Лекция 15

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ

1. Функция распределения случайного вектора

Пусть $n > 1$ и $X_1, \ldots, X_n$ — случайные величины. Вектор-столбец $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}' = (X_1, \ldots, X_n)$, называется *случайным вектором.* Тут $\mathbf{X}'$ означает транспонирование вектора $\mathbf{X}$.

Функцией распределения вектора $\mathbf{X}$ называется

$$(1) \qquad F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \mathsf{P}(X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n), \qquad \mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, \ldots, x_n)' \in \mathbf{R}^n.$$

Функция $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ определена для любых аргументов $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ поскольку

$$(2) \qquad \{\omega\colon X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n\} = \bigcap_{k=1}^{n} \{\omega\colon X_k < x_k\}.$$

Задача 1. *Почему правая часть* (2) *принадлежит σ-алгебре $\mathscr{F}$?*

Вектор $\mathbf{X}$ называется *абсолютно непрерывным*, если

$$(3) \qquad F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathbf{X}}(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n, \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n,$$

для некоторой функции $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \geq 0$, которая в этом случае называется *плотностью вектора* $\mathbf{X}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{X}$ — абсолютно непрерывный вектор, а B — борелевское подмножество в $\mathbf{R}^n$. Тогда*

$$\mathsf{P}(\mathbf{X} \in B) = \int_B f_{\mathbf{X}}(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Заметим, что равенство (3) является частным случаем теоремы 1 при

$$B = (-\infty, x_1) \times \cdots \times (-\infty, x_n).$$

1.1. Независимые координаты. *Если случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы в совокупности и каждая является абсолютно непрерывной случайной величиной, то вектор $\mathbf{X}$ также является абсолютно непрерывным с плотностью $f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \ldots f_{X_n}(x_n)$.* Действительно, в этом случае функция распределения (1) преобразуется таким образом

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n) &= \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1}(t_1)\, dt_1 \cdot \ldots \cdot \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_n}(t_n)\, dt_n \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1}(t_1) \ldots f_{X_n}(t_n)\, dt_1 \ldots dt_n \end{aligned}$$

и поэтому равенство (3) выполнено для $f_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \ldots f_{X_n}(x_n)$.

[0]Printed from the file `[15-random_vectors.tex]` on 9.3.2016

2. Линейные преобразования

Пусть $\mathbf{A}$ — некоторая $n\times n$ матрица. Если $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, то существует обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$, причем $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$. Кроме того, система уравнений $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ имеет единственное решение при любом $\mathbf{y}$.

Рассмотрим линейное преобразование $\mathbf{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}\mathbf{X}$ вектора $\mathbf{X}$. Поскольку координаты вектора $\mathbf{Y}$ представляют собой конечные линейные комбинации координат вектора $\mathbf{X}$, то они являются случайными величинами. Следовательно, $\mathbf{Y}$ является случайным вектором.

Задача 2. *Пусть $\mathbf{A}$ — $n\times n$ матрица, а $\mathbf{X}$ — n-мерный вектор. Доказать, что координаты вектора $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ являются случайными величинами.*

Теорема 2. *Пусть $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Если вектор $\mathbf{X}$ является абсолютно непрерывным, то и вектор $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ является абсолютно непрерывным. При этом*

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{|\det(\mathbf{A})|} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}). \tag{4}$$

Задача 3. *Доказать теорему 2 для $n = 1$.*

Доказательство. Пусть B — некоторое подмножество в $\mathbf{R}^n$. Прообраз множества B при отображении $\mathbf{A}$ обозначим $\mathbf{A}^{-1}B \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \in B\}$. Если $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, то $\mathbf{x} \in \mathbf{A}^{-1}B \iff \mathbf{y} \in B$. Поэтому $\{\omega\colon \mathbf{Y} \in B\} = \big\{\omega\colon \mathbf{X} \in \mathbf{A}^{-1}B\big\}$. Обозначим $g(\mathbf{s}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{s}$, а якобиан преобразования g — через $\mathbf{J}$. Тогда $\mathbf{J} = \mathbf{A}^{-1}$. Действительно, $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, то есть $g(\mathbf{s}) = (g_1(\mathbf{s}), \ldots, g_n(\mathbf{s}))'$. Если $\mathbf{A}^{-1} = \big(a_{ij}\big)_{i,j=1}^n$ и $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)'$, то

$$g_i(\mathbf{s}) = \sum_{l=1}^n a_{il} s_l, \qquad 1 \le i \le n.$$

По определению якобиана $\mathbf{J} = \left(\frac{\partial g_i(\mathbf{s})}{\partial s_k}\right)_{i,k=1}^n$, то есть

$$\frac{\partial g_i(\mathbf{s})}{\partial s_k} = \sum_{k=1}^n a_{il} \frac{\partial s_l}{\partial s_k} = a_{ik}, \qquad 1 \le i, k \le n.$$

Это и означает, что якобиан $\mathbf{J}$ совпадает с обратной матрицей $\mathbf{A}^{-1}$. В частности, $\det(\mathbf{J}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$. Поэтому для любого измеримого множества $B \in \mathbf{R}^n$

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(\mathbf{Y} \in B) = \mathsf{P}(\mathbf{X} \in \mathbf{A}^{-1}B) &= \int_{\mathbf{A}^{-1}B} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \text{Замена:} \\ \mathbf{t}{=}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{s} \end{bmatrix} \\ &= \int_B f_{\mathbf{X}}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{s}) |\det(\mathbf{J})|\, d\mathbf{s} = \int_B \frac{1}{|\det(\mathbf{A})|} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{s})\, d\mathbf{s} \end{aligned} \tag{5}$$

по формуле замены переменных в кратном интеграле. Если в (5) выбрать $B = (-\infty, y_1) \times \cdots \times (-\infty, y_n)$, то получим формулу (3), откуда и вытекает (4). $\square$

Задача 4. *Доказать, что при замене $\mathbf{t} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{s}$ областью интегрирования становится B вместо $\mathbf{A}^{-1}B$.*

2.1. Линейные преобразования двух гауссовских случайных величин. *Если X_1 и X_2 независимые стандартные гауссовские случайные величины, то $Y_1 \overset{\text{def}}{=} X_1+X_2$ и $Y_2 \overset{\text{def}}{=} X_1-X_2$ также независимые $\mathcal{N}(0,2)$ случайные величины.* Действительно, $X_1 = \frac{Y_1+Y_2}{2}$ и $X_2 = \frac{Y_1-Y_2}{2}$, то есть $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbf{A}) = -2, \qquad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Имеем $f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = \varphi(x)$ и $f_{\mathbf{X}}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$ по критерию независимости абсолютно непрерывных векторов. В силу теоремы 2 при $n=2$

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) &= \frac{1}{2} f_{\mathbf{X}}\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)\varphi\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{8}(y_1+y_2)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{8}(y_1-y_2)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-y_1^2/2\sigma^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-y_2^2/2\sigma^2} = \varphi_{0,\sigma^2}(y_1)\varphi_{0,\sigma^2}(y_2) \end{aligned}$$

для $\sigma^2 = 2$. Так как $f_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{Y}}(y_1,y_2)\,dy_2 = \varphi_{0,\sigma^2}(y_1)$ и аналогично $f_{Y_2}(y_2) = \varphi_{0,\sigma^2}(y_2)$, то из последнего равенства вытекает, что $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2)$. Значит Y_1 и Y_2 независимы по критерию независимости абсолютно непрерывных случайных величин.

2.2. Формула свертки. *Пусть X_1 и X_2 независимые абсолютно непрерывные случайные величины. Тогда X_1+X_2 абсолютно непрерівная случайная величина, причем*

$$f_{X_1+X_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y)f_{X_2}(x-y)\,dy. \tag{6}$$

Положим $Y_1 = X_1+X_2$ и $Y_2 = X_1$. Тогда $X_1 = Y_2$, $X_2 = Y_1 - Y_2$, то есть $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det(\mathbf{A}) = -1, \qquad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

В силу (4)

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{|\det(\mathbf{A})|} f_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}\right) = f_{\mathbf{X}}(y_2, y_1-y_2). \tag{7}$$

Согласно критерию независимости абсолютно непрерывных случайных величин $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$ для любых $\mathbf{x} \overset{\text{def}}{=} (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$. Отсюда и из (7) вытекает (6).

Задача 5. *Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — независимые в совокупности абсолютно непрерывные случайные величины. Тогда их сумма $S = X_1+\cdots+X_n$ также абсолютно непрерывная случайная величина, причем*

$$f_S(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y_1)\ldots f_{X_{n-1}}(y_{n-1})f_{X_n}(x-y_1-\cdots-y_{n-1})\,dy_1\ldots dy_{n-1}.$$

3. Нелинейные преобразования

Пусть по-прежнему $\mathbf{X}$ — абсолютно непрерывный n-мерный случайный вектор. Носитель его плотности обозначим $\operatorname{supp} f_{\mathbf{X}} \stackrel{\text{def}}{=} S \ (\subseteq \mathbf{R}^n)$. Пусть, далее, $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — биективное измеримое отображение S в некоторое множество $T \subseteq \mathbf{R}^n$. Тогда $\mathbf{Y} \stackrel{\text{def}}{=} g(\mathbf{X})$ называется *преобразованием вектора* $\mathbf{X}$. Поскольку g — биекция между S и T, то любому $\mathbf{y} \in T$ отвечает единственный $\mathbf{x} \in S$, для которого $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$. Это соответствие между T и S, называемое обратным к g, обозначим $h : T \to S$. Отображение h также является биективным. Соответствия g и h можно записать более подробно таким образом:

$$\mathbf{Y} = g(\mathbf{X}) \Longleftrightarrow \begin{cases} Y_1 = g_1(X_1, \dots, X_n), \\ \qquad \vdots \\ Y_n = g_n(X_1, \dots, X_n), \end{cases} \qquad \mathbf{X} = h(\mathbf{Y}) \Longleftrightarrow \begin{cases} X_1 = h_1(Y_1, \dots, Y_n), \\ \qquad \vdots \\ X_n = h_n(Y_1, \dots, Y_n). \end{cases}$$

Теорема 3. *Предположим, что функции $h_1, \dots, h_n$ являются непрерывно дифференцируемыми в области T. Обозначим через $\mathbf{J}$ матрицу, составленную из производных $\frac{\partial h_i}{\partial y_j}$, $1 \le i, j \le n$. Тогда*

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \begin{cases} f_{\mathbf{X}}(h(\mathbf{y})) \cdot |\det(\mathbf{J})|, & \mathbf{y} \in T, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \tag{8}$$

Доказательство теоремы 3 полностью аналогично доказательству теоремы 2. Заметим, что $|\det(\mathbf{J})|$ — это якобиан для замены переменных в доказательстве (5).

4. Двумерное гауссовское распределение

Пусть $-1 < \rho < 1$ и

$$f(x, y) = f_\rho(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)}, \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2. \tag{9}$$

Если $\rho = 0$, то

$$f_0(x, y) = \varphi(x)\varphi(y), \tag{10}$$

где $\varphi = \varphi_{0,1}$ — стандартная гауссовская плотность Следовательно в этом случае f является плотностью некоторого случайного вектора.

Задача 6. *Доказать, что* (10) *является плотностью некоторого случайного вектора.*

Напомним, что φ_{a,σ^2} — это гауссовская плотность с параметрами $a \in \mathbf{R}$ и $\sigma^2 > 0$:

$$\varphi_{a,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Покажем, что функция (9) является плотностью не только для $\rho = 0$, но и для любого $-1 < \rho < 1$. Так как $f_\rho(x, y) \ge 0$, то достаточно доказать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_\rho(x, y)\, dx\, dy = 1.$$

Поскольку $x^2 - 2\rho xy + y^2 = (x - \rho y)^2 + (1 - \rho^2)y^2$, то

$$(11) \quad f_\rho(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x-\rho y)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} = \varphi_{\rho y, 1-\rho^2}(x)\varphi_{0,1}(y).$$

Так как $\varphi_{\rho y, 1-\rho^2}(x)$ — плотность при любом y и любом $-1 < \rho < 1$, то $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\rho y, 1-\rho^2}(x)\, dx = 1$ для любого y и поэтому

$$(12) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f_\rho(x, y)\, dx = \varphi_{0,1}(y), \quad \text{откуда} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_\rho(x, y)\, dx\, dy = 1.$$

Определение 1. Случайный вектор (X_1, X_2) с плотностью (9) называется *двумерным стандартным гауссовским вектором.* Функция (9) называется *стандартной двумерной гауссовской плотностью.*

4.1. Маргинальные распределения гауссовского вектора. *Маргинальные распределения гауссовского вектора с плотностью* (9) *являются гауссовскими* $\mathcal{N}(0, 1)$ *распределениями.*

Чтобы найти маргинальное распределение X_2, необходимо проинтегрировать плотность (9) по x. Это уже сделано в (12). Следовательно плотностью X_2 является $\varphi_{0,1}$. Так как функция (9) симметрична относительно x и y, такой же результат справедлив и для X_1.

Задача 7. *Доказать, что маргинальные распределения гауссовского вектора с плотностью* (9) *являются гауссовскими* $\mathcal{N}(0, 1)$ *распределениями.*

4.2. Линейная комбинация координат имеет гауссовское распределение. *Пусть* $\mathbf{X}$ *— стандартный двумерный гауссовский вектор,* $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, $|c_1| + |c_2| \neq 0$. *Тогда случайная величина* $c_1X_1 + c_2X_2$ *имеет гауссовское распределение с параметрами* 0 *и* $c_1^2 + 2c_1c_2\rho + c_2^2$.

Для доказательства необходимо воспользоваться методом доказательства теоремы из §2.2. В случае $c_1 = c_2 = 1$ можно воспользоваться формулой (7).

Задача 8. *Пусть двумерный стандартный гауссовский вектор. Пусть* $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, $|c_1| + |c_2| \neq 0$. *Доказать, что* $c_1X_1 + c_2X_2$ *имеет гауссовское распределение с параметрами* 0 *и* $2(1+\rho)$, *то есть* $c_1X_1 + c_2X_2 \in \mathcal{N}(0, 2(1+\rho))$.

4.3. Смысл параметра ρ. Найдем $\mathsf{E}[X_1X_2]$:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}[X_1X_2] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_\rho(x, y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\varphi_{\rho y, 1-\rho^2}(x)\varphi_{0,1}(y)\, dx\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y\varphi_{0,1}(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_{\rho y, 1-\rho^2}(x)\, dx\right] dy = \rho \int_{-\infty}^{\infty} y^2\varphi_{0,1}(y) = \rho,\end{aligned}$$

так как интеграл в квадратных скобках равен ρy, а последний интеграл равен 1. Таким образом $\rho = \mathsf{E}[X_1X_2]$, то есть ρ — это ковариация $\mathsf{cov}[X_1, X_2]$ (так как $\mathsf{E}[X_1] = \mathsf{E}[X_2] = 0$).

4.4. Критерий факторизации гауссовской плотности. *Если* $f_\rho(x, y) = \varphi_{a_1,\sigma_1^2}(x)\varphi_{a_2,\sigma_2^2}(y)$ *для любых* $x, y \in \mathbf{R}$ *и для каких-либо* a_1, a_2 *и* $\sigma_1^2 \neq 0$, $\sigma_2^2 \neq 0$, *то* $\rho = 0$ *и обязательно* $a_1 = a_2 = 0$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$.

Доказательство. Из §4.3 и условия факторизации плотности f_ρ вытекает , что $\rho = a_1 a_2$. Из §4.1 вытекает, что $\mathsf{E}\left[X_1^2\right] = 1$. С другой стороны,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\rho(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi_{a_1,\sigma_1^2}(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{a_2,\sigma_2^2}(y)\,dy = (\sigma_1^2 + a_1^2)\cdot 1,$$

то есть $\sigma_1^2 + a_1^2 = 1$. Аналогично получаем $\sigma_2^2 + a_2^2 = 1$. Таким же образом вычисляем $\mathsf{E}\left[X_1^2 X_2\right]$:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 y f_\rho(x,y)\,dx\,dy &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 y \varphi_{\rho y,1-\rho^2}(x)\varphi_{0,1}(y)\,dx\,dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y\varphi_{0,1}(y)\left[\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi_{\rho y,1-\rho^2}(x)\,dx\right]dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(1-\rho^2+\rho^2 y^2)y\varphi_{0,1}(y)\,dy = 0,\end{aligned}$$

так как подинтегральная функция нечетна. С другой стороны,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 y f_\rho(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi_{a_1,\sigma_1^2}(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y\varphi_{a_2,\sigma_2^2}(y)\,dy = (\sigma_1^2 + a_1^2)a_2,$$

откуда $a_2 = 0$. Аналогично $a_1 = 0$. Следовательно $\rho = 0$ и $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$. □

Замечание 1. Учитывая (10) и теорему 4.4, заключаем, что если $(X_1, X_2)'$ — это стандартный двумерный гауссовский вектор, то случайные величины X_1 и X_2 независимы тогда и только тогда, когда $\rho = 0$.

Задача 9. *Доказать, что если $(X_1, X_2)'$ — это двумерный стандартный гауссовский вектор, то случайные величины X_1 и X_2 независимы тогда и только тогда, когда $\rho = 0$.*

Теорема 4. *Пусть f_ρ — плотность двумерного стандартного гауссовского вектора $\mathbf{X}$, заданная равенством (9). Тогда $\mathsf{cov}\left[X_1, X_2\right] = \rho$ и любая линейная комбинация $c_1X_1 + c_2X_2$ координат вектора, $|c_1| + c_2| \neq 0$, является гауссовской $\mathcal{N}\left(0, c_1^2 + 2c_1c_2\rho + c_2^2\right)$ случайной величиной.*

Поэтому $X_1 \in \mathcal{N}(0,1)$ и $X_2 \in \mathcal{N}(0,1)$. В частности,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\left[X_1\right] &= \mathsf{E}\left[X_2\right] = 0,\\ \mathsf{var}\left[X_1\right] &= \mathsf{var}\left[X_2\right] = 1.\end{aligned}$$

Наконец, координаты X_1 и X_2 вектора $\mathbf{X}$ являются независимыми случайными величинами тогда и только тогда, когда $\rho = 0$.

[†]Всего в тексте было 0 вопросов