^k \cdot C_n^k = \frac{m!}{k!(m-k!)} \cdot \frac{n!}{k!(n-k!)}$ мінорів k-го порядку.

Приклад 3.3. У матриці $A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ є 12 мінорів 1-го порядку, наприклад $M_1' = |11|$, $M_1'' = |4|$, і т.д. Серед 18 мінорів 2-го порядку цієї матриці є, наприклад, такі мінори:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 10 & 11 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 12 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix},$$

та інші. Мінорів 3-го порядку у матриці 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \end{vmatrix}.$$

Означення 3.4. *Рангом* матриці $A_{m\times n}$ називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля. Позначається: r, $r(A)$ або $rang(A)$.

Означення 3.5. Мінор, порядок якого визначає ранг матриці, називається *базисним.*

У матриці може бути декілька базисних мінорів.

Приклад 3.4. Знайти ранг матриці $A_{3\times4} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. У матриці A існує мінор, наприклад $|2| \neq 0$. Звідси випливає, що $r(A) \geq 1$. У матриці є мінор 2-го порядку $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$. Звідси випливає, що $r(A) \geq 2$. Але всі мінори 3-го порядку матриці A дорівнюють нулю. Таким чином, $r(A) = 2$.

Властивості ранга матриці:

1) $0 \leq r(A) \leq \min(m, n)$, де $\min(m, n)$ — найменше з чисел m та n;

2) $r(A) = 0$ тоді і тільки тоді, коли всі елементи матриці A дорівнюють нулю.

3) Для квадратної матриці порядку n, $r(A) = n$ тоді і тільки тоді, коли матриця A є невиродженою.

4) При транспонуванні матриці її ранг не змінюється.

5) Якщо викреслити з матриці нульовий рядок (стовпець), її ранг не зміниться.

6) Ранг матриці не змінюється при елементарних перетвореннях матриці.

7) Ранг східчастої матриці дорівнює кількості ненульових рядків.

Методи обчислення ранга матриці.

I) Метод обвідних мінорів полягає у обчисленні мінорів матриці, які вибираються певним чином.

Означення 3.6. *Обвідним* мінором до мінора порядку k матриці $A_{m\times n}$ називається мінор $(k+1)$-го порядку цієї матриці, який цілком містить даний мінор порядку k.

1 крок. Якщо матриця нульова, то $r(A) = 0$, інакше $r(A) \geq 1$, і переходимо до наступного кроку.

2 крок. Знаходимо у матриці мінор 2-го порядку M_2, відмінний від нуля. Якщо такого мінора немає, то $r(A) = 1$, і пошук припиняємо. Інакше $r(A) \geq 2$, і переходимо до наступного кроку.

3 крок. Обчислюємо всі мінори 3-го порядку, обвідні до M_2. Якщо серед них немає мінорів відмінних від нуля, то $r(A) = 2$, і пошук припиняємо. Інакше, існує мінор M_3 не рівний нулю. В цьому випадку $r(A) \geq 3$, і процедуру продовжуємо.

Продовжуємо процедуру.

k крок. Нехай знайдено мінор $(k-1)$-го порядку M_{k-1}, відмінний від нуля, тобто $r(A) \geq k-1$. Обчислимо всі мінори k-го порядку, обвідні до M_{k-1}. Якщо серед них немає мінорів відмінних від нуля, то $r(A) = k-1$. Інакше існує мінор M_k, відмінний від нуля, а отже $r(A) \geq k$, і процедуру пошуку продовжуємо.

Приклад 3.5. Знайти ранг матриці $A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ методом обвідних мінорів.

Очевидно, у матриці є мінор 2-го порядку, відмінний від нуля: $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$. До цього мінора у матриці є 2 обвідних мінори 3-го порядку. Обчислюємо їх:

$$M_3^{'} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad M_3^{''} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -5 & -3 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки обидва мінори рівні нулю, то $r(A) = 2$.

II) Метод елементарних перетворень полягає у зведенні матриці до східчастого вигляду шляхом елементарних перетворень. Тоді ранг матриці дорівнює кількості ненульових крайніх елементів (або ненульових рядків) матриці, що отримується.

Приклад 3.6. Знайти ранг матриці $A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ шляхом елементарних перетворень.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1)\cdot(-2) \\ \leftarrow + \quad \; | \\ \quad \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -6 & -2 & -8 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} : 2 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

звідки випливає, що $r(A) = 2$.

4 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

4.1 Основні означення.

Означення 4.1. *Системою лінійних алгебраїчних рівнянь* (СЛАР), що містить m рівнянь та n невідомих, називається система вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4.1}$$

де числа a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, називаються коефіцієнтами системи, числа b_i, $i = \overline{1,m}$, — вільними членами.

Означення 4.2. Система (4.1) називається *квадратною*, якщо $m = n$.

Означення 4.3. Система (4.1) називається *однорідною*, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, тобто $b_1 = b_2 = ...b_m = 0$. В протилежному випадку система називається *неоднорідною*.

Систему (4.1) зручно записувати у компактній матричній формі:

$$AX = B,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Матриця A називається основною матрицею системи, B — стовпцем вільних членів, X — вектор-стовпцем невідомих.

Означення 4.4. Квадратна система називається *невиродженою*, якщо $\det A \neq 0$.

Означення 4.5. *Розширеною матрицею* системи (4.1) (позначається $\overline{A}$ або $(A|B)$) називається основна матриця A системи, доповнена стовпцем вільних членів B:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Означення 4.6. *Розв'язком* системи (4.1) називається n значень невідомих $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, ..., $x_n = c_n$, при підстановці яких всі рівняння системи перетворюються у вірні рівності. Будь-який розв'язок системи можна записати у вигляді вектор-стовпця: $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_n \end{pmatrix}$.

Означення 4.7. Система називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку.

Означення 4.8. Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо вона має більше одного розв'язку. В останньому випадку кожен її розв'язок називається *частинним розв'язком*. Сукупність частинних розв'язків системи називається *загальним розв'язком* цієї системи.

Розв'язати систему — означає з'ясувати сумісна вона чи ні, і якщо система сумісна, знайти її загальний розв'язок.

Означення 4.9. Дві системи називаються *еквівалентними*, якщо вони мають один і той самий загальний розв'язок. Іншими словами, системи еквівалентні, якщо кожний розв'язок однієї з них є розв'язком іншої, і навпаки.

Наступна теорема дає необхідні і достатні умови сумісності СЛАР.

Теорема 4.1 (Кронекера-Капеллі). *Система лінійних алгебраїчних рівнянь* (4.1) *сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці системи дорівнює рангу основної матриці системи, тобто* $r(A) = r(\overline{A})$.

При цьому, якщо $r(A) = r(\overline{A}) = n$, *то система* (4.1) *має єдиний розв'язок. Якщо* $r(A) = r(\overline{A}) < n$, *то система* (4.1) *має безліч розв'язків.*

Алгоритм дослідження СЛАР на сумісність та визначеність

1) Знаходимо $r(A)$ та $r(\overline{A})$. Якщо $r(A) \neq r(\overline{A})$, то СЛАР несумісна. Якщо $r(A) = r(\overline{A})$, то СЛАР сумісна і переходимо до наступного кроку.

2) Якщо $r(A) = r(\overline{A}) = n$, то система визначена. Якщо $r(A) = r(\overline{A}) < n$, то система невизначена.

4.2 Методи розв'язання квадратних невироджених СЛАР.

Розглянемо *квадратну невироджену* СЛАР:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{4.2}$$

причому $\det A \neq 0$.

I.) Матричний метод.

Запишемо СЛАР (10.7) матричній формі:

$$AX = B,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\Delta = \det A \neq 0$, то з останнього рівняння випливає, що

$$X = A^{-1}B. \tag{4.3}$$

II.) Формули Крамера.

Оскільки $\Delta = \det A \neq 0$, то з (4.3) випливає, що $X = A^{-1}B$. Розпишемо останню рівність:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}b_1+A_{21}b_2+\dots+A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \frac{A_{12}b_1+A_{22}b_2+\dots+A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \dots \\ \frac{A_{1n}b_1+A_{2n}b_2+\dots+A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Але $(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n)$ — розклад визначника

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

за елементами 1-го стовпця. Зауважимо, що визначник Δ_1 отримується з визначника системи Δ шляхом заміни першого стовпця стовпцем вільних членів. Таким чином,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Аналогічно, $(A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n)$ — розклад визначника

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

за елементами 2-го стовпця. Зауважимо, що визначник Δ_2 отримується з визначника системи Δ шляхом заміни другого стовпця стовпцем вільних членів. Таким чином,

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

І т.д.

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{4.4}$$

де визначник Δ_i, $i = \overline{1, n}$, отримується з визначника системи Δ шляхом заміни i-го стовпця стовпцем вільних членів.

Формули (4.4) називаються *формулами Крамера.*

Приклад 4.1. Розв'язати СЛАР за формулами Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = \qquad -5. \end{cases}$$

Обчислюємо визначник основної матриці системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Обчислюємо визначники Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -7 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -5 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -7 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & -5 \end{vmatrix} = -4.$$

Таким чином,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-2}{2} = -1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-4}{2} = -2.$$

Дослідження квадратної СЛАР на сумісність та визначеність за формулами Крамера

1. Якщо $\Delta \neq 0$, то система сумісна та визначена, тобто має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами (4.4).

2. Якщо $\Delta = 0$, і існує принаймні одне $\Delta_i \neq 0$, то система несумісна.

3. Якщо $\Delta = 0$, і всі $\Delta_i = 0$, то система або сумісна і невизначена, або несумісна.

III.) Метод Гаусса полягає у послідовному виключенні невідомих і складається з 2-х кроків. Розглянемо квадратну невироджену СЛАР:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

1 крок. ***Прямий хід метода Гаусса.*** Випишемо розширену матрицю системи:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & b_n \end{array} \right).$$

На цьому кроці будемо зводити розширену матрицю системи до східчастого вигляду шляхом елементарних перетворень над рядками матриці. А саме, поставимо на перше місце рівняння, у якого коефіцієнт при невідомій x_1

не дорівнює нулю. Якщо серед коефіцієнтів a_{11}, a_{21}, ... , a_{n1} є одиниця, то поставимо відповідне рівняння на місце першого.

До елементів другого рядка додамо елементи першого рядка помножені на $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$. До елементів третього рядка додамо елементи першого рядка помножені на $\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$. І т.д. До елементів n-го рядка додамо відповідні елементи першого рядка, помножені на $\left(-\frac{a_{n1}}{a_{11}}\right)$.

Таким чином, розширена матриця системи $\overline{A}$ еквівалентна наступній

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & ... & a'_{2n} & b'_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & a'_{n2} & ... & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right),$$

де a'_{ij}, та b'_i, $i = \overline{2,n}$, $j = \overline{2,n}$ — нові коефіцієнти системи.

Далі переписуємо перший рядок без змін і повторюємо проведені міркування для останніх $(n-1)$ рядків. Потім процедуру повторюємо для останніх $(n-2)$ рядків, і т.д., поки не зведемо матрицю $\overline{A}$ до східчастого вигляду.

Оскільки система квадратна і невироджена, то $r(A) = r(\overline{A}) = n$. Тому в результаті елементарних перетворень отримаємо східчасту матрицю наступного вигляду:

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} & ... & \widetilde{a}_{1n} & \widetilde{b}_1 \\ 0 & \widetilde{a}_{22} & ... & \widetilde{a}_{2n} & \widetilde{b}_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \widetilde{a}_{nn} & \widetilde{b}_n \end{array}\right),$$

де $\widetilde{a}_{ij}$, та $\widetilde{b}_i$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$ — нові коефіцієнти системи.

2 крок. ***Зворотній хід метода Гаусса*** полягає у послідовному знаходженні значень невідомих x_1, x_2, ..., x_n, піднімаючись від останнього рівняння системи до першого. А саме, запишемо перетворену систему:

$$\begin{cases} \widetilde{a}_{11}x_1 + \widetilde{a}_{12}x_2 + ... + \widetilde{a}_{1(n-1)}x_{n-1} + \widetilde{a}_{1n}x_n = \widetilde{b}_1, \\ \qquad \widetilde{a}_{22}x_2 + ... + \widetilde{a}_{2(n-1)}x_{n-1} + \widetilde{a}_{2n}x_n = \widetilde{b}_2, \\ \qquad ... \\ \qquad \widetilde{a}_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} + \widetilde{a}_{(n-1)n}x_n = \widetilde{b}_{n-1}, \\ \qquad \widetilde{a}_{nn}x_n = \widetilde{b}_n. \end{cases}$$

Знаходимо з останнього рівняння значення змінної x_n:

$$x_n = \frac{\widetilde{b}_n}{\widetilde{a}_{nn}}.$$

Підставляємо значення x_n у передостаннє рівняння та знаходимо з нього значення x_{n-1}:

$$x_{n-1} = \frac{\widetilde{b}_{n-1} - \widetilde{a}_{(n-1)n} \cdot \frac{\widetilde{b}_n}{\widetilde{a}_{nn}}}{\widetilde{a}_{(n-1)(n-1)}},$$

і т.д.

Приклад 4.2. Розв'язати СЛАР методом Гаусса: $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = \qquad -5. \end{cases}$

Поміняємо у системі перше та друге рівняння місцями:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 - 4x_2 = \qquad -5, \end{cases}$$

випишемо розширену матрицю системи та приведемо її до східчастого вигляду елементарними перетвореннями над рядками матриці:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -7 \\ 1 & -4 & 0 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2)\cdot(-1) \\ \leftarrow + \quad\;\; | \\ \quad\;\; \leftarrow + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -11 & -3 & -5 \\ 0 & -8 & -2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ :(-2) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -11 & -3 & -5 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -11 & -3 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 3 \\ \leftarrow + \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-4) \\ \leftarrow + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Випишемо перетворену систему:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ \qquad\quad x_2 \qquad\quad = 1, \\ \qquad\qquad\quad\; x_3 = -2, \end{cases}$$

звідки $x_3 = -2$, $x_2 = 1$, $x_1 = -1$.

5 Метод Гаусса розв'язання довільних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Однорідні системи

5.1 Метод Гаусса розв'язання довільних СЛАР.

Метод Гаусса є найбільш універсальним методом розв'язання СЛАР. Він дозволяє одночасно дослідити довільну СЛАР на сумісність та визначеність, і у разі сумісності системи, знайти її загальний розв'язок. Цей метод полягає у послідовному виключенні невідомих з рівнянь системи.

Розглянемо загальну СЛАР, що містить m рівнянь та n невідомих:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Прямий хід метода Гаусса. Випишемо розширену матрицю системи:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

На цьому кроці будемо зводити розширену матрицю системи до східчастого вигляду шляхом елементарних перетворень над рядками матриці. А саме, поставимо на перше місце рівняння, у якого коефіцієнт при невідомій x_1 не дорівнює нулю. Якщо серед коефіцієнтів a_{11}, a_{21}, ... , a_{m1} є одиниця, то поставимо відповідне рівняння на місце першого.

Далі застосуємо до всіх m рядків розширеної матриці наступний алгоритм. До елементів другого рядка додамо елементи першого рядка помножені на $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$. До елементів третього рядка додамо елементи першого рядка помножені на $\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$. І т.д. До елементів m-го рядка додамо відповідні елементи першого рядка, помножені на $\left(-\frac{a_{m1}}{a_{11}}\right)$.

Таким чином, розширена матриця системи $\overline{A}$ еквівалентна наступній

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & ... & a'_{2n} & b'_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & a'_{m2} & ... & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right),$$

де a'_{ij}, та b'_i, $i = 2, m$, $j = 2, n$ — нові коефіцієнти системи.

Далі переписуємо перший рядок без змін і повторюємо алгоритм для останніх $(m-1)$ рядків. Потім описаний алгоритм застосовуємо до останніх $(m-2)$ рядків, і т.д. поки не зведемо матрицю $\overline{A}$ до східчастого вигляду.

Зауважимо, що якщо в результаті елементарних перетворень у розширеної матриці утвориться принаймні один рядок вигляду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & ... & 0 & \widehat{b}_l \end{array}\right),$$

де $\widehat{b}_l \neq 0$, то СЛАР є несумісною.

Припустимо, що система сумісна, і ранг її основної матриці дорівнює r, тобто $r(A) = r(\overline{A}) = r \leq n$. Тоді в результаті елементарних перетворень отримаємо східчасту матрицю:

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccccccc|c} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} & ... & \widetilde{a}_{1r} & ... & \widetilde{a}_{1(n-1)} & \widetilde{a}_{1n} & \widetilde{b}_1 \\ 0 & \widetilde{a}_{22} & ... & \widetilde{a}_{2r} & ... & \widetilde{a}_{2(n-1)} & \widetilde{a}_{2n} & \widetilde{b}_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \widetilde{a}_{rr} & ... & \widetilde{a}_{r(n-1)} & \widetilde{a}_{rn} & \widetilde{b}_r \end{array}\right),$$

де $\widetilde{a}_{ij}$, та $\widetilde{b}_i$, $i = 1, r$, $j = 1, n$ — нові коефіцієнти системи.

Зауважимо, що оскільки $r(A) = r(\overline{A}) = r$, то r рядків та r стовпців цієї матриці утворюють базисний мінор. Не обмежуючи загальності можна вважати, що перші r рядків та r стовпців розширеної матриці утворюють базисний мінор.

Невідомі, коефіцієнти яких входять до базисного мінору, називаються *головними* або *базисними* (їх r штук), а інші $(n-r)$ невідомих називаються *вільними*.

Запишемо перетворену систему:

$$\begin{cases} \widetilde{a}_{11}x_1 + \widetilde{a}_{12}x_2 + ... + \widetilde{a}_{1r}x_r + ... + \widetilde{a}_{1(n-1)}x_{n-1} + \widetilde{a}_{1n}x_n = \widetilde{b}_1, \\ \qquad \widetilde{a}_{22}x_2 + ... + \widetilde{a}_{2r}x_r + ... + \widetilde{a}_{2(n-1)}x_{n-1} + \widetilde{a}_{2n}x_n = \widetilde{b}_2, \\ \qquad ... \\ \qquad\qquad \widetilde{a}_{rr}x_r + ... + \widetilde{a}_{r(n-1)}x_{n-1} + \widetilde{a}_{rn}x_n = \widetilde{b}_r. \end{cases}$$

Підкреслимо, що у випадку, коли $r = n$ після прямого ходу метода Гаусса систему можна розв'язати матричним методом або за формулами Крамера.

Зворотній хід метода Гаусса полягає у послідовному відшуканні всіх невідомих системи, підіймаючись від останнього рівняння системи до першого. А саме, залишаємо головні невідомі $(x_1, x_2, ..., x_r)$ системи у лівих частинах рівнянь, а вільні невідомі $(x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n)$ переносимо у праві частини рівнянь системи:

$$\begin{cases} \widetilde{a}_{11}x_1 + \widetilde{a}_{12}x_2 + ... + \widetilde{a}_{1r}x_r = \widetilde{b}_1 - \widetilde{a}_{1(r+1)}x_{r+1} - ... - \widetilde{a}_{1(n-1)}x_{n-1} - \widetilde{a}_{1n}x_n, \\ \qquad\qquad \widetilde{a}_{22}x_2 + ... + \widetilde{a}_{2r}x_r = \widetilde{b}_2 - \widetilde{a}_{2(r+1)}x_{r+1} - ... - \widetilde{a}_{2(n-1)}x_{n-1} - \widetilde{a}_{2n}x_n, \\ \qquad\qquad ... \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \widetilde{a}_{rr}x_r = \widetilde{b}_r - \widetilde{a}_{r(r+1)}x_{r+1} ... - \widetilde{a}_{r(n-1)}x_{n-1} - \widetilde{a}_{rn}x_n. \end{cases}$$

Далі, з останнього рівняння виражаємо значення x_r через вільні невідомі $(x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n)$. Підставляємо у передостаннє рівняння і знаходимо з нього значення x_{r-1} через вільні невідомі. Продовжуючи цей алгоритм знаходимо всі невідомі системи $x_r, x_{r-1}, ..., x_2, x_1$.

Задаючи вільним невідомим довільні значення, отримаємо незліченну множину розв'язків системи.

Приклад 5.1. Розв'язати СЛАР методом Гаусса:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Переставимо місцями перше та друге рівняння системи, випишемо розширену матрицю системи та зведемо її до східчастого вигляду:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-7) \\ \leftarrow + \\ \quad\leftarrow + \\ \qquad\leftarrow + \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1)\cdot(-2) \\ \leftarrow + \\ \quad\leftarrow + \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Звідси випливає, що $r(A) = r(\overline{A}) = 2 < 4 = n$. Таким чином, дана СЛАР є сумісною та невизначеною. Оберемо у якості головних змінних (x_1, x_2).

Дійсно, відповідний мінор $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Випишемо перетворену систему та знайдемо її загальний розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3. \end{cases}$$

Перенесемо у праві частини рівнянь вільні змінні (x_3, x_4):

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 + 5x_3, \\ x_2 = -3 - 13x_3 + 5x_4. \end{cases}$$

Звідси $x_2 = -3 - 13x_3 + 5x_4$, та $x_1 = 2 + 5x_3 + x_2 = -1 - 8x_3 + 5x_4$. Тоді загальний розв'язок системи: $X_{\text{з.р.}} = \begin{pmatrix} -1 - 8x_3 + 5x_4 \\ -3 - 13x_3 + 5x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. Якщо покласти, наприклад, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, то отримаємо частинний розв'язок: $X_{\text{ч.р.}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5.2 Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Нагадаємо, що *однорідною* називається СЛАР (4.1), у якої всі вільні члени дорівнюють нулю, тобто СЛАР вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Однорідна система (5.1) завжди є сумісною, оскільки у такої системи $r(A) = r(\overline{A})$. Однорідна система завжди має принаймні один розв'язок: $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, який називається *нульовим* або *тривіальним* розв'язком системи.

Виникає питання: при яких умовах однорідна система має також і ненульові розв'язки? Наступна теорема дає відповідь на це питання.

Теорема 5.1. *Для того, щоб однорідна СЛАР мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці $r(A)$ був меньший за число невідомих n, тобто $r(A) < n$.*

Доведення. Безпосередньо випливає з теореми 4.1. $\square$

Розв'язати однорідну СЛАР означає — знайти її загальний розв'язок, або переконатися, що вона має лише нульовий розв'язок.

Позначимо розв'язок $x_1 = k_1$, $x_2 = k_2$,..., $x_n = k_n$, однорідної системи (5.1) у вигляді вектор-стовпця $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ ... \\ k_n \end{pmatrix}$.

Розв'язки однорідної СЛАР мають наступні властивості:

1) Якщо $\mathbf{e}$ — розв'язок однорідної СЛАР, то $\lambda \cdot \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \lambda k_1 \\ \lambda k_2 \\ ... \\ \lambda k_n \end{pmatrix}$ теж є розв'язком цієї СЛАР, де λ — довільне дійсне число.

2) Якщо $\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ ... \\ k_n \end{pmatrix}$ та $\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ ... \\ l_n \end{pmatrix}$ — розв'язки однорідної СЛАР, то для довільних $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, вектор-стовпець

$$c_1\mathbf{e_1} + c_2\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} c_1k_1 \\ c_1k_2 \\ ... \\ c_1k_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2l_1 \\ c_2l_2 \\ ... \\ c_2l_n \end{pmatrix}$$

також є розв'язком цієї СЛАР.

З цих властивостей випливає, що довільна лінійна комбінація розв'язків однорідної системи є її розв'язком.

Означення 5.1. Система розв'язків однорідної СЛАР $\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ ... \\ k_{1n} \end{pmatrix}$, $\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ ... \\ k_{2n} \end{pmatrix}$,..., $\mathbf{e_s} = \begin{pmatrix} k_{s1} \\ k_{s2} \\ ... \\ k_{sn} \end{pmatrix}$, називається лінійно незалежною, якщо матриця

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} & ... & k_{s1} \\ k_{12} & k_{22} & ... & k_{s2} \\ ... & ... & ... & ... \\ k_{1n} & k_{2n} & ... & k_{sn} \end{pmatrix}$$

має ранг s.

Означення 5.2. Система лінійно незалежних розв'язків $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$,...,$\mathbf{e_s}$, однорідної СЛАР (5.1), називається *фундаментальною системою розвязків* (ФСР) цієї СЛАР, якщо будь-який її розв'язок X є лінійною комбінацією розв'язків $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$,...,$\mathbf{e_s}$, тобто $X = c_1\mathbf{e_1} + c_2\mathbf{e_2} + ... + c_s\mathbf{e_s}$, де c_1, c_2, ..., c_s — довільні дійсні числа.

Розглянемо теорему про загальний розв'язок однорідної СЛАР.

Теорема 5.2. *Якщо ранг $r = r(A)$ основної матриці однорідної СЛАР (5.1) є меншим за число невідомих n, тобто $r < n$, то будь-яка фундаментальна система розв'язків цієї СЛАР складається з $(n-r)$ розв'язків $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, ..., $\mathbf{e_{n-r}}$, причому загальний розв'язок цієї системи є лінійною комбінацією цих розв'язків:*

$$X_{з.о.} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = c_1\mathbf{e_1} + c_2\mathbf{e_2} + ... + c_{n-r}\mathbf{e_{n-r}},$$

c_1, c_2, ..., c_{n-r} — довільні дійсні числа.

Наслідок 5.1. *Загальний розв'язок $X_{з.н.}$ неоднорідної СЛАР (4.1), що складається з m рівнянь з n невідомих, дорівнює сумі загального розв'язку $X_{з.о.}$ відповідної їй однорідної системи (5.1) та довільного частинного розв'язку $X_{ч.н.}$ неоднорідної СЛАР (4.1):*

$$X_{з.н.} = X_{з.о.} + X_{ч.н.}$$

Доведення. Дійсно, нехай

$$X_{\text{з.о.}} = c_1 \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ ... \\ k_{1n} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ ... \\ k_{2n} \end{pmatrix} + ... + c_{n-r} \begin{pmatrix} k_{(n-r)1} \\ k_{(n-r)2} \\ ... \\ k_{(n-r)n} \end{pmatrix}$$

— загальний розв'язок однорідної СЛАР (5.1), що відповідає неоднорідній СЛАР (4.1). Нехай $X_{\text{ч.н.}} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ ... \\ w_n \end{pmatrix}$ — частинний розв'язок неоднорідної СЛАР (4.1). Підставимо замість кожної змінної x_i у систему (4.1) значення $(c_i k_{11} + c_2 k_{2i} + ... + c_{n-r} k_{(n-r)i} + w_i)$, $i = \overline{1, n}$. Легко бачити, що кожне рівняння системи (4.1) перетвориться на вірну рівність, що і доводить наслідок 5.1. $\square$

Однорідні СЛАР як правило розв'язують методом Гаусса. Інші методи для однорідних СЛАР є неефективними. Для квадратних однорідних СЛАР, обчислюючи визначник системи Δ, можна з'ясувати чи є однорідна СЛАР визначною (випадок $\Delta \neq 0$), чи вона є невизначеною (випадок $\Delta = 0$). У випадку, коли квадратна однорідна СЛАР є невизначеною, знайти її загальний розв'язок можна лише методом Гаусса.

Приклад 5.2. Розв'язати однорідну СЛАР: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

Випишемо основну матрицю системи і зведемо її до східчастого вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3)\cdot(-4) \\ \leftarrow + \quad | \\ \quad | \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3)\cdot 2 \\ \leftarrow + \quad | \\ \leftarrow + \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $r(A) = 2$, тобто система має безліч розв'язків.

Запишемо перетворену систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ \qquad -x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4x_3 + 3x_4, \\ \qquad x_2 = -6x_3 + 5x_4, \end{cases}$$

тобто загальний розв'язок системи:

$$X_{\text{з.о.}} = \begin{pmatrix} 8x_3 - 7x_4 \\ -6x_3 + 5x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4.$$

Надаючи вільним змінним x_3 та x_4 різні дійсні значення отримаємо різні частинні розв'язки однорідної системи.

Вектор-стовпці $\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ та $\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ складають фундаментальну систему розв'язків (ФСР) даної СЛАР.

Частина II

Елементи векторної алгебри

6 Геометричні вектори на площині і в просторі. Лінійні операції над векторами.

6.1 Основні поняття.

Величини, які повністю визначаються своїм чисельним значенням, називаються скалярними. Наприклад, площа, об'єм, температура, маса. Інші величини, наприклад, сила, швидкість, прискорення, визначаються не тільки своїм чисельним значенням, але й напрямом. Такі величини називаються векторними. Векторна величина геометрично зображається за допомогою вектора.

Означення 6.1. *Вектор* – це напрямлений прямолінійний відрізок, тобто візрізок, який має певну довжину і певний напрямок.

Якщо, точка A – початок вектора, а точка B – його кінець, тоді вектор позначається символом $\overrightarrow{AB}$ або $\overrightarrow{a}$.

Означення 6.2. Вектор $\overrightarrow{BA}$ (його початок в точці B, а кінець в точці A) називається *протилежним* ветору $\overrightarrow{AB}$. Вектор, протилежний ветору $\overrightarrow{a}$, позначається $-\overrightarrow{a}$.

Означення 6.3. *Довжиною* або *модулем* вектора $\overrightarrow{AB}$ називається довжина відрізка від точки A до точки B, і позначається $|\overrightarrow{AB}|$.

Означення 6.4. Вектор, довжина якого дорівнює нулю, називається *нульовим* ветором і позначається $\overrightarrow{0}$. Нульовий вектор напряму не має.

Означення 6.5. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається *одиничним* вектором і позначається $\overrightarrow{e}$. Одиничний вектор, напрям якого співпадає з напрямом вектора $\overrightarrow{a}$, називається *ортом* вектора $\overrightarrow{a}$ і позначається $\overrightarrow{a}^0$.

Означення 6.6. Вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Позначення: $\overrightarrow{a} || \overrightarrow{b}$.

Якщо колінеарні вектори мають один напрям, то їх називають *співнаправленими* і позначають $\overrightarrow{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{b}$; якщо колінеарні вектори мають протилежні напрями, то їх називають *протилежно направленими* і позначають $\overrightarrow{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{b}$.

Нульовий вектор вважається колінеарним будь-якому вектору.

Означення 6.7. Вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ називаються *рівними*, якщо вони колінеарні, однаково направлені і мають однакові довжини. Позначення: $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$.

З означення рівності векторів випливає, що вектор можна переносити паралельно самому собі, а початок вектора поміщати в будь яку точку O простору.

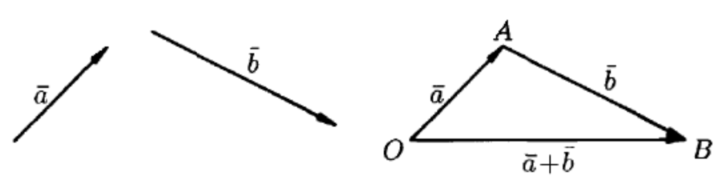
Означення 6.8. Три вектори в просторі називаються *компланарними*, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Якщо серед трьох векторів хоча б один нульовий або два вектори колінеарні, то такі вектори компланарні.

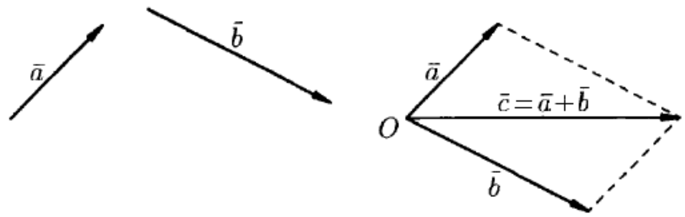
6.2 Лінійні операції над векторами.

Під лінійними операціями над векторами розуміють операції додавання та віднімання веторів, а також множення вектора на число.

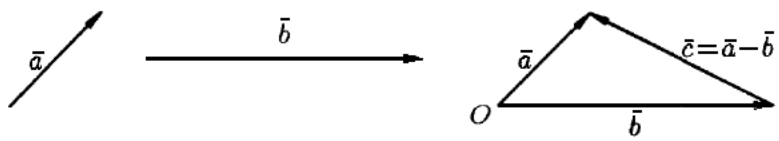
Нехай $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$ — два довільних вектори. Візьмемо довільну точку O та побудуємо вектор $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$. Відкладемо від точки A вектор $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$. Вектор $\overrightarrow{OB}$, що з'єднує початок вектора $\overrightarrow{a}$ та кінець вектора $\overrightarrow{b}$, називається **сумою** векторів $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$: $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.



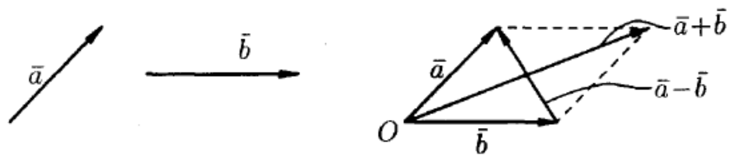
Це правило додавання векторів називається *правилом трикутника.* Суму двох векторів можна побудувати також за *правилом паралелограма*:



Під **різницею** векторів $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$ розуміють вектор $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ такий, що $\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}$.



Зауважимо, що у паралелограмі, побудованому на векторах $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$ одна направлена діагональ є сумою векторів $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$, а інша — різницею.



Добутком вектора $\overrightarrow{a}$ на скаляр (число) λ називається вектор $\lambda\overrightarrow{a}$, який має довжину $|\lambda| \cdot |\overrightarrow{a}|$, колінеарний вектору $\overrightarrow{a}$, причому співнаправлений з вектором $\overrightarrow{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежного з вектором $\overrightarrow{a}$ напрямку, якщо $\lambda < 0$.

Приклад 6.1. Для вектора $\overrightarrow{a}$ на малюнку зображено вектори $-2\overrightarrow{a}$ та $3\overrightarrow{a}$.

Властивості добутку вектора на число:

1) Якщо $\overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a}$, то $\overrightarrow{b} \parallel \overrightarrow{a}$. Навпаки, якщо $\overrightarrow{b} \parallel \overrightarrow{a}$, ($\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$), то існує деяке число $\lambda \neq 0$ таке, що $\overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a}$.

2) Для будь-якого вектора $\overrightarrow{a}$ виконується $\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cdot \overrightarrow{a}^0$.

Властивості лінійних операцій над векторами:

1) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$;

2) $\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c}$;

3) $\lambda_1(\lambda_2\overrightarrow{a}) = (\lambda_1\lambda_2)\overrightarrow{a}$;

4) $(\lambda_1 + \lambda_2)\overrightarrow{a} = \lambda_1\overrightarrow{a} + \lambda_2\overrightarrow{a}$;

5) $\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}$.

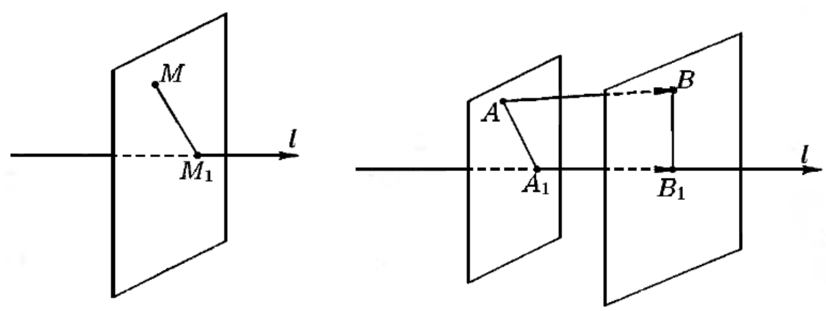
6.3 Проекція вектора на вісь.

Нехай у просторі задана вісь l, тобто напрямлена пряма.

Означення 6.9. *Проекцією точки* M *на вісь* l називається основа M_1 перпендикуляра MM_1, опущеного з точки M на вісь l.

Точка M_1 є точкою перетину осі l з площиною, яка проходить через точку M перпендикулярно осі l.

Якщо точка M лежить на осі l, то проекція точки M співпадає з M.



Нехай $\overrightarrow{AB}$ - довільний вектор ($\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{0}$). Позначимо через A_1 і B_1 проекції на вісь l відповідно початку A і кінця B вектору $\overrightarrow{AB}$, і розглянемо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$.

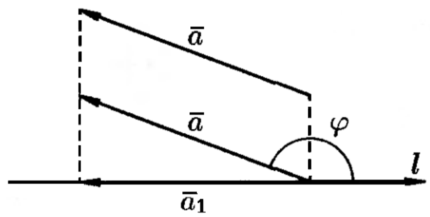
Означення 6.10. *Проекцією вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на вісь* l називається додатнє число $|\overrightarrow{A_1B_1}|$, якщо ветор $\overrightarrow{A_1B_1}$ та вісь l співнаправлені, і від'ємне число $-|\overrightarrow{A_1B_1}|$, якщо ветор $\overrightarrow{A_1B_1}$ та вісь l протилежно направлені. Якщо точки A_1 і B_1 співпадають ($\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{0}$), тоді проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l дорівнює нулю.

Проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l позначається так: $np_l\overrightarrow{AB}$. Якщо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ або $\overrightarrow{AB} \perp l$, то $np_l\overrightarrow{AB} = 0$.

Кут між вектором $\overrightarrow{AB}$ та віссю l будемо позначати φ. Очевидно, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Властивості проекції вектора на вісь

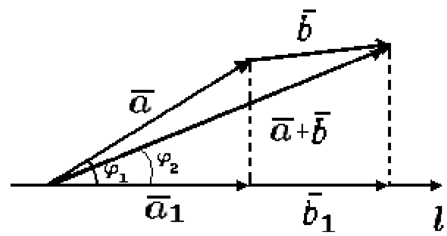
Властивість 1. Проекція вектора $\overrightarrow{a}$ на вісь l дорівнює добутку модуля вектора $\overrightarrow{a}$ на косинус кута φ між вектором $\overrightarrow{a}$ та віссю l, тобто $np_l\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|\cos\varphi$.



Доведення. Якщо $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{a}, l}) < \frac{\pi}{2}$, то $np_l \overrightarrow{a} = +|\overrightarrow{a}_1| = |\overrightarrow{a}| \cos\varphi$. Якщо $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{a}, l}) > \frac{\pi}{2}$, то $np_l \overrightarrow{a} = -|\overrightarrow{a}_1| = -|\overrightarrow{a}| \cos(\pi - \varphi) = |\overrightarrow{a}| \cos\varphi$. Якщо $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{a}, l}) = \frac{\pi}{2}$, то $np_l \overrightarrow{a} = 0 = |\overrightarrow{a}| \cos\varphi$. □

Наслідок 1 *з властивості* 1: Проекція вектора на вісь додатня (від'ємна), якщо вектор утворює з віссю гострий (тупий) кут, і дорівнює нулю, якщо цей кут – прямий.
Наслідок 2 *з властивості* 1: Проекції рівних векторів на одну і ту саму вісь є рівними між собою.
Властивість 2. Проекція суми векторів на одну і ту ж саму вісь дорівнює сумі їх проекцій на цю вісь, тобто $np_l(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = np_l \overrightarrow{a} + np_l \overrightarrow{b}$.

Доведення. Нехай задано два вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$. Помістимо початок вектора $\overrightarrow{b}$ у кінець вектора $\overrightarrow{a}$. Якщо $\varphi_1 = (\widehat{\overrightarrow{a}, l}) < \frac{\pi}{2}$, і $\varphi_2 = (\widehat{\overrightarrow{b}, l}) < \frac{\pi}{2}$, то $np_l \overrightarrow{a} = +|\overrightarrow{a}_1|$, і $np_l \overrightarrow{b} = +|\overrightarrow{b}_1|$. Крім того, $np_l(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a}_1| + |\overrightarrow{b}_1|$. Отже, властивість 2) у цьому випадку виконується.



Якщо $\varphi_1 = (\widehat{\overrightarrow{a}, l}) > \frac{\pi}{2}$, і $\varphi_2 = (\widehat{\overrightarrow{b}, l}) > \frac{\pi}{2}$, то, очевидно, $np_l \overrightarrow{a} = -|\overrightarrow{a}_1|$ і $np_l \overrightarrow{b} = -|\overrightarrow{b}_1|$. Крім того, $np_l(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = -|\overrightarrow{a}_1| - |\overrightarrow{b}_1|$. Отже, властивість 2) у цьому випадку також виконується.

Аналогічно, якщо $\varphi_1 = (\widehat{\overrightarrow{a}, l}) < \frac{\pi}{2}$, а $\varphi_2 = (\widehat{\overrightarrow{b}, l}) > \frac{\pi}{2}$, то $np_l \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}_1|$ і $np_l \overrightarrow{b} = -|\overrightarrow{b}_1|$. Крім того, $np_l(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a}_1| - |\overrightarrow{b}_1|$. □

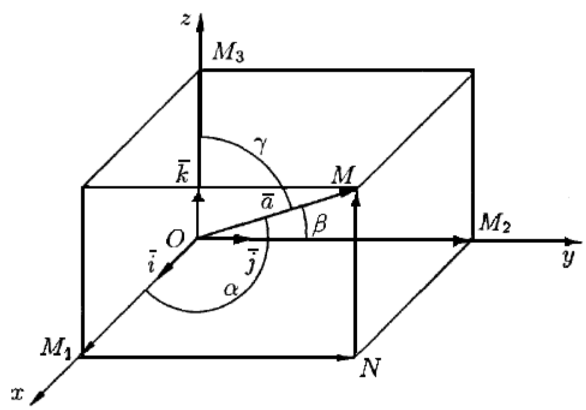
Властивість 3. При множенні вектора $\overrightarrow{a}$ на число λ його проекція на вісь l також множиться на це число, тобто $np_l(\lambda \overrightarrow{a}) = \lambda \cdot np_l \overrightarrow{a}$.

Доведення. При $\lambda > 0$ маємо $np_l(\lambda \cdot \overrightarrow{a}) = |\lambda \cdot \overrightarrow{a}| \cdot \cos\varphi = \lambda \cdot |\overrightarrow{a}| \cdot \cos\varphi = \lambda \cdot np_l \overrightarrow{a}$. При $\lambda < 0$ маємо $np_l(\lambda \cdot \overrightarrow{a}) = |\lambda \cdot \overrightarrow{a}| \cdot \cos(\pi - \varphi) = -\lambda \cdot |\overrightarrow{a}| \cdot (-\cos\varphi) = \lambda \cdot np_l \overrightarrow{a}$. При $\lambda = 0$, справедливість властивості 3) очевидна. □

Таким чином, лінійні операції над векторами породжують відповідні лінійні операції над їх проекціями.

6.4 Розклад вектора по ортах координатних осей. Модуль вектора. Напрямні косинуси.

Розглянемо у просторі прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Виділимо на осях Ox, Oy, Oz одиничні вектори (орти), які позначаються $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ відповідно. Виберемо довільний вектор $\overrightarrow{a}$ простору та перенесемо його початок у початок координат: $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OM}$.



Знайдемо проекції вектора $\overrightarrow{a}$ на координатні осі. Для цього проведемо через кінець M вектора $\overrightarrow{OM}$ площини, паралельні координатним площинам. Точки перетину цих площин з координатними осями позначимо M_1, M_2 та M_3 відповідно. Отримаємо прямокутний паралелепіпед, однією з діагоналей якого є вектор $\overrightarrow{OM}$. Тоді $np_{Ox} \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{OM_1}|$, $np_{Oy} \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{OM_2}|$ та $np_{Oz} \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{OM_3}|$. Крім того,

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}.$$

Але $\overrightarrow{OM_1} = |\overrightarrow{OM_1}| \cdot \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{OM_2} = |\overrightarrow{OM_2}| \cdot \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{OM_3} = |\overrightarrow{OM_3}| \cdot \overrightarrow{k}$. Позначимо $|\overrightarrow{OM_1}| = a_x$, $|\overrightarrow{OM_2}| = a_y$ та $|\overrightarrow{OM_3}| = a_z$. Тоді

$$\overrightarrow{a} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}. \tag{6.1}$$

Рівність (6.1) називається *розкладом вектора по ортах координатних осей*, а числа a_x, a_y, a_z — координатами вектора. Таким чином, координати вектора є його проекції на відповідні координатні осі. Рівність (6.1) часто записують у скороченій формі наступним чином: $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

За відомими координатами вектора легко знайти його модуль. Оскільки вектор $\overrightarrow{a}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда, то $|\overrightarrow{OM}|^2 = |\overrightarrow{OM_1}|^2 + |\overrightarrow{OM_2}|^2 + |\overrightarrow{OM_3}|^2$, тобто

$$|\overrightarrow{a}|^2 = |a_x|^2 + |a_y|^2 + |a_z|^2,$$

звідки

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{|a_x|^2 + |a_y|^2 + |a_z|^2}.$$

Отже, модуль вектора дорівнює квадратному кореню з суми квадратів його проекцій на координатна осі.

Нехай кути вектора $\overrightarrow{a}$ з осями Ox, Oy та Oz відповідно дорівнюють α, β та γ. З властивості 1 проекції вектора на вісь, маємо

$$a_x = |\overrightarrow{a}| \cdot \cos\alpha, \quad a_y = |\overrightarrow{a}| \cdot \cos\beta, \quad a_z = |\overrightarrow{a}| \cdot \cos\gamma.$$

Звідси випливає, що

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overrightarrow{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\overrightarrow{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overrightarrow{a}|}.$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються напрямними косинусами вектора $\overrightarrow{a}$. Напрямні косинуси вектора задавольняють співвідношення:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Підкреслимо, що координатами орта $\overrightarrow{a}^0$ вектора $\overrightarrow{a}$ є напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{a}$, тобто $\overrightarrow{a}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Зауважимо, що згідно з введеним поняттям координат геометричного вектора, орти осей Ox, Oy, Oz відповідно мають координати: $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$.

6.5 Дії над векторами, заданими проекціями.

Нехай вектори $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ та $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$ задані своїми проекціями на осі координат Ox, Oy, Oz, або що теж саме

$$\overrightarrow{a} = a_x\overrightarrow{i} + a_y\overrightarrow{j} + a_z\overrightarrow{k}, \quad \overrightarrow{b} = b_x\overrightarrow{i} + b_y\overrightarrow{j} + b_z\overrightarrow{k}.$$

Лінійні операції над векторами зводяться до відповідних лінійних операцій над їх проекціями, тобто

1) $\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} = (a_x \pm b_x)\overrightarrow{i} + (a_y \pm b_y)\overrightarrow{j} + (a_z \pm b_z)\overrightarrow{k}$, або скорочено $\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$;
2) $\lambda\overrightarrow{a} = \lambda a_x \overrightarrow{i} + \lambda a_y \overrightarrow{j} + \lambda a_z \overrightarrow{k}$, або скорочено $\lambda\overrightarrow{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$.
Рівність векторів. Два вектора $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ та $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$ рівні тоді і тільки тоді, коли

$$a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z.$$

Умова колінеарності векторів. Оскільки $\overrightarrow{a} || \overrightarrow{b}$, то існує деяке число λ таке, що $\overrightarrow{a} = \lambda \overrightarrow{b}$, тобто

$$a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k} = \lambda b_x \overrightarrow{i} + \lambda b_y \overrightarrow{j} + \lambda b_z \overrightarrow{k}.$$

Звідси отримаємо, що $a_x = \lambda b_x, \quad a_y = \lambda b_y, \quad a_z = \lambda b_z$, а отже

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda.$$

Таким чином, проекції колінеарних векторів пропорційні. Обернене твердження також вірне: якщо вектори мають пропорційні координати, то вони колінеарні.

6.6 Координати точки та вектора.

Розглянемо у просторі прямокутну систему координат $Oxyz$. Для будь-якої точки M простору координати вектора $\overrightarrow{OM}$ називаються координатами точки M. Вектор $\overrightarrow{OM}$ називається радіус-вектором точки M та позначається $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r}$. Таким чином, координати точки — це координати її радіус-вектора $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$:

$$\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}.$$

Координати точки M записуються у вигляді: $M(x, y, z)$.

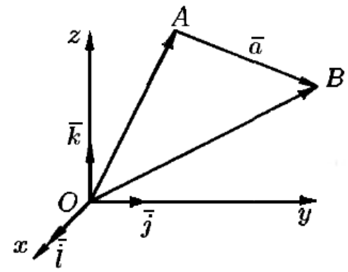
Знайдемо тепер координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо відомі координати точок $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$. Маємо

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j} + z_2\overrightarrow{k}) - (x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j} + z_1\overrightarrow{k}) =$$

$$= (x_2 - x_1)\overrightarrow{i} + (y_2 - y_1)\overrightarrow{j} + (z_2 - z_1)\overrightarrow{k}.$$

Таким чином, координати вектора дорівнюють різниці відповідних координат його кінця та початку:

$$\overrightarrow{AB} = ((x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)).$$



Для векторів, заданих на площині, всі поняття, викладені в підрозділах 6.4–6.7, вводяться цілком аналогічно.

7 Лінійна залежність і незалежність системи векторів. База і базис системи векторів. Базис на площині і в просторі

7.1 Узагальнення поняття вектора. n-вимірний алгебраїчний простір

У попередній лекції розглядалися геометричні вектори на площині і в просторі. Для таких векторів було встановлено, що вектор однозначно задається своїми координатами (проекціями на координатні осі) у введеній системі координат. При цьому операції додавання та множення на число для векторів, заданих координатами, можна безпосередньо вводити за правилами з підрозділу 6.5. Таким чином, з алгебраїчної точки зору, вектор — це впорядкований набір чисел. Наприклад, на площині — це впорядкований набір двох чисел, записаних у вигляді рядка: $\overrightarrow{a} = \big(a_x, a_y\big)$, у просторі — це впорядкований набір трьох чисел, записаних у вигляді рядка: $\overrightarrow{a} = \big(a_x, a_y, a_z\big)$. Узагальнюючи поняття вектора, під *вектором* будемо розуміти впорядкований набір n чисел (координат), записаних у вигляді рядка: $\overrightarrow{a} = \big(a_1, a_2, ..., a_n\big)$.

Розглянемо множину всіх впорядкованих наборів n дійсних чисел, та введемо на ній операції додавання та множення на число $\lambda \in \mathbb{R}$ за наступними правилами:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n);$$

$$\lambda \overrightarrow{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n).$$

Множину всіх впорядкованих наборів n дійсних чисел $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ з введеними операціями додавання та множення на число, називають *n-вимірним векторним* або *алгебраїчним простором* та позначають $\mathbb{R}^n$. Очевидно, що для довільних векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ з простору $\mathbb{R}^n$ та будь-яких дійсних чисел λ, μ виконуються наступні властивості:

1) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$;

2) $\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c}$;

3) у множині $\mathbb{R}^n$ існує нульовий вектор $\overrightarrow{0}$ такий, що $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$, для будь-якого $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$;

4) для кожного $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$ існує протилежний вектор $(-\overrightarrow{a}) \in \mathbb{R}^n$ такий, що $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$;
5) $1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$;
6) $\lambda(\mu \overrightarrow{a}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{a}$;
7) $(\lambda + \mu)\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a}$;
8) $\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}$.

7.2 Лінійна залежність і незалежність системи векторів.

Нехай у деякому n-вимірному просторі із введеною системою координат задано вектори $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$,..., $\overrightarrow{a}_m$.

Означення 7.1. Система векторів $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$,...,$\overrightarrow{a}_m$ називається *лінійно залежною*, якщо існують такі дійсні числа c_1, c_2,...,c_m, хоча б одне з яких не дорівнює нулю, що

$$c_1\overrightarrow{a}_1 + c_2\overrightarrow{a}_2 + ... + c_m\overrightarrow{a}_m = \overrightarrow{0}. \tag{7.1}$$

Якщо рівність (7.1) виконується тільки, коли всі $c_1 = c_2 = ... = c_m = 0$, то система векторів $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$,...,$\overrightarrow{a}_m$ називається *лінійно незалежною*.

Властивості лінійної залежності і незалежності векторів

Властивість 1. Якщо серед векторів $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$,...,$\overrightarrow{a}_m$ є нульовий вектор, то система векторів є лінійно залежною.

Доведення. Нехай вектор $\overrightarrow{a}_m = \overrightarrow{0}$. Тоді існують дійсні числа c_1, c_2,...,c_{m-1}, c_m, причому принаймні одне з них не рівне нулю: $c_m \neq 0$ (наприклад, покладемо $c_m = 1$), що

$$c_1\overrightarrow{a}_1 + c_2\overrightarrow{a}_2 + ... + c_{m-1}\overrightarrow{a}_{m-1} + 1 \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}.$$

Отже, вектори $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$,...,$\overrightarrow{a}_m$ — лінійно залежні. □

Властивість 2. Якщо вектори $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$,...,$\overrightarrow{a}_k$, $(k \leq m)$ системи векторів $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$,...,$\overrightarrow{a}_m$ є лінійно залежними, то і всі вектори $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$,...,$\overrightarrow{a}_m$ цієї системи є лінійно залежними.

Доведення. Оскільки вектори $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$,..., $\overrightarrow{a}_k$ — лінійно залежні, то за означенням існують такі дійсні числа c_1, c_2,...,c_k, серед яких є принаймні одне число не рівне нулю, що

$$c_1\overrightarrow{a}_1 + c_2\overrightarrow{a}_2 + ... + c_k\overrightarrow{a}_k = \overrightarrow{0}.$$

Покладемо $c_{k+1} = c_{k+2} = ... = c_m = 0$. Тоді

$$c_1\overrightarrow{a}_1 + c_2\overrightarrow{a}_2 + ... + c_k\overrightarrow{a}_k + 0\overrightarrow{a}_{k+1} + 0\overrightarrow{a}_{k+2} + ... + 0\overrightarrow{a}_m = \overrightarrow{0}.$$

Таким чином, система векторів $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$,..., $\overrightarrow{a}_m$ — лінійно залежна. □

Безпосередньо з властивості 2) випливає, що якщо до системи векторів, які є лінійно залежними, додати будь-які вектори, то система векторів залишиться лінійно залежною.

Теорема 7.1. *Для того, щоб вектори $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$,..., $\overrightarrow{a}_m$ були лінійно залежними, необхідно і достатньо, щоб один з них був лінійною комбінацією інших векторів системи.*

Доведення. Доведемо необхідність. Нехай вектори $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$,..., $\overrightarrow{a}_m$ — лінійно залежні. Тоді за означенням існують такі числа c_1, c_2,...,c_m, серед яких хоча б одне не рівне нулю, що

$$c_1\overrightarrow{a}_1 + c_2\overrightarrow{a}_2 + ... + c_m\overrightarrow{a}_m = \overrightarrow{0}.$$

Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $c_m \neq 0$. Тоді

$$\overrightarrow{a}_m = -\frac{c_1}{c_m}\overrightarrow{a}_1 - \frac{c_2}{c_m}\overrightarrow{a}_2 - ... - \frac{c_{m-1}}{c_m}\overrightarrow{a}_{m-1},$$

тобто вектор $\overrightarrow{a}_m$ є лінійною комбінацією векторів $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$,..., $\overrightarrow{a}_{m-1}$.

Доведемо достатність. Нехай вектор $\overrightarrow{a}_m$ є лінійною комбінацією векторів $\overrightarrow{a}_2$,..., $\overrightarrow{a}_{m-1}$, тобто

$$\overrightarrow{a}_m = c_1\overrightarrow{a}_1 + c_2\overrightarrow{a}_2 + ... + c_{m-1}\overrightarrow{a}_{m-1},$$

для деяких дійсних чисел c_1, c_2,...,c_{m-1}. Але тоді

$$c_1\overrightarrow{a}_1 + c_2\overrightarrow{a}_2 + ... + c_{m-1}\overrightarrow{a}_{m-1} - \overrightarrow{a}_m = \overrightarrow{0},$$

звідки випливає, що вектори $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$,..., $\overrightarrow{a}_m$ — лінійно залежні. □

Наслідок 7.1. *Система, що складається з одного вектора, лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли цей вектор — нульовий.*

Доведення. Безпосередньо випливає з теореми 7.1, оскільки $\lambda \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$ для будь-якого $\lambda \in \mathbb{R}$. □

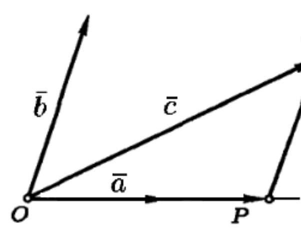
Наслідок 7.2. *Система двох векторів є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли ці вектори - колінеарні.*

Доведення. Безпосередньо випливає з теореми 7.1, оскільки два ненульових вектори $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$ колінеарні ($\overrightarrow{a} || \overrightarrow{b}$) тоді і тільки тоді, коли існує деяке дійсне число $\lambda \neq 0$ таке, що $\overrightarrow{a} = \lambda \overrightarrow{b}$. □

Наслідок 7.3. *Система трьох векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{c}$ є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли ці вектори компланарні. При цьому, третій вектор є лінійною комбінацією двох інших, тобто існують $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ такі, що $\overrightarrow{c} = \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b}$.*

Доведення. Доведемо необхідність. Нехай три вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{c}$ — лінійно залежні. Тоді $\alpha_1 \overrightarrow{a} + \alpha_2 \overrightarrow{b} + \alpha_3 \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$, для деяких дійсних чисел α_1, α_2, α_3. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $\alpha_3 \neq 0$. Звідси випливає, що $\overrightarrow{c} = \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b}$, де $\alpha = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3}$, $\beta = -\frac{\alpha_2}{\alpha_3}$. Отже, вектор $\overrightarrow{c}$ розкладається за векторами $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$. Звідси випливає, що вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{c}$ компланарні.

Доведемо достатність. Нехай вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{c}$ компланарні. Якщо серед трьох векторів є принаймні два колінеарних, то з властивості 2 та наслідку 2 випливає, що всі три вектори є лінійно залежними. Тому будемо припускати, що вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{c}$ не є попарно колінеарними. Помістимо початки векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{c}$ у спільну точку O площини.



Проведемо через кінець C вектора $\overrightarrow{c}$ пряму, паралельну вектору $\overrightarrow{b}$, до перетину в точці P з прямою, на якій лежить вектор $\overrightarrow{a}$. Тоді $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC}$, причому вектори $\overrightarrow{OP}$ і $\overrightarrow{PC}$ колінеарні відповідно векторам $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$. Таким чином, існують числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ такі, що $\overrightarrow{OP} = \alpha \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{PC} = \beta \overrightarrow{b}$. Отже, $\overrightarrow{c} = \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b}$, тобто вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{c}$ — лінійно залежні. □

З наслідку 7.3 випливає, що *будь-який вектор площини можна розкласти за двома неколінеарними векторами.* Отже, будь-які три вектори, що лежать у одній площині, — лінійно залежні.

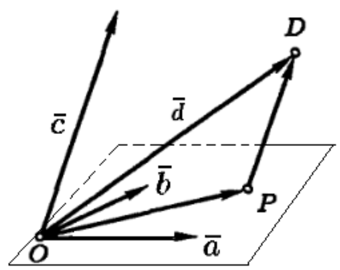
Наслідок 7.4. *Будь-які чотири вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ та $\overrightarrow{d}$ простору $\mathbb{R}^3$ є лінійно залежними, тобто четвертий вектор є лінійною комбінацією трьох інших:*

$$\overrightarrow{d} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c},$$

для деяких $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Доведення. Нехай вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ — некомпланарні. Інакше за наслідком 3 вони є лінійно залежними, а значить і всі чотири вектори є лінійно залежними.

Помістимо початки всіх векторів у спільну точку O простору та проведемо через кінець D вектора $\overrightarrow{d}$ пряму, паралельну вектору $\overrightarrow{c}$, до перетину у точці P з площиною, на якій лежать вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$.



Тоді $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PD}$, причому $\overrightarrow{OP}$ компланарний векторам $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, а $\overrightarrow{PD}$ колінеарний вектору $\overrightarrow{c}$. Але згідно з наслідком 7.3 вектор $\overrightarrow{OP}$ розкладається за векторами $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, а вектор $\overrightarrow{PD}$ — за вектором $\overrightarrow{c}$. Таким чином, існують числа $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ такі, що $\overrightarrow{d} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c}$, тобто вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$ — лінійно залежні. □

7.3 База і базис системи векторів.

Означення 7.2. *Базою* системи векторів $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$,..., $\overrightarrow{a}_m$ називається така її підсистема $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$,..., $\overrightarrow{a}_k$ $(k \leq m)$, що

а) вектори цієї підсистеми є лінійно незалежними;

б) будь-який інший вектор системи є лінійною комбінацією векторів $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$,..., $\overrightarrow{a}_k$, тобто для всіх $k+1 \leq l \leq m$,

$$\overrightarrow{a}_l = c_1\overrightarrow{a}_1 + c_2\overrightarrow{a}_2 + ... + c_k\overrightarrow{a}_k, \tag{7.2}$$

де c_1, c_2,...,c_k — деякі дійсні числа.

При цьому рівність (7.2) називається *розкладом вектора $\overrightarrow{a}_l$ за базою $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$,..., $\overrightarrow{a}_k$*, числа c_1, c_2,...,c_k — *координатами вектора $\overrightarrow{a}_l$* у базі.

Теорема 7.2. *Система m векторів $\overrightarrow{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$, $\overrightarrow{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n})$,..., $\overrightarrow{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn})$ містить базу, що складається з k векторів системи ($k \leq m$), якщо ранг матриці, рядками якої є координати векторів системи,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

дорівнює k. При цьому до бази входять ті вектори системи, координати яких утворюють базисний мінор матриці A.

Приклад 7.1. З'ясувати, які з векторів системи: $\overrightarrow{a}_1 = (1, 2, 0, 0)$, $\overrightarrow{a}_2 = (1, 2, 3, 4)$, $\overrightarrow{a}_3 = (3, 6, 0, 0)$ утворюють базу.

Складемо матрицю з координат векторів системи і зведемо її до східчастого вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці $r(A) = 2$, а отже з трьох заданих векторів $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$, $\overrightarrow{a}_3$ базу утворюють вектори $\overrightarrow{a}_1$ і $\overrightarrow{a}_2$, а вектор $\overrightarrow{a}_3$ лінійно виражається через вектори $\overrightarrow{a}_1$ і $\overrightarrow{a}_2$, тобто існують дійсні числа α і β такі, що $\overrightarrow{a}_3 = \alpha\overrightarrow{a}_1 + \beta\overrightarrow{a}_2$. Очевидно, в цьому випадку $\alpha = 3$ і $\beta = 0$.

Означення 7.3. База, що містить n векторів $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$,..., $\overrightarrow{a}_n$ у деякому n-вимірному алгебраїчному просторі $\mathbb{R}^n$, називається *базисом* у цьому просторі.

Наслідок 7.5. *Система n векторів $\overrightarrow{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$, $\overrightarrow{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n})$,..., $\overrightarrow{a}_n = (a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn})$ утворює базис в n-вимірному алгебраїчному просторі $\mathbb{R}^n$ тоді і тільки тоді, коли визначник, рядками якого є координати векторів системи, не дорівнює нулю, тобто*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

З наслідків 7.1–7.4 випливає, що серед всіх векторів, заданих у одновимірному просторі (на прямій) базис складається з одного ненульового вектора. Серед всіх векторів, заданих **на площині, базис складається**

з двох неколінеарних векторів. Серед всіх векторів, заданих **у тривимірному просторі, базис складається з трьох некомпланарних векторів**.

Серед найрізноманітніших базисів особливу роль відіграють ті, у яких базисні вектори взаємно перпендикулярні і мають одиничну довжину. Такі базиси називають *ортонормованими*. На площині – це система двох векторів $\overrightarrow{e}_1 = (1,0)$ і $\overrightarrow{e}_2 = (0,1)$. У просторі $\mathbb{R}^3$ — це система трьох векторів $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$, $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$.

Приклад 7.2. Переконатися, що система векторів $\overrightarrow{a} = (2,3,1)$, $\overrightarrow{b} = (5,7,0)$, $\overrightarrow{c} = (3,-2,4)$ утворює базис у множині всіх векторів простору, і знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (4,12,-3)$ у цьому базисі.

Спочатку переконаємось, що вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ є лінійно незалежними тобто утворюють базис. Для цього складемо і обчислимо визначник з координат векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -35 \neq 0.$$

Тому за наслідком 7.5 вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ є лінійно незалежними, тобто утворюють базис у множині всіх векторів простору.

Нехай α, β, γ — координати вектора $\overrightarrow{d}$ у базисі $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, тобто

$$\overrightarrow{d} = \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b} + \gamma \overrightarrow{c}.$$

Розпишемо цю рівність

$$(4,12,-3) = \alpha(2,3,1) + \beta(5,7,0) + \gamma(3,-2,4),$$

звідки

$$\begin{cases} 2\alpha + 5\beta + 3\gamma = 4, \\ 3\alpha + 7\beta - 2\gamma = 12, \\ \alpha \qquad\quad + 4\gamma = -3. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю СЛАР, отримаємо $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$, тобто розклад вектора $\overrightarrow{d}$ за базисом $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ має вигляд:

$$\overrightarrow{d} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}.$$

8 Скалярний добуток векторів, його властивості, застосування. Векторний добуток векторів, його властивості

8.1 Скалярний добуток векторів, його властивості.

Означення 8.1. *Скалярним добутком* двох ненульових векторів $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$ називається число, що дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними (позначається $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ або $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$), тобто

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\varphi,$$

де $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}})$.

З означення проеції вектора на вісь випливає, що $|\overrightarrow{a}| \cdot \cos\varphi = np_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$, і $|\overrightarrow{b}| \cdot \cos\varphi = np_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b}$, а отже

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{b}| \cdot np_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cdot np_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b},$$

тобто скалярний добуток двох векторів дорівнює модулю одного з них, помноженому на проекцію другого вектора на вісь співнаправлену з першим вектором.

Властивості скалярного добутку

Властивість 1. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$ (комутативність скалярного добутку).

Доведення. Дійсно, $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}) = |\overrightarrow{b}| \cdot |\overrightarrow{a}| \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}}) = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$. □

Властивість 2. $(\lambda\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = \lambda \cdot (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})$ (асоціативність скалярного добутку відносно числового множника).

Доведення. $(\lambda\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{b}| \cdot np_{\overrightarrow{b}}(\lambda\overrightarrow{a}) = \lambda \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot np_{\overrightarrow{b}}(\overrightarrow{a}) = \lambda \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot |\overrightarrow{a}| \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}) = \lambda \cdot (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})$. □

Властивість 3. $\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$ (дистрибутивність скалярного добутку).

Доведення. Дійсно, $\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a}\cdot np_{\overrightarrow{a}}(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a}\cdot np_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot np_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$. □

Властивість 4. $\overrightarrow{a}^2 = |\overrightarrow{a}|^2$.

Доведення. Дійсно, $\overrightarrow{a}^2 = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{a}|\cdot\cos 0^\circ = |\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{a}|^2$. □

Зокрема, з властивості 4 випливає, що для будь-якого вектора $\overrightarrow{a}$ скалярний добуток $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}\geq 0$. При цьому, $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$.

Крім того, з властивості 4 випливає, що $\overrightarrow{i}^2 = \overrightarrow{j}^2 = \overrightarrow{k}^2 = 1$.

Властивість 5. Вектори $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$ перпендикулярні, тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 0.$$

Доведення. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$ і $\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$.

Доведемо необхідність. Нехай вектори $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$ перпендикулярні, тобто $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Тоді $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Доведемо достатність. Нехай $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 0$. Оскільки $|\overrightarrow{a}|\neq 0$, і $|\overrightarrow{b}|\neq 0$, то $\cos(\widehat{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}}) = 0$. Звідси $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}}) = \frac{\pi}{2}$ або $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}}) = \frac{3\pi}{2}$, тобто $\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$. □

Зокрема, з властивості 5 випливає, що $\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{j} = \overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{k} = \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{k} = 0$.

Властивість 6. $|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|\leq|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|$ (нерівність Коші-Буняковського для скалярного добутку).

Доведення. Очевидно випливає з означення скалярного добутку. □

Скалярний добуток векторів, заданих координатами

Нехай вектори $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$ задані своїми координатами у просторі $\mathbb{R}^3$, тобто $\overrightarrow{a} = a_x\overrightarrow{i}+a_y\overrightarrow{j}+a_z\overrightarrow{k}$, і $\overrightarrow{b} = b_x\overrightarrow{i}+b_y\overrightarrow{j}+b_z\overrightarrow{k}$. Тоді

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = (a_x\overrightarrow{i}+a_y\overrightarrow{j}+a_z\overrightarrow{k})\cdot(b_x\overrightarrow{i}+b_y\overrightarrow{j}+b_z\overrightarrow{k}) =$$

$$= a_x\cdot b_x\cdot\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{i}+a_x\cdot b_y\cdot\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{j}+a_x\cdot b_z\cdot\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{k}+$$

$$+a_y \cdot b_x \cdot \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i} + a_y \cdot b_y \cdot \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} + a_y \cdot b_z \cdot \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} +$$
$$+a_z \cdot b_x \cdot \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{i} + a_z \cdot b_y \cdot \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{j} + a_z \cdot b_z \cdot \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{k} =$$
$$= a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z.$$

Отже,

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z,$$

тобто скалярний добуток двох векторів, заданих своїми координатами, дорівнює сумі добутків їх координат.

Деякі застосування скалярного добутку векторів

1) Кут між векторами. Нехай $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ та $\overrightarrow{b} = (b_x, b_y, b_z)$ — два ненульових вектора. Тоді

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}) = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{|a_x|^2 + |a_y|^2 + |a_z|^2} \cdot \sqrt{|b_x|^2 + |b_y|^2 + |b_z|^2}}.$$

Зокрема, звідси випливає, що

$$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0.$$

2) Проекція вектора на вектор. Проекція вектора $\overrightarrow{a}$ на вектор $\overrightarrow{b}$ обчислюється за формулою:

$$np_{\overrightarrow{b}} \overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{|b_x|^2 + |b_y|^2 + |b_z|^2}}.$$

3) Робота сталої сили. Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно з точки A в точку B під дією сталої сили $\overrightarrow{F}$, що утворює кут φ з напрямком $\overrightarrow{AB}$. З фізики відомо, що робота $\mathcal{A}$ сили $\overrightarrow{F}$ при переміщенні $\overrightarrow{AB}$ дорівнює

$$\mathcal{A} = |\overrightarrow{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\varphi = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Приклад 8.1. Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{p} + 4\overrightarrow{q}$, якщо $|\overrightarrow{p}| = 1$, $|\overrightarrow{q}| = 2$, $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}}) = \frac{\pi}{3}$.

Діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, утворюють веткори $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = 3\overrightarrow{p} + 3\overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{p} - 5\overrightarrow{q}$.

Знайдемо спочатку $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2$. Використовуючи властивості скалярного добутку, отримаємо

$$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)^2=\left(3\overrightarrow{p}+3\overrightarrow{q}\right)^2=9\left(\overrightarrow{p}^2+2\overrightarrow{p}\overrightarrow{q}+\overrightarrow{q}^2\right)=$$

$$=9\left(|\overrightarrow{p}|^2+2|\overrightarrow{p}|\cdot|\overrightarrow{q}|\cdot\cos\varphi+|\overrightarrow{q}|^2\right)=9\left(1+2\cdot1\cdot2\cdot\frac{1}{2}+4\right)=63,$$

звідки $|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$.

Аналогічно,

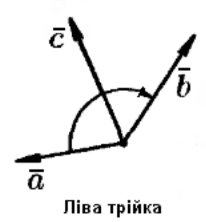
$$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2=\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)^2=\left(\overrightarrow{p}-5\overrightarrow{q}\right)^2=\left(\overrightarrow{p}^2-10\overrightarrow{p}\overrightarrow{q}+25\overrightarrow{q}^2\right)=$$

$$=\left(|\overrightarrow{p}|^2-10|\overrightarrow{p}|\cdot|\overrightarrow{q}|\cdot\cos\varphi+25|\overrightarrow{q}|^2\right)=\left(1-10\cdot1\cdot2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot25\right)=91,$$

звідки $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=\sqrt{91}$.

8.2 Векторний добуток векторів, його властивості.

Означення 8.2. Кажуть, що три некомпланарних вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{c}$ утворюють *праву трійку* векторів, якщо з кінця третього вектора $\overrightarrow{c}$ найкоротший перехід від вектора $\overrightarrow{a}$ до вектора $\overrightarrow{b}$ здійснюється проти годинникової стрілки, і *ліву трійку*, якщо найкоротший перехід від вектора $\overrightarrow{a}$ до вектора $\overrightarrow{b}$ здійснюється за годинниковою стрілкою.



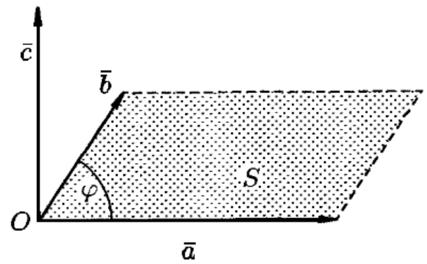
Трійку векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ будемо позначати у фігурних дужках: $\{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\}$.

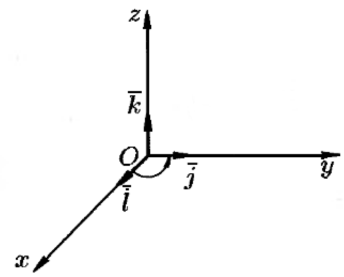
Означення 8.3. *Векторним добутком* векторів $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$ (позначається $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ або $[\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}]$) називається вектор $\overrightarrow{c}$ такий, що

1) $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{c}\perp\overrightarrow{b}$, тобто $\overrightarrow{c}$ перепендикулярний векторам $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$;

2) $|\overrightarrow{c}|=|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cdot\sin\varphi$, де $\varphi=(\widehat{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}})$, тобто вектор $\overrightarrow{c}$ має довжину, що дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$;

3) вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{c}$ утворюють праву трійку векторів.





З означення векторного добутку безпосередньо випливають наступні співвідношення для ортів координатних осей:

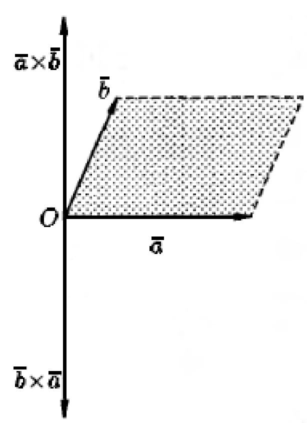
$$\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}, \quad \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \quad \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}.$$

Це випливає з того, що вектори $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ та $\overrightarrow{k}$ утворюють праву трійку векторів; $\overrightarrow{k} \perp \overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{k} \perp \overrightarrow{j}$ і $\overrightarrow{i} \perp \overrightarrow{j}$. Крім того, $|\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j}| = |\overrightarrow{i}| \cdot |\overrightarrow{j}| \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $|\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k}| = |\overrightarrow{j}| \cdot |\overrightarrow{k}| \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 1$, і $|\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i}| = |\overrightarrow{k}| \cdot |\overrightarrow{i}| \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Властивості векторного добутку

Властивість 1. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$.

Доведення. Зрозуміло, що вектори $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$ колінеарні та мають однакову довжину. Але трійки векторів $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\}$ та $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}\}$ є протилежними. Одна з них є правою, а інша лівою. Таким чином, $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$.



□

Властивість 2. $\lambda \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = (\lambda \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times (\lambda \overrightarrow{b})$.

Доведення. Доведемо, що $\lambda\cdot(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}) = (\lambda\overrightarrow{a})\times\overrightarrow{b}$. Рівність $\lambda\cdot(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a}\times(\lambda\overrightarrow{b})$ доводиться аналогічно.

Розглянемо випадок $\lambda > 0$. Вектор $\lambda\cdot(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$ перпендикулярний до векторів $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$. Вектор $(\lambda\overrightarrow{a})\times\overrightarrow{b}$ також перпендикулярний до векторів $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$. Звідси випливає, що вектори $\lambda\cdot(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})$ та $(\lambda\overrightarrow{a})\times\overrightarrow{b}$ колінеарні. Крім того, зрозуміло, що вони співнаправлені, оскільки $\lambda > 0$. Нарешті, ці вектори мають однакові довжини, оскільки

$$|\lambda\cdot(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})| = \lambda\cdot|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}| = \lambda\cdot|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cdot\sin(\widehat{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}}),$$

і

$$|(\lambda\overrightarrow{a})\times\overrightarrow{b}| = |\lambda\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cdot\sin(\widehat{\lambda\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}}) = \lambda\cdot|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cdot\sin(\widehat{\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}}).$$

Отже, ми довели, що для $\lambda > 0$, $\lambda(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}) = (\lambda\overrightarrow{a})\times\overrightarrow{b}$.

Для $\lambda < 0$ доведення аналогічне. □

Властивість 3. $\overrightarrow{a}\parallel\overrightarrow{b}$ тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$.

Доведення. Доведемо необхідність. Якщо $\overrightarrow{a}\parallel\overrightarrow{b}$, то кут φ між векторами $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$ або дорівнює 0 або дорівнює π. Тоді $\sin\varphi = 0$. Таким чином, $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cdot 0 = 0$, а отже $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$.

Доведемо достатність. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що вектори $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$ ненульові. Якщо $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, то $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cdot\sin\varphi = 0$. Тому з останнього співвідношення випливає, що $\sin\varphi = 0$, звідки $\varphi = 0$ або $\varphi = \pi$. Таким чином, $\overrightarrow{a}\parallel\overrightarrow{b}$. □

Властивість 4. $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\times\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}+\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c}$.

Приймемо цю властивість без доведення.

Приклад 8.2. Спростити вираз: $\left(2\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{k}-3\overrightarrow{j}+5\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{j}\right)\times\left(\overrightarrow{j}+4\overrightarrow{k}\right)$.

Скориставшись означенням та властивостями векторного добукту, будемо мати:

$$\left(2\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{k}-3\overrightarrow{j}-5\overrightarrow{k}\times\overrightarrow{j}\right)\times\left(\overrightarrow{j}+4\overrightarrow{k}\right) = \left(-2\overrightarrow{j}-3\overrightarrow{j}+5\overrightarrow{i}\right)\times\left(\overrightarrow{j}+4\overrightarrow{k}\right) =$$

$$= \left(5\overrightarrow{i}-5\overrightarrow{j}\right)\times\left(\overrightarrow{j}+4\overrightarrow{k}\right) = 5\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{j}+20\overrightarrow{i}\times\overrightarrow{k}-5\overrightarrow{j}\times\overrightarrow{j}-20\overrightarrow{j}\times\overrightarrow{k} =$$

$$= 5\overrightarrow{k}-20\overrightarrow{j}-5\cdot\overrightarrow{0}-20\overrightarrow{i} = 20\overrightarrow{i}-20\overrightarrow{j}+5\overrightarrow{k}.$$

Приклад 8.3. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}$ і $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{p} + 4\overrightarrow{q}$, якщо $|\overrightarrow{p}| = 1$, $|\overrightarrow{q}| = 2$, $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}}) = \frac{\pi}{3}$.

Із пункту 2) означення 8.3 випливає, що

$$S = \left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = \left|(2\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q}) \times (\overrightarrow{p} + 4\overrightarrow{q})\right| = \left|8(\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q}) - \overrightarrow{q} \times \overrightarrow{p}\right| = \left|9(\overrightarrow{p} \times \overrightarrow{q})\right| =$$

$$= 9 \cdot |\overrightarrow{p}| \cdot |\overrightarrow{q}| \cdot |\sin\varphi| = 9 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = 9\sqrt{3}.$$

9 Векторний добуток векторів: формула обчислення та застосування. Мішаний добуток векторів, його властивості та застосування

9.1 Векторний добуток векторів: формула обчислення та застосування.

Встановимо формулу знаходження векторного добутку двох векторів, заданих координатами.

Векторний добуток векторів, заданих координатами

Нехай вектори $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$ задані своїми координатами у просторі $\mathbb{R}^3$, тобто $\overrightarrow{a} = a_x\overrightarrow{i} + a_y\overrightarrow{j} + a_z\overrightarrow{k}$, і $\overrightarrow{b} = b_x\overrightarrow{i} + b_y\overrightarrow{j} + b_z\overrightarrow{k}$. Тоді

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (a_x\overrightarrow{i} + a_y\overrightarrow{j} + a_z\overrightarrow{k}) \times (b_x\overrightarrow{i} + b_y\overrightarrow{j} + b_z\overrightarrow{k}) =$$

$$= a_x \cdot b_x \cdot (\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i}) + a_x \cdot b_y \cdot (\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k}) +$$

$$+ a_y \cdot b_x \cdot (\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i}) + a_y \cdot b_y \cdot (\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j}) + a_y \cdot b_z \cdot (\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k}) +$$

$$+ a_z \cdot b_x \cdot (\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i}) + a_z \cdot b_y \cdot (\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j}) + a_z \cdot b_z \cdot (\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k}) =$$

$$= \overrightarrow{0} + a_x \cdot b_y \cdot \overrightarrow{k} - a_x \cdot b_z \cdot \overrightarrow{j} - a_y \cdot b_x \cdot \overrightarrow{k} + \overrightarrow{0} + a_y \cdot b_z \cdot \overrightarrow{i} + a_z \cdot b_x \cdot \overrightarrow{j} - a_z \cdot b_y \cdot \overrightarrow{i} + \overrightarrow{0} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \overrightarrow{k},$$

тобто

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \overrightarrow{k}.$$

Цю рівність зручно записувати у наступній операторній формі, яка легко запам'ятовується:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Приклад 9.1. Знайти векторний добуток векторів $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ та $\overrightarrow{b} = -4\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} =$$

$$= -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 0\overrightarrow{k} = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}.$$

Деякі застосування векторного добутку векторів

1) Встановлення колінеарності векторів. З властивості 3 випливає, що $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$ тоді і тільки тоді, коли $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, тобто

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \overrightarrow{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \qquad \Leftrightarrow \qquad \overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}.$$

2) Знаходження площ паралелограма та трикутника, побудованих на двох векторах. Згідно з означенням векторного добутку для двох векторів $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$, модуль їх векторного добутку дорівнює $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \sin(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}})$, тобто

$$S_{\text{паралелограма}} = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|.$$

Зокрема, звідси випливає, що

$$S_{\text{трикутника}} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|.$$

3) Визначення момента сили відносно точки.

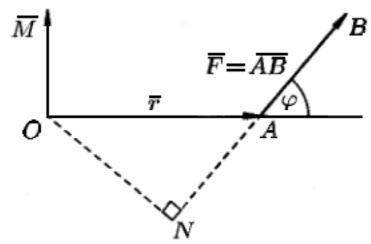
Нехай у точці A прикладена деяка сила $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{AB}$, і нехай O — деяка точка простору. З фізики відомо, що моментом сили $\overrightarrow{F}$ відносно точки O називається вектор $\overrightarrow{M}$ (див. малюнок), який проходить через точку O і задовольняє такі умови:

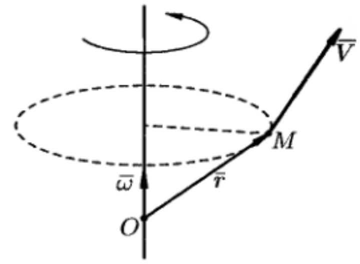
1) перпендикулярний площині, у якій лежать точки O, A, B;

2) чисельно дорівнює добутку сили на плече, тобто $|\overrightarrow{M}| = |\overrightarrow{F}| \cdot |ON| = |\overrightarrow{F}| \cdot |\overrightarrow{r}| \cdot \sin\varphi = |\overrightarrow{F}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \cdot \sin(\widehat{\overrightarrow{F}, \overrightarrow{OA}})$;

3) утворює праву трійку з векторами $\overrightarrow{OA}$ та $\overrightarrow{AB}$.

Таким чином, $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{F}$.





4) Знаходження лінійної швидкості обертання.

Швидкість $\overrightarrow{V}$ точки M твердого тіла, що обертається з кутовою швидкістю $\overrightarrow{\omega}$ навколо нерухомої осі, визначається формулою Ейлера $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}$, де $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$, а O — деяка нерухома точка осі (див. малюнок).

Подвійний векторний добуток

Означення 9.1. Нехай дано три довільних вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{c}$. Розглянемо векторний добуток векторів $\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{c}$: $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$. Векторний добуток вектора $\overrightarrow{a}$ на вектор $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$ (позначається: $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$) називається *подвійним векториним добутком* векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{c}$.

Для довільних векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{c}$ подвійний векторний добуток $\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$ є вектором, компланарним з векторами $\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{c}$ і знаходиться за формулою:

$$\overrightarrow{a} \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{b}(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) - \overrightarrow{c}(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}).$$

9.2 Мішаний добуток векторів, його властивості та застосування.

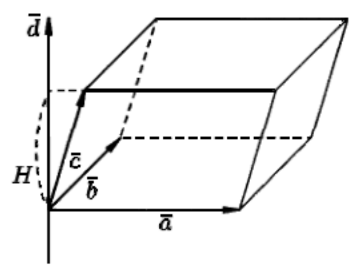
Нехай дано три довільних вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{c}$. Розглянемо векторний добуток векторів $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$: $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$.

Означення 9.2. Скалярний добуток вектора $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ на вектор $\overrightarrow{c}$ називається *векторно-скалярним* або *мішаним добутком* векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$. Мішаний добуток позначається: $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$ або $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$, або $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}$.

З означення зрозуміло, що мішаний добуток трьох векторів — це число.

Геометричний зміст мішаного добутку

З'ясуємо геометричний зміст мішаного добутку. Побудуємо паралелепіпед, ребрами якого є задані вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{c}$. Побудуємо також вектор $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$. Тоді $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{c} = |\overrightarrow{d}| \cdot np_{\overrightarrow{d}} \overrightarrow{c}$, причому $|\overrightarrow{d}| = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = S$, де S — площа паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$. Крім того, $np_{\overrightarrow{d}} \overrightarrow{c} = H$ для правої трійки векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{c}$, і $np_{\overrightarrow{d}} \overrightarrow{c} = -H$ для лівої трійки векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ та $\overrightarrow{c}$, де H — висота паралелепіпеда.



Таким чином, $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = S \cdot (\pm H)$, тобто $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \pm V$, де V — об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Отже, **мішаний добуток трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, взятого зі знаком "+", якщо вектори утворюють праву трійку, і зі знаком "−", якщо вектори утворюють ліву трійку**.

Зауважимо, що з трьох векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ можна скласти шість впорядкованих трійок, при цьому три трійки утворюють ліву трійку і три праву. А саме, трійки $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$, $\{\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}\}$, $\{\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ є однаково орієнтованими, тобто одночасно утворюють праву трійку або ліву. Інші трійки, а саме $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}\}$, $\{\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$, $\{\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\}$ також є однаково орієнтованими, тобто одночасно утворюють праву або ліву трійку.

Виходячи з геометричної інтерпретації, зрозуміло, що мішаний добуток трьох векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ можна еквівалентно означати як число, рівне об'єму орієнтованого (зі знаком) паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

Властивості мішаного добутку

1) $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{a} = (\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b}$, тобто мішаний добуток не змінюється при циклічній перестановці множників.

Доведення. Властивість 1) очевидна, оскільки в цьому випадку не змінюється ні об'єм паралелепіпеда, ні його орієнтація в просторі (знак). $\square$

2) $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$, тобто мішаний добуток не змінюється при перестановці місцями знаків векторного і скалярного множення.

Доведення. Випливає з властивості 1) та того, що для скалярного добутку двох векторів виконується властивість комутативності. $\square$

3) $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = -(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{b}$,
$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = -(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{c}$,
$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = -(\overrightarrow{c} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{a}$,
тобто мішаний добуток змінює знак при перестановці місцями будь-яких двох векторів.

Доведення. Випливає з властивості 1) та того, що при перестановці множників у векторному добутку цей добуток змінює знак на протилежний (див. властивість 1 векторного добутку). $\square$

4) Мішаний добуток трьох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори компланарні.

Доведення. Доведемо необхідність. Нехай $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = 0$, тобто об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, дорівнює нулю. Припустимо, що $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ — не компланарні. Тоді можна побудувати паралелепіпед на цих векторах з об'ємом, не рівним нулю. А це протирічить умові.

Доведемо достатність. Нехай вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ — компланарні, тобто лежать в одній площині. Тоді вектор $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ перпендикулярний вектору $\overrightarrow{c}$, а отже $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = 0$. $\square$

Мішаний добуток векторів, заданих координатами

Нехай вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ задані своїми координатами у просторі $\mathbb{R}^3$, тобто $\overrightarrow{a} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j} + a_z \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = b_x \overrightarrow{i} + b_y \overrightarrow{j} + b_z \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{c} = c_x \overrightarrow{i} + c_y \overrightarrow{j} + c_z \overrightarrow{k}$. Тоді

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \overrightarrow{k} \right) \cdot (c_x \overrightarrow{i} + c_y \overrightarrow{j} + c_z \overrightarrow{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Отже,

$$(\overrightarrow{a} \times \ \overrightarrow{b}) \cdot \ \overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

тобто мішаний добуток трьох векторів дорівнює значенню визначника, складеного з координат векторів зі збереженням порядку.

Деякі застосування мішаного добутку векторів

1) Визначення орієнтації векторів у просторі. Для трьох заданих векторів $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, якщо $(\overrightarrow{a} \times \ \overrightarrow{b}) \cdot \ \overrightarrow{c} > 0$, то ці вектори утворюють праву трійку. Якщо $(\overrightarrow{a} \times \ \overrightarrow{b}) \cdot \ \overrightarrow{c} < 0$, то ці вектори утворюють ліву трійку.
2) Встановлення компланарності векторів. Три ненульових вектора $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = 0$, тобто

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

3) Знаходження об'ємів паралелепіпеда та трикутної піраміди.
Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$:

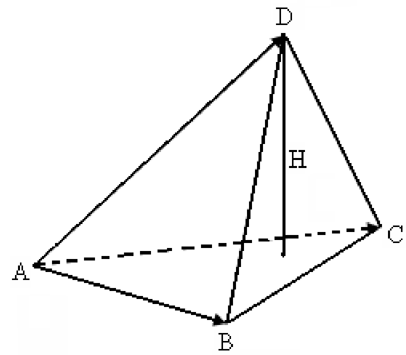
$$V_{\text{паралелепіпеда}} = \left|(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}\right|.$$

Об'єм трикутної піраміди, побудованої на векторах $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$:

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}\right|.$$

Приклад 9.2. Знайти площу основи ABC, о'бєм та довжину висоти трикутної піраміди, вершинами якої є точки $A(1,2,3)$, $B(0,-1,1)$, $C(2,5,2)$, $D(3,0,-2)$.

Складемо три вектори, які мають спільний початок (наприклад, у вершині A): $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} = (-1,-3,-2)$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC} = (1,3,-1)$, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AD} = (2,-2,-5)$.



Тоді з властивостей векторного добутку матимемо, що

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|.$$

Знайдемо окремо

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} = 9\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}.$$

Тоді $S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{9^2 + 3^2} = \frac{3}{2}\sqrt{10}$.

Об'єм піраміди:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4.$$

Знайдемо висоту піраміди, опущеної з вершини D:

$$H = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot 4}{\frac{3}{2}\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}}.$$

Частина III

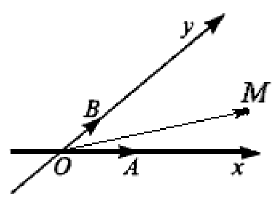
Аналітична геометрія на площині та в просторі

10 Система координат на площині. Пряма на площині, різні види її рівняння

10.1 Системи координат на площині.

Під системою координат на площині розуміють спосіб, що дозволяє чисельно описати положення точки на площині.

Розглянемо два неколінеарні вектори, які прикладені до спільного початку — точки O. Будь-якій точці M площини AOB поставимо у відповідність вектор $\overrightarrow{OM}$, який називають радіусом-вектором точки M.



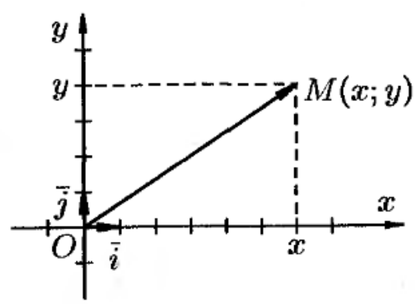
Оскільки вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OM}$ компланарні, то існує єдина пара чисел (x, y) така, що $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$. Сукупність точки і двох неколінеарних прикладених до неї векторів дають змогу ввести систему координат на площині: кожній точці M площини ставиться у відповідність єдина пара (x, y) така, що $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$. Числа x та y називають координатами точки M. І навпаки, для кожної пари чисел (x, y) існує єдина точка площини з такими координатами. Вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ задають орієнтовані прямі (прямі з вибраним напрямом), які називають *осями координат*, а точку їх перетину O — *початком координат.* Якщо вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ мають різну довжину, або $\overrightarrow{OA}$ не перпендикулярний до $\overrightarrow{OB}$, то таку систему координат називають *загальною афінною.*

Площина, в якій задано систему координат, називають *координатної площиною.*

Найбільш зручними для застосування є прямокутна система координат та полярна система координат.

Прямокутна (декартова) система координат на площині

Прямокутна система координат задається точкою O — початок координат, та двома взаємно перпендикулярними одиничними векторами $\overrightarrow{i} = (1,0)$ та $\overrightarrow{j} = (0,1)$, які визначають осі координат — *вісь абсцис* Ox, та *вісь ординат* Oy.



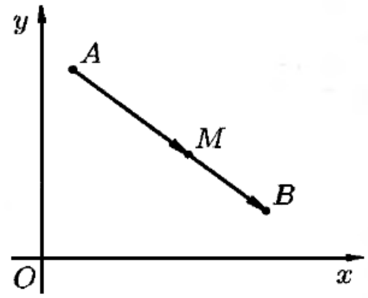
Зазвичай вісь абсцис розташована горизонтально і направлена зліва направо, а вісь ординат вертикально і направлена зверху вниз. Осі координат поділяють площину на чотири області, що називаються *чвертями* або *квадрантами*.

Розглянемо довільну точку M площини Oxy. Координатами точки M у системі координат Oxy називаються координати її радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$. Якщо $\overrightarrow{OM} = (x,y)$, то координати точки M записують $M(x,y)$, причому число x називається *абсцисою* точки M, а число y — *ординатою* точки M. Ці два числа x і y повністю визначають положення точки на площині.

Відстань між двома точками у декартовій системі координат. Відстань d між точками $A(x_1,y_1)$ та $B(x_2,y_2)$ на площині дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{AB} = (x_2-x_1, y_2-y_1)$, тобто

$$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}.$$

Поділ відрізка у заданому відношенні у декартовій системі координат. Нехай відрізок AB, що з'єднує точки $A(x_1,y_1)$ і $B(x_2,y_2)$ потрібно поділити у заданому відношенні $\lambda > 0$, тобто знайти координати точки $M(x,y)$ відрізка AB такої, що $\frac{AM}{MB} = \lambda$.

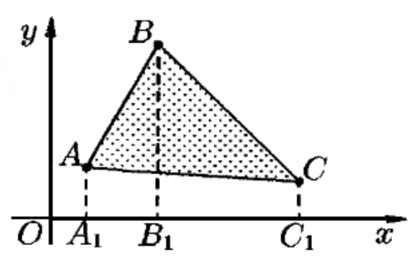


Розглянемо вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{MB}$. Оскільки точка M ділить відрізок AB у відношенні λ, то
$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}.$$
Але $\overrightarrow{AM} = (x-x_1, y-y_1) = (x-x_1)\overrightarrow{i} + (y-y_1)\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{MB} = (x_2-x, y_2-y) = (x_2-x)\overrightarrow{i} + (y_2-y)\overrightarrow{j}$. Тому
$$(x-x_1)\overrightarrow{i} + (y-y_1)\overrightarrow{j} = \lambda(x_2-x)\overrightarrow{i} + \lambda(y_2-y)\overrightarrow{j}.$$
Звідси випливає, що
$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x) \quad \text{і} \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y),$$
звідки
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \quad \text{і} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{10.1}$$
Формули (10.1) називаються *формулами поділу відрізка у заданому відношенні.*

Зокрема, якщо $\lambda = 1$, тобто $AM = MB$, то формули (10.1) набувають вигляду: $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ і $y = \frac{y_1+y_2}{2}$. В цьому випадку точка M є серединою відрізка AB.

Зауважимо також, що у випадку $\lambda = 0$ точки A та M співпадають. Якщо $\lambda < 0$, то точка M лежить зовні відрізка AB. В останньому випадку кажуть, що точка M ділить відрізок зовнішнім чином.

Площа трикутника у декартовій системі координат. Нехай на координатній площині задано три точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Знайдемо площу S трикутника ABC. Для цього проведемо з вершин A, B та C трикутника ABC перпендикуляри AA_1, BB_1 і CC_1 на вісь Ox відповідно.



Очевидно, $S_{ABC} = S_{AA_1B_1B} + S_{B_1BCC_1} - S_{A_1ACC_1}$. Тому

$$S_{ABC} = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot (x_2 - x_1) + \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot (x_3 - x_2) - \frac{y_1 + y_3}{2} \cdot (x_3 - x_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big((y_2 - y_1)(x_3 - x_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1)\Big) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Отже,

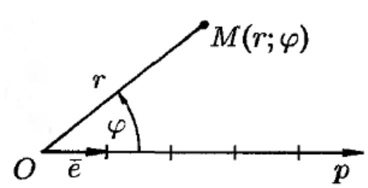
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} abs\left(\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}\right),$$

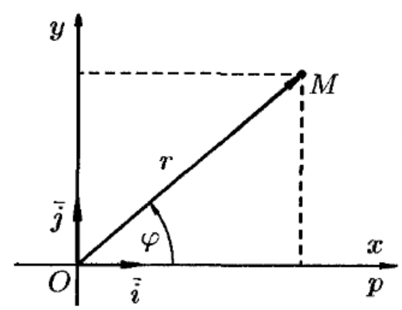
де через abs позначено абсолютну величину числа. Зауважимо, що випадок $S_{ABC} = 0$ означає, що точки A, B та C лежать на одній прямій.

Полярна система координат

Полярна система координат задається початком відліку — точкою O, що називається *полюсом*, і віссю Op, яка називається полярною віссю, з вибраним на ній ортом $\overrightarrow{e}$.

Розглянемо на площині точку M, яка не співпадає з точкою O. Положення точки M однозначно визначається двома числами — відстанню r точки M до полюса O та кутом φ, який утворює відрізок OM з віссю Op. Відлік кутів ведеться у напрямку проти годинникової стрілки.





Числа r та φ називаються *полярними координатами* точки M. Записують це так: $M(r, \varphi)$. При цьому r називається *полярним радіусом* точки M, а φ — *полярним кутом.*

Зрозуміло, що для отримання всіх точок площини достатньо вважати, що $-\pi < \varphi \leq \pi$ (або $0 \leq \varphi < 2\pi$), а $0 \leq r < \infty$. В цьому випадку кожній точці M площини відповідає єдина пара чисел (r, φ) і навпаки, кожній парі чисел (r, φ) відповідає єдина точка M площини.

Встановимо зв'язок між декартовими та полярними системами координат. З малюнка видно, що декартові координати (x, y) точки M виражаються через полярні координати (r, φ) наступним чином:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi, \\ y = r \cdot \sin\varphi. \end{cases}$$

Полярні координати (r, φ) точки M виражаються через декартові координати (x, y) наступним чином:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \end{cases}$$

При визначенні кута φ слід враховувати чверть, де знаходить точка M, та те, що $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Приклад 10.1. У декартовій системі координат задана точка $M(-1, -\sqrt{3})$. Визначити її полярні координати.

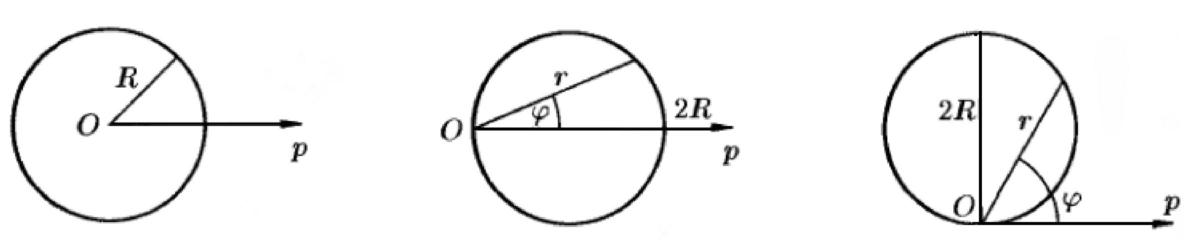
Знайдемо r та $\operatorname{tg}\varphi$:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}.$$

Звідси випливає, що $\varphi = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Точка $M(-1, -\sqrt{3})$ знаходиться у третій чверті, а значить $n = -1$, і $\varphi = \frac{\pi}{3} - \pi = \frac{-2\pi}{3}$. Отже, точка M має такі полярні координати: $r = 2$, $\varphi = \frac{-2\pi}{3}$.

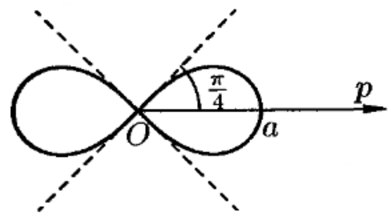
Наведемо деякі важливі криві у полярній системі координат.

Коло: $\mathbf{r = R}$, $\mathbf{r = 2R\cos\varphi}$, $\mathbf{r = 2R\sin\varphi}$, $\mathbf{R > 0}$.

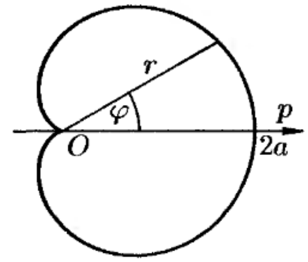


$r = R$ $\quad$ $r = 2R \cdot \cos\varphi$ $\quad$ $r = 2R \cdot \sin\varphi$

Лемніската Бернуллі: $\mathbf{r = a\sqrt{\cos 2\varphi}}$, $\mathbf{a > 0}$. У декартовій системі координат це рівняння набуває вигляду $(x^2 + y^2)^2 = a^2\,(x^2 - y^2)$.



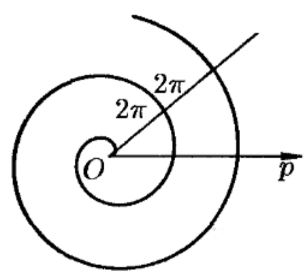
Кардіоїда: $\mathbf{r} = \mathbf{a}(\mathbf{1} + \cos\varphi)$, $\mathbf{a} > \mathbf{0}$. У декартовій системі координат це рівняння набуває вигляду $x^2 + y^2 = a\left(\sqrt{x^2 + y^2} + x\right)$.



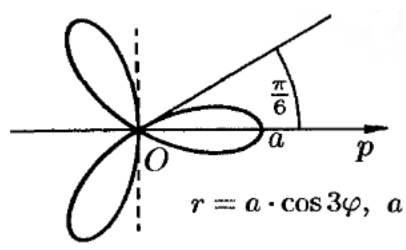
$r = a(1 + \cos\varphi),\ a > 0$

Рівняння $r = a(1 - \cos\varphi)$, $r = a(1 + \sin\varphi)$, $r = a(1 - \sin\varphi)$, $a > 0$, також визначають кардіоїди.

Спіраль Архімеда: $\mathbf{r} = \mathbf{a}\varphi$, $\mathbf{a} > \mathbf{0}$.



k-пелюсткові троянди: $\mathbf{r} = \mathbf{a}\cos\mathbf{k}\varphi$, $\mathbf{r} = \mathbf{a}\sin\mathbf{k}\varphi$, $\mathbf{a} > \mathbf{0}$. Для наочності розглянемо криву $\mathbf{r} = \mathbf{a}\cos\mathbf{3}\varphi$. Це трипелюсткова троянда:



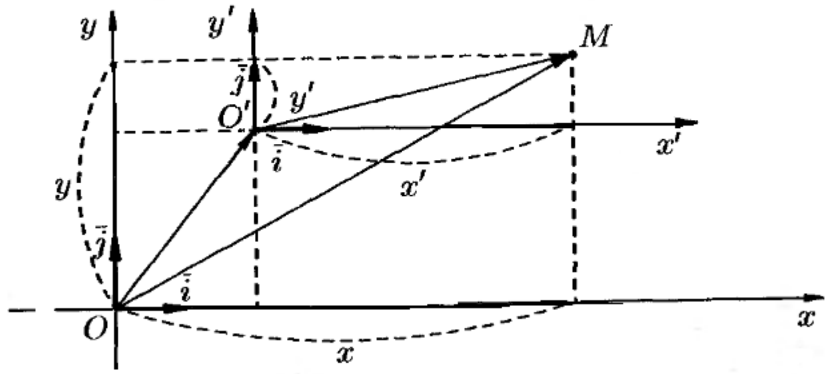
$r = a \cdot \cos 3\varphi,\ a > 0$

10.2 Перетворення декартової системи координат.

Перехід від однієї системи координат до іншої називається перетворенням системи координат.

Паралельний перенос системи координат. Нехай на площині задана прямокутна декартова система координат Oxy. Під паралельним переносом осей координат розуміють перехід від системи координат Oxy до системи координат $Ox'y'$, при якому змінюється положення початку координат, а напрям та маштаб осей залишається незмінним.

Нехай новий початок координат — точка O' має у старій системі координат Oxy координати (x_0, y_0), тобто $O'(x_0, y_0)$.



Нехай (x, y) — координати довільної точки M у старій системі координат Oxy, а (x', y') — координати цієї точки у новій системі координат $Ox'y'$.

Розглянемо вектори $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{OO'} = x_0\overrightarrow{i} + y_0\overrightarrow{j}$, і $\overrightarrow{O'M} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$. Оскільки $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, то

$$x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = (x_0 + x')\overrightarrow{i} + (y_0 + y')\overrightarrow{j}.$$

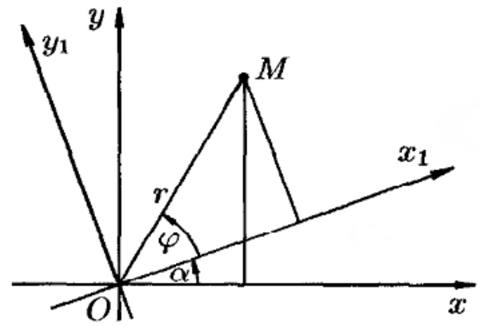
Звідси

$$\begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y'. \end{cases}$$

Отримані формули дозволяють знаходити старі координати x, y за новими x', y', і навпаки.

Поворот системи координат. Під поворотом осей координат розуміють таке перетворення координат, при якому обидві осі повертаються на один і той самий кут, а початок координат та маштаб залишаються незмінними.

Нехай нова система координат Ox_1y_1 отримується поворотом системи координат Oxy на кут α. Нехай (x, y) — координати довільної точки M у старій системі координат Oxy, а (x_1, y_1) — координати цієї точки у новій системі координат Ox_1y_1. Позначимо довжину відрізка $|OM| = r$. Зауважимо, що вона є однаковою для обох систем координат. Нехай також φ — кут, який утворює вектор $\overrightarrow{OM}$ з віссю Ox_1 (у новій системі координат).



Тоді

$$\begin{cases} x = r\cos(\alpha + \varphi), \\ y = r\sin(\alpha + \varphi), \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha\cos\varphi - r\sin\alpha\sin\varphi, \\ y = r\sin\alpha\cos\varphi + r\cos\alpha\sin\varphi. \end{cases}$$

Але $r\cos\varphi = x_1$, а $r\sin\varphi = y_1$. Тому

$$\begin{cases} x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha, \\ y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha. \end{cases}$$

Отримані формули називаються *формулами повороту осей.* Вони дозволяють визначити старі координати (x, y) точки M за новими координатами (x_1, y_1) цієї ж точки M, і навпаки.

10.3 Рівняння лінії (кривої) на площині.

Лінією (кривою) на площині називається сукупність точок (геометричне місце точок), які мають певну спільну властивість.

Нехай на площині введена прямокутна система координат Oxy.

Означення 10.1. *Рівнянням кривої* на площині називається рівняння з двома змінними $F(x, y) = 0$, яке задовольняють всі точки $M(x, y)$ кривої, і не задовольняє жодна точка, що не належать цій кривій.

Якщо у заданій системі координат рівняння кривої відоме, то це дає можливість досліджувати геометричні властивості кривої та її форму.

Для того, щоб з'ясувати, чи лежить точка $A(x_0, y_0)$ на кривій, достатньо підставити координати цієї точки у рівняння кривої $F(x, y) = 0$. Якщо при цьому рівняння перетвориться на тотожність, тобто $F(x_0, y_0) = 0$, то точка A належить кривій, інакше $(F(x_0, y_0) \neq 0)$ точка A не належить кривій.

Для того, щоб знайти точки перетину двох кривих, заданих своїми рівняннями $F_1(x,y)=0$ і $F_2(x,y)=0$, необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0, \\ F_2(x,y)=0. \end{cases}$$

Якщо ця система не має розв'язків, то криві не перетинаються.

Криву на площині можна задавати за допомогою двох рівнянь:

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad t\in T, \end{cases} \tag{10.2}$$

де x та y — координати довільної точки $M(x,y)$ кривої, а t — змінна, що називається параметром і пробігає множину значень T. Параметр t визначає положення кожної точки $M(x,y)$ кривої на площині Oxy. Таке задання кривої на площині називається *параметричним.* Для того, щоб перейти від параметричного задання кривої до рівняння типу $F(x,y)=0$, потрібно з якогось із двох рівнянь виключити змінну t. Проте, не завжди це доцільно робити, і не завжди це можна зробити.

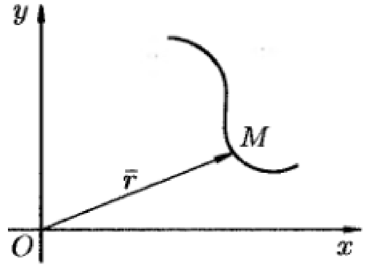
Приклад 10.2. Нехай на площині Oxy задано криву параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x=t+1, \\ y=t^2. \end{cases}$$

Параметру $t=3$ відповідає точка кривої $(4,9)$.

Перейдемо від параметричного задання кривої до рівняння $F(x,y)=0$. З першого рівняння $t=x-1$. Підставимо цей вираз замість t у друге рівняння: $y=(x-1)^2$. Таким чином, $(x-1)^2-y=0$.

Лінію на площині можна задати також *векторним рівнянням* $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{r}(t)$, де t — скалярний параметр. Кожному значенню параметра t_0 відповідає радіус-вектор $\overrightarrow{r}_0=\overrightarrow{r}(t_0)$. При зміні значення параметра t, кінець радіус-вектора буде описувати на площині криву.



Векторному рівнянню лінії $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$ у системі координат Oxy відповідають два скалярних рівняння (10.2), тобто рівняння проекцій на осі координат векторного рівняння лінії є її параметричні рівняння.

Векторне рівняння кривої та її параметричні рівняння мають механічний зміст. Якщо точка рухається по площині, то вказані рівняння називаються рівняннями руху, а крива — траєкторією точки. При цьому параметр t — це час.

Якщо на площині задана полярна система координат, то рівняння кривої можна задати у полярній системі координат. Рівняння $f(r, \varphi) = 0$ називається *рівнянням даної кривої у полярній системі координат*, якщо всі точки $M(r, \varphi)$ кривої, і тільки вони, задовольняють це рівняння.

Отже, кожній кривій на площині відповідає рівняння $F(x, y) = 0$, і навпаки, кожному рівнянню $F(x, y) = 0$ відповідає якась крива на площині, властивості якої визначаються її рівнянням.

В аналітичній геометрії на площині виникають дві основні задачі:

1) знаючи геометричні властивості кривої, знайти її рівняння;

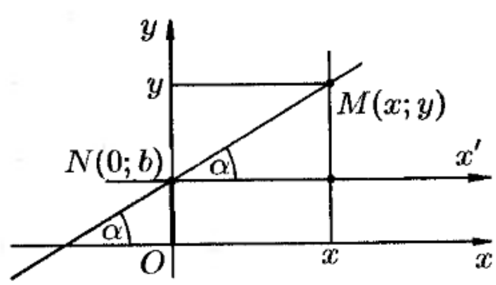
2) за відомим рівнянням кривої $F(x, y) = 0$ вивчити її властивості та форму.

10.4 Пряма на площині. Різні види її рівняння.

Найпростішою лінією на площині є пряма. Вона задається алгебраїчним рівнянням першого порядку відносно змінних x і y. Розглянемо різні види її рівняння.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Нехай на площині Oxy задана пряма, не паралельна осі Oy. Її положення на площині однозначно визначається двома параметрами: ординатою точки $N(0, b)$ перетину з віссю Oy та кутом α між віссю Ox та прямою.

Розглянемо на прямій довільну точку $M(x, y)$. Проведемо через точку N вісь Nx', паралельну та співнаправлену з віссю Ox. Зрозуміло, що кут між прямою та віссю Nx' дорівнює α. У системі координат $Nx'y$ точка M має координати x та $y - b$.



Із означення тангенса кута випливає, що $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y-b}{x}$, тобто $y = \operatorname{tg}\alpha x + b$. Позначимо $\operatorname{tg}\alpha = k$. Таким чином, ми отримали рівняння

$$y = kx + b, \tag{10.3}$$

якому задовольняють всі точки $M(x, y)$ прямої.

Число $\operatorname{tg}\alpha = k$ називається *кутовим коефіцієнтом* прямої, а рівняння (10.3) — *рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.*

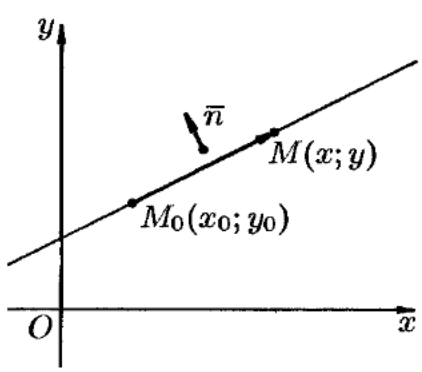
Якщо пряма проходить через початок координат, то $b = 0$, тобто $y = kx$. Якщо пряма проходить паралельно осі Ox, то $\alpha = 0$, а отже, $y = b$. Якщо пряма паралельна осі Oy, то $\alpha = \frac{\pi}{2}$, і кутовий коефіцієнт k не існує. В цьому випадку рівняння прямої буде мати вигляд: $x = a$, де a — точка перетину прямої з віссю Ox.

Розглянемо поняття ***пучка прямих***. Нехай пряма на площині проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має кутовий коефіцієнт k. Рівняння цієї прямої запишемо як рівняння з кутовим коефіцієнтом: $y = kx+b$. Знайдемо коефіцієнт b з умови, що пряма проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$. Підставляючи координати точки M_0 у рівняння прямої, матимемо $y_0 = kx_0 + b$, звідки $b = y_0 - kx_0$. Підставляючи значення b у рівняння $y = kx + b$, отримаємо $y = kx + y_0 - kx_0$, тобто

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{10.4}$$

Рівняння (10.4) при різних значеннях k називають *рівнянням пучка прямих* з центром в точці $M_0(x_0, y_0)$.

Загальне рівняння прямої. Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно даному ненульовому вектору $\overrightarrow{n} = (A, B)$. Для цього розглянемо на прямій довільну точку $M(x, y)$ і складемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$.



Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M}$ та $\overrightarrow{n}$ перепендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Таким чином, ми отримали рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно даному ненульовому вектору $\overrightarrow{n} = (A, B)$. Покладаючи у цьому рівнянні $C = -Ax_0 - By_0$, отримаємо рівняння

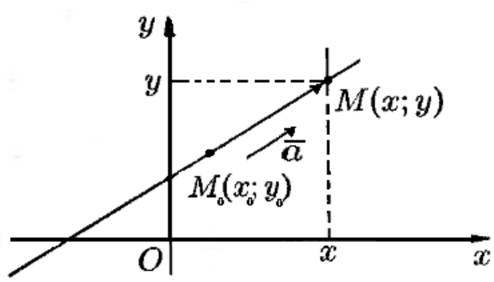
$$Ax + By + C = 0, \tag{10.5}$$

яке називається *загальним рівнянням прямої*. Вектор $\overrightarrow{n} = (A, B)$ називається *нормальним вектором прямої*.

Від загального рівняння легко перейти до рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Дійсно, якщо $B \neq 0$, то рівняння (10.5) можна переписати наступним чином: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. А це рівняння є рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом $k = -\frac{A}{B}$. Якщо ж $B = 0$, то рівняння (10.5) набуває вигляду: $Ax + C = 0$, причому $A \neq 0$, звідки $x = -\frac{C}{A}$. Останнє рівняння є рівнянням прямої, що паралельна осі Oy і проходить через точку $(-\frac{C}{A}, 0)$.

Зокрема, якщо $A = 0$, то $y = -\frac{C}{B}$, тобто пряма паралельна осі Ox. Якщо $C = 0$, то $Ax + By = 0$, тобто пряма проходить через початок координат $O(0, 0)$.

Канонічне рівняння прямої. Нехай відомо, що пряма проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ у напрямку вектора $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y)$. Розглянемо довільну точку $M(x, y)$ прямої. Складемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$.



Зрозуміло, що вектор $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарний вектору $\overrightarrow{a}$. Звідси впливає, що координати векторів $\overrightarrow{M_0M}$ та $\overrightarrow{a}$ пропорційні. Тому

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y}.$$

Таким чином, ми отримали рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно вектору $\overrightarrow{a}$. Це рівняння називається *канонічним рівнянням прямої*, а вектор $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y)$ називається *напрямним вектором* прямої.

Розглянемо два частинних випадки. Нехай $a_x = 0$. Тоді вектор $\overrightarrow{a}$ паралельний осі $0y$, звідки випливає, що пряма паралельна цій осі. Отже, рівняння прямої буде мати вигляд: $x = x_0$. Нехай тепер $a_y = 0$. Тоді вектор $\overrightarrow{a}$ паралельний осі $0x$, звідки випливає, що пряма паралельна цій осі. Отже, рівняння прямої буде мати вигляд: $y = y_0$.

Параметричне рівняння прямої. З канонічного рівняння випливає, що

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = t.$$

Виражаючи з цього рівняння змінні x та y, отримаємо рівняння прямої

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x t, \\ y = y_0 + a_y t, \end{cases}$$

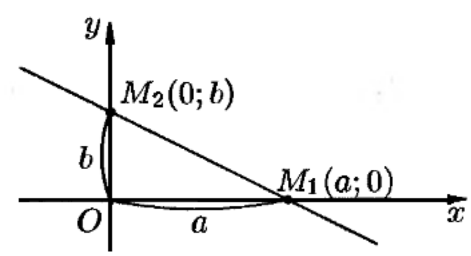
яке називається *параметричним рівнянням.*

Рівняння прямої, що проходить через дві точки. Нехай пряма проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$. Розглянемо довільну точку $M(x, y)$ прямої. Складемо два вектори $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1)$ та $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Очевидно, вектори $\overrightarrow{M_1M}$ та $\overrightarrow{M_1M_2}$ колінеарні. Звідси випливає, що їх координати пропорційні. Тому

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{10.6}$$

Таким чином, ми отримали рівняння прямої, що проходить через дві точки. В цьому рівнянні, якщо $x_2 = x_1$, то пряма паралельна осі ординат і її рівняння має вигляд: $x = x_1$. Якщо $y_2 = y_1$, то пряма паралельна осі абсцис і її рівняння має вигляд: $y = y_1$.

Рівняння прямої "у відрізках". Нехай пряма перетинає вісь Ox у точці $M_1(a, 0)$, а вісь Oy — у точці $M_2(0, b)$.

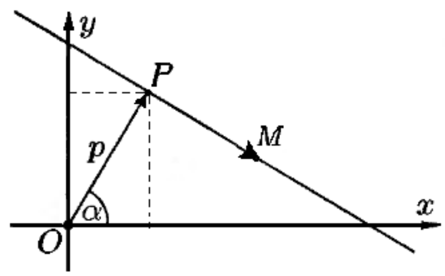


Тоді рівняння (10.6) приймає вигляд: $\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0}$, тобто

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{10.7}$$

Рівняння (10.7) називається *рівнянням прямої* "*у відрізках*", оскільки числа a та b показують, які відрізки відтинає пряма від координатних осей.

Нормальне рівняння прямої. Нехай на площині задано пряму. Припустимо, що відомий кут α, який утворює перпендикуляр, опущений з початку координат $O(0,0)$ на цю пряму, та довжина цього перпендукуляра p ($p \geq 0$), тобто відстань від початку координат до прямої. Ці два параметри однозначно визначають розташування прямої на площині. Знайдемо її рівняння.



Нехай точка P є основою перпендикуляра, опущеного з точки $O(0,0)$ на пряму. Тоді $\overrightarrow{OP} = (p\cos\alpha, p\sin\alpha)$, і точка P має координати $P(p\cos\alpha, p\sin\alpha)$. Розглянемо довільну точку $M(x,y)$ на прямій і складемо вектор $\overrightarrow{PM} = (x - p\cos\alpha, y - p\sin\alpha)$. Помітимо, що вектор $\overrightarrow{PM}$ перпендикулярний вектору $\overrightarrow{OP}$, звідки випливає, що їх скалярний добуток дорівнює нулю. Отже,

$$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{OP} = (x - p\cos\alpha)\cos\alpha + (y - p\sin\alpha)\sin\alpha = 0.$$

Таким чином, отримали рівняння

$$\cos\alpha x + \sin\alpha y - p = 0, \tag{10.8}$$

яке називається *нормальним рівнянням* прямої.

Розглянемо, як із загального рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ можна перейти до її нормального рівняння (10.8). Помножимо рівняння $Ax + By + C = 0$ на $\lambda = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, якщо $C < 0$, і на $\lambda = \frac{-1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, якщо $C > 0$. Покладаючи $\lambda C = -p$, отримаємо рівняння

$$(\lambda A)x + (\lambda B)y - p = 0,$$

де $p > 0$. Оскільки $(\lambda A)^2 + (\lambda B)^2 = 1$, то числа λA та λB є відповідно косинусом та синусом одного і того самого кута. Покладемо $\lambda A = \cos\alpha$ і $\lambda B = \sin\alpha$. Тоді рівняння нашої прямої набуває вигляду:

$$\cos\alpha x + \sin\alpha y - p = 0.$$

Отже, ми звели загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ до нормального вигляду. Підкреслимо, що множник $\lambda = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ називається нормуючим множником.

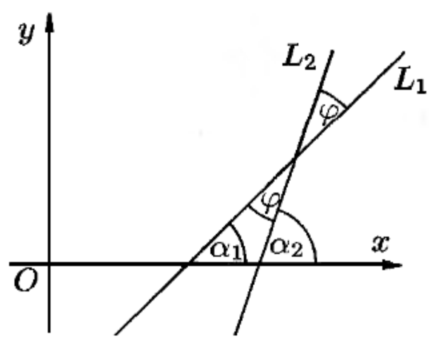
Приклад 10.3. Звести загальне рівняння прямої $-3x+4y+15=0$ до нормального рівняння. Оскільки $C=15>0$, то нормуючим множником буде число $\lambda=\frac{-1}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=\frac{-1}{5}$. Помноживши загальне рівняння $-3x+4y+15=0$ на нормуючий множник, отримаємо шукане рівняння:

$$\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-3=0.$$

Отже, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$, а відстань від початку координат до прямої дорівнює $p=3$.

10.5 Основні задачі для прямої на площині.

Кут між прямими. Нехай прямі L_1 та L_2 задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом $y=k_1x+b_1$, та $y=k_2x+b_2$, відповідно. Знайдемо кут φ між прямими L_1 та L_2, тобто кут, на який потрібно повернути у додатному напрямку пряму L_1 навколо точки перетину прямих L_1 та L_2 до співпадіння з прямою L_2.



Позначимо через α_1 та α_2 кути, що утворюють прямі L_1 та L_2 з віссю Ox відповідно, тобто $k_1=\operatorname{tg}\alpha_1$ і $k_2=\operatorname{tg}\alpha_2$. Оскільки $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$, то, якщо $\varphi\neq\frac{\pi}{2}$,

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2},$$

звідки легко знайти кут φ.

Для того, щоб знайти гострий кут між прямими, не досліджуючи взаємне розташування прямих, праву частину останньої рівності беруть по модулю, тобто

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

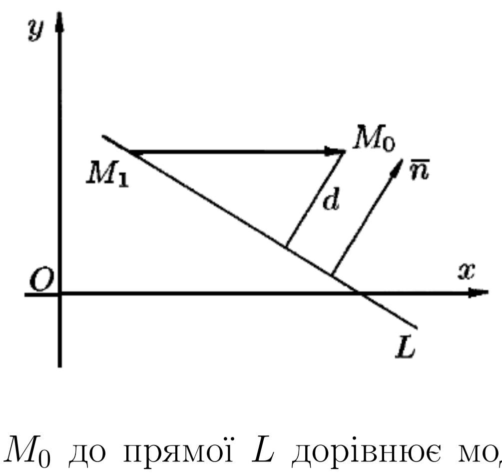
Умови паралельності та перпендикулярності прямих. З'ясуємо умову паралельності прямих L_1 та L_2, заданих рівняннями з кутовим коефіцієнтом $y = k_1x + b_1$, та $y = k_2x + b_2$, відповідно. Очевидно, прямі L_1 та L_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли $\varphi = 0$, тобто $\operatorname{tg}\varphi = 0$. Остання рівність еквівалентна тому, що $k_1 = k_2$. Отже, *дві прямі паралельні тоді і тільки тоді, коли вони мають рівні кутові коефіцієнти.*

З'ясуємо умову перпендикулярності прямих L_1 та L_2, заданих рівняннями з кутовим коефіцієнтом $y = k_1x + b_1$, та $y = k_2x + b_2$, відповідно. Прямі L_1 та L_2 перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли $\varphi = \frac{\pi}{2}$, тобто $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1+k_1k_2}{k_2-k_1} = 0$. Остання рівність еквівалентна тому, що $1 + k_1k_2 = 0$. Звідси випливає, що *дві прямі перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх кутові коефіцієнти зв'язані співвідношенням* $k_1k_2 = -1$.

Розглянемо умови паралельності та перпендикулярності прямих L_1 та L_2, заданих загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1 = 0$ та $A_2x+B_2y+C_2 = 0$ відповідно. Якщо прямі L_1 та L_2 паралельні, то їх нормальні вектори $\overrightarrow{n}_1 = (A_1, B_1)$ і $\overrightarrow{n}_2 = (A_2, B_2)$ колінеарні, тобто $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Якщо прямі L_1 та L_2 перпендикулярні, то їх нормальні вектори $\overrightarrow{n}_1 = (A_1, B_1)$ і $\overrightarrow{n}_2 = (A_2, B_2)$ також перпендикулярні. Звідси випливає, що $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Відстань від точки до прямої. Нехай пряма L задана своїм загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, і задана деяка точка площини $M_0(x_0, y_0)$. Знайдемо відстань від точки M_0 до прямої L.



Відстань d від точки M_0 до прямої L дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$, де точка $M_1(x_1, y_1)$ — довільна точки прямої L, на напрям нормального вектора $\overrightarrow{n} = (A, B)$ прямої L. Таким чином,

$$d = |\text{пр}_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{M_1M_0}| = \left|\frac{\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|}\right| =$$

$$= \left| \frac{(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \frac{\left| Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1 \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

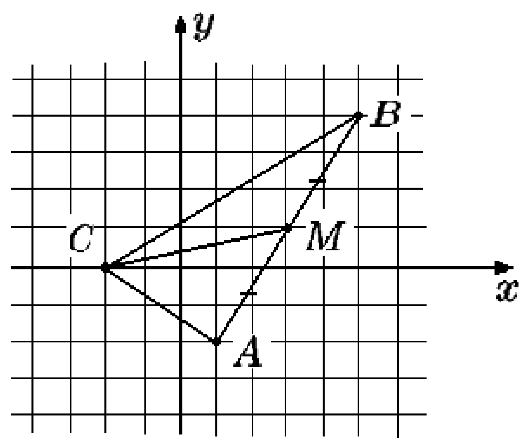
Оскільки точка $M_1(x_1, y_1)$ належить прямій L, то $Ax_1 + By_1 + C = 0$, звідки $-Ax_1 - By_1 = C$. Тому

$$d = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Остання формула є формулою відстані від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$.

Розглянемо приклад.

Приклад 10.4. Дано вершини трикутника ABC: $A(1, -2)$, $B(5, 4)$, $C(-2, 0)$. Скласти рівняння сторони AB трикутника, рівняння бісектриси AL, рівняння висоти BN, рівняння медіани CM, рівняння прямої, що проходить через точку C паралельно AB. Знайти довжину висоти BN.



Складемо рівняння прямої, на якій лежить сторона трикутника AB, як рівняння прямої, що проходить через дві точки.

$$AB: \quad \frac{x-1}{5-1} = \frac{y+2}{4+2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{6},$$

звідки

$$AB: \quad 3x - 2y - 7 = 0.$$

Складемо рівняння бісектриси AL. Для цього знайдемо координати точки L, використовуючи властивість бісектриси трикутника: $\frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$. Оскільки $|AB| = \sqrt{(5-1)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{52}$, і $|AC| =$

$\sqrt{(-2-1)^2+(0+2)^2} = \sqrt{13}$, то $\lambda = \frac{|BL|}{|LC|} = 2$. За формулами поділу відрізка у заданому відношенні:

$$x_L = \frac{x_B + \lambda x_C}{1+\lambda} = \frac{1}{3}, \quad y_L = \frac{y_B + \lambda y_C}{1+\lambda} = \frac{4}{3},$$

звідки $L(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$. Таким чином, рівняння прямої, на якій лежить бісектриса внутрішнього кута при вершині A трикутника ABC:

$$AL: \quad \frac{x-1}{\frac{1}{3}-1} = \frac{y+2}{\frac{4}{3}+2} \quad \Leftrightarrow \quad 5x+y-3=0.$$

Перед тим як скласти рівняння висоти BN, складемо рівняння прямої, на якій лежить сторона AC, як рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$AC: \quad \frac{x-1}{-2-1} = \frac{y+2}{0+2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{2},$$

звідки

$$AC: \quad 2x+3y+4=0.$$

Тепер складемо рівняння прямої, на якій лежить висота BN, як рівняння прямої перпендикулярної AC, що проходить через точку B. Оскільки вектор $\overrightarrow{n} = (2,3)$ — нормальний вектор прямої AC, то він є напрямним вектором прямої BN. Тому шукане рівняння висоти

$$BN: \quad \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3x-2y-7=0.$$

Бачимо, що пряма, на якій лежить висота BN, співпадає з прямою, на якій лежить сторона AB. Таким чином, точка N співпадає з точкою A, а кут при вершині A — прямий.

Обчислимо довжину висоти BN за формулою відстані від точки до прямої:

$$d = \frac{\left|2\cdot 5 + 3\cdot 4 + 4\right|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}.$$

Для того, щоб скласти рівняння прямої, на якій лежить медіана CM трикутника, знайдемо координати точки M за формулами середини відрізка AB:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+5}{2} = 3, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1.$$

Тому рівняння медіани

$$CM: \quad \frac{x+2}{3+2} = \frac{y-0}{1-0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+2}{5} = \frac{y}{1},$$

звідки

$$CM: \quad x - 5y + 2 = 0.$$

Нарешті, складемо рівняння прямої, що проходить через точку C паралельно стороні AB. Оскільки паралельні прямі мають колінеарні нормальні вектори, то нормальний вектор $\overrightarrow{n} = (3, -2)$ прямої AB можна вважати також нормальним вектором шуканої прямої. Тоді за рівнянням прямої, що проходить через задану точку $C(-2, 0)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{n} = (3, -2)$, рівняння шуканої прямої матиме вигляд:

$$3(x + 2) - 2(y - 0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 2y + 6 = 0.$$

11 Криві другого порядку на площині. Еліпс, гіпербола, парабола

11.1 Загальне рівняння кривої другого порядку.

Означення 11.1. *Кривою другого порядку* на площині називається сукупність точок (геометричне місце точок), які в деякій декартовій системі координат Oxy задовольняють алгебраїчне рівняння другого порядку:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{11.1}$$

де A, B, C, D, E, F — дійсні числа, причому принаймні одне з чисел A, B, C не дорівнює нулю.

Насправді рівняння (11.1) задає на площині еліпс, гіперболу або параболу. Детальне пояснення цього факту дає наступна теорема.

Теорема 11.1. *Загальне рівняння* (11.1) *кривої другого порядку, задане у декартовій системі координат Oxy, за допомогою перетворення системи координат можна звести до одного з наступних виглядів:*
I. $\widehat{A}x_2^2 + \widehat{C}y_2^2 + \widehat{F} = 0, \quad \widehat{A} \cdot \widehat{C} \neq 0;$
II. $\widehat{C}y_2^2 + 2\widehat{D}x_2 = 0, \quad \widehat{C} \cdot \widehat{D} \neq 0,$ *або* $\widehat{A}x_2^2 + 2\widehat{E}y_2 = 0, \quad \widehat{A} \cdot \widehat{E} \neq 0;$
III. $\widehat{A}x_2^2 + \widehat{F} = 0, \quad \widehat{A} \neq 0,$ *або* $\widehat{C}y_2^2 + \widehat{F} = 0, \quad \widehat{C} \neq 0,$
де x_2 і y_2 — змінні у новій декартовій системі координат Ox_2y_2.

Доведення. Покажемо, що в деякій декартовій системі координат задана крива другого порядку задається одним з трьох рівнянь.

Якщо у рівнянні (11.1) $B \neq 0$, то спочатку перейдемо від декартової системи координат Oxy до декартової системи координат Ox_1y_1, у якій задана крива буде описуватися рівнянням другого порядку, що не містить доданка з множником xy. Для цього знайдемо кут α, на який потрібно повернути навколо точки $O(0,0)$ осі координат Ox, Oy. Покладемо

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \\ y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha. \end{cases}$$

Підставляючи ці координати замість змінних x та y у рівняння (11.1), отримаємо:

$$A(x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha)^2 + 2B(x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha)(x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha) +$$

$+C(x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha)^2 + 2D(x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha) + 2E(x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha) + F = 0.$
Збираючи подібні доданки, бачимо, що коефіцієнт при $x_1 y_1$ дорівнює

$$(-2A + 2C)\sin\alpha\cos\alpha + 2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).$$

Отже, нехай кут α такий, що

$$(-2A + 2C)\sin\alpha\cos\alpha + 2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0.$$

Враховуючи, що $B \neq 0$, останнє рівняння еквівалентне наступному:

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{2B}.$$

Таким чином, при повороті осей Ox, Oy на кут α, ми отримаємо нову декартову систему координат Ox_1y_1, у якій задана крива другого порядку буде описуватися рівнянням:

$$\widehat{A}x_1^2 + \widehat{C}y_1^2 + 2\widehat{D}x_1 + 2\widehat{E}y_1 + F = 0, \tag{11.2}$$

де $\widehat{A} = (A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)$, $\widehat{C} = (A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha)$, $\widehat{D} = D\cos\alpha + E\sin\alpha$, $\widehat{E} = -D\sin\alpha + E\cos\alpha$.

Розглянемо три випадки:

I. $\widehat{A}\cdot\widehat{C} \neq 0$. Тоді, виділяючи повні квадрати у рівнянні (11.2), отримаємо

$$\widehat{A}\Big(x_1 + \frac{\widehat{D}}{\widehat{A}}\Big)^2 + \widehat{C}\Big(y_1 + \frac{\widehat{E}}{\widehat{C}}\Big)^2 + \Big(F - \frac{\widehat{D}^2}{\widehat{A}} - \frac{\widehat{E}^2}{\widehat{C}}\Big) = 0.$$

Тому перенесемо паралельно початок координат $O_1(0,0)$ системи координат Ox_1y_1 у точку $\widehat{O}\,\Big(-\frac{\widehat{D}}{\widehat{A}}, -\frac{\widehat{E}}{\widehat{C}}\Big)$ координатної площини Oxy.

При цьому рівняння заданої кривої другого порядку прийме вигляд:

$$\widehat{A}x_2^2 + \widehat{C}y_2^2 + \widehat{F} = 0, \quad \widehat{A}\cdot\widehat{C} \neq 0,$$

де $\widehat{F} = F - \frac{\widehat{D}^2}{\widehat{A}} - \frac{\widehat{E}^2}{\widehat{C}}$, і нові координати виражаються через старі наступним чином:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{\widehat{D}}{\widehat{A}}, \\ y_2 = y_1 + \frac{\widehat{E}}{\widehat{C}}. \end{cases}$$

II. Нехай $\widehat{C}\cdot\widehat{D} \neq 0$ (аналогічно, $\widehat{A}\cdot\widehat{E} \neq 0$). В цьому випадку рівняння (11.2) набуває вигляду:

$$\widehat{C}\Big(y_1 + \frac{\widehat{E}}{\widehat{C}}\Big)^2 + 2\widehat{D}\Big(x_1 + \frac{F - \frac{\widehat{E}^2}{\widehat{C}}}{2\widehat{D}}\Big) = 0.$$

Паралельним переносом осей координат у точку $\widehat{O}\Big(-\frac{\widehat{E}}{\widehat{C}}, \frac{\frac{\widehat{E}^2}{\widehat{C}}-F}{2\widehat{D}}\Big)$ координатної площини Oxy, отримаємо у новій системі координат рівняння заданої кривої:

$$\widehat{C}y_2^2 + 2\widehat{D}x_2 = 0,$$

причому

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{F-\frac{\widehat{E}^2}{\widehat{C}}}{2\widehat{D}}, \\ y_2 = y_1 + \frac{\widehat{E}}{\widehat{C}}. \end{cases}$$

III. $\widehat{A} \neq 0$ (аналогічно, $\widehat{C} \neq 0$). В цьому випадку, виділивши повний квадрат у рівнянні (11.2), отримаємо:

$$\widehat{A}\Big(x_1 + \frac{\widehat{D}}{\widehat{A}}\Big)^2 + \Big(F - \frac{\widehat{D}^2}{\widehat{A}}\Big) = 0.$$

Паралельним переносом початку координат системи Ox_1y_1 у точку $\widehat{O}\Big(-\frac{\widehat{D}}{\widehat{A}}, 0\Big)$, отримаємо рівняння заданої кривої у новій системі координат:

$$\widehat{A}x_2^2 + \widehat{F} = 0,$$

де $\widehat{F} = F - \frac{\widehat{D}^2}{\widehat{A}}$. При цьому

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + \frac{\widehat{D}}{\widehat{A}}, \\ y_2 = y_1. \end{cases}$$

Таким чином, теорему доведено. $\square$

Рівняння I, II, III, наведені у теоремі 11.1, називаються найпростішими (канонічними) рівняннями кривих другого порядку.

Класифікація кривих другого порядку. Відповідно до теореми 11.1 рівняння (11.1) задає у деякій декартовій системі координат одну з наступних 9 ліній:

I.

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — еліпс
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ — уявний еліпс
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ — дві уявні прямі, що перетинаються
4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — гіпербола
5. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ — пара прямих, що перетинаються

II.
6. $x^2 = 2py$ — парабола
III.
7. $x^2 = a^2$ — пара паралельних прямих
8. $x^2 = -a^2$ — пара уявних паралельних прямих
9. $x^2 = 0$ — дві прямі, що співпадають

Приклад 11.1. Звести рівняння кривої другого порядку

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 - 46x - 28y + 17 = 0$$

до канонічного вигляду, з'ясувати тип кривої.

Випишемо коефіцієнти рівняння кривої другого порядку: $A = 17$, $B = 6$, $C = 8$, $D = -23$, $E = -14$, $F = 17$.

Перейдемо від декартової системи координат Oxy до декартової системи координат Ox_1y_1, повернувши навколо точки $O(0,0)$ осі координат Ox, Oy на кут α. Для цього покладемо

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \\ y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha. \end{cases}$$

Знайдемо кут α з рівняння

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{2B} = \frac{17 - 8}{12} = \frac{3}{4}.$$

Отже, $2\alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$, звідки $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Таким чином, зробимо заміну координат:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}y_1, \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1. \end{cases}$$

Підставляючи ці вирази замість змінних x і y у рівняння $17x^2 + 12xy + 8y^2 - 46x - 28y + 17 = 0$, отримаємо:

$$17\Big(\frac{2}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}y_1\Big)^2 + 12\Big(\frac{2}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}y_1\Big) \cdot \Big(\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1\Big) +$$

$$+ 8\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1\Big)^2 - 46\Big(\frac{2}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}y_1\Big) - 28\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1\Big) + 17 = 0.$$

Спрощуючи це рівняння, матимемо

$$20x_1^2 + 5y_1^2 - \frac{120}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{10}{\sqrt{5}}y_1 + 17 = 0,$$

або
$$20\Big(x_1^2-\frac{6}{\sqrt{5}}x_1\Big)+5\Big(y_1^2-\frac{2}{\sqrt{5}}y_1\Big)+17=0.$$
$$20\Big(x_1-\frac{3}{\sqrt{5}}\Big)^2+5\Big(y_1-\frac{1}{\sqrt{5}}\Big)^2=20.$$

Зробимо паралельний перенос системи координат Ox_1y_1 в точку $O_1(\frac{3}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})$, поклавши
$$\begin{cases} x_2=x_1-\frac{3}{\sqrt{5}},\\ y_2=y_1-\frac{1}{\sqrt{5}}.\end{cases}$$

У новій системі координат $O_1x_2y_2$ крива другого порядку набуває вигляд:
$$20x_2^2+5y_2^2=20, \iff x_2^2+\frac{y_2^2}{4}=1.$$
Отже, задана крива — еліпс.

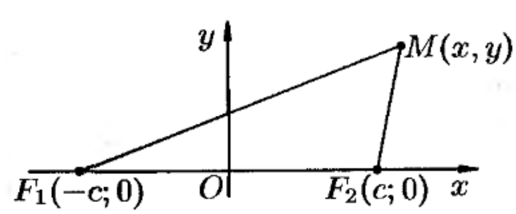
Розглянемо детально три основні криві другого порядку.

11.2 Еліпс, його канонічне рівняння.

Означення 11.2. *Еліпсом* називається геометричне місце точок площини таких, що сума відстаней від кожної з них до двох фіксованих точок площини, які називаються *фокусами*, є величиною сталою і більшою за відстань між фокусами.

Канонічне рівняння еліпса. Зафіксуємо дві точки площини — фокуси F_1 і F_2. Розглянемо на площині таку декартову систему координат Oxy, що вісь Ox проходить через фокуси F_1 і F_2, а точка O є серединою відрізка F_1F_2. Таким чином, $F_1(-c,0)$ і $F_2(c,0)$, де c — відоме додатне дійсне число.

Нехай $M(x,y)$ — довільна точка еліпса, та сума відстаней від точки $M(x,y)$ до фокусів дорівнює $2a$, тобто $|MF_1|+|MF_2|=2a$. Відрізки $|MF_1|$ і $|MF_2|$ називаються *фокальними радіусами*.



Оскільки $|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$, $|MF_2| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$, то

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a,$$

звідки

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$$

За означенням еліпса $a > c$. Тому, покладаючи $a^2 - c^2 = b^2$, отримаємо рівняння

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

звідки

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (11.3)$$

Рівняння (11.3) називається *канонічним рівнянням еліпса.* Зауважимо, що у випадку, коли $a = b$, рівняння (11.3) описує на площині коло з центром у початку координат та радіуса $R = a$.

Отже, довільна точка, що належить еліпсу, у деякій декартовій системі координат задовольняє рівняння (11.3).

Зауважимо, що у деяких задачах від канонічного рівняння еліпса зручно переходити до його параметричного рівняння:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

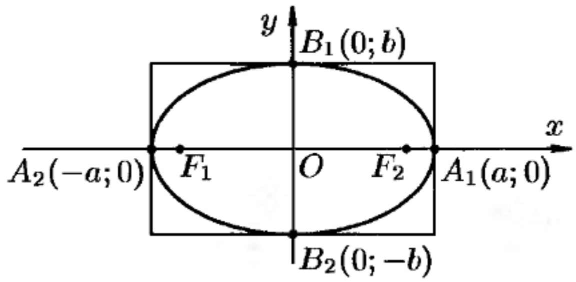
Форма та характеристики еліпса. Дослідимо за рівнянням (11.3) форму та розташування еліпса.

1. Змінні x та y входять у рівняння (11.3) у парних степенях. Тому, якщо точка (x, y) належить еліпсу, то і точки $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$ також належать еліпсу. Отже, фігура симетрична відносно осей Ox та Oy, а також точки $O(0, 0)$, яку називають центром еліпса.

2. Знайдемо точки перетину еліпса з осями координат. Підставивши у рівняння (11.3) $y = 0$, отримаємо, що вісь Ox еліпс перетинає у точках $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$. Поклавши $x = 0$, отримаємо дві точки $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$, в яких еліпс перетинає вісь Oy. Точки A_1, A_2, B_1, B_2 називають *вершинами* еліпса. Відрізки A_1A_2 та B_1B_2, а також їх довжини $2a$ і $2b$ називають відповідно *великою* та *малою осями* еліпса. Числа a і b називають відповідно *великою* та *малою півосями* еліпса.

3. З рівняння (11.3) також випливає, що $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$ і $\frac{y^2}{b^2} \leq 1$, звідки $-a \leq x \leq a$ і $-b \leq y \leq b$. Тобто всі точки еліпса знаходяться всередині прямокутника, утвореного прямими $x = \pm a$ і $y = \pm b$.

4. Візьмемо на еліпсі точку (x, y) у першій чверті. В цій чверті $x \geq 0$, $y \geq 0$, а тому $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $0 \leq x \leq a$. Оскільки $y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}} < 0$, при $0 < x < a$, то функція монотонно спадає при $0 < x < a$. Аналогічно, оскільки $y'' = -\frac{ab}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} < 0$, при $0 < x < a$, то функція є опуклою вгору при $0 < x < a$. Таким чином, еліпс є замкненою овальною кривою. За встановленими характеристиками побудуємо еліпс:



5. Відношення половини відстані між фокусами до більшої півосі $\frac{c}{a}$ називається *ексцентриситетом* еліпса і позначається літерою ε:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Зауважимо, що для еліпса $0 < \varepsilon < 1$. Перепишемо ексцентриситет наступним чином:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

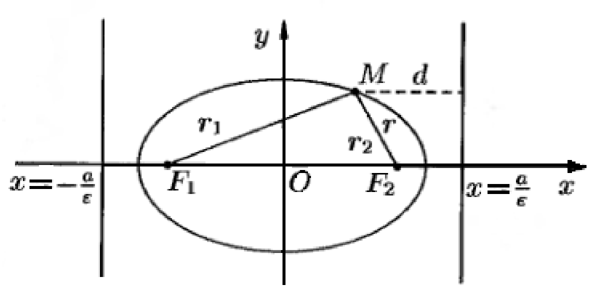
тобто

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Звідси випливає, що чим меншим є ексцентриситет, тим меньше сплющений еліпс.

6. Нехай $M(x, y)$ — довільна точка еліпса. Розглянемо фокальні радіуси $|MF_1| = r_1$ і $|MF_2| = r_2$. Тоді $r_1 + r_2 = 2a$, і мають місце рівності:

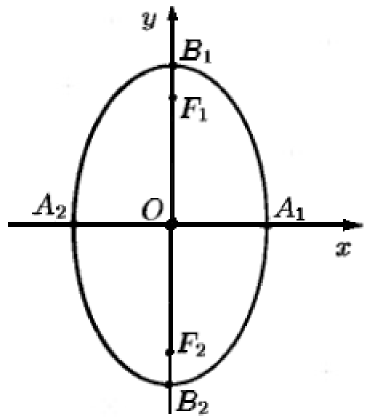
$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x.$$



Прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ називаються *директрисами* еліпса. Значення директрис еліпса міститься у наступній теоремі.

Твердження 11.1. *Якщо r — відстань від довільної точки еліпса до одного з двох фокусів, а d — відстань від цієї ж точки до відповідної цьому фокусу директриси, то відношення $\frac{r}{d}$ є величиною сталою, рівною ексцентриситету.*

7. Якщо $a < b$, то рівняння (11.3) описує еліпс, більша вісь якого $2b$ лежить на осі Oy, а мала вісь $2a$ — на осі Ox. При цьому фокуси знаходяться у точках $F_1(0, c)$ $F_2(0, -c)$, де $c^2 = b^2 - a^2$, $\varepsilon = \frac{c}{b}$, а директриси мають рівняння $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$.



8. Якщо центр еліпса знаходиться у точці $O_1(x_0, y_0)$, то його канонічне рівняння має вигляд:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

При цьому, якщо $a > b$, то фокуси знаходяться у точках $F_1(x_0 + c, y_0)$ і $F_2(x_0 - c, y_0)$, а директриси задаються рівняннями: $x = x_0 \pm \frac{a}{\varepsilon}$.

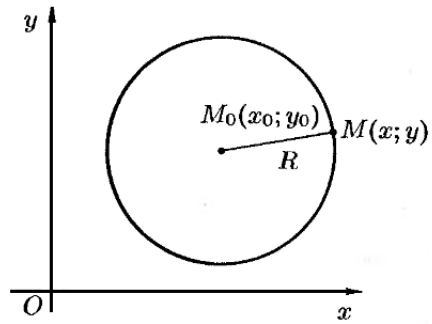
9. В полярній системі координат, канонічне рівняння еліпса має вигляд:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi},$$

де $p = \frac{b^2}{a}$, а $\varepsilon < 1$.

10. Оптична властивість еліпса: всі промені, що виходять із одного з фокусів еліпса, після відбиття від еліпса зійдуться в іншому його фокусі.

11. Якщо $a = b = R$, то рівняння $\frac{(x-x_0)^2}{R^2} + \frac{(y-y_0)^2}{R^2} = 1$ задає на площині коло з центром в точці $O_1(x_0, y_0)$ і радіуса R.



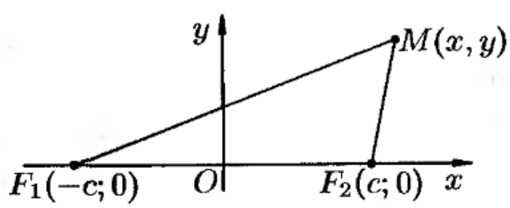
Рівняння кола можна безпосередньо отримати із означення кола як геометричного місця точок площини таких, що всі точки знаходяться на однаковій відстані R від фіксованої точки площини, яка називається центром кола.

11.3 Гіпербола, її канонічне рівняння.

Означення 11.3. *Гіперболою* називається геометричне місце точок площини таких, що модуль різниці відстаней від кожної з них до двох фіксованих точок площини, які називаються *фокусами*, є величиною сталою і меншою за відстань між фокусами.

Канонічне рівняння гіперболи. Зафіксуємо дві точки площини — фокуси F_1 і F_2. Розглянемо на площині таку декартову систему координат Oxy, що вісь Ox проходить через фокуси F_1 і F_2, а точка O є серединою відрізка F_1F_2. Таким чином, $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$, де c — відоме додатне дійсне число.

Нехай $M(x, y)$ — довільна точка гіперболи. За означенням гіперболи модуль різниці відстаней від точки $M(x, y)$ до фокусів є сталою величиною. Позначимо це число $2a$. А саме, $||MF_1| - |MF_2|| = 2a$. Відрізки $|MF_1|$ і $|MF_2|$ називаються *фокальними радіусами.*



Таким чином, $|MF_1| - |MF_2| = \pm 2a$, звідки

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Спростивши це рівняння, отримаємо

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{11.4}$$

де $b^2 = c^2 - a^2$. Рівняння (11.4) називається *канонічним рівнянням гіперболи*. Отже, довільна точка, що належить гіперболі, у деякій декартовій системі координат задовольняє рівняння (11.4).

Форма та характеристики гіперболи. Дослідимо за рівнянням (11.4) форму та розташування гіперболи.

1. Змінні x та y входять у рівняння (11.4) у парних степенях. Тому, якщо точка (x, y) належить гіперболі, то і точки $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$ також належать гіперболі. Отже, фігура симетрична відносно осей Ox та Oy, а також точки $O(0, 0)$, яку називають центром гіперболи.

2. Знайдемо точки перетину гіперболи з осями координат. Підставивши у рівняння (11.4) $y = 0$, отримаємо, що гіпербола перетинає вісь Ox у точках $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$. Поклавши $x = 0$, отримаємо рівняння $y^2 = -b^2$, яке не має розв'язків. Отже, гіпербола не перетинає вісь Oy. Точки A_1, A_2 називаються *вершинами* гіперболи.

Відрізок $A_1A_2 = 2a$ називається *дійсною віссю* гіперболи, а відрізок $B_1B_2 = 2b$ — *уявною віссю* гіперболи. Числа a і b називаються відповідно *дійсною* та *уявною півосями* гіперболи. Прямокутник, утворений осями $2a$ та $2b$ називається головним прямокутником гіперболи.

3. З рівняння (11.4) випливає, що $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$, тобто $|x| \geq a$. Це означає, що всі точки гіперболи розташовані справа від прямої $x = a$ (*права гілка гіперболи*) і зліва від прямої $x = -a$ (*ліва гілка гіперболи*).

4. Візьмемо на гіперболі точку (x, y) у першій чверті, тобто $x \geq 0$, $y \geq 0$, а тому $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $x \geq a$. Оскільки $y' = \frac{bx}{a\sqrt{x^2-a^2}} > 0$, при $x > a$, то функція монотонно зростає при $x > a$. Аналогічно, оскільки $y'' = -\frac{ab}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} < 0$, при $x > a$, то функція є опуклою вгору при $x > a$.

5. Асимптоти гіперболи. Гіпербола має дві асимптоти. Знайдемо асимптоту до гілки гіперболи, що знаходиться у першій чверті, а потім скористаємося симетрією. Розглянемо точку (x, y) у першій чверті, тобто $x \geq 0$, $y \geq 0$. В цьому випадку $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $x \geq a$. Тоді асимптота матиме вигляд $y = Kx + B$, де

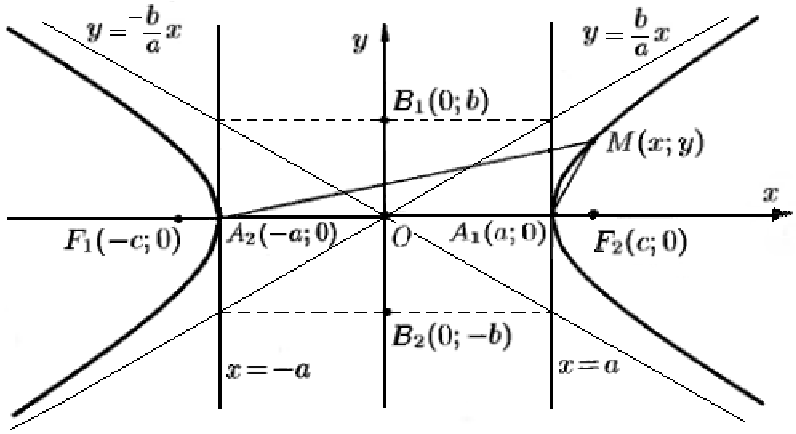
$$K = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{b}{a},$$

$$B = \lim_{x\to+\infty} (y(x) - Kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x\right) =$$

$$= \frac{b}{a} \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - a^2} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2 - a^2} + x\right)} = \frac{b}{a} \lim_{x \to +\infty} \frac{b^2}{\left(\sqrt{x^2 - a^2} + x\right)} = 0.$$

Отже, пряма $y = \frac{b}{a}x$ є асимптотою функції $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $x \geq a$. Тому в силу симетрії асимптотами гіперболи є прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$.

За встановленими характеристиками побудуємо гілку гіперболи, що знаходиться у першій чверті, та скористаємося симетрією:



6. У випадку, коли $b = a$, тобто гіпербола описується рівнянням

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

гіпербола називається *рівнобічною*. Рівнобічна гіпербола має асимптоти, які є бісектрисами координатних кутів: $y = \pm x$.

7. Відношення половини відстані між фокусами до більшої півосі $\frac{c}{a}$ називається *ексцентриситетом* гіперболи і позначається літерою ε:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Зауважимо, що для гіперболи $\varepsilon > 1$, оскільки $c > a$. Ексцентриситет характеризує форму гіперболи. Дійсно, оскільки

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1},$$

то чим менше ексцентриситет гіперболи, тим менше відношення півосей гіперболи $\frac{b}{a}$, і тим більше розтягнутий її головний прямокутник. У рівнобічної гіперболи $\varepsilon = \sqrt{2}$.

8. Нехай $M(x, y)$ — довільна точка гіперболи. Розглянемо фокальні радіуси $|MF_1| = r_1$ і $|MF_2| = r_2$. Для точок правої гілки гіперболи вони мають вигляд:

$$r_1' = a + \varepsilon x, \quad r_2' = -a + \varepsilon x.$$

Для точок лівої гілки гіперболи фокальні радіуси задаються формулами

$$r_1'' = -a - \varepsilon x, \quad r_2'' = a - \varepsilon x.$$

відповідно.

Прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ називаються *директрисами* гіперболи. Оскільки у гіперболи $\varepsilon > 1$, то $\frac{a}{\varepsilon} < a$, тобто її директриси розташовані між початком координат та вершинами $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$.

Значення директрис гіперболи міститься у наступній теоремі.

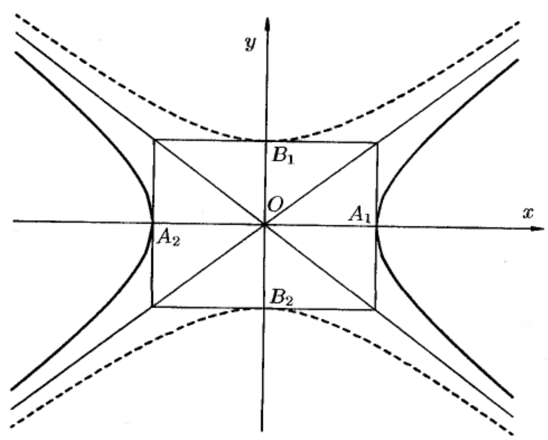
Твердження 11.2. *Якщо r — відстань від довільної точки гіперболи до одного з двох фокусів, а d — відстань від цієї ж точки до відповідної цьому фокусу директриси, то відношення $\frac{r}{d}$ є величиною сталою, рівною ексцентриситету гіперболи.*

9. Крива, що задається рівнянням

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

також є гіперболою. Дійсна вісь $2b$ цієї гіперболи розташована на осі Oy, а уявна $2a$ — на осі Ox. Очевидно, що гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ та $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ мають однакові асимптоти.

Гіпербола $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ називається *спряженою* до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. На малюнку нижче спряжена гіпербола зображена пунктиром.



10. Оптична властивість гіперболи: будь-який промінь, що виходить із одного з фокусів, після відбиття від гіперболи начебто виходить із іншого фокуса.

11. В полярній системі координат, канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi},$$

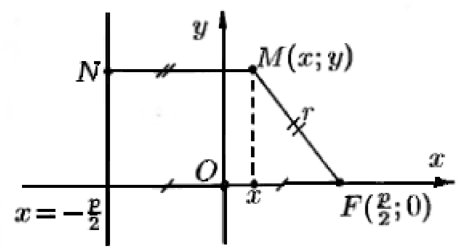
де $p = \frac{b^2}{a}$, а $\varepsilon > 1$.

11.4 Парабола, її канонічне рівняння.

Означення 11.4. *Параболою* називається геометричне місце точок площини, кожна з яких рівновіддалена від фіксованої точки площини, що називається *фокусом*, та фіксованої прямої, яка називається *директрисою.*

Відстань від фокуса до директриси параболи називається параметром параболи і позначається p ($p>0$).

Зафіксуємо на площині фокус F та пряму — D — директрису параболи. Виберемо на площині декаротову систему координат так, щоб вісь Ox проходила через фокус F перпендикулярно директрисі D у напрямку від директриси до фокуса. Початок координат помістимо у середині перпендикуляра, опущеного з фокуса на директрису. У вибраній системі координат $F(\frac{p}{2}, 0)$, а директриса D має рівняння $x = -\frac{p}{2}$.



Нехай $M(x, y)$ — довільна точка параболи. Знайдемо окремо відстань $|FM|$:

$$|FM| = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}.$$

Відрізок $|FM|$ називається *фокальним радіусом* точки M. Позначимо через N — основу перпендикуляра з точки M на директрису. Тоді

$$|MN| = \sqrt{(x + \frac{p}{2})^2 + (y - y)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Таким чином, оскільки за означенням $|FM| = |MN|$, то

$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Піднісши останню рівність до квадрату та спростивши її, отримаємо рівняння:

$$y^2 = 2px,$$

яке називається *канонічним рівнянням параболи.*

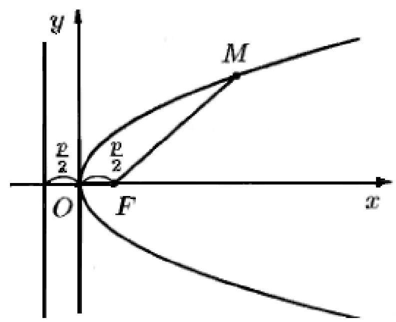
Форма та характеристики параболи. Дослідимо за канонічним рівнянням форму та розташування параболи.

1. У рівняння $y^2 = 2px$ змінна y входить у парній степені, звідки випливає, що парабола симетрична відносно осі Ox. Вісь Ox є *віссю симетрії* параболи.

2. Оскільки $p > 0$, то $x \geq 0$, звідки випливає, що парабола розташована справа від осі Oy.

3. При $x = 0$ маємо $y = 0$, тобто парабола проходить через початок координат. Точка $O(0,0)$ називається *вершиною параболи.*

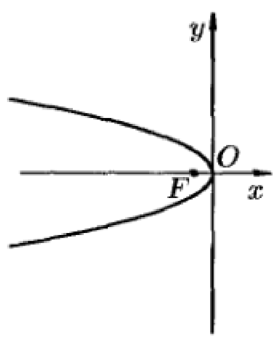
4. При збільшенні значень змінної x модуль y також зростає. Зобразимо параболу на малюнку:



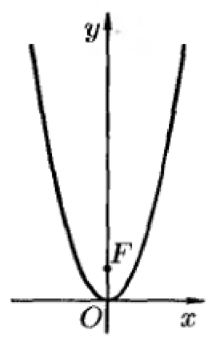
5. В полярній системі координат, канонічне рівняння параболи має вигляд:

$$r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}.$$

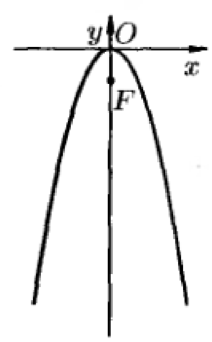
6. Рівняння $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ $(p > 0)$ також описують параболи:



$y^2 = -2px$



$x^2 = 2py$



$x^2 = -2py$

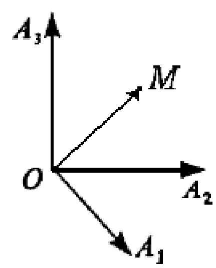
7. Оптична властивість параболи: будь-який промінь, що попадає на параболу паралельно її осі, відображається у її фокусі. І навпаки, якщо промінь виходить із фокуса, відбиваючись від параболи, він спрямовується паралельно її осі.

12 Система координат у просторі. Рівняння поверхні і лінії у просторі. Площина в просторі, різні види її рівняння

12.1 Система координат у просторі.

Під системою координат у просторі розуміють спосіб, що дозволяє чисельно описати положення будь-якої точки простору.

Аналогічно тому, як вводилась система координат на площині, введемо систему координат у просторі. Зафіксуємо впорядковану трійку некомпланарних векторів, прикладених до спільної точки O: $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$.



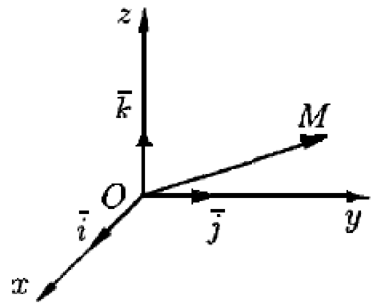
Будь-якій точці M простору поставимо у відповідність вектор $\overrightarrow{OM}$. Оскільки вектори $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$ утворюють базис, то існує єдина трійка чисел (x, y, z) така, що $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA_1} + y\overrightarrow{OA_2} + z\overrightarrow{OA_3}$.

Сукупність точки та трьох некомпланарних векторів задає систему координат у просторі: кожній точці M простору ставиться у відповідність єдина трійка чисел (x, y, z) така, що $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA_1} + y\overrightarrow{OA_2} + z\overrightarrow{OA_3}$. Числа x, y та z називають координатами точки M. І навпаки, для кожної трійки чисел (x, y, z) існує єдина точка простору з такими координатами. Вектори $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$ задають орієнтовані прямі — осі, які називають *осями координат.*

Найбільш зручною для застосування є прямокутна система координат.

Прямокутна (декартова) система координат у просторі

Прямокутна система координат у просторі задається точкою O — початок координат, та трьома взаємно перпендикулярними одиничними векторами $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$ та $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$, які визначають осі координат — *вісь абсцис* Ox, *вісь ординат* Oy, та *вісь аплікат* Oz. Осі координат поділяють простір на вісім областей, що називаються *октантами.*



Розглянемо довільну точку M простору із заданою прямокутною системою координат $Oxyz$. Координатами точки M у системі координат $Oxyz$ називаються координати її радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$. Якщо $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$, то координати точки M записують $M(x, y, z)$, число x називається *абсцисою* точки M, число y — *ординатою* точки M, z — *аплікатою* точки M. Три числа x, y, z повністю визначають положення точки у просторі.

Відстань між двома точками у декартовій системі координат. Відстань d між точками $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$ у просторі дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, тобто

$$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Поділ відрізка у заданому відношенні у декартовій системі координат. Нехай відрізок AB, що з'єднує точки $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$ потрібно поділити у заданому відношенні $\lambda > 0$, тобто знайти координати точки $M(x, y, z)$ відрізка AB такої, що $\frac{AM}{MB} = \lambda$.

Розглянемо вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{MB}$. Оскільки точка M ділить відрізок AB у відношенні λ, то

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}.$$

Але $\overrightarrow{AM} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = (x - x_1)\overrightarrow{i} + (y - y_1)\overrightarrow{j} + (z - z_1)\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{MB} = (x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z) = (x_2 - x)\overrightarrow{i} + (y_2 - y)\overrightarrow{j} + (z_2 - z)\overrightarrow{k}$. Тому

$$(x - x_1)\overrightarrow{i} + (y - y_1)\overrightarrow{j} + (z - z_1)\overrightarrow{k} = \lambda(x_2 - x)\overrightarrow{i} + \lambda(y_2 - y)\overrightarrow{j} + \lambda(z_2 - z)\overrightarrow{k}.$$

Звідси випливає, що

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z),$$

тобто

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \tag{12.1}$$

Формули (12.1) називаються *формулами поділу відрізка у заданому відношенні.*

Зокрема, якщо $\lambda = 1$, тобто $AM = MB$, то формули (12.1) набувають вигляду: $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = \frac{y_1+y_2}{2}$, $z = \frac{z_1+z_2}{2}$. В цьому випадку точка M є серединою відрізка AB.

12.2 Рівняння поверхні і лінії у просторі.

Рівняння поверхні у просторі. Поверхні у просторі, як правило, можна розглядати як геометричне місце точок, які задовольняють деякій умові. Наприклад, сфера радіуса R з цетром в точці O_1 є геометричним місцем всіх точок простору, які знаходяться від точки O_1 на відстані R.

Прямокутна система координат $Oxyz$ дозволяє встановити взаємно однозначну відповідність між точками простору і трійками чисел x, y, z — їх координатами. Властивість, спільна для всіх точок поверхні, можна записати у вигляді рівняння, яке зв'язує координати всіх точок поверхні.

Означення 12.1. *Рівнянням даної поверхні* в прямокутній системі координат $Oxyz$ називається таке рівняння $F(x, y, z) = 0$ з трьома невідомими x, y, z, якому задовольняють координати кожної точки, що лежить на поверхні, і не задовольняють координати точок, що не лежать на поверхні.

Рівняння поверхні дозволяє вивчення геометричних властивостей поверхонь замінити дослідженням її рівняння. Наприклад, для того, щоб дізнатися, чи лежить точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ на даній поверхні, достатньо підставити координати точки M_1 у рівняння поверхні замість змінних: якщо координати задовольняють рівняння, то точка лежить на поверхні, в протилежному випадку —- точка не лежить на поверхні.

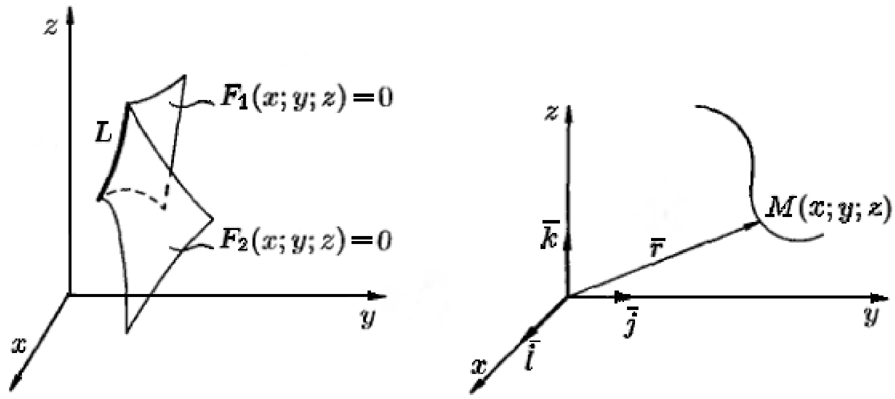
Рівняння лінії (кривої) у просторі. Лінію у просторі можна розглядати, як лінію перетину двох поверхонь або як геометричне місце точок, спільних для двох поверхонь.

Якщо $F_1(x, y, z) = 0$ і $F_2(x, y, z) = 0$ —- рівняння двох поверхонь, які визначають лінію l, то координати точок цієї лінії задовольняють системі двох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Ці рівняння називають рівнянням лінії у просторі. Наприклад, $\begin{cases} y = 0, \\ z = 0, \end{cases}$ – рівняння осі Ox.

Лінію у просторі можна розглядати як траєкторію руху точки. В цьому випадку її задають *векторним рівнянням* $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$, де t — скалярний параметр. Кожному значенню параметра t_0 відповідає радіус-вектор $\overrightarrow{r}_0 = \overrightarrow{r}(t_0)$. При зміні значення параметра t, кінець радіус-вектора буде описувати у просторі криву.



Криву у просторі можна задавати за допомогою трьох рівнянь:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \quad t \in T, \end{cases}$$

де x, y та z — координати довільної точки $M(x, y, z)$ кривої, а t — змінна, що називається параметром. Параметр t визначає положення кожної точки $M(x, y, z)$ кривої у просторі $Oxyz$. Таке задання кривої у просторі називається *параметричним.*

Отже, поверхню у просторі можна задати аналітично або геометрично. Звідси випливають дві **основні задачі аналітичної геометрії у просторі**:

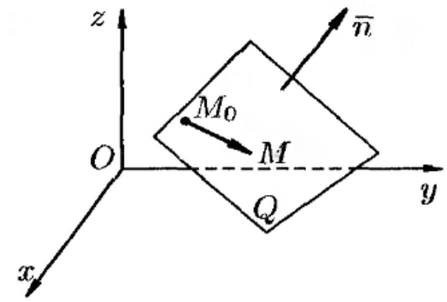
1) Задана поверхня як геометричне місце точок. Знайти рівняння цієї поверхні.

2) Задано рівняння поверхні $F(x, y, z) = 0$. Дослідити форму та геометричні властивості цієї поверхні.

12.3 Площина в просторі, різні види її рівняння.

Найпростішою поверхнею у просторі є площина. Вона задається алгебраїчним рівнянням першого порядку відносно змінних x, y, z. Площину у просторі можна задавати різними способами. Розглянемо їх.

Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора. Нехай у просторі з введеною прямокутною системою координат $Oxyz$ задано площину Q. Нехай відомо точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через яку проходить площина, та вектор, перпендикулярний до площини $\overrightarrow{n}(A, B, C)$.



Нехай $M(x, y, z)$ — довільна точка площини. Складемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\overrightarrow{n}$ перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто $\overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{n} = 0$. Звідси отримуємо *рівняння площини, що проходить через точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overrightarrow{n}(A, B, C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{12.2}$$

Вектор $\overrightarrow{n}(A, B, C)$ називається *нормальним вектором площини.*

Для заданої точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ простору та довільних дійсних чисел A,B, C рівняння (12.2) є рівнянням площини. Сукупність всіх площин, що проходять через задану точку, називається зв'язкою площин, а рівняння (12.2) рівнянням зв'язки площин.

Загальне рівняння площини. Перепишемо рівняння площини (12.2) наступним чином: $Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0$. Покладемо $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$. Отримаємо рівняння першого порядку відносно змінних x, y, z:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{12.3}$$

яке називається *загальним рівнянням площини.*

Розглянемо частинні випадки рівняння (12.3):

1) Якщо $D = 0$, то рівняння (12.3) матиме вигляд $Ax + By + Cz = 0$. Це рівняння задовольняє точка $O(0, 0, 0)$. Таким чином, площина проходить через початок координат O.

2) Якщо $C = 0$, то рівняння (12.3) матиме вигляд $Ax + By + D = 0$. Вектор $\overrightarrow{n}(A, B, 0)$ є нормальним вектором цієї площини. Він перпендикулярний осі Oz. Таким чином, площина паралельна осі Oz. Аналогічно,

якщо $A = 0$, то площина паралельна осі Ox, а якщо $B = 0$, то площина паралельна осі Oy.

3) Якщо $C = D = 0$, то площина $Ax + By = 0$ проходить через початок координат і паралельна осі Oz, тобто площина проходить через вісь Oz. Аналогічно, площина $Ax + Cz = 0$ проходить через вісь Oy, а площина $By + Cz = 0$ проходить через вісь Oz.

4) Якщо $A = B = 0$, то рівняння (12.3) матиме вигляд $Cz+D = 0$, тобто $z = \frac{-D}{C}$. В цьому випадку площина паралельна координатній площині Oxy. Якщо при цьому $D = 0$, тобто $z = 0$, то площина співпадає з координатною площиною Oxy. Аналогічно, площина $Ax+D = 0$ паралельна координатній площині Oyz, а якщо і $D = 0$, тобто $x = 0$, то задана площина співпадає з координатною площиною Oyz. Аналогічно, площина $By + D = 0$ паралельна координатній площині Oxz, а якщо $D = 0$, тобто $y = 0$, то задана площина співпадає з координатною площиною Oxz.

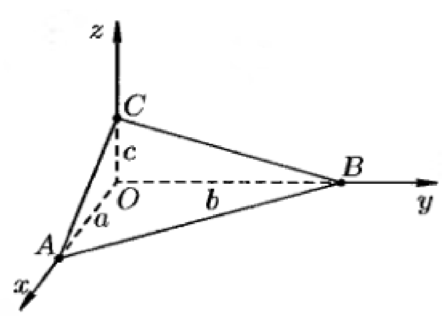
Рівняння площини, що проходить через три точки. Три точки, що не належать одній прямій однозначно визначають площину. Знайдемо рівняння площини Q, що проходить через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, що не належать одній прямій.

Нехай $M(x, y, z)$ — довільна точка площини. Складемо три вектори $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$. Ці вектори лежать в одній площині, а отже вони компланарні. Звідси випливає, що їх мішаний добуток дорівнює нулю, тобто $(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$. Таким чином,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{12.4}$$

Рівняння (12.4) є *рівнянням площини, що проходить через три точки.*

Рівняння площини "у відрізках". Нехай площина Q відтинає від координатних осей відрізки a, b, c відповідно, тобто проходить через точки $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$.



Підставляючи координати цих точок у рівняння (12.4), отримаємо

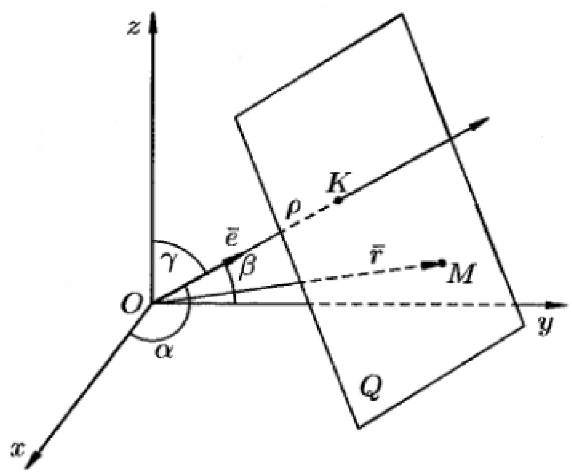
$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник за першим рядком, матимемо, $bc(x-a)+acy+abz=0$, звідки

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{12.5}$$

Рівняння (12.5) називається *рівнянням площини* “*у відрізках*”.

Нормальне рівняння площини. Розташування площини Q у просторі цілком визначається одиничним вектором $\overrightarrow{e}$ направленим по перпендикуляру OK, який опущено з початку координат $O(0,0,0)$ на площину Q, та довжиною p цього перпендикуляру.



Нехай $OK=p$, а α, β, γ — кути, утворені одиничним вектором $\overrightarrow{e}$ з осями координат. Тоді $\overrightarrow{e}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. Нехай $M(x,y,z)$ — довільна точка площини. Складемо вектор $\overrightarrow{r}=\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$. При довільному розташуванні точки M на площині Q проекція радіус-вектора $\overrightarrow{r}$ на напрямок вектора $\overrightarrow{e}$ завжди дорівнює p, тобто пр$_{\overrightarrow{e}}\overrightarrow{r}=p$, звідки $\overrightarrow{e}\cdot\overrightarrow{r}=p$. Тому

$$\overrightarrow{e}\cdot\overrightarrow{r}-p=0.$$

Перепишемо це рівняння через координати векторів $\overrightarrow{r}$ та $\overrightarrow{e}$:

$$(\cos\alpha)x+(\cos\beta)y+(\cos\gamma)z-p=0. \tag{12.6}$$

Рівняння (12.6) називається *нормальним рівнянням площини.*

Загальне рівняння площини (12.3) можна звести до нормального рівняння. Для цього загальне рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$ помножимо на $\lambda = +\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, якщо $D < 0$, і на $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, якщо $D > 0$. Тоді $\lambda A = \cos\alpha$, $\lambda B = \cos\beta$, $\lambda C = \cos\gamma$, $p = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Множник $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ називається нормуючим множником.

Приклад 12.1. Записати загальне рівняння площини $2x - 6y + 3z - 14 = 0$ у вигляді рівняння "у відрізках"та у вигляді нормального рівняння.

Для того, щоб із загального рівняння площини отримати рівняння "у відрізках поділимо обидві частини рівняння $2x - 6y + 3z = 14$ на 14:

$$\frac{2x}{14} - \frac{6y}{14} + \frac{3z}{14} = 1,$$

звідки рівняння площини "у відрізках"має вигляд:

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{-\frac{7}{3}} + \frac{z}{\frac{14}{3}} = 1.$$

Для того, щоб від загального рівняння площини перейти до нормального рівняння, помножимо обидві частини рівнняня $2x - 6y + 3z - 14 = 0$ на множник $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}} = \frac{1}{7}$:

$$\frac{2}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{3}{7}z - 2 = 0.$$

Таикм чином, відстань від початку координат до площини $p = 2$.

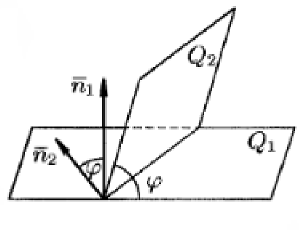
12.4 Основні задачі для площини у просторі.

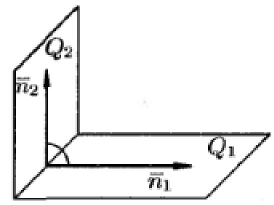
Кут між площинами. Розглянемо дві площини Q_1 та Q_2, задані загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ відповідно.

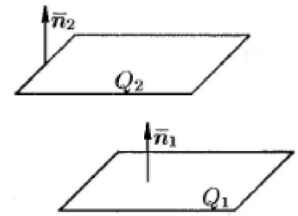
Кутом між двома площинами Q_1 та Q_2 називається один з двогранних кутів, утворених цими площинами. Зрозуміло, що кут φ між нормальними векторами $\overrightarrow{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ та $\overrightarrow{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ площин Q_1 та Q_2 дорівнює цьому двогранному куту. Таким чином,

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n}_1 \cdot \overrightarrow{n}_2}{|\overrightarrow{n}_1| \cdot |\overrightarrow{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Для того, щоб знайти величину гострого кута, необхідно у правій частині останньої рівності взяти модуль.







Умови паралельності та перпендикулярності площин. Дві площини Q_1 та Q_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли колінеарні їх нормальні вектори $\overrightarrow{n}_1$ і $\overrightarrow{n}_2$. Таким чином, *площини Q_1 та Q_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли*

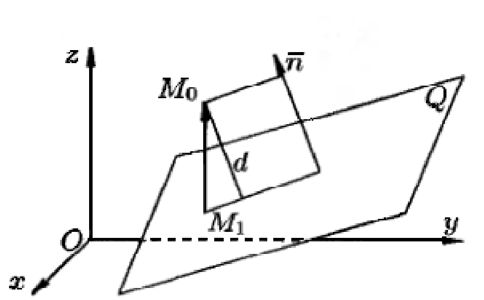
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

З'ясуємо умову перпендикулярності площин Q_1 та Q_2, заданих загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$ та $A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0$ відповідно. Очевидно, площини Q_1 та Q_2 перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли перпендикулярні їх нормальні вектори $\overrightarrow{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ та $\overrightarrow{n}_2(A_2, B_2, C_2)$, тобто тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток нормальних векторів $\overrightarrow{n}_1$ і $\overrightarrow{n}_2$ дорівнює нулю: $\overrightarrow{n}_1 \cdot \overrightarrow{n}_2 = 0$. З цих міркувань випливає, що *площини Q_1 та Q_2 перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли*

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Відстань від точки до площини. Нехай у просторі задана площина Q загальним рівнянням $Ax+By+Cz+D = 0$ і точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Знайдемо відстань від точки M_0 до площини Q.

Відстань d від точки M_0 до площини Q дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$, де $M_1(x_1, y_1, z_1)$ — довільна точка площини Q, на напрямок нормального вектора $\overrightarrow{n}(A, B, C)$.



Тому

$$d = |\text{пр}_{\overrightarrow{n}} \overrightarrow{M_1M_0}| = \Big| \frac{\overrightarrow{M_1M_0} \cdot \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|} \Big| = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Але точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ належить площині Q, а отже $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Звідси $-Ax_1 - By_1 - Cz_1 = D$, і

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

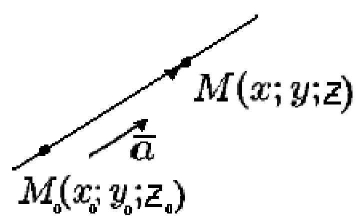
Якщо площина Q задана нормальним рівнянням $(\cos\alpha)x + (\cos\beta)y + (\cos\gamma)z - p = 0$, то відстань від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини Q можна знайти за формулою:

$$d = |(\cos\alpha)x_0 + (\cos\beta)y_0 + (\cos\gamma)z_0 - p|.$$

13 Пряма в просторі, різні види її рівняння. Задачі на пряму і площину

13.1 Пряма в просторі, різні види її рівняння.

Найпростішою лінією у просторі є пряма. Розглянемо різні види її рівняння. **Канонічне рівняння прямої.** Складемо рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно вектору $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Розглянемо довільну точку $M(x, y, z)$ прямої. Складемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$.



Зрозуміло, що вектор $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарний вектору $\overrightarrow{a}$. Звідси випливає, що координати векторів $\overrightarrow{M_0M}$ та $\overrightarrow{a}$ пропорційні. Тому

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}. \tag{13.1}$$

Таким чином, ми отримали рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно вектору $\overrightarrow{a}$. Це рівняння називається *канонічним рівнянням прямої*, а вектор $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ називається *напрямним вектором* прямої.

Розглянемо деякі частинні випадки. Якщо $a_x = 0$, то пряма перпендикулярна осі Ox і лежить у площині $x = x_0$. Якщо $a_y = 0$, то пряма перпендикулярна осі Oy і лежить у площині $y = y_0$. Аналогічно, якщо $a_z = 0$, то пряма перпендикулярна осі Oz і лежить у площині $z = z_0$.

Якщо $a_x = 0$ і $a_y = 0$, то пряма перпендикулярна площині Oxy, і перетинає цю площину в точці $(x_0, y_0, 0)$. Таким чином, пряма паралельна осі Oz.

Якщо $a_x = 0$ і $a_z = 0$, то пряма перпендикулярна площині Oxz, і перетинає цю площину в точці $(x_0, 0, z_0)$. Таким чином, пряма паралельна осі Oy.

Якщо $a_y = 0$ і $a_z = 0$, то пряма перпендикулярна площині Oyz, і перетинає цю площину в точці $(0, y_0, z_0)$. Таким чином, пряма паралельна осі Ox.

Параметричне рівняння прямої. З канонічного рівняння випливає, що

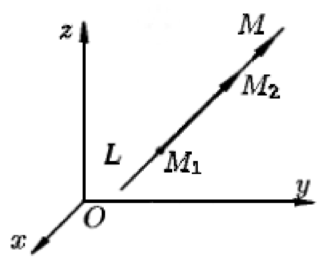
$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z} = t.$$

Виражаючи з цього рівняння змінні x, y та z отримаємо рівняння прямої

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x t, \\ y = y_0 + a_y t, \\ z = z_0 + a_z t, \end{cases}$$

яке називається *параметричним рівнянням.*

Рівняння прямої, що проходить через дві точки. Нехай пряма L проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Розглянемо довільну точку $M(x, y, z)$ прямої.



Складемо вектори $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ та $\overrightarrow{M_1M}(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$. Ці вектори колінеарні, а отже їх координати пропорційні. Звідси випливає рівняння прямої

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

яке називається *рівнянням прямої через дві точки.*

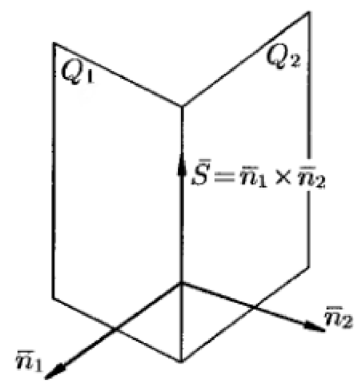
Загальне рівняння прямої. Пряму L у просторі можна задавати як лінію перетину двох площин:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{13.2}$$

Кожне рівняння системи є рівнянням площини. Якщо площини не паралельні, тобто координати нормальних векторів $\overrightarrow{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ і

$\overrightarrow{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ не пропорційні, то система (13.2) визначає пряму як геометричне місце точок простору, координати яких задовольняють кожному з рівнянь системи. Рівняння (13.2) називають *загальним* рівнянням прямої.

Розглянемо, як від загального рівняння прямої перейти до її канонічного рівняння. Виберемо будь-яку точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка задовольняє обом рівнянням системи. Для цього, наприклад, можна покласти $z_0 = 0$, а координати x_0 і y_0 знайти з системи $\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + D_1 = 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + D_2 = 0. \end{cases}$



Оскільки пряма L перпендикулярна векторам $\overrightarrow{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ і $\overrightarrow{n}_2(A_2, B_2, C_2)$, то її напрямний вектор $\overrightarrow{S}$ колінеарний їх векторному добутку. Таким чином, можна вважати, що напрямний вектор прямої L

$$\overrightarrow{S} = \overrightarrow{n}_1 \times \overrightarrow{n}_2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Далі, підставляючи координати точки M_0 та координати вектора $\overrightarrow{S}$ у рівняння (13.1), отримаємо канонічний вигляд рівняння прямої.

Зауважимо також, що від загального рівняння прямої до її канонічного рівняння можна перейти, вибравши дві різні точки, що задовольняють систему (13.2), та скориставшись рівнянням прямої через дві точки.

Приклад 13.1. Звести загальне рівняння прямої $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - y - 3z + 5 = 0. \end{cases}$ до канонічного вигляду.

Знайдемо координати довільної точки M_0, що лежить на прямій. Нехай $z_0 = 0$. Тоді

$$\begin{cases} x_0 + y_0 + 1 = 0, \\ 2x_0 - y_0 + 5 = 0, \end{cases}$$

звідки $M_0(-2,1,0)$. Тепер знайдемо координати напрямного вектора прямої:

$$\overrightarrow{S}=\overrightarrow{n}_1\times\overrightarrow{n}_2=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & -3\end{vmatrix}=-4\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-3\overrightarrow{k}.$$

Отже, канонічне рівняння прямої має вигляд:

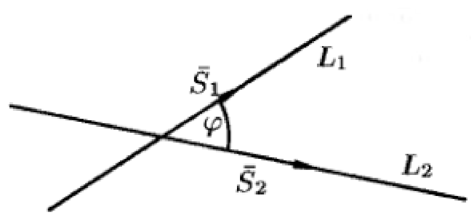
$$\frac{x+2}{-4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-3}.$$

13.2 Основні задачі на прямі у просторі.

Кут між прямими. Нехай у просторі прямі L_1 і L_2 задані канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},\quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

відповідно. Під кутом між прямими L_1 і L_2 розуміють кут між напрямними векторами $\overrightarrow{S}_1=(m_1,n_1,p_1)$ та $\overrightarrow{S}_2=(m_2,n_2,p_2)$ прямих L_1 і L_2.



Тому

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{S}_1\cdot\overrightarrow{S}_2}{|\overrightarrow{S}_1|\cdot|\overrightarrow{S}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Для знаходження гострого кута між прямими L_1 і L_2 у правій частині останньої рівності чисельник необхідно взяти по модулю.

Умови паралельності та перпендикулярності прямих. Нехай прямі L_1 і L_2, задані канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},\quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

відповідно.

Прямі L_1 і L_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли колінеарні їх напрямні вектори $\overrightarrow{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ та $\overrightarrow{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$. Таким чином, дві прямі у просторі паралельні тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

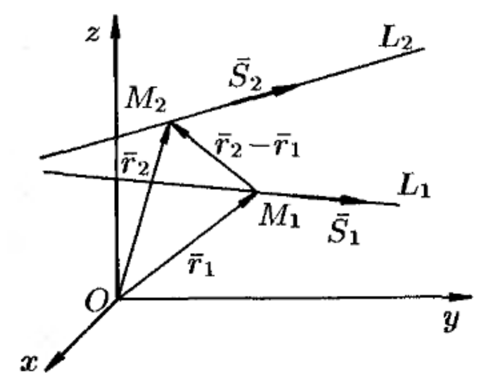
Прямі L_1 і L_2 перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли перпендикулярні їх напрямні вектори, тобто $\cos\varphi = 0$. В свою чергу, ця умова рівносильна тому, що

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0.$$

Умова, при якій дві прямі лежать в одній площині. Нехай як і раніше прямі L_1 і L_2 задані канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

відповідно. Напрямними векторами цих прямих є вектори $\overrightarrow{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ та $\overrightarrow{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ відповідно. З'ясуємо, за якої умови прямі L_1 і L_2 лежать в одній площині.



Точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ належить прямій L_1. Позначимо її радіус-вектор $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{r}_1$. Аналогічно, точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$ належить прямій L_2. Позначимо її радіус-вектор $\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{r}_2$. Тоді $\overrightarrow{r}_2 - \overrightarrow{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Зрозуміло, що прямі L_1 і L_2 лежать в одній площині, якщо вектори $\overrightarrow{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $\overrightarrow{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ та $(\overrightarrow{r}_2 - \overrightarrow{r}_1)$ компланарні, тобто

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Якщо ця умова виконується, то прямі L_1 і L_2 лежать в одній площині (або паралельні, або перетинаються).

Приклад 13.2. Переконатися, що прямі $L_1 : \frac{x-6}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+3}{4}$ і $L_2 : \frac{x+1}{3} = \frac{y+7}{-3} = \frac{z-4}{8}$ є мимобіжними, та знайти відстань між ними.

Випишемо напрямі вектори прямих L_1 і L_2 відповідно: $\overrightarrow{S}_1 = (3, -2, 4)$ та $\overrightarrow{S}_2 = (3, -3, 8)$. Точка $M_1(6, 3, -3)$ належить прямій L_1, а точка $M_2(-1, -7, 4)$ належить прямій L_2. Складемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (-7, -10, 7)$ та перевіримо на компланарність вектори $\overrightarrow{S}_1$, $\overrightarrow{S}_2$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$. Оскільки

$$\begin{vmatrix} -7 & -10 & 7 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 8 \end{vmatrix} = 77 \neq 0,$$

то вектори $\overrightarrow{S}_1$, $\overrightarrow{S}_2$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$ не є компланарними, а отже прямі L_1 і L_2 мимобіжні.

Складемо площину P, що проходить через пряму L_1 паралельно прямій L_2. Нехай точка $M(x, y, z)$ — довільна точка шуканої площини. Складемо вектор $\overrightarrow{M_1M} = (x - 6, y - 3, z + 3)$. Очевидно вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{S}_1$ і $\overrightarrow{S}_2$ — компланарні. Звідси отримаємо рівняння шуканої площини:

$$P: \quad \begin{vmatrix} x-6 & y-3 & z+3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 8 \end{vmatrix} = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad 4x + 12y + 3z - 51 = 0.$$

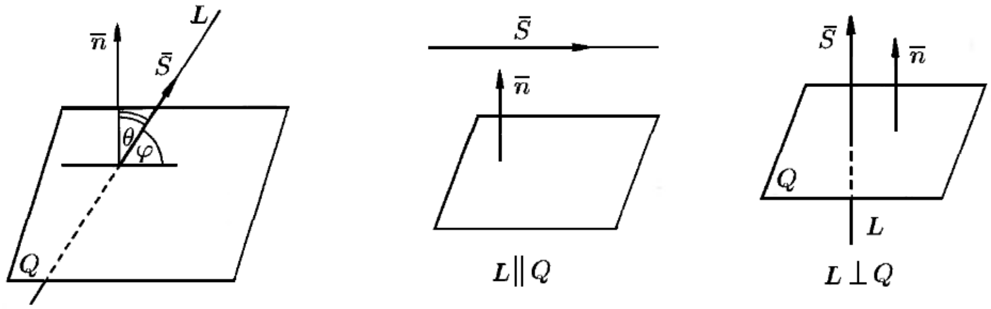
Тоді відстань між мимобіжними прямими L_1 і L_2 буде дорівнювати відстані від будь-якої точки прямої L_2 (наприклад від точки M_2) до площини P, тобто

$$d = \frac{|4 \cdot (-1) + 12 \cdot (-7) + 3 \cdot 4 - 51|}{\sqrt{4^2 + 12^2 + 3^2}} = \frac{127}{13}.$$

13.3 Основні задачі на пряму і площину у просторі.

Кут між прямою і площиною. Нехай у просторі площина Q задана загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$ і пряма L задана канонічним рівнянням $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$. *Кутом між прямою і площиною* називається кут між прямою та проекцією цієї прямої на площину. Нехай φ — кут між прямою L і площиною Q, а θ — кут між напрямним вектором прямої $\overrightarrow{S} = (m, n, p)$ і нормальним вектором площини $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$. Тоді $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{S} \cdot \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{S}| \cdot |\overrightarrow{n}|}$. Але, зрозуміло, що $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$. Тому $\sin\varphi = \cos\theta$, і оскільки $\sin\varphi \geq 0$, то

$$\sin\varphi = \cos\theta = \frac{|\overrightarrow{S} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{S}| \cdot |\overrightarrow{n}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$



Приклад 13.3. Знайти кут φ між прямою L: $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$ і площиною P: $x + y - z + 1 = 0$.

Напрямний вектор прямої L: $\overrightarrow{S} = (0, 2, 1)$, нормальний вектор площини P: $\overrightarrow{n} = (1, 1, -1)$. За формулою синуса кута між прямою і площиною обчислюємо:

$$\sin\varphi = \frac{|\overrightarrow{S} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{S}| \cdot |\overrightarrow{n}|} = \frac{|0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)|}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

Таикм чином, $\varphi = \arcsin\frac{1}{\sqrt{15}}$.

Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини. *Пряма L паралельна площині Q* тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{S} = (m, n, p)$ і $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ перпендикулярні, тобто $\overrightarrow{S} \cdot \overrightarrow{n} = 0$. Таким чином, пряма паралельна площині тоді і тільки тоді, коли

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Пряма L перпендикулярна площині Q тоді і тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{S} = (m, n, p)$ і $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ колінеарні ($\overrightarrow{S} \| \overrightarrow{n}$), тобто

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Перетин прямої і площини. Умова, при якій пряма лежить у площині. Для того, щоб знайти точку перетину прямої L:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

з площиною Q:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

Найпростіше це зробити, записавши рівняння прямої у параметричному вигляді. В результаті остання система набуває вигляду:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \\ Ax + By + Cz + D = 0, \end{cases}$$

звідки

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0. \qquad (13.3)$$

Якщо $Am + Bn + Cp \neq 0$, то розв'язуючи це рівняння відносно параметра t, отримаємо

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Далі, підставляючи значення параметра t у координати $x = x_0 + mt$, $y = y_0 + nt$, $z = z_0 + pt$, отримаємо точку перетину $M(x, y, z)$ прямої L з площиною Q.

Розглянемо окремо випадок, коли $Am + Bn + Cp = 0$. Якщо при цьому $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то рівняння (13.3) набуває вигляду $0 \cdot t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0$, тобто рівняння не має розв'язків. В цьому випадку пряма L і площина Q не мають спільних точок, тобто пряма L паралельна площині Q.

Якщо $Am + Bn + Cp = 0$ і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то рівняння (13.3) набуває вигляду $0 \cdot t + 0 = 0$, тобто має безліч розв'язків. В цьому випадку пряма і площина мають безліч спільних точок, тобто пряма L лежить у площині Q. Отже, умова

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \end{cases}$$

є умовою, при якій пряма L лежить у площині Q.

Розглянемо приклади.

Приклад 13.4. Знайти точку, симетричну точці $M(3, 4, 5)$ відносно площини Q: $x - 2y + z - 6 = 0$.

Спочатку складемо рівняння прямої L, що проходить через точку $M(3, 4, 5)$ перпендикулярно до площини Q. Оскільки нормальний вектор площини $\overrightarrow{n} = (1, -2, 1)$ є паралельним шуканій прямій, то можна вважати, що вектор $\overrightarrow{S} = (1, -2, 1)$ є напрямним вектором прямої L. Підставляючи координати точки $M(3, 4, 5)$ та координати напрямного вектора $\overrightarrow{S}$ у канонічне рівняння прямої (13.1), отримаємо

$$L: \quad \frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-5}{1} = t.$$

Знайдемо точку O перетину прямої L з площиною Q. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 4 - 2t, \\ z = 5 + t, \\ x - 2y + z - 6 = 0. \end{cases}$$

Підставляючи змінні x, y, z у останнє рівняння системи, матимемо

$$3 + t - 2(4 - 2t) + 5 + t - 6 = 0.$$

Звідси $t = 1$, а отже, $x = 3 + 1 = 4$, $y = 4 - 2 = 2$, $z = 5 + 1 = 6$. Таким чином, $O(4, 2, 6)$ — точка перетину прямої L з площиною Q.

Нарешті, знайдемо координати точки $N(x_N, y_N, z_N)$, симетричної точці M відносно площини Q. Оскільки точка O є серединою відрізка MN, то

$$x_O = \frac{x_M + x_N}{2}, \quad y_O = \frac{y_M + y_N}{2}, \quad z_O = \frac{z_M + z_N}{2},$$

звідки

$$x_N = 2x_O - x_M = 5, \quad y_N = 2y_O - y_M = 0, \quad z_N = 2z_O - z_M = 7.$$

Остаточно, $N(5, 0, 7)$ — точка, симетрична точці M відносно площини Q.

Приклад 13.5. Знайти проекцію точки $M(2, 8, 0)$ на пряму L: $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-3}{-1}$.

Спочатку складемо рівняння площини P, що проходить через точку $M(2, 8, 0)$ перпендикулярно до прямої L. Очевидно, напрямний вектор $\overrightarrow{S} = (-3, 1, -1)$ прямої L є нормальним вектором шуканої площини P. Тому запишемо загальне рівняння площини P.

$$P: \quad -3(x-2) + 1(y-8) - 1(z-0) = 0, \quad \Leftrightarrow \quad 3x - y + z + 2 = 0.$$

Знайдемо точку O перетину прямої L з площиною P. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = 1 - 3t, \\ y = -3 + t, \\ z = 3 - t, \\ 3x - y + z + 2 = 0. \end{cases}$$

Підставляючи змінні x, y, z у останнє рівняння системи, матимемо

$$3(1-3t)-(-3+t)+(3-t)+2=0, \quad \Leftrightarrow \quad 11t=11.$$

Звідси $t=1$, а отже, $x=1-3=-2$, $y=-3+1=-2$, $z=3-1=2$. Таким чином, $O(-2,-2,2)$ — точка перетину прямої L з площиною P. Ця точка і є проекцією точки $M(2,8,0)$ на пряму L.

14 Поверхні другого порядку

14.1 Загальне рівняння поверхні другого порядку.

Означення 14.1. *Поверхнею другого порядку* називається сукупність точок (геометричне місце точок) простору, які в деякій декартовій системі координат $Oxyz$ задовольняють алгебраїчне рівняння другого порядку:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0, \tag{14.1}$$

де a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44} — дійсні числа, причому принаймні одне з чисел a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} не дорівнює нулю.

Теорема 14.1. *Загальне рівняння* (14.1) *поверхні другого порядку, задане у декартовій системі координат $Oxyz$, за допомогою перетворення системи координат можна звести до одного з наступних виглядів:*
I. $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+\lambda=0, \quad \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\neq 0;$
II. $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+2a'_{34}z'=0, \quad \lambda_1\cdot\lambda_2\cdot a'_{34}\neq 0;$
III. $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda=0, \quad \lambda_1\cdot\lambda_2\neq 0;$
IV. $\lambda_1 x'^2+a'_{24}y'=0, \quad \lambda_1\cdot a'_{24}\neq 0;$
V. $\lambda_1 x'^2+\lambda=0, \quad \lambda_1\neq 0,$
де x', y', z' — змінні у новій декартовій системі координат $Ox'y'z'$.

Рівняння I – V, наведені у теоремі 14.1, називаються найпростішими рівняннями поверхонь другого порядку.

Класифікація поверхонь другого порядку. Відповідно до теореми 14.1 рівняння (14.1) задає у деякій декартовій системі координат одну з наступних 17 поверхонь:

I.
1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ — еліпсоїд
2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ — уявний еліпсоїд
3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ — однопорожнинний гіперболоїд
4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ — двопорожнинний гіперболоїд
5. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ — конус
6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ — уявний конус

II.
7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$ — еліптичний параболоїд

8. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$ — гіперболічний параболоїд

III.

9. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — еліптичний циліндр

10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ — уявний еліптичний циліндр

11. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ — дві уявні площини, що перетинаються

12. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — гіперболічний циліндр

13. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ — дві площини, що перетинаються

IV.

14. $y^2 = 2px$ — параболічний циліндр

V.

15. $x^2 = a^2$, $a \neq 0$, — дві паралельні площини

16. $x^2 = -a^2$, $a \neq 0$, — дві уявні паралельні площини

17. $x^2 = 0$ — дві площини, які співпадають

14.2 Характеристики та форма основних поверхонь другого порядку.

Розглянемо основні поверхні другого порядку, задані канонічними рівняннями, та побудуємо їх. Для цього будемо застосовувати *метод перерізів*, який полягає у дослідженні форми поверхні шляхом дослідження геометричних властивостей перерізів поверхні координатними площинами, та площинами їм паралельними.

Еліпсоїд. *Еліпсоїдом* називається поверхня, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{14.2}$$

Дослідимо вид цієї поверхні. Змінні x, y z входять у рівняння (14.2) у парних степенях. Тому, якщо точка (x, y, z) належить еліпсоїду, то і точки $(\pm x, \pm y, \pm z)$ також належать еліпсоїду. Отже, поверхня симетрична відносно координатних осей та координатних площин. Точку $O(0, 0, 0)$ називають центром еліпсоїда.

Знайдемо точки перетину еліпсоїда з осями координат. Підставивши у рівняння (14.2) $x = 0$, $y = 0$, отримаємо, що еліпсоїд перетинає вісь Oz у точках $(0, 0, -c)$, $(0, 0, c)$. Аналогічно, вісь Ox еліпсоїд перетинає у точках $(-a, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, а вісь Oy — у точках $(0, -b, 0)$, $(0, b, 0)$. Ці 6 точок перетину еліпсоїда з осями координат називаються вершинами еліпсоїда.

З рівняння (14.2) також випливає, що $\frac{x^2}{a^2} \le 1$ і $\frac{y^2}{b^2} \le 1$, $\frac{z^2}{c^2} \le 1$ звідки $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$, і $-c \le z \le c$. Таким чином, всі точки еліпсоїда знаходяться всередині прямого паралелепіпеда, утвореного площинами $x = \pm a$ і $y = \pm b$, $z = \pm c$.

Розглянемо переріз поверхні (14.2) площиною $z = h = const$, де h — довільне дійсне число. Тоді лінія, що отримується у перерізі має вигляд:

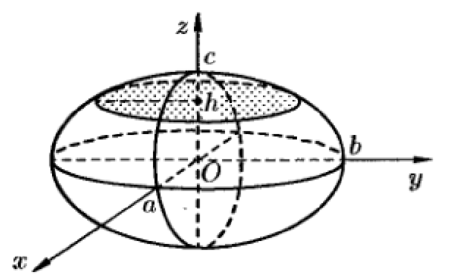
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases} \tag{14.3}$$

Якщо $|h| > c$, $c > 0$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0$, тобто не існує точок перетину поверхні (14.2) з площинами $z = h$. Якщо $|h| = c$, тобто $h = \pm c$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, і лінія перетину вироджується у дві точки $(0, 0, -c)$, $(0, 0, c)$. Якщо $|h| < c$, то рівняння лінії (14.3) еквівалентне наступному:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1, \\ z = h, \end{cases}$$

тобто лінією перерізу є еліпс з півосями $a_1 = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$ і $b_1 = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$.

Аналогічні лінії ми отримаємо у перерізі еліпсоїда з площинами $x = const$, $y = const$.



Величини a, b, і c називаються *півосями* еліпсоїда. Якщо всі вони різні, то еліпсоїд називається трьохосевим еліпсоїдом. Якщо будь-які два з цих чисел рівні між собою, то еліпсоїд називається еліпсоїдом обертання. Якщо $a = b = c$, то рівняння (14.2) задає *сферу* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Однопорожнинний гіперболоїд. *Однопорожнинним гіперболоїдом* називається поверхня, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{14.4}$$

Дослідимо вид цієї поверхні. Змінні x, y z входять у рівняння (14.4) у парних степенях. Тому, якщо точка (x, y, z) належить цій поверхні, то і точки $(\pm x, \pm y, \pm z)$ також належать цій поверхні. Отже, поверхня симетрична відносно координатних осей Ox, Oy, Oz, та координатних площин. Точка $O(0,0,0)$ називається центром однопорожнинного гіперболоїда.

Точками перетину однопорожнинного гіперболоїда з осями координат є точки $(-a,0,0)$, $(a,0,0)$, і $(0,-b,0)$, $(0,b,0)$. Ці точки називаються вершинами однопорожнинного гіперболоїда.

Розглянемо переріз поверхні площиною $z = h = const$, де h — довільне дійсне число. Тоді лінія, що отримується у перерізі має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Ця лінія для довільного числа h є еліпсом з півосями $a_1 = a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ і $b_1 = b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$. Очевидно, півосі a_1 і b_1 досягають найменшого значення при $h = 0$. При збільшенні $|h|$ півосі a_1 і b_1 будуть збільшуватися.

Розглянемо переріз поверхні площиною $x = h = const$, де h — довільне дійсне число. Тоді лінія, що отримується у перерізі задається системою рівняннь

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}, \\ x = h. \end{cases}$$

Таким чином, на площині $x = h$ ця лінія є гіперболою. Якщо $|h| < a$, то дійсною віссю гіперболи є вісь Oy, а уявною віссю є вісь Oz. В цьому випадку канонічне рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}\right)^2} - \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}\right)^2} = 1.$$

Якщо ж $|h| > a$, то дійсною віссю гіперболи є вісь Oz, а уявною віссю є вісь Oy. В цьому випадку канонічне рівняння гіперболи має вигляд

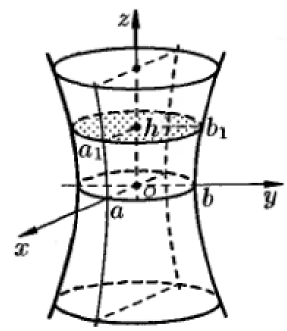
$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1}\right)^2} = 1.$$

При $|h| = a$, у перерізі маємо дві прямі, що перетинаються у початку координат: $\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0$ та $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$.

Аналогічний результат отримаємо, якщо розглянемо переріз поверхні площиною $y = h = const$, де h — довільне дійсне число, а саме

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}, \\ y = h. \end{cases}$$

Побудуємо поверхню.



Можно довести, що через будь-яку точку однопорожнинного гіперболоїда проходять дві прямі, що перетинаються.

Двопорожнинний гіперболоїд. *Двопорожнинним гіперболоїдом* називається поверхня, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \tag{14.5}$$

Дослідимо вид цієї поверхні. Змінні x, y z входять у рівняння (14.5) у парних степенях. Тому, якщо точка (x, y, z) належить цій поверхні, то і точки $(\pm x, \pm y, \pm z)$ також належать цій поверхні. Отже, поверхня симетрична відносно координатних осей Ox, Oy, Oz, та координатних площин, а також точки $O(0,0,0)$, яку називають центром двопорожнинного гіперболоїда.

Очевидно, двопорожнинний гіперболоїд перетинає тільки вісь Oz у точках $(0, 0, -c)$, $(0, 0, c)$. Ці точки називаються вершинами двопорожнинного гіперболоїда.

Розглянемо переріз поверхні площиною $z = h = const$, де h — довільне дійсне число. Тоді лінія, що отримується у перерізі має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Звідси випливає, що при $|h| < c$, площини $z = h$ не перетинають поверхню. При $|h| = c$, тобто $h = \pm c$, лінія перетину вироджується у дві точки

$(0,0,-c)$, $(0,0,c)$. При $|h| > c$ лінією перетину поверхні з площиною $z = h$ є еліпс

$$\frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)^2} = 1,$$

причому чим більше $|h|$, тим більші його півосі.

Розглянемо переріз поверхні площиною $x = h = const$, де h — довільне дійсне число. Тоді лінія, що отримується у перерізі задається системою рівняннь

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{a^2}, \\ x = h. \end{cases}$$

Таким чином, на площині $x = h$ ця лінія є гіперболою з дійсною віссю Oz, і уявною віссю Oy. Канонічне рівняння цієї гіперболи має вигляд

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\frac{h^2}{a^2}}\right)^2} = 1.$$

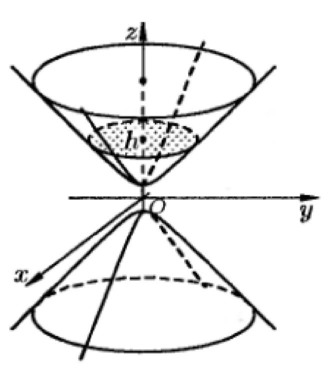
Аналогічно, розглянемо переріз поверхні площиною $y = h = const$, де h — довільне дійсне число. Тоді лінія, що отримується у перерізі задається системою рівняннь

$$\begin{cases} \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{h^2}{b^2}, \\ x = h. \end{cases}$$

Таким чином, на площині $y = h$ ця лінія є гіперболою з дійсною віссю Oz, і уявною віссю Ox. Канонічне рівняння цієї гіперболи має вигляд

$$\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\frac{h^2}{b^2}}\right)^2} = 1.$$

Побудуємо поверхню.



Конус. *Конусом* називається поверхня, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{14.6}$$

Дослідимо вид цієї поверхні. Змінні x, y z входять у рівняння (14.6) у парних степенях. Тому, якщо точка (x, y, z) належить цій поверхні, то і точки $(\pm x, \pm y, \pm z)$ також належать цій поверхні. Отже, поверхня симетрична відносно координатних осей Ox, Oy, Oz, координатних площин, а також точки $O(0, 0, 0)$. Точка $O(0, 0, 0)$ називається вершиною конуса.

Розглянемо переріз поверхні площиною $z = h = const$, де h — довільне дійсне число. Тоді лінія, що отримується у перерізі має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

Якщо $h = 0$, то переріз поверхні (14.6) площиною $z = h$ складається з однієї точки $O(0, 0, 0)$. При $h \neq 0$ у перерізі поверхні (14.6) площиною $z = h$ буде еліпс

$$\frac{x^2}{\left(\frac{ah}{c}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{bh}{c}\right)^2} = 1,$$

півосі якого збільшуються при збільшенні $|h|$.

Розглянемо переріз поверхні (14.6) площиною $x = 0$:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

Таким чином, у перерізі — дві прямі, що перетинаються у початку координат

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0.$$

Аналогічно, у перерізі поверхні площиною $y = 0$ є лінія

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

що складається з двох прямих

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0.$$

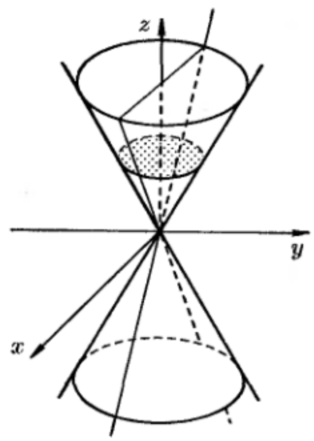
Перерізом поверхні (14.6) площиною $x = h$, $h \neq 0$, є гіпербола

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{a^2}.$$

Перерізом поверхні (14.6) площиною $y = h$, $h \neq 0$, є гіпербола

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{h^2}{b^2}.$$

Побудуємо поверхню.



Еліптичний параболоїд. *Еліптичним параболоїдом* називається поверхня, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z. \tag{14.7}$$

Очевидно, поверхня симетрична відносно координатних площин Oxz і Oyz, та відносно осі Oz. Вісь Oz є віссю симетрії параболоїда.

Розглянемо переріз поверхні (14.7) площиною $z = h = const$, де h — довільне дійсне число. Тоді лінія, що отримується у перерізі має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = h, \\ z = h. \end{cases}$$

Якщо $h < 0$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 0$, тобто не існує точок перетину поверхні (14.7) з площиною $z = h$. Таким чином, поверхня розташована у верхньому півпросторі $z \geq 0$. Якщо $h = 0$, то $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, і лінія перетину вироджується у точку $(0, 0, 0)$. Точка $(0, 0, 0)$ називається вершиною параболоїда. Якщо $h > 0$, то перерізом поверхні з площиною $z = h$ є еліпс

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{h})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{h})^2} = 1,$$

півосі якого збільшуються зі збільшенням h.

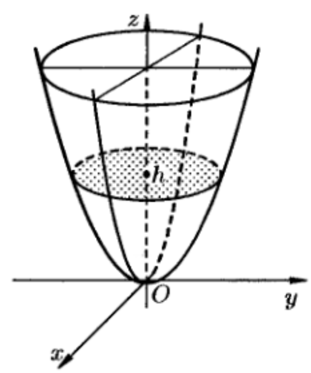
У перерізі поверхні (14.7) площиною $x = h = const$, отримаємо параболу:

$$y^2 = b^2\Big(z - \frac{h^2}{a^2}\Big).$$

У перерізі поверхні (14.7) площиною $y = h = const$, отримаємо параболу:

$$x^2 = a^2\Big(z - \frac{h^2}{b^2}\Big).$$

Побудуємо поверхню.



Гіперболічний параболоїд. *Гіперболічним параболоїдом* називається поверхня, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z. \tag{14.8}$$

Розглянемо переріз поверхні (14.8) площиною $z = h = const$, де h — довільне дійсне число. Тоді лінія, що отримується у перерізі має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = h, \\ z = h. \end{cases}$$

При цьому, якщо $h > 0$, то перерізом поверхні з площиною $z = h$ є гіпербола

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{h})^2} - \frac{y^2}{(b\sqrt{h})^2} = 1,$$

у якої дійсною віссю є вісь Ox, а уявною віссю є вісь Oy. Якщо $h < 0$, то перерізом є гіпербола

$$\frac{y^2}{(b\sqrt{-h})^2} - \frac{x^2}{(a\sqrt{-h})^2} = 1,$$

у якої дійсною віссю є вісь Oy, а уявною віссю є вісь Ox . Якщо $h = 0$, то у перерізі — дві прямі, що перетинаються у початку координат:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

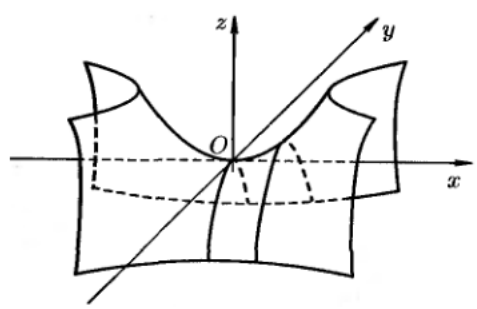
Перерізом поверхні (14.8) площиною $x = h = const$, є парабола

$$y^2 = -b^2\left(z - \frac{h^2}{a^2}\right).$$

Перерізом поверхні (14.8) площиною $y = h = const$, також є парабола

$$x^2 = a^2\left(z + \frac{h^2}{b^2}\right).$$

Використовуючи встановлені характеристики, схематично побудуємо поверхню.



Еліптичний циліндр. *Еліптичним циліндром* називається поверхня, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (14.9)$$

Дослідимо вид цієї поверхні. Змінні x і y входять у рівняння (14.9) у парних степенях, а змінна z взагалі відсутня. Це означає, що поверхня симетрична відносно координатних площин. Крім того, з рівнянння (14.9) випливає, що $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, а змінна z може приймати будь-які значення.

Розглянемо переріз поверхні (14.9) площиною $z = h = const$, де h — довільне дійсне число. Тоді для будь-якого h у перерізі отримаємо еліпс

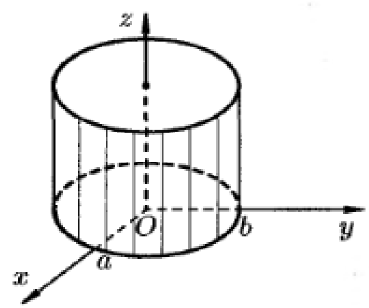
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

з півосями a та b, які не залежать від значення h.

Перерізом поверхні (14.9) площиною $x = h = const$, будуть дві прямі $y = \pm b\sqrt{1 - \frac{h^2}{a^2}}$, якщо $|h| \leq a$, і пуста множина, якщо $|h| > a$.

Аналогічно, перерізом поверхні (14.9) площиною $y = h = const$, є дві прямі $x = \pm a\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}}$, якщо $|h| \leq b$, і пуста множина, якщо $|h| > b$.

Таким чином, поверхня має вигляд:



Гіперболічний циліндр. *Гіперболічним циліндром* називається поверхня, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{14.10}$$

Дослідимо вид цієї поверхні. Змінні x і y входять у рівняння (14.10) у парних степенях, а змінна z взагалі відсутня. Це означає, що поверхня симетрична відносно координатних площин. Крім того, з рівнянння (14.10) випливає, що $|x| \geq a$, $|y| \geq b$, а змінна z може приймати будь-які значення.

Розглянемо переріз поверхні (14.10) площиною $z = h = const$, де h — довільне дійсне число. Тоді для будь-якого h у перерізі отримаємо гіперболу

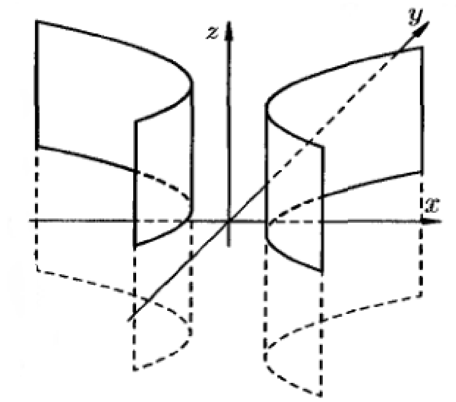
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

дійсна та уявна осі якої a та b не залежать від значення h.

Перерізом поверхні (14.10) площиною $x = h = const$, будуть дві прямі $y = \pm b\sqrt{\frac{h^2}{a^2} - 1}$, якщо $|h| \geq a$, і пуста множина, якщо $|h| < a$.

Аналогічно, перерізом поверхні (14.10) площиною $y = h = const$, є дві прямі $x = \pm a\sqrt{\frac{h^2}{b^2} + 1}$, для будь-якого дійсного h.

Отже, поверхня схематично зображається наступним чином:



Параболічний циліндр. *Параболічним циліндром* називається поверхня, яка у деякій декартовій системі координат задається рівнянням

$$y^2 = 2px. \tag{14.11}$$

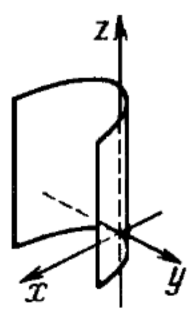
Поверхня симетрична відносно координатних площин Oxz і Oxy.

Нехай $p > 0$. Звідси випливає, що $x \geq 0$. Розглянемо переріз поверхні (14.11) площиною $z = h = const$, де h — довільне дійсне число. Тоді для будь-якого h у перерізі отримаємо параболу

$$y^2 = 2px.$$

Перерізом поверхні (14.11) площиною $x = h = const \geq 0$, є дві паралельні осі Oz прямі: $y = \pm\sqrt{2ph}$.

Перерізом поверхні (14.11) площиною $y = h = const$, для будь-якого дійсного h є паралельна осі Oz пряма: $x = \frac{h^2}{2p}$.



Частина IV
Елементи лінійної алгебри

15 Лінійні простори. Розмірність та базис лінійного простору

15.1 Лінійні простори.

В різних розділах математики ми часто зустрічаємося з об'єктами, для яких введено операції додавання та множення на число. Наприклад, в геометрії такими об'єктами є вектори. Для них задано операцію суми (як вектор, який з'єднує початок першого вектора з кінцем другого, якщо початок другого вектора співпадає з кінцем першого вектора), та операцію множення на число (як вектор з відповідно пропорційною довжиною, колінеарний та спінаправлений з даним вектором), див. лекцію 6. У множині квадратних матриць порядку n з дійсними елементами також вводяться оперції додавання та множення на число (див. лекцію 1). В математичному аналізі такими об'єктами є, наприклад, функції неперервні на заданому відрізку $[a, b]$, тощо.

У наведених прикладах операції додавання та множення на число виконуються над різними об'єктами. Для того, щоб вивчати всі такі множини об'єктів з одної точки зору, в математиці вводиться поняття абстрактного лінійного простору.

Означення 15.1. Непуста множина V елементів довільної природи називається *лінійним* (*векторним*) *простором*, якщо на цій множині
I. задано операцію додавання елементів, тобто двом довільним елементам x та y з множини V ставиться у відповідність елемент u з множини V, який називається сумою елементів x та y, причому для довільних x, y, $z \in V$ виконуються аксіоми:

1) $x + y = y + x$;

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

3) у множині V існує *нульовий елемент* $\mathbf{0}$ такий, що $x + \mathbf{0} = x$, для будь-якого $x \in V$;

4) для кожного елемента $x \in V$ існує *протилежний елемент* $x' \in V$ такий, що $x + x' = \mathbf{0}$;

II. задано операцію множення на число, тобто будь-якому елементу x з множини V та довільному числу λ, ставиться у відповідність елемент $u = \lambda x$ з множини V, який називається добутком елемента x на число λ, причому для довільних x, $y \in V$ та довільних λ, μ виконуються аксіоми:

5) $1 \cdot x = x$;

6) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;

7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

8)$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

Якщо числа λ, μ, ..., що фігурують в означенні 14.1 беруться з множини дійсних чисел $\mathbb{R}$, то лінійний простір V називається дійсним лінійним простором. Якщо ці числа беруться з множини комплексних чисел $\mathbb{C}$, то простір V називається комплексним лінійним простором. Далі ми переважно будемо розглядати дійсні лінійні простори. Наведемо декілька прикладів.

Приклад 15.1. Множина натуральних чисел $\mathbb{N}$ не є лінійним простором, оскільки для довільного натурального числа x з $\mathbb{N}$ число λx не належить $\mathbb{N}$, якщо $\lambda \leq 0$.

Приклад 15.2. Множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ є лінійним простором, оскільки для довільних x та y з $\mathbb{R}$ визначено елементи $x + y \in \mathbb{R}$ та $\lambda x \in \mathbb{R}$ для $\lambda \in \mathbb{R}$, причому виконуються всі 8 аксіом з означення 14.1.

Приклад 15.3. Важливим прикладом дійсного лінійного простору є множина $\mathbb{R}^n$, елементами якої є впорядковані набори n дійсних чисел: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Цю множину називають *$n$-вимірним векторним простором.* Елементи $\mathbf{a}$ множини $\mathbb{R}^n$ будемо називати векторами, а числа $a_1, a_2, ..., a_n$ — координатами вектора $\mathbf{a}$.

Операції додавання та множення на число $\lambda \in \mathbb{R}$, у множині $\mathbb{R}^n$ задаються відповідно правилами:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n);$$

$$\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n).$$

Очевидно, що ці операції задовольняють всі 8 аксіом означення 14.1.

Випадки $n = 2$ та $n = 3$, тобто $\mathbb{R}^2$ — двовимірний векторний простір, та $\mathbb{R}^3$ — тривимірний векторний простір ми частково розглядали у курсі векторної алгебри (лекції 6–8).

Приклад 15.4. Множина $\mathbb{C}([a, b])$ всіх дійснозначних функцій f, неперервних на відрізку $[a, b]$, є лінійним простором.

Дійсно, для довільних функцій f_1 та f_2 з множини $\mathbb{C}([a,b])$ функція f_1+f_2 є також неперервною на відрізку $[a,b]$, а отже $f_1+f_2 \in \mathbb{C}([a,b])$, причому для довільних f_1, f_2, f_3, f з множини $\mathbb{C}([a,b])$

1) $f_1+f_2=f_2+f_1$;

2) $(f_1+f_2)+f_3=f_1+(f_2+f_3)$;

3) існує функція $f_0 \equiv 0$, яка належить множині $\mathbb{C}([a,b])$ така, що для довільної $f \in \mathbb{C}([a,b])$ виконується рівність $f+f_0=f$;

4) для кожної функції $f \in \mathbb{C}([a,b])$ існує функція $(-f) \in \mathbb{C}([a,b])$ така, що

$f+(-f)=f_0$.

Крім того, для довільного $\lambda \in \mathbb{R}$ та довільної функції $f \in \mathbb{C}([a,b])$ функція (λf) також є неперервною на $[a,b]$, тобто $(\lambda f) \in \mathbb{C}([a,b])$, причому для довільних λ, $\mu \in \mathbb{R}$ справедливі рівності:

5) $1 \cdot f = f$;

6) $\lambda(\mu f)=(\lambda\mu)f$;

7) $(\lambda+\mu)f=\lambda f+\mu f$;

8) $\lambda(f_1+f_2)=\lambda f_1+\lambda f_2$.

Приклад 15.5. Множина всіх дійснозначних функцій f, обмежених на відрізку $[a,b]$ деяким додатним числом c, не є лінійним простором.

Дійсно, для довільних функцій f_1 та f_2 з того, що $|f_1| \le c$ та $|f_2| \le c$, не випливає, що $|f_1+f_2| \le c$.

Приклад 15.6. Множина всіх многочленів з дійсними коефіцієнтами фіксованого степеня n не утворює лінійного простору, оскільки сума двох многочленів степеня n може бути многочленом нижчого степеня. А множина всіх многочленів з дійсними коефіцієнтами до фіксованого степеня n є лінійним простором.

Розглянемо деякі властивості лінійного простору.

Властивість 1. В довільному лінійному просторі V існує єдиний нульовий елемент $\mathbf{0}$, та для кожного елемента x цього простору існує єдиний протилежний елемент x'.

Властивість 2. В довільному лінійному просторі V:

1) нульовий елемент $\mathbf{0}$ дорівнює добутку будь-якого елемента x цього простору на число 0;

2) протилежний елемент x' до елемента x дорівнює добутку елемента x на число -1.

Елементи лінійного простору будь-якої природи називають *векторами.*

15.2 Базис та розмірність лінійного простору.

Перш ніж ввести поняття розмірності лінійного простору, нагадаємо поняття лінійної залежності і незалежності системи векторів, яке було дано у лекції 7. Це поняття дослівно переноситься на загальний лінійний простір.

Означення 15.2. Вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_m$, ... деякого лінійного простору V називаються *лінійно залежними*, якщо існують такі дійсні числа c_1, c_2,...,c_m, ..., хоча б одне з яких не дорівнює нулю, що

$$c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + ... + c_m\mathbf{e}_m + ... = \mathbf{0}. \tag{15.1}$$

Якщо рівність (15.1) виконується тільки, коли всі $c_1 = c_2 = ... = c_m = ... = 0$, то система векторів $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_m$, ..., називається *лінійно незалежною.*

Нагадаємо також основні властивості лінійної залежності і незалежності векторів без доведення (доведення див. у лекції 7).

Властивість 1. Якщо серед векторів $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_m$, ..., є нульовий вектор $\mathbf{0}$, то система векторів є лінійно залежною.

Властивість 2. Якщо вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_k$, системи векторів $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_m$, ..., є лінійно залежними, то і всі вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_m$, ..., цієї системи є лінійно залежними.

Властивість 3. Для того, щоб вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_m$, ..., були лінійно залежними, необхідно і достатньо, щоб один з них був лінійною комбінацією інших векторів системи.

Означення 15.3. Лінійний простір V називається *n-вимірним*, якщо у ньому є n лінійно незалежних векторів і немає більшого числа лінійно незалежних векторів (позначається V_n). При цьому число n називається *розмірністю* простору. Якщо у лінійному просторі можна знайти будь-яку кількість лінійно незалежних векторів, то простір називається *нескінченовимірним.*

Означення 15.4. Сукупність n лінійно незалежних векторів $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ n-вимірного лінійного простору V_n називається *базисом* цього простору, якщо довільний елемент $\mathbf{a}$ простору є лінійною комбінацією векторів $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$, тобто існують дійсні числа c_1, c_2,...,c_n, принаймні одне з яких не дорівнює нулю, такі, що

$$\mathbf{a} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + ... + c_n\mathbf{e}_n. \tag{15.2}$$

При цьому рівність (15.2) називається розкладом вектора $\mathbf{a}$ за базисом $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$, а числа c_1, c_2,...,c_n — координатами вектора $\mathbf{a}$ у цьому базисі.

Теорема 15.1. *Кожен вектор $\mathbf{a}$ n-вимірного лінійного простору V_n може бути єдиним чином представлений у вигляді лінійної комбінації векторів базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$.*

Доведення. Припустимо, що існує два різних розклади вектора $\mathbf{a}$ за базисом $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ лінійного простору V_n:

$$\mathbf{a} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + ... + c_n\mathbf{e}_n,$$

і

$$\mathbf{a} = c_1'\mathbf{e}_1 + c_2'\mathbf{e}_2 + ... + c_n'\mathbf{e}_n.$$

Тоді

$$(c_1 - c_1')\mathbf{e}_1 + (c_2 - c_2')\mathbf{e}_2 + ... + (c_n - c_n')\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

Але вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ є лінійно незалежними, звідки випливає, що $(c_1 - c_1') = 0$, $(c_2 - c_2') = 0$, ..., $(c_n - c_n') = 0$. $\square$

15.3 Зв'язок між базисам у скінченовимірному лінійному просторі.

Розглянемо у n-вимірному лінійному просторі V_n два базиси:

$$\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2, \quad ..., \quad \mathbf{e}_n, \tag{15.3}$$

$$\mathbf{e}_1', \quad \mathbf{e}_2', \quad ..., \quad \mathbf{e}_n'. \tag{15.4}$$

Кожен вектор другого базиса можна однозначно розкласти за векторами першого базиса, тобто існують такі числа τ_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$, що

$$\mathbf{e}_j' = \tau_{1j}\mathbf{e}_1 + \tau_{2j}\mathbf{e}_2 + ... + \tau_{nj}\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_{ij}\mathbf{e}_i, \quad j = \overline{1, n}. \tag{15.5}$$

Отже, стовпець $\begin{pmatrix} \tau_{1j} \\ \tau_{2j} \\ ... \\ \tau_{nj} \end{pmatrix}$ є стовпцем координат вектора $\mathbf{e}_j'$ в базисі (15.3).

Матриця

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}, \tag{15.6}$$

стовпці якої є стовпцями координат векторів базиса (15.4) у базисі (15.3), називається матрицею переходу від базиса (15.3) до базиса (15.4).

Зв'язок між базисами (15.3) і (15.4) можна записати у вигляді матричної рівності:
$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ ... \\ \mathbf{e}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{21} & ... & \tau_{n1} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & ... & \tau_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ \tau_{1n} & \tau_{2n} & ... & \tau_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ ... \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix} = T^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ ... \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}.$$

Матриця переходу від одного базиса до іншого є невиродженою, інакше вектори $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$ були б лінійно залежними, що протирічить означенню базиса.

Будь-яка невироджена квадратна матриця порядку n з дійсними елементами є матрицею переходу від одного базиса n-вимірного лінійного простору V_n до іншого базиса цього простору.

15.4 Перетворення координат вектора при зміні базиса.

Нехай у n-вимірному лінійному просторі V_n задано два базиса (15.3) і (15.4) з матрицею переходу (15.6). Знайдемо зв'язок між координатами довільного вектора у різних базисах. А саме, нехай

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + ... + \alpha_n \mathbf{e}_n,$$

і

$$\mathbf{a} = \alpha'_1 \mathbf{e}'_1 + \alpha'_2 \mathbf{e}'_2 + ... + \alpha'_n \mathbf{e}'_n.$$

Використовуючи співвідношення (15.5), отримаємо

$$\mathbf{a} = \alpha'_1 \Big(\sum_{i=1}^{n} \tau_{i1} \mathbf{e}_i \Big) + \alpha'_2 \Big(\sum_{i=1}^{n} \tau_{i2} \mathbf{e}_i \Big) + ... + \alpha'_n \Big(\sum_{i=1}^{n} \tau_{in} \mathbf{e}_i \Big) =$$

$$= \alpha'_1 \Big(\tau_{11} \mathbf{e}_1 + \tau_{21} \mathbf{e}_2 + ... + \tau_{n1} \mathbf{e}_n \Big) + \alpha'_2 \Big(\tau_{12} \mathbf{e}_1 + \tau_{22} \mathbf{e}_2 + ... + \tau_{n2} \mathbf{e}_n \Big) + ... +$$

$$+ \alpha'_n \Big(\tau_{1n} \mathbf{e}_1 + \tau_{2n} \mathbf{e}_2 + ... + \tau_{nn} \mathbf{e}_n \Big) =$$

$$= \mathbf{e}_1 \Big(\alpha'_1 \tau_{11} + \alpha'_2 \tau_{12} + ... + \alpha'_n \tau_{1n} \Big) + \mathbf{e}_2 \Big(\alpha'_1 \tau_{21} + \alpha'_2 \tau_{22} + ... + \alpha'_n \tau_{2n} \Big) + ... +$$

$$+ \mathbf{e}_n \Big(\alpha'_1 \tau_{n1} + \alpha'_2 \tau_{n2} + ... + \alpha'_n \tau_{nn} \Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\alpha'_1 \tau_{i1} + \alpha'_2 \tau_{i2} + ... + \alpha'_n \tau_{in} \Big) \mathbf{e}_i.$$

Порівнюючи два розклади вектора **a**, отримаємо, що

$$\alpha_i = \alpha'_1 \tau_{i1} + \alpha'_2 \tau_{i2} + ... + \alpha'_n \tau_{in}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким чином,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \dots \\ \alpha'_n \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \dots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \dots \\ \alpha'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Приклад 15.7. Розглянемо дійсний тривимірний простір з базисом $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Нехай вектори $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ також утворюють базис, причому

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = 5\mathbf{e}_1 - 1\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_3 = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Нехай в базисі $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ задано вектор $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$. Знайдемо координати вектора $\mathbf{a}$ в базисі $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$.

Для цього запишемо матрицю переходу T від базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ до базиса $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$, та знайдемо обернену до неї:

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 6 & -4 & 17 \end{pmatrix}.$$

Нехай $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{e}'_1 + \beta\mathbf{e}'_2 + \gamma\mathbf{e}'_3$, де α, β, γ — координати вектора $\mathbf{a}$ в базисі $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$. Тоді

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 6 & -4 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 6 \\ -27 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $\mathbf{a} = -13\mathbf{e}'_1 + 6\mathbf{e}'_2 - 27\mathbf{e}'_3$.

16 Лінійні оператори. Матриця лінійного оператора в заданому базисі лінійного простору. Власні числа та власні вектори лінійного оператора

16.1 Поняття лінійного оператора.

Розглянемо два лінійних простори V_n та V_m розмірностей n та m відповідно.

Означення 16.1. *Оператором*, що діє з лінійного простору V_n у лінійний простір V_m, будемо називати відображення $\mathcal{A}$: $V_n \to V_m$, яке кожному елементу $\mathbf{x}$ простору V_n ставить у відповідність деякий елемент $\mathbf{y}$ простору V_m. При цьому будемо використовувати позначення $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x}$.

Означення 16.2. Оператор $\mathcal{A}$, що діє з V_n у V_m, називається *лінійним*, якщо для будь-яких векторів $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ простору V_n, і довільного $\lambda \in \mathbb{R}$ виконуються співвідношення:
1) $\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{A}\mathbf{y}$, (адитивність оператора);
2) $\mathcal{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathcal{A}\mathbf{x}$, (однорідність оператора).

Означення 16.3. Якщо простір V_m є простором дійсних чисел $\mathbb{R}$, то лінійний оператор $\mathcal{A}$ називається лінійним функціоналом.

Вектор $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ називається *образом* вектора $\mathbf{x}$, а сам вектор $\mathbf{x}$ — *прообразом* вектора $\mathbf{y}$.

Дії над лінійними операторами. *Сумою* двох лінійних операторів $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$, що діють з V_n у V_m, називається оператор $(\mathcal{A}+\mathcal{B})$, що задається рівністю:

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in V_n.$$

Добутком оператора $\mathcal{A}$, що діє з V_n у V_m, *на число* λ називається оператор $(\lambda\mathcal{A})$, який задається рівністю:

$$(\lambda\mathcal{A})\mathbf{x} = \lambda(\mathcal{A}\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in V_n.$$

Нульовим називається оператор $\mathcal{O}$, який відображає всі елементи простору V_n у нульовий елемент $\mathbf{0}$ простору V_m, тобто

$$\mathcal{O}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in V_n.$$

Для кожного лінійного оператора $\mathcal{A}$, що діє з V_n у V_m, можна задати протилежний оператор $(-\mathcal{A})$ за правилом $(-\mathcal{A}) = (-1) \cdot \mathcal{A}$.

Легко перевірити, що **множина всіх лінійних операторів**, що діють з V_n у V_m, з визначеними вище операціями додавання та множення на скаляр та вибраними нульовим і протилежним операторами, **утворює лінійний простір**.

Якщо простори V_n і V_m співпадають, то оператор $\mathcal{A}$ відображає V_n в себе. Саме такі оператори будемо розглядати далі.

Оператор $\mathcal{E}$, що діє з V_n у V_n, називається *тотожнім* або *одиничним*, якщо він відображає кожний елемент простору V_n у себе, тобто

$$\mathcal{E}\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in V_n.$$

Добутком лінійних операторів $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$, що діють з V_n у V_n, називається оператор $(\mathcal{AB})$, який визначається рівністю:

$$(\mathcal{AB})\mathbf{x} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in V_n.$$

Легко перевірити, що оператор $(\mathcal{AB})$ є лінійним.

Матриця лінійного оператора в заданому базисі лінійного простору. Зафіксуємо у лінійному просторі V_n базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$. Нехай $\mathbf{x}$ — довільний елемент простору V_n, причому $\mathbf{x}$ має розклад у базисі $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n.$$

Розглянемо лінійний оператор $\mathcal{A}$, що діє з V_n у V_n. В силу лінійності оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x} = x_1\mathcal{A}\mathbf{e}_1 + x_2\mathcal{A}\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathcal{A}\mathbf{e}_n.$$

Оскільки вектори $\mathcal{A}\mathbf{e}_1$, $\mathcal{A}\mathbf{e}_2$, ..., $\mathcal{A}\mathbf{e}_n$ є також векторами з V_n, то кожен з них можна розкласти за базисом $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$. Нехай

$$\mathcal{A}\mathbf{e}_j = a_{1j}\mathbf{e}_1 + a_{2j}\mathbf{e}_2 + ... + a_{nj}\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i, \quad j = \overline{1, n},$$

де a_{ij}, — відповідні коефіцієнти, $i, j = \overline{1, n}$. Тоді

$$\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x} = x_1(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + ... + a_{n1}\mathbf{e}_n) + x_2(a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + ... + a_{n2}\mathbf{e}_n) + ... +$$

$$+ x_n(a_{1n}\mathbf{e}_1 + a_{2n}\mathbf{e}_2 + ... + a_{nn}\mathbf{e}_n) =$$

$$= \mathbf{e}_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n) + \mathbf{e}_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n) + ... +$$

$$+ \mathbf{e}_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n).$$

З іншого боку, вектор $\mathbf{y}$ має у базисі $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ координати $(y_1, y_2, ..., y_n)$, тобто

$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + ... + y_n\mathbf{e}_n.$$

Тому

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n, \\ ... \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n. \end{cases}$$

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

називається матрицею оператора $\mathcal{A}$ в базисі $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$, а ранг цієї матриці — рангом оператора $\mathcal{A}$. Зауважимо, що матриця A лінійного оператора $\mathcal{A}$ складається зі стопців, елементами яких є координати векторів, в які переходять базисні вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ під дією оператора $\mathcal{A}$.

Таким чином, кожному лінійному оператору $\mathcal{A}$ відповідає матриця A в заданому базисі, і навпаки, кожній квадратній матриці A n-го порядку відповідає єдиний лінійний оператор $\mathcal{A}$, що діє з V_n у V_n, матрицею якого є матриця A.

Зв'язок між вектором $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ та його образом $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$ можна подати у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix},$$

або скорочено

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}.$$

Приклад 16.1. Нехай у просторі $\mathbb{R}^3$ задано базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, і лінійний оператор матрицею $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$. Знайдемо образ $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ вектора

$\mathbf{x} = 4\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ за встановленою формулою

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -13 \\ -18 \end{pmatrix}.$$

Отже, $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x} = 10\mathbf{e}_1 - 13\mathbf{e}_2 - 18\mathbf{e}_3$.

Приклад 16.2. З'ясувати, який із заданих операторів, що діють з $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$, є лінійним: $\mathcal{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 4x_1 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix}$; $\mathcal{B}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2 - 4x_3 \\ 8x_3 + 11 \\ -x_2 \end{pmatrix}$. Для лінійного оператора записати матрицю в базисі $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Нехай $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ та $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ — два вектори з $\mathbb{R}^3$. Розглянемо спочатку оператор $\mathcal{A}$ і перевіримо для нього умови 1) і 2) означення 16.2.

Оскільки

$$\mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 3(x_1 + y_1) - 2(x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) \\ 4(x_1 + y_1) \\ (x_3 + y_3) - (x_2 + y_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 4x_1 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y_1 - 2y_2 + y_3 \\ 4y_1 \\ y_3 - y_2 \end{pmatrix} = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{A}\mathbf{y},$$

то оператор $\mathcal{A}$ є адитивним. Перевіримо його на однорідність. Нехай $\lambda \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\mathcal{A}(\lambda\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3\lambda x_1 - 2\lambda x_2 + \lambda x_3 \\ 4\lambda x_1 \\ \lambda x_3 - \lambda x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 4x_1 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix} = \lambda\mathcal{A}\mathbf{x}.$$

Таким чином, оператор $\mathcal{A}$ є однорідним, а отже, є лінійним. Запишемо його матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оператор $\mathcal{B}$ не є лінійним, оскільки

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} (x_1+y_1)+(x_2+y_2)^2-4(x_3+y_3) \\ 8(x_3+y_3)+11 \\ -(x_2+y_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1+x_2^2-4x_3 \\ 8x_3+11 \\ -x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1+y_2^2-4y_3 \\ 8y_3+11 \\ -y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2y_2 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \mathcal{B}\mathbf{x}+\mathcal{B}\mathbf{y}.$$

Перетворення матриці лінійного оператора при зміні базиса. Нехай є n-вимірний лінійний простір V_n, і задано лінійний оператор $\mathcal{A}$, що діє з V_n у V_n. Розглянемо два базиса простору V_n: $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$, та $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$

Наступна теорема дає зв'язок між матрицями одного і того ж самого оператора $\mathcal{A}$ у різних базисах.

Теорема 16.1. *Матриці A і A' лінійного оператора $\mathcal{A}$ у базисах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ та $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$ відповідно, зв'язані співвідношенням:*

$$A' = T^{-1}AT,$$

де T — матриця переходу від базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ до базиса $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$.

Доведення. Розглянемо довільний вектор $\mathbf{x}$ простору V_n та його образ $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x}$. Нехай в базисах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ та $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$ вектори $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ мають відповідно розклади:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n, \quad \mathbf{x} = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 + ... + x'_n\mathbf{e}'_n$$

та

$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + ... + y_n\mathbf{e}_n, \quad \mathbf{y} = y'_1\mathbf{e}'_1 + y'_2\mathbf{e}'_2 + ... + y'_n\mathbf{e}'_n.$$

Запишемо співвідношення $\mathbf{y} = \mathcal{A}\mathbf{x}$ у матричній формі у базисах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ та $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$ відповідно:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix},$$

тобто $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, та

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ ... \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & ... & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & ... & a'_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a'_{n1} & a'_{n2} & ... & a'_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix},$$

тобто $\mathbf{y}' = A'\mathbf{x}'$. Тут матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{і} \quad A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & ... & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & ... & a'_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a'_{n1} & a'_{n2} & ... & a'_{nn} \end{pmatrix}$$

є матрицями оператора $\mathcal{A}$ в базисах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ і $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$ відповідно.

Оскільки T — матриця переходу від базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ до базиса $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$, то

$$\mathbf{x} = T\mathbf{x}'.$$

Домножаючи цю рівність на матрицю A зліва, отримаємо

$$A\mathbf{x} = AT\mathbf{x}',$$

звідки

$$\mathbf{y} = AT\mathbf{x}'.$$

Але $\mathbf{y} = T\mathbf{y}'$, з чого випливає, що

$$T\mathbf{y}' = AT\mathbf{x}'.$$

Таким чином,

$$\mathbf{y}' = T^{-1}AT\mathbf{x}'.$$

Порівнюючи рівності $\mathbf{y}' = T^{-1}AT\mathbf{x}'$ та $\mathbf{y}' = A'\mathbf{x}'$, бачимо, що

$$A' = T^{-1}AT.$$

Теорему доведено. □

Зауважимо, що зі співвідношення $A' = T^{-1}AT$ можна виразити матрицю A: $A = TA'T^{-1}$.

З теореми 16.1 випливає, що у різних базисах матриця лінійного оператора має різний вигляд. Найбільш простою є матриця діагонального вигляду.

Матриці A' і A, зв'язані співвідношенням $A' = T^{-1}AT$, називаються *подібними*. Дві властивості подібних матриць містить наступний наслідок.

Наслідок 16.1. $r(A) = r(A')$, *та* $\det A = \det A'$, *тобто подібні матриці мають однакові ранги та однакові визначники.*

Доведення. З рівності $A' = T^{-1}AT$ випливає, що $\det A' = \det T^{-1} \cdot \det A \cdot \det T$. А оскільки $\det T^{-1} \cdot \det T = 1$, то $\det A' = \det A$, і $r(A) = (A')$. □

Приклад 16.3. Матриця лінійного оператора $\mathcal{A}$, що діє з $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$, в базисі $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю A' цього оператора в базисі $\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_2 = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_3 = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$.

Запишемо матрицю T переходу від базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ до базиса $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо

$$T^{-1} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 12 \end{pmatrix}.$$

Тоді шукана матриця A' лінійного оператора $\mathcal{A}$ в базисі $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ має вигляд:

$$A' = T^{-1}AT = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{46}{3} & -\frac{29}{3} & 9 \\ -\frac{61}{3} & -\frac{26}{3} & 10 \\ -\frac{160}{3} & -\frac{80}{3} & 28 \end{pmatrix}.$$

16.2 Власні числа та власні вектори лінійного оператора.

Нехай є n-вимірний лінійний простір V_n, і задано лінійний оператор $\mathcal{A}$, що діє з V_n у V_n.

Означення 16.4. Вектор $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ називається *власним вектором* лінійного оператора $\mathcal{A}$, якщо існує таке число λ, що

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{16.1}$$

При цьому число λ називається *власним числом* оператора $\mathcal{A}$ (матриці A).

З означення випливає, що власний вектор під дією оператора $\mathcal{A}$ переходить у вектор, колінеарний до себе.

Приклад 16.4. Показати, що вектор $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$ є власним вектором лінійного оператора з матрицею $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, що відповідає власному значенню $\lambda = -1$.

Вектор $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$, заданий в базисі $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, можна записати у вигляді вектор-стовпця $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ Тоді

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda\mathbf{x}.$$

Перепишемо рівність (16.1) у матричній формі $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, або

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = \lambda x_2, \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = \lambda x_n. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ ..., \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0, \end{cases}$$

тобто

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

де E — одинична матриця порядку n.

Відомо (див. лекцію 5), що однорідна система має ненульові розв'язки тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці системи менше n, тобто визначник основної матриці системи дорівнює нулю. Таким чином, отримали умову

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \qquad (16.2)$$

Ця умова є необхідною і достатньою умовою того, що λ є власним числом матриці A.

Визначник $\det(A - \lambda E)$ є многочленом n-го степеня відносно λ. Він називається *характеристичним многочленом* оператора $\mathcal{A}$ (матриці A), а рівняння (16.2) *характеристичним рівнянням* оператора $\mathcal{A}$ (матриці A). Підкреслимо, що корені характеристичного рівняння (16.2), взагалі кажучи, є комплексними числами.

Покажемо, що **характеристичний многочлен лінійного оператора $\mathcal{A}$ не залежить від вибору базиса**. Дійсно, нехай A — матриця лінійного оператора $\mathcal{A}$ в базисі $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$, а A' — матриця лінійного оператора $\mathcal{A}$ в новому базисі $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$. Нехай T — матриця переходу від базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ до базиса $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$. Розглянемо характеристичний многочлен:

$$\det(A' - \lambda E) = \det(T^{-1} \cdot A \cdot T - \lambda E) = \det(T^{-1} \cdot A \cdot T - \lambda T^{-1} E T) =$$

$$= \det(T^{-1}(A - \lambda E)T) = \det(T^{-1}) \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \det(T) =$$
$$= \det(T^{-1}T) \cdot \det(A - \lambda E) = \det(A - \lambda E),$$

звідки

$$\det(A' - \lambda E) = \det(A - \lambda E),$$

що й треба було довести.

Як зазначалося вище, в різних базисах матриця лінійного оператора $\mathcal{A}$ має різний вигляд. Найбільш простою є діагональна матриця. Наступна теорема визначає базис, в якому матриця лінійного оператора має діагональний вигляд.

Теорема 16.2. *Для того, щоб матриця A лінійного оператора $\mathcal{A}$ була діагональною, необхідно і достатньо, щоб базисні вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ були власними векторами цього оператора.*

Доведення. Доведемо необхідність. Нехай базисні вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ є власними векторами оператора $\mathcal{A}$. Тоді $\mathcal{A}\mathbf{e}_k = \lambda_k \mathbf{e}_k$, $k = \overline{1, n}$. Тому матриця A лінійного оператора $\mathcal{A}$ має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Доведемо достатність. Нехай матриця A лінійного оператора $\mathcal{A}$ у заданому базисі $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ є діагональною. Тоді $\mathcal{A}\mathbf{e}_k = \lambda_k \mathbf{e}_k$, $k = \overline{1, n}$, звідки випливає, що $\mathbf{e}_k$, $k = \overline{1, n}$, — власні вектори оператора $\mathcal{A}$. □

Не для кожного лінійного оператора (квадратної матриці) існує базис, в якому матриця оператора є діагональною, оскільки власних векторів у оператора може бути менше ніж n. Розглянемо два важливі випадки, для яких це твердження справедливе.

Теорема 16.3. *Якщо власні значення λ_1, λ_2, ..., λ_n оператора $\mathcal{A}$ різні, то відповідні їм власні вектори є лінійно незалежними.*

Доведення. Доведемо теорему використовуючи метод математичної індукції. Для $n = 1$ твердження очевидне. Нехай теорема справедлива для $n = k$. Покажемо справедливість теореми для $n = k + 1$. Припустимо супротивне, тобто $k + 1$ власних векторів матриці є лінійно залежними. Тоді існують такі дійсні числа α_1, α_2, ..., α_{k+1}, що

$$\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{0}, \tag{16.3}$$

причому принаймні одне з α_1, α_2, ..., α_{k+1} не дорівнює нулю. З рівності (16.3) випливає, що

$$\alpha_1\mathcal{A}\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathcal{A}\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_{k+1}\mathcal{A}\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{0},$$

звідки

$$\alpha_1\lambda_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{0}.$$

Віднімемо від останньої рівності рівність (16.3), помножену на λ_{k+1}:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\mathbf{e}_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\mathbf{e}_k = \mathbf{0}.$$

Але, оскільки всі власні значення λ_1, λ_2, ..., λ_{k+1} — різні, а k власних векторів матриці є лінійно незалежними за припущенням, то отримали протиріччя. $\square$

Теорема 16.4. *Якщо матриця A лінійного оператора $\mathcal{A}$ є симетричною, тобто $A^T = A$, то всі його власні числа дійсні, і він має n лінійно незалежних власних векторів.*

Приймемо цей результат без доведення.

Таким чином, з теорем 16.3 та 16.4 випливає, що **матриця A лінійного оператора $\mathcal{A}$ може бути зведена до діагонального вигляду** принаймні у двох випадках:

1) якщо характеристичний многочлен оператора $\mathcal{A}$ **має** n **різних коренів**;

2) якщо матриця A лінійного оператора $\mathcal{A}$ **є симетричною**.

Розглянемо приклади.

Приклад 16.5. Знайти власні числа і власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти відповідну діагональну матрицю до матриці A.

Знайдемо спочатку власні числа матриці A. Для цього складемо характеристичне рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Це рівняння еквівалентне наступному

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0.$$

Звідси знаходимо два власних значення матриці A: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$.

Знайдемо власні вектори, що відповідають власним значенням матриці A. Нехай спочатку $\lambda_1 = 1$. Будемо шукати вектор $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ такий, що $A\mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x}$, тобто

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Отже, отримаємо однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

ФСР цієї однорідної СЛАР складається з одного вектора $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Візьмемо, наприклад, $t = 1$. Таким чином, власним вектором матриці A, який відповідає числу $\lambda_1 = 1$, є вектор $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Знайдемо власний вектор матриці A, який відповідає числу $\lambda_2 = 6$, тобто такий вектор $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, що $A\mathbf{x} = 6 \cdot \mathbf{x}$. Остання рівність еквівалентна тому, що

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Звідси отримаємо однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

ФСР цієї системи складається з одного вектора $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2s \\ 3s \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$. Покладемо, наприклад, $s = 1$. Тоді власним вектором матриці A, який відповідає числу $\lambda_2 = 6$, є вектор $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Зведемо матрицю A до діагонального вигляду. Оскільки власними числами матриці A є числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$, то діагональною матрицею, яка подібна до матриці A, є матриця

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

При цьому, матриця

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

стовпцями якої є стовпці координат власних векторів $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, є матрицею, яка приводить матрицю A до діагонального вигляду. Зробимо перевірку:

$$T^{-1}AT = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = A'.$$

17 Евклідів простір. Базис у евклідовому просторі. Ортонормовані базиси евклідового простору. Ортогональний оператор

17.1 Поняття евклідового простору.

Означення 17.1. Будемо казати, що у деякому дійсному просторі V задано *скалярний добуток*, якщо довільній парі елементів $\mathbf{x}$ $\mathbf{y} \in V$ поставлено у відповідність дійсне число (позначатимемо його $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$), яке задовольняє наступні властивості:

1) $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$;
2) $(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, де λ — довільне дійсне число;
3) $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$;
4) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$, для всіх $\mathbf{x} \in V$, і $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Означення 17.2. Дійсний лінійний простір, в якому введено скалярний добуток, називається *евклідовим*. Будемо позначати евклідів простір літерою E.

Приклад 17.1. Алгебраїчний простір $\mathbb{R}^n$ впорядкованих наборів n дійсних чисел є евклідовим простором зі скалярним добутком, який задається співвідношенням:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n,$$

для довільних $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Приклад 17.2. Розглянемо лінійний простір всіх дійснозначних неперервних на інтервалі (a, b) функцій. Довільній парі функцій $\mathbf{f}$ і $\mathbf{g}$ з цієї множини поставимо у відповідність число

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_a^b \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} dx.$$

Неважко перевірити, що так задана відповідність визначає скалярний добуток для елементів простору.

Означення 17.3. *Довжиною* вектора $\mathbf{x}$ евклідового простору E називається число $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$.

Означення 17.4. *Кутом між векторами* $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ евклідового простору E називається кут φ такий, що

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|}.$$

Означення 17.5. Вектори $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ евклідового простору E називаються *ортогональними*, якщо $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Для довільних двох елементів $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ довільного евклідового простору E справедлива наступна нерівність (нерівність Коші-Буняковського):

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y}, \mathbf{y}).$$

17.2 Ортонормований базис.

У лекції 14 було введено поняття базиса n-вимірного лінійного простору. Зрозуміло, що у лінійному просторі може бути нескінчена кількість різних базисів. Найбільш зручними для застосування є так звані ортонормовані базиси.

Означення 17.6. Будемо говорити, що n лінійно незалежних векторів $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ n-вимірного евклідового простору E_n утворюють *ортогональний базис*, якщо вони є попарно ортогональними, тобто $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$.

Будемо говорити, що n лінійно незалежних векторів $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ n-вимірного евклідового простору E_n утворюють *ортонормований базис*, якщо вони попарно ортогональні і довжина кожного з них дорівнює одиниці, тобто

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Для того, щоб дане нами означення 17.6 було коректним необхідно показати, що вектори з цього означення дійсно утворюють базис, тобто є лінійно незалежними. Покажемо це, тобто покажемо, що рівність

$$\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$$

можлива тільки для $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Для цього помножимо цю рівність скалярно на вектор $\mathbf{e}_1$:

$$\alpha_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + \alpha_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + ... + \alpha_n(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) = 0,$$

звідки за означенням отримаємо $\alpha_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + \alpha_2 \cdot 0 + ... + \alpha_n \cdot 0 = 0$, а отже $\alpha_1 = 0$. Аналогічно можна показати, що $\alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_n = 0$. Таким чином, вектори з означення 16.6 дійсно є лінійно незалежними.

Приклад 17.3. На площині $\mathbb{R}^2$ ортонормованим є, наприклад, базис $\overrightarrow{i} = (1, 0)$, $\overrightarrow{j} = (0, 1)$. У просторі $\mathbb{R}^3$ ортонормованим є, наприклад, базис $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$.

Теорема 17.1. *У будь-якому n-вимірному евклідовому просторі E_n існує ортонормований базис.*

Доведення. Покажемо, що із довільного базиса евклідового простору E_n можна зробити ортогональний базис. Нехай у n-вимірному евклідовому просторі E_n задано n лінійно незалежних векторів $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_n$. За цими векторами побудуємо ортогональний базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$. Ця процедура називається *ортогоналізацією Грама-Шмідта.*

Покладемо

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1.$$

Вектор $\mathbf{e}_2$ шукатимемо у вигляді $\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_2 + \alpha\mathbf{e}_1$, підбираючи число α так, щоб виконувалася умова $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_2 + \alpha\mathbf{e}_1) = 0$. Звідси $\alpha = -\frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)}$. Таким чином, покладемо

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_2 - \frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1.$$

Вектор $\mathbf{e}_3$ шукатимемо у вигляді $\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_3 + \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2$, підбираючи числа α_1 і α_2 так, щоб виконувалися умови $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_3 + \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2) = 0$, і $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_2, \mathbf{f}_3 + \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2) = 0$. Звідси отримаємо, що $\alpha_1 = -\frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)}$, а $\alpha_2 = -\frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_2)}{(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)}$. Таким чином,

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_3 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_2)}{(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)}\mathbf{e}_2.$$

Продовжуючи процедуру, припустимо, що попарно ортогональні вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_{k-1}$, $k \leq n$, побудовано. Шукатимемо вектор $\mathbf{e}_k$ у вигляді $\mathbf{e}_k = f_k + \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_{k-1}\mathbf{e}_{k-1}$ так, щоб виконувалися умови: $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_k) = 0$, $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_k) = 0$, ..., $(\mathbf{e}_{k-1}, \mathbf{e}_k) = 0$. З цих умов знаходимо коефіцієнти: $\alpha_1 = -\frac{(\mathbf{f}_k, \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)}$, $\alpha_2 = -\frac{(\mathbf{f}_k, \mathbf{e}_2)}{(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)}$, ..., $\alpha_{k-1} = -\frac{(\mathbf{f}_k, \mathbf{e}_{k-1})}{(\mathbf{e}_{k-1}, \mathbf{e}_{k-1})}$. Таким чином,

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{f}_k - \frac{(\mathbf{f}_k, \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1 - \frac{(\mathbf{f}_k, \mathbf{e}_2)}{(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)}\mathbf{e}_2 - ... - \frac{(\mathbf{f}_k, \mathbf{e}_{k-1})}{(\mathbf{e}_{k-1}, \mathbf{e}_{k-1})}\mathbf{e}_{k-1}.$$

При цьому, неважко помітити, що побудований вектор $\mathbf{e}_k$ відмінний від нуля, оскільки вектори $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_n$ є лінійно незалежними.

Процедуру слід продовжувати доти, доки ми не отримаємо n ортогональних векторів $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$.

Для того, щоб з ортогонального базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ зробити ортонормований базис, достатньо кожен вектор базиса поділити на його довжину. Таким чином, ортонормованим буде базис $\mathbf{e}'_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{|\mathbf{e}_1|}$, $\mathbf{e}'_2 = \frac{\mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_2|}$, ..., $\mathbf{e}'_n = \frac{\mathbf{e}_n}{|\mathbf{e}_n|}$. □

Очевидно, ортонормованих базисів у евклідовому просторі E_n багато. Тільки на будь-яких n лінійно незалежних векторах $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_n$ можна побудувати $n!$ ортонормованих базисів, в залежності від порядку розташування векторів у базисі.

Доведення теореми 17.1 визначає алгоритм ортогоналізації векторів. Розглянемо приклад.

Приклад 17.4. У просторі $\mathbb{R}^3$ задано три некомпланарних вектори $\mathbf{f}_1 = \Big(1, 2, -1\Big)$, $\mathbf{f}_2 = \Big(0, -3, 1\Big)$ та $\mathbf{f}_3 = \Big(2, 4, -3\Big)$. Побудувати за цією системою векторів ортонормований базис.

Скористаємося процедурою ортогоналізації Грама-Шмідта. Покладемо

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 = \Big(1, 2, -1\Big).$$

Обчислюємо $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) = 6$, та $(\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1) = 0\cdot 1 + (-3)\cdot 2 + 1\cdot(-1) = -7$. Тому покладемо

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_2 - \frac{(\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1 = \Big(0, -3, 1\Big) + \frac{7}{6}\Big(1, 2, -1\Big) = \Big(\frac{7}{6}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}\Big).$$

Обчислюємо $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = \frac{49}{36} + \frac{4}{9} + \frac{1}{36} = \frac{11}{6}$, $(\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_1) = 2\cdot 1 + 4\cdot 2 + (-3)\cdot(-1) = 13$, $(\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_2) = 2\cdot\frac{7}{6} - 4\cdot\frac{2}{3} + 3\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$. Тому

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_3 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)}\mathbf{e}_1 - \frac{(\mathbf{f}_3, \mathbf{e}_2)}{(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)}\mathbf{e}_2 =$$

$$= \Big(2, 4, -3\Big) - \frac{13}{6}\Big(1, 2, -1\Big) - \frac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{6}}\Big(\frac{7}{6}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}\Big) = \Big(-\frac{3}{11}, -\frac{3}{11}, -\frac{9}{11}\Big).$$

Таким чином, вектори

$$\mathbf{e}_1 = \Big(1, 2, -1\Big), \quad \mathbf{e}_2 = \Big(\frac{7}{6}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}\Big), \quad \mathbf{e}_3 = \Big(-\frac{3}{11}, -\frac{3}{11}, -\frac{9}{11}\Big)$$

утворюють ортогональний базис. Зробимо з нього ортонормований базис. Оскільки $|\mathbf{e}_1| = \sqrt{6}$, $|\mathbf{e}_2| = \sqrt{\frac{11}{6}}$, $|\mathbf{e}_3| = \frac{3}{\sqrt{11}}$, то ортонормованим базисом буде система трьох векторів:

$$\mathbf{e}_1' = \Big(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\Big), \quad \mathbf{e}_2' = \Big(\frac{7}{\sqrt{66}}, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{33}}, -\frac{1}{\sqrt{66}}\Big),$$

$$\mathbf{e}_3' = \Big(-\frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{3}{\sqrt{11}}\Big).$$

Координати вектора в ортонормованому базисі евклідового простору. Знайдемо координати довільного вектора $\mathbf{x}$ евклідового простору E_n у ортонормованому базисі $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$. Нехай $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n$. Помноживши цю рівність скалярно на вектор $\mathbf{e}_1$, отримаємо

$$(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) = x_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + x_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + ... + x_n(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) = x_1.$$

Аналогічно, отримаємо, що $x_2 = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_2)$, ..., $x_n = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_n)$, тобто **координати вектора в ортонормованому базисі дорівнюють скалярним добуткам цього вектора на відповідні базисні вектори**.

Наступна теорема дає необхідні і достатні умови того, коли базис є ортонормований. Наведемо її без доведення.

Теорема 17.2. *Базис* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ *n-вимірного евклідового простору* E_n *тоді і тільки тоді є ортонормованим, коли для довільних двох векторів* $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n$ *та* $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + ... + y_n\mathbf{e}_n$ *цього простору скалярний добуток* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *задається формулою*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n.$$

17.3 Ортогональний оператор.

Означення 17.7. Квадратна матриця A називається *ортогональною*, якщо $A^{-1} = A^T$, тобто $AA^T = E$.

Безпосередньо з означення 17.7 випливають наступні **властивості ортогональної матриці**:

1) Якщо матриця A є ортогональною, то вона є невиродженою, причому $(\det A)^2 = 1$, тобто $\det A = \pm 1$.

2) Якщо матриця A є ортогональною, то і матриця A^T є ортогональною.

3) Якщо матриці A і B є ортогональними, то їх добуток AB є також ортогональною матрицею.

4) Одинична матриця E є ортогональною.

Сформулюємо критерій ортогональності квадратної матриці.

Теорема 17.3. *Квадратна матриця A є ортогональною тоді і тільки тоді, коли сума квадратів всіх елементів її довільного рядка дорівнює одиниці, а сума добутків відповідних елементів двох довільних різних рядків дорівнює нулю.*

Доведення. Випливає безпосередньо з означення, оскільки для довільної квадратної матриці A рівність $AA^T = E$, тобто рівність

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix},$$

справджується тоді і тільки тоді, коли

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + ... + a_{in}^2 = 1, \quad i = \overline{1, n},$$

і

$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + ... + a_{in}a_{jn} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

□

Означення 17.8. Лінійний оператор, що діє з евклідового простору E_n у евклідів простір E_n, називається *ортогональним*, якщо йому відповідає ортогональна матриця.

Еквівалентно ортогональний оператор можна означити так: Лінійний оператор $\mathcal{A}$, що діє з евклідового простору E_n у евклідів простір E_n, є ортогональним, якщо він зберігає скалярний добуток, тобто

$$(\mathcal{A}\mathbf{x}, \mathcal{A}\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_n.$$

Теорема 17.4. *Матриця переходу T від ортонормованого базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ евклідового простору E_n у будь-який інший ортонормований базис $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$ цього простору є ортогональною, тобто $T^T = T^{-1}$.*

Доведення. Дійсно, нехай матриця

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & ... & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & ... & \tau_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & ... & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

є матрицею переходу від ортонормованого базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ евклідового простору E_n у інший ортонормований базис $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$ простору E_n. Тоді

$$\begin{pmatrix}\mathbf{e}'_1\\ \mathbf{e}'_2\\ \dots\\ \mathbf{e}'_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tau_{11} & \tau_{21} & \dots & \tau_{n1}\\ \tau_{12} & \tau_{22} & \dots & \tau_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \tau_{1n} & \tau_{2n} & \dots & \tau_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \dots\\ \mathbf{e}_n\end{pmatrix} = T^T\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \dots\\ \mathbf{e}_n\end{pmatrix},$$

тобто

$$\mathbf{e}'_j = \tau_{1j}\mathbf{e}_1 + \tau_{2j}\mathbf{e}_2 + \dots + \tau_{nj}\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n}\tau_{ij}\mathbf{e}_i, \quad j = \overline{1,n}.$$

За означенням ортонормованого базиса

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases}1, & i = j,\\ 0, & i \neq j.\end{cases} \qquad \text{і} \quad (\mathbf{e}'_k, \mathbf{e}'_l) = \begin{cases}1, & k = l,\\ 0, & k \neq l.\end{cases}$$

Тому

$$1 = (\mathbf{e}'_k, \mathbf{e}'_k) = (\tau_{1k}\mathbf{e}_1 + \tau_{2k}\mathbf{e}_2 + \dots + \tau_{nk}\mathbf{e}_n, \tau_{1k}\mathbf{e}_1 + \tau_{2k}\mathbf{e}_2 + \dots + \tau_{nk}\mathbf{e}_n) =$$

$$= \tau_{1k}^2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + \tau_{2k}^2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) + \dots + \tau_{nk}^2(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) = \tau_{1k}^2 + \tau_{2k}^2 + \dots + \tau_{nk}^2, \quad k = \overline{1,n}.$$

і

$$0 = (\mathbf{e}'_k, \mathbf{e}'_l) = (\tau_{1k}\mathbf{e}_1 + \tau_{2k}\mathbf{e}_2 + \dots + \tau_{nk}\mathbf{e}_n, \tau_{1l}\mathbf{e}_1 + \tau_{2l}\mathbf{e}_2 + \dots + \tau_{nl}\mathbf{e}_n) =$$

$$= \tau_{1k}\tau_{1l}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + \tau_{2k}\tau_{2l}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) + \dots + \tau_{nk}\tau_{nl}(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) =$$
$$= \tau_{1k}\tau_{1l} + \tau_{2k}\tau_{2l} + \dots + \tau_{nk}\tau_{nl}, \quad k, l = \overline{1,n}.$$

Звідси за теоремою 17.3 матриця T^T є ортогональною. Нарешті за властивістю 2) матриця T є також ортогональною. □

Приклад 17.5. Матриця A лінійного оператора $\mathcal{A}$ повороту на кут φ довільного вектора у проторі $\mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

є ортогональною матрицею.

18 Квадратичні форми. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду. Знаковизначені квадратичні форми

18.1 Поняття квадратичні форми.

Нехай задано n-вимірний евклідів простір E_n з ортонормованим базисом $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$.

Означення 18.1. *Квадратичною формою* від n змінних $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається сума, кожен член якої є або квадратом однієї зі змінних, або добутком двох різних змінних, помножених на деякі дійсні коефіцієнти, тобто

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \qquad (18.1)$$

a_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$ — деякі дійсні числа, причому $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$.

Матриця $A = \Big(a_{ij}\Big)_{i,j=1}^{n}$ називається матрицею квадратичної форми, а її ранг — рангом квадратичної форми $L(x_1, x_2, ..., x_n)$. Якщо матриця A є невиродженою, то і квадратична форма називається невиродженою.

Оскільки $a_{ij} = a_{ji}$, для всіх $i, j = \overline{1, n}$, то звідси випливає, що матриця A довільної квадратичної форми є симетричною, тобто $A^T = A$.

Квадратичну форму (18.1) зручно записувати у матричному вигляді:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T A X,$$

де $X = (x_1 \ \ x_2 \ \ ... \ \ x_n)^T$ — вектор-стовпець змінних, або у вигляді скалярного добутку:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = (AX, X) = (X, A^T X) = (X, AX).$$

Приклад 18.1. Квадратичній формі $L(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 12x_1x_2 - 10x_1x_3 + x_2^2 - 3x_3^2$ відповідає матриця $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -5 \\ -6 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

18.2 Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду.

Означення 18.2. Квадратична форма від n змінних $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *канонічною*, якщо $a_{ij} = 0$, для всіх $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$, тобто

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2.$$

З означення випливає, що матриця A канонічної квадратичної форми є діагональною.

Теорема 18.1. *Будь-яку квадратичну форму $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ шляхом лінійного перетворення координат можна звести до канонічного вигляду:*

$$L(y_1, y_2, ..., y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2,$$

де $y_1, y_2, ..., y_n$ — змінні у новому базисі, а λ_1, λ_2, ..., λ_n — власні числа матриці A квадратичної форми $L(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Доведення. Розглянемо квадратичну форму $L(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$, задану у деякому ортонормованому базисі $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ евклідового простору. Нехай $A = \Big(a_{ij}\Big)_{i,j=1}^{n}$ — матриця цієї квадратичної форми.

Нагадаємо (див. теорему 16.4), що у симетричної матриці власні числа є дійсними, і вона має n лінійно незалежних власних векторів. Виберемо в якості нового базиса базис $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, ..., \mathbf{e}'_n$, який складається із ортонормованих власних векторів матриці A (для цього, якщо потрібно, до власних векторів матриці A застосовується процес ортогоналізації Грама-Шмідта).

Нехай T — матриця переходу від базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ до базиса $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$. Оскільки обидва базиси є ортонормованими, то за теоремою 17.4 матриця T є ортогональною, тобто $T^{-1} = T^T$.

Розглянемо невироджене ортогональне перетворення координат $X = TY$, де $X = (x_1 \;\; x_2 \;\; ... \;\; x_n)^T$, $Y = (y_1 \;\; y_2 \;\; ... \;\; y_n)^T$. Тоді

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = \Big(ATY, TY\Big) = \Big(T^T ATY, Y\Big) = \Big(T^{-1}ATY, Y\Big) = \Big(A'Y, Y\Big).$$

Іншими словами, якщо подіяти на змінні, що входять до квадратичної форми, невиродженим лінійним перетворенням, то квадратична форма з матрицею A переходить в квадратичну форму з матрицею $A' = T^{-1}AT$, причому, ранг квадратичної форми зберігається. Крім того,

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix},$$

де λ_1, λ_2, ..., λ_n — власні числа матриці A.

Остаточно,

$$\Big(A'Y, Y\Big) = \Big(y_1\lambda_1\mathbf{e}'_1 + y_2\lambda_2\mathbf{e}'_2 + ... + y_n\lambda_n\mathbf{e}'_n; y_1\mathbf{e}'_1 + y_2\mathbf{e}'_2 + ... + y_n\mathbf{e}'_n\Big) =$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2,$$

тобто в базисі $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, ..., $\mathbf{e}'_n$ квадратична форма $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ буде мати канонічний вигляд. □

Канонічний вигляд $L(y_1, y_2, ..., y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2$ квадратичної форми визначається однозначно з точністю до нумерації змінних. Це означає, що, якщо при зведенні квадратичної форми до канонічного вигляду занумеровати власні числа та відповідні їм власні вектори іншим чином, то кількість додатних і від'ємних коефіцієнтів не зміниться. В цьому полягає *закон інерції квадратичної форми.*

Приклад 18.2. Звести до канонічного вигляду квадратичну форму

$$L(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2.$$

Матриця A цієї квадратичної форми має вигляд: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Характеристичне рівняння матриці A

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

має два корені $\lambda_1 = 2$ і $\lambda_2 = -3$.

Якщо у матриці перетворення T власні вектори розташовувати у порядку, який відповідає нумерації власних значень матриці A, то канонічний вигляд квадратичної форми буде

$$L(y_1, y_2) = 2y_1^2 - 3y_2^2.$$

Знайдемо власні вектори $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ матриці A. Розглянемо спочатку власне число $\lambda_1 = 2$, і складемо систему

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1-2 & 2 \\ 2 & -2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 = 0. \end{cases}$$

Ця однорідна система має загальний розв'язок $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2s \\ s \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$. Нехай $s = 1$. Тоді власним вектором матриці A, який відповідає числу $\lambda_1 = 2$, є вектор $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Оскільки $|\mathbf{x}_1| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$, то нормованим власним вектором є вектор $\mathbf{x}_1' = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

Розглянемо тепер власне число $\lambda_2 = -3$, і складемо систему

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2 \\ 2 & -2+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Ця однорідна система має загальний розв'язок $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} s \\ -2s \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$. Нехай $s = 1$. Тоді власним вектором матриці A, який відповідає числу $\lambda_2 = -3$, є вектор $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Оскільки $|\mathbf{x}_1| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, то нормованим власним вектором є вектор $\mathbf{x}_2' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

Отже, матриця

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

є ортогональною і приводить матрицю A квадратичної форми до діагонального вигляду. Оскільки

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

то

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Випишемо перетворення координат, яке зводить матрицю A квадратичної форми до діагонального вигляду:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

18.3 Знаковизначені квадратичні форми.

Означення 18.3. Квадратична форма від n змінних $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *додатно* (*від'ємно*) *визначеною* , якщо при довільних значеннях змінних x_1, x_2,...,x_n, одночасно не рівних нулю, $L(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$ ($L(x_1, x_2, ..., x_n) < 0$).

Приклад 18.3. Квадратична форма $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2$ є додатно визначеною, а квадратична форма $L(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$ є від'ємно визначеною. Квадратична форма $L(x_1, x_2) = x_1 x_2$ є знакозмінною, оскільки при різних значеннях змінних x_1 і x_2 може набувати як додатні так і від'ємні значення.

Наведемо дві теореми, які дозволяють досліджувати квадратичні форми на знакосталість.

Теорема 18.2. *Для того, щоб квадратична форма $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ була додатньо (від'ємно) визначеною, необхідно і достатньо, щоб всі власні числа матриці A цієї квадратичної форми були додатними (від'ємними).*

Доведення. Твердження теореми безпосередньо випливає з теореми 18.1 про зведення квадратичної форми до канонічного вигляду. □

Теорема 18.3 (**Критерій Сільвестра**). *Для того, щоб квадратична форма $L(x_1, x_2, ..., x_n)$ була додатньо (від'ємно) визначеною, необхідно і достатньо, щоб всі головні мінори матриці A цієї квадратичної форми були додатними (знаки мінорів чергувалися, починаючи зі знака "-"), тобто*

$$\Delta_1 = a_{11} > 0 (< 0), \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 (> 0),$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0 (< 0), ...$$

Приклад 18.4. Дослідити квадратичну форму на знаковизначеність: $L(x_1,x_2,x_3) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2$.

Випишемо матрицю квадратичної форми: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Обчислюємо

$$\Delta_1 = 4 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

Звідси за критерієм Сільвестра квадратична форма $L(x_1,x_2,x_3) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_3^2$ є додатно визначеною.

Література

[1] Александров П.С. *Лекции по аналитической геометрии*, - Спб,: Лань, 2008.

[2] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии*, - М.: Наука, 1988.

[3] Воеводин В.В. *Линейная алгебра*, - М.: Наука, 1980.

[4] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц*, - М.: Физматгиз, 2010.

[5] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, - К.: Вища школа, 1998.

[6] Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра: Учеб.: Для вузов*, 6-е изд., стер., - М.:Физматгиз, 2004.

[7] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*, 1 часть. - М.: Айрис Пресс, 2006.

[8] Постников М.М. *Аналитическая геометрия*, - М.: Наука, 1979.

[9] Фаддеев Д.К. *Лекции по алгебре*, - М.: Наука, 1984.

[10] Булдигін В.В., Жук В.А., Рущицька С.О., Ясінський В.А. *Збірник задач з аналітичної геометрії та векторної алгебри*, - К.: Вища школа, 1999.

[11] Клетеник Д.В. *Сборник задач по аналитической геометрии*, - М.: Физматгиз, 1998.

[12] Цубербиллер О.Н. *Задачи и упражнения по аналитической геометрии*, - Спб,: Лань, 2003.

[13] *Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа*, под редакцией Ефимова Н.В., Демидовича В.П. - М.: Наука, 1981.

[14] *Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Часть 1*, Под редакцией Рябушко А.П. - Мн.: Высшая школа, 1990.

[15] *Аналітична геометрія. Лінійна алгебра: Збірник завдань до типової розрахункової роботи для студентів 1 курсу технічних факультетів*/ Уклад: Коновалова Н.Р., Барановська Г.Г. та ін. - К.: ІВЦ "Політехніка 2001.