В таких случаях оценка максимального правдоподобия становится бессмысленной. Например, если $n_1 = n$, то $\hat{\pi} < 0$, если $p < \frac{1}{2}$, и $\hat{\pi} > 1$, если $\frac{1}{2} < p < 1$. Это означает, что при $n_1 = n$ оценка максимального правдоподобия (7) имеет смысл только при $p = 0$ или $p = 1$. В дальнейшем мы считаем, что p, n и n_1 таковы, что $\hat{\pi} \in (0, 1)$ (см. упражнение 3).

2.4. Моменты оценки максимального правдоподобия. Поскольку $n_1 = \sum_{i=1}^n X_i$, то математическое ожидание оценки $\hat{\pi}$ равно

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[\hat{\pi}] &= \frac{1}{2p-1}\left[p - 1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}[X_i]\right] \\ &= \frac{1}{2p-1}\left[p - 1 + \pi p + (1-\pi)(1-p)\right] \\ &= \pi. \end{aligned} \tag{8}$$

Свойство (8) оценки, а именно $\mathsf{E}[\hat{\pi}] = \pi$, считается желательным при статистическом анализе, а такие оценки называются *несмещенными*.

Если $p \neq \frac{1}{2}$, то в силу (3) дисперсия величины $\hat{\pi}$ равна

$$\begin{aligned} \mathsf{var}[\hat{\pi}] &= \frac{n\,\mathsf{var}[X_1]}{(2p-1)^2 n^2} \\ &= \frac{[\pi p + (1-\pi)(1-p)]\,[(1-\pi)p + \pi(1-p)]}{(2p-1)^2 n}. \end{aligned} \tag{9}$$

Из равенства (9) мы получаем $\mathsf{var}[\hat{\pi}] \to 0$, $n \to \infty$. Это свойство также является весьма желательным в статистическом анализе и называется *состоятельностью оценки.*

2.5. Доверительный интервал. *Доверительным интервалом* уровня доверия α для параметра π называется числовой интервал $I \stackrel{\text{def}}{=} [\pi_1, \pi_2)$, для которого

$$\mathsf{P}(\pi \in I) = \mathsf{P}(\pi_1 \leq \pi < \pi_2) = \alpha. \tag{10}$$

Поскольку π не является случайным (оно просто нам неизвестно), то из (10) мы заключаем, что хотя-бы одно из чисел π_1, π_2 является случайным: эти числа строятся по выборке $X_1, \ldots, X_n$. Впрочем, π_1 и π_2 выражаются довольно сложным образом через $X_1, \ldots, X_n$, поэтому доверительный интервал строят приблизительно, используя предельное распределение для n_1.

Если “*успехом*” назвать ответ “*да*”, то n_1 — это количество “*успехов*” в n испытаниях Бернулли с вероятностью “*успеха*”

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \pi p + (1-\pi)(1-p) \tag{11}$$

(см. (2)). В силу *центральной предельной теоремы* для любых действительных чисел $x < y$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(x \le \frac{n_1 - \mathsf{E}\,[n_1]}{\sqrt{\mathsf{var}\,[n_1]}} < y\right) = \Phi(y) - \Phi(x), \tag{12}$$

где Φ — *стандартная нормальная функция распределения*, определяемая как интеграл от *стандартной нормальной плотности*:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(t)\,dt, \qquad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}.$$

Поскольку n_1 — биномиальная случайная величина с параметрами n и λ, то

$$\mathsf{E}\,[n_1] = n\lambda, \qquad \mathsf{var}\,[n_1] = n\lambda(1-\lambda).$$

Пусть теперь $\alpha \in (0,1)$. Обозначим через z_α решение уравнения

$$1 - \Phi(z_\alpha) = \alpha.$$

Число z_α будем называть *α-критической точкой* стандартного нормального распределения. Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt = 1, \quad \text{то} \quad \int_{z_\alpha}^{\infty} \varphi(t)\,dt = \alpha,$$

то есть

> z_α — это такая точка на оси абсцисс, для которой площадь фигуры, лежащей справа от вертикальной прямой $x = z_\alpha$ и ограниченной графиком функции φ и осью Ox, равна α.

На языке теории вероятностей это же можно выразить таким образом:

> z_α — это такое число, для которого вероятность того, что стандартная нормальная случайная величина превосходит z_α, равна α.

С помощью критических точек стандартного нормального распределения можно построить доверительный интервал для вероятности λ, хотя уровень доверия для этого интервала лишь приблизительно равен заданному α.

Положим $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$. Из (12) вытекает, что

$$\mathsf{P}\left(-z_\gamma \le \frac{n_1 - n\lambda}{\sqrt{n\lambda(1-\lambda)}} < z_\gamma\right) \approx \Phi(z_\gamma) - \Phi(-z_\gamma). \tag{13}$$

Поскольку φ — четная функция, то

$$\Phi(-z_\gamma) = \int_{-\infty}^{-z_\gamma} \varphi(t)\,dt = \int_{z_\gamma}^{\infty} \varphi(t)\,dt = 1 - \Phi(z_\gamma).$$

Поэтому $\Phi(z_\gamma) - \Phi(-z_\gamma) = \gamma - (1-\gamma) = \alpha$. Следовательно правая часть (13) равна α.

Обозначим теперь частоту n_1/n через ν,

$$\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n_1}{n}. \tag{14}$$

Согласно *закону больших чисел Бернулли* $\nu \approx \lambda$ по вероятности и поэтому

$$\frac{n_1 - n\lambda}{\sqrt{n\lambda(1-\lambda)}} = \frac{\nu - \lambda}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)/n}} \approx \frac{\nu - \lambda}{\sqrt{\nu(1-\nu)/n}}.$$

Заменяя в (13) дробь $\frac{n_1 - n\lambda}{\sqrt{n\lambda(1-\lambda)}}$ полученной аппроксимацией $\frac{\nu-\lambda}{\sqrt{\nu(1-\nu)/n}}$, убеждаемся, что

$$\mathsf{P}\left(-z_\gamma \le \frac{\nu - \lambda}{\sqrt{\nu(1-\nu)/n}} < z_\gamma\right) \approx \alpha.$$

Таким образом, если выбрать

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \nu - z_\gamma\sqrt{\nu(1-\nu)/n}, \\ \lambda_2 &= \nu + z_\gamma\sqrt{\nu(1-\nu)/n}, \end{aligned} \tag{15}$$

то окажется, что $\mathsf{P}(\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2)) \approx \alpha$, то есть $[\lambda_1, \lambda_2)$ является доверительным интервалом для λ; уровень доверия для этого интервала приблизительно равен α.

Теперь уже несложно построить доверительный интервал $[\pi_1, \pi_2)$ для π. При этом вычисления зависят от величины p. Например, в случае $p > 1/2$

$$\pi_1 = \frac{\lambda_1 + p - 1}{2p - 1}, \qquad \pi_2 = \frac{\lambda_2 + p - 1}{2p - 1}. \tag{16}$$

Тут λ_1 и λ_2 определены в (15), частота ν — в (14), а z_γ — это γ-критическая точка стандартного нормального распределения, $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$.

Пример 1. Будем использовать те же данные, что и в опыте Хетманспергера, а именно $p = 0.7$, $n = 100$, $n_1 = 44$. Оценку вероятности π вычисляем согласно (7):

$$\hat{\pi} = \frac{p-1}{2p-1} + \frac{n_1}{(2p-1)n} = -\frac{0.3}{0.4} + \frac{44}{0.4 \cdot 100} = 0.35.$$

Построим доверительный интервал $[\lambda_1, \lambda_2)$ для π с уровнем доверия $\alpha = 0.95$. Прежде всего из таблиц стандартного нормального распределения найдем γ-критическую точку, $\gamma = \frac{1+0.95}{2}$:

$$z_\gamma = z_{0.975} \approx 1.95.$$

Используя формулы (15), найдем

$$\begin{aligned}
\lambda_1 = \nu - z_\gamma \sqrt{\frac{\nu(1-\nu)}{n}} &= 0.44 - z_\gamma \sqrt{\frac{0.44 \cdot 0.56}{100}} \\
&\approx 0.44 - 0.05 z_\gamma = 0.44 - 0.05 \cdot 1.95 = 0.35, \\
\lambda_2 = \nu + z_\gamma \sqrt{\frac{\nu(1-\nu)}{n}} &\approx 0.44 + 0.05 z_\gamma = 0.53.
\end{aligned}$$

Используя (16), теперь находим

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \frac{\lambda_1 + p - 1}{2p-1} = \frac{\lambda_1 - 0.3}{0.4} = 0.125, \\
\pi_2 &= \frac{\lambda_2 + p - 1}{2p-1} = \frac{\lambda_2 - 0.3}{0.4} = 0.575.
\end{aligned}$$

Таким образом, с вероятностью 0.95 интервал $[0.125, 0.575)$ накроет вероятность π. Заметим, что оценка максимального правдоподобия $\hat{\pi}$ является серединой этого интервала. Отметим также, что ширина доверительного интервала слишком велика. Точность можно улучшить, если с самого начала выбрать p побольше.