Лемма 1. *Пусть f — измеримая функция. Если выполнено условие* (3), *то*

$$\liminf_{t\to\infty} \inf_{a\le c\le b} \frac{f(ct)}{f(t)} \ge 1 \tag{7}$$

для всех $1 < a < b < \infty$.

Доказательство леммы 1. Если бы неравенство (7) не выполнялось для некоторой пары $1 < a < b < \infty$, то нашлись бы две последовательности $t_n \uparrow \infty$ и $a \le c_n \le b$, для которых

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{f(c_n t_n)}{f(t_n)} < 1.$$

Задача 9. *Почему такие последовательности $\{t_n\}$ и $\{c_n\}$ существуют?*

Последнее неравенство противоречит утверждению леммы 2 при $\ell = 1$. $\square$

Лемма 2. *Пусть f — измеримая функция. Предположим, что при некотором* $0 < \ell < \infty$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{f(ct)}{f(t)} \ge \ell \qquad \text{для всех } c > 1.$$

Тогда

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{f(c_n t_n)}{f(t_n)} \ge \ell^2$$

для любой последовательности $\{t_n\}$, такой что $t_n \to \infty$ и любой последовательности $\{c_n\}$, такой что $\liminf c_n > 1$ *и* $\limsup c_n < \infty$.

Более того, если

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{f(ct)}{f(t)} = \infty \qquad \text{для всех } c > 1, \tag{8}$$

то

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{f(c_n t_n)}{f(t_n)} = \infty \tag{9}$$

для всех последовательностей $\{t_n\}$ *и* $\{c_n\}$, *обладающих теми же свойствами в случае* $\ell < \infty$ (*ясно, что если выполнено* (8), *то оба равенства* (8) *и and* (9) *выполнены с* “lim” *вместо* “lim inf”).

Доказательство леммы 2. Сначала мы рассмотрим случай $0 < \ell < \infty$. Обозначим $h(t) = \ln f(e^t)$. Предположения леммы 2 можно переформулировать следующим образом: h — измеримая функция, для которой

$$\liminf_{x\to\infty} \big(h(x+u) - h(x)\big) \ge \ln \ell \qquad \text{для всех } u > 0.$$

Необходимо доказать, что

$$\liminf_{n\to\infty} \big(h(x_n + u_n) - h(x_n)\big) \ge 2\ln \ell$$

для любой последовательности $\{x_n\}$, такой что $x_n \to \infty$ и любой последовательности $\{u_n\}$, такой что $\liminf u_n > 0$ и $\limsup u_n < \infty$.

Зафиксируем последовательности $\{u_n\}$ и $\{x_n\}$ с отмеченными выше свойствами. Тогда найдутся два числа $\delta > 0$ и $\Delta < \infty$, для которых

$$\delta \le u_n \le \Delta \qquad \text{для всех достаточно больших } n.$$

Без потери общности предположим, что последнее свойство верно для всех $n \ge 1$. Пусть $0 < \varkappa < \delta$ и

$$\delta_1 = \delta - \varkappa, \quad \delta_2 = \Delta - \frac{\varkappa}{2}, \quad \varepsilon_1 = \varkappa, \quad \varepsilon_2 = \frac{\varkappa}{2}.$$

Ясно, что $\delta_1 < \delta_2$ и $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Зафиксируем $\gamma < \ln \ell$ и определим множества

$$A_n = \left\{ u \in [\delta_1, \delta_2] \colon \inf_{k \geq n} [h(x_k + u) - h(x_k)] \geq \gamma \right\},$$

$$B_n = \left\{ v \in [-\varepsilon_1, -\varepsilon_2] \colon \inf_{k \geq n} [h(x_k + u_k) - h(x_k + u_k + v)] \geq \gamma \right\}.$$

Очевидно, что $A_n \subseteq A_{n+1}$ и $B_n \subseteq B_{n+1}$. Более того,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = [\delta_1, \delta_2], \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = [-\varepsilon_1, -\varepsilon_2],$$

откуда

$$|A_n| \to \delta_2 - \delta_1, \qquad |B_n| \to \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

где $|\cdot|$ обозначает меру Лебега. Рассмотрим множества $B'_n = B_n + u_n$ и заметим, что $|B'_n| = |B_n|$. Более того,

$$A_n \subseteq [\delta_1, \delta_2], \qquad B'_n \subseteq [-\varepsilon_1 + \delta, -\varepsilon_2 + \Delta] = [\delta_1, \delta_2],$$

поэтому

$$A_n \cup B'_n \subseteq [\delta_1, \delta_2].$$

Так как

$$|A_n| + |B'_n| \to \delta_2 - \delta_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 > \delta_2 - \delta_1$$

то $A_n \cap B'_n \neq \varnothing$ для достаточно больших n. Для такого целого числа n выберем $u_0 = u_{0n} \in A_n \cap B'_n$. Используя определение множества B'_n, отсюда выводим, что существует такое $v_0 \in B_n$, что $v_0 = u_0 - u_n$ причем $u_0 \in A_n$. Значит

$$h(x_n + u_0) - h(x_n) \geq \gamma, \qquad h(x_n + u_n) - h(x_n + u_n + v_0) \geq \gamma.$$

Эти же неравенства можно записать иным (эквивалентным) способом:

$$h(x_n + u_0) - h(x_n) \geq \gamma, \qquad h(x_n + u_n) - h(x_n + u_0) \geq \gamma,$$

откуда

$$h(x_n + u_n) - h(x_n) \geq 2\gamma.$$

Так как n произвольно, то

$$\liminf_{n\to\infty} \bigl(h(x_n + u_n) - h(x_n)\bigr) \geq 2\gamma.$$

Поскольку $\gamma < \ln \ell$ произвольно, то лемма доказана для случая $0 < \ell < \infty$.

Импликация (8)$\Longrightarrow$(9) вытекает из уже рассмотренного случая. $\blacksquare$[1]$\blacksquare$ $\square$

[1] $\blacksquare$ how does it follow? $\blacksquare$