

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ТА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ
«На правах рукопису»
УДК 519.21

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

(підпис) (ініціали, прізвище)

“ ” _____ 20__ р.

Магістерська дисертація

зі спеціальності 8.04020101 «Математика»
(код і назва спеціальності)

на тему: «Ефективність оцінки параметрів регресії в моделях з дискретним часом»

Виконав: студент VI курсу, групи ОМ-31м
(шифр групи)

Фіжук Ростислав Вікторович
(прізвище, ім'я, по батькові)

(підпис)

Науковий керівник д. ф.-м. н., проф. Іванов О. В.
(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

(підпис)

Консультант з охорони праці та безпеки в надзвичайних ситуаціях
(назва розділу)

к. т.-н., доц. Мітюк Л. О.
(вчені ступінь та звання, прізвище, ініціали)

(підпис)

Рецензент Член-кореспондент НАН України, зав. відділом математичних методів дослідження операцій Інституту кібернетики ім. В.М Глушкова НАН України, д. ф.-м. н., проф. Кнопов П. С.
(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

(підпис)

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент _____
(підпис)

Київ - 2015 року

**Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»**

Факультет фізико-математичний

(повна назва)

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

(повна назва)

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність 8.04020101 «Математика»

(код і назва)

**ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри**

(підпис)

(ініціали, прізвище)

«__» _____ 20__ р.

**ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту**

Фіжук Ростислав Вікторович

(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема дисертації «Ефективність оцінки параметрів регресії в моделях з дискретним часом»

науковий керівник дисертації Іванов Олександр Володимирович,

д. ф.-м. н., проф.,

(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від «__» _____ 20__ р. № _____

2. Термін подання студентом дисертації _____

3. Об'єкт дослідження модель регресії з дискретним часом і локально неперервним сильно залежним шумом

4. Предмет дослідження асимптотична нормальність М-оцінок параметрів моделі та швидкість збіжності коваріаційних матриць граничних розподілів

5. Перелік завдань, які потрібно розробити

а) основна частина:

1. Сформулювати умови регулярності і довести теорему про асимптотичну нормальність М-оцінок.

2. Довести допоміжні теореми про асимптотичну єдиність _____
і консистентність М-оцінок. _____
3. Чисельно оціни швидкість збіжності рядів Парсеваля для _____
різних функцій втрат. _____
4. Оцінити похибки обчислення коваріаційних матриць _____
граничних розподілів _____

б) охорона праці _____

1. Оцінка напруженості праці _____
2. Аналіз психологічних умов праці _____
3. Нормування праці. Вибір оптимального режиму праці та _____
відпочинку _____
4. Санітарія та гігієна робочого місця _____
5. Охорона праці при використанні технічних засобів забезпе-
чення діяльності при виконанні магістерської дисертації _____

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу: додаток із графіками _____
широко вживаних функцій втрат та їх похідних _____

7. Орієнтовний перелік публікацій:

1. Фіжук Р.В. Про обчислення граничних коваріацій М-оцінок
параметрів регресії: шістнадцята міжнародна наукова конференція ім.
акад. М. Кравчука, 14-15 травня 2015 р., Київ: Матеріали конф. С.3.
Теорія ймовірностей та математична статистика – К.: НТУУ “КПІ”
2015. – с. 83. _____
2. Фіжук Р.В. Оцінювання та обчислення кореляційних матриць
граничних нормальних розподілів М-оцінок: четверта всеукраїнська
наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, 23-25
квітня 2015 р., Київ: Матеріали конф. С.1. Математичного аналізу,
теорії ймовірностей, диференціальних рівнянь – К.: НТУУ “КПІ” 2015.
– с. 32. _____

8. Консультанти розділів дисертації

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
4	Мітюк Л.О., к.т.н., доц		

9. Дата видачі завдання _____

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Отримання завдання на магістерську дисертацію. Узгодження попереднього змісту магістерської дисертації. Робота з літературою		
2	Доведення теореми про асимптотичну нормальність М-оцінок параметрів нелінійної моделі регресії з дискретним часом		
3	Доведення допоміжних теорем про асимптотичну єдиність і консистентність М-оцінок		
4	Отримання чисельних оцінок швидкості збіжності рядів Парсеваля для різних функцій втрат.		
5	Отримання оцінок похибок обчислення коваріаційних матриць граничних розподілів М-оцінок для різних функцій втрат.		
6	Оформлення роботи		

Студент

(підпис)_____
(ініціали, прізвище)

Науковий керівник дисертації

(підпис)_____
(ініціали, прізвище)

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: __ сторінки, __слайдів для проектора, __ першоджерел.

Вивчаються асимптотичні властивості М-оцінок параметрів регресійних моделей з дискретним часом та локально перетвореним гаусівським стаціонарним сильно залежним випадковим шумом.

Мета роботи полягає в отриманні умов до функції втрат та елементів моделі регресії, за яких М-оцінки є асимптотично нормальними, та оцінок швидкості *збіжності* їх граничних коваріаційних матриць.

Завданням роботи є доведення теореми про асимптотичну нормальність М-оцінок та отримання числових значень похибок обчислення граничних коваріаційних матриць. Об'єктом дослідження є нелінійна модель регресії та обчислення коваріаційних матриць їх граничних нормальних розподілів. Предметом дослідження є асимптотичні властивості М-оцінок параметрів регресії та обчислення коваріаційних матриць їх граничних нормальних розподілів

Для отримання вказаних результатів використано сучасні методи статистики випадкових процесів.

Запропоновано сукупність умов, за яких граничні розподіли М-оцінок в моделях регресії даного типу є нормальними, що визначає актуальність, важливість і новизну цього дослідження для статистики випадкових процесів. Робота має теоретичний характер, але її обчислювальний розділ надає можливість застосовувати ці результати у розв'язанні прикладних задач статистики випадкових процесів.

Головним результатом роботи є формулювання умов, за яких граничний розподіл М-оцінок є нормальним, а також отримання оцінок швидкості збіжності коваріаційних матриць граничних розподілів.

Природнім напрямком продовження дослідження є розвиток методів

статистичного оцінювання коваріаційних матриць складної структури розглянутих М-оцінок.

Результати роботи опубліковано у збірниках тез IV міжуніверситетської конференції з математики та фізики для студентів та молодих вчених (_____ 2015 р., м. Київ) та XVI міжнародної наукової конференції ім. Акад. М.Кравчука (_____ 2015 р., м. Київ).

Ключові слова: нелінійна модель регресії, сильно залежний випадковий шум, функція втрат, М-оцінка, асимптотична нормальність, обчислення коваріаційних матриць.

РЕФЕРАТ

Магистерская диссертация: __ страницы, __ слайдов для проектора, __ первоисточников.

Изучаются асимптотические свойства М-оценок параметров регрессионных моделей с дискретным временем и локально преобразованным гауссовским стационарным сильно зависимым случайным шумом.

Цель работы заключается в получении условий к функциям потерь и элементам модели регрессии, при которых М-оценки являются асимптотически нормальными, и оценок скорости сходимости их предельных ковариационных матриц.

Заданием работы является доказательство теоремы об асимптотической нормальности М-оценок и получения числовых значений погрешностей вычисления предельных ковариационных матриц. Объектом исследования есть нелинейная модель регрессии с дискретным временем и сильно зависимым случайным шумом сложной структуры. Предметом исследования являются асимптотические свойства М-оценок параметров регрессии и вычисление ковариационных матриц их предельных нормальных распределений.

Для получения указанных результатов использованы современные методы статистики случайных процессов.

Предложена совокупность условий, при которых предельные распределения М-оценок в моделях регрессии данного типа являются нормальными, что определяет актуальность, важности и новизну этого исследования для статистики случайных процессов. Работа имеет теоретический характер, однако её вычислительный раздел дает возможность применить эти результаты в решении прикладных задач статистики случайных процессов.

Главным результатом работы есть формулирование условий при которых предельное распределение М-оценок является нормальным, а также получение оценки скорости сходимости ковариационных матриц предельных распределений.

Естественным направлением продолжения исследования является развитие методов статистического оценивания ковариационных матриц сложной структуры рассмотренных М-оценок.

Результаты работы опубликованы в сборниках тезисов IV Межуниверситетской научной конференции по математике и физике для студентов и молодых ученых (_____ г. Киев) и XVI международной конференции им. Акад. Кравчука (г. Киев).

Ключевые слова: Нелинейная модель регрессии, сильно зависимый случайный шум, функция потерь, М-оценка, асимптотическая нормальность, вычисление ковариационных матриц.

SUMMARY

Master's degree thesis contains _ pages, _ slides for projector, _ primary sources.

Asymptotic properties of M-estimators of regression models parameters with discrete time and locally transformed Gaussian stationary strongly dependent random noise are studied.

The goal of the work is obtaining of the conditions on loss functions and regression model elements to ensure M-estimators asymptotic normality and obtain rate of convergence bounds of their limiting covariance matrices.

The task of the research is the proof of the theorem on M-estimators asymptotic normality and receiving of numerical error values of limiting covariance matrices calculation.

Nonlinear regression model with discrete time and strongly dependent random noise of complex structure is the object of the study. Asymptotic properties of regression parameters M-estimators and calculation of covariance matrices of their limiting normal distributions are the subject of the research.

To obtain the results specified contemporary methods of statistics of random processes have been used.

A set of conditions is proposed under which M-estimators limiting distributions in the regression models of the given type are normal. This fact determines the urgency, importance and novelty of the study for statistics of random processes. The work is of a theoretical nature, however its computational part gives an opportunity to apply these results in the solutions of real life problems of statistics of random processes.

Formulations of the conditions under which the limiting distributions of M-estimators is normal and obtaining also the bounds of the rate of convergence of limiting distributions covariance matrices are the main results of the thesis.

A natural direction for further study is the development of statistical

estimation methods of the considered M-estimators covariance matrices of complicated structure.

The results of the research are published in the proceedings of the IV-th inter-university scientific conference in mathematics and physics for students and young scientists (April, 2015, Kyiv) and the XVI-th International academic M. Kravchuk conference (May, 2015, Kyiv).

Keywords: nonlinear regression model, strongly dependent random noise, loss function, M-estimator, asymptotic normality, covariance matrices calculation.

ЗМІСТ

ВСТУП	13
1 КОНСИСТЕНТНІСТЬ І АСИМПТОТИЧНА ЄДИНІСТЬ	
М-ОЦІНОК.....	15
1.1 Постановка задачі та умови.....	15
1.2 Консистентність М-оцінок.....	16
1.3 Асимптотична єдиність М-оцінок.....	22
Висновки	28
2 АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ М-ОЦІНОК.....	29
2.1 Умови та формулювання основного результату.....	29
2.2 Допоміжні твердження.....	33
2.3 Доведення теореми про асимптотичну нормальність.....	40
Висновки	43
3 ОЦІНЮВАННЯ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ КОВАРІАЦІЙНИХ МАТРИЦЬ ГРАНИЧНИХ РОЗПОДІЛІВ.....	44
3.1 Оцінка хвостів рядів Парсеваля.....	44
3.2 Обчислення коваріаційних матриць граничних розподілів М-оцінок	57
Висновки.....	62
4 ОХОРОНА ПРАЦІ ТА БЕЗПЕКА У НАДЗВИЧАЙНИХ СИТУАЦІЯХ	63
Вступ	63
4.1 Оцінка напруженості праці.....	63
4.2 Аналіз психологічних умов праці	65
4.3 Нормування праці. Вибір оптимального режиму праці та відпочинку.....	66
4.4 Санітарія та гігієна робочого місця.....	68
4.5 Охорона праці при використанні технічних засобів забезпечення діяльності при виконанні магістерської дисертації.....	69
Висновки	71

ВИСНОВКИ.....	72
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	73
ДОДАТОК. ФУНКЦІЇ ВТРАТ ТА ЇХ ПОХІДНІ	75

ВСТУП

Починаючи з піонерських праць П.Х'юбера [1], в математичній статистиці та статистиці випадкових процесів вивчаються М-оцінки параметрів моделей регресії, лінійних та нелінійних, які, в деякому розумінні, узагальнюють класичні оцінки максимальної вірогідності. Сенса розгляду таких оцінок полягає в тому, що М-оцінки є стійкими (робастними) відносно викидів присутніх у вибірці. Цей ефект досягається за допомогою певного вибору функцій втрат, за якими будуються М-оцінки.

В даній роботі вивчаються асимптотичні властивості М-оцінок параметрів нелінійної моделі регресії з випадковим шумом, який є локально перетвореною гаусівською стаціонарною сильно залежною випадковою послідовністю. Головний акцент робиться на доведенні їх асимптотичної нормальності. Крім цього, вивчаються такі властивості М-оцінок, як консистентність та асимптотична єдиність за ймовірністю, оскільки вони потрібні для застосування теореми Брауера про нерухому точку при доведенні асимптотичної нормальності.

Вказані результати є перенесеними на модель із дискретним часом аналогічних результатів з неперервним часом А.А.Капітоненко [2]. Це перенесення технічно досить складне, тому що математичний апарат мажорації сум, як добре відомо, часто суттєво відрізняється від методів оцінювання інтегралів.

Консистентність, асимптотичну єдиність та нормальність оцінок найменших квадратів, які є частинним випадком М-оцінок з функцією втрат $\rho(x) = x^2$ було доведено у роботах [3-5].

Результатами роботи є встановлення умов до функції регресії, випадкового шуму та функції втрат, за яких граничний розподіл М-оцінок є нормальним, а також отримання теорем про консистентність і асимптотичну єдиність М-оцінок. Теорему про асимптотичну нормальність доведено з

використанням центральної граничної теореми для зваженого інтегралу від перетвореного випадкового шуму [6].

Велику увагу в роботі приділено також оцінюванню точності апроксимації граничних коваріаційних матриць M -оцінок, що записуються у вигляді деяких рядів, їх частинними сумами. Тут отримано числові результати, які показують, що коваріаційні ряди збігаються досить швидко, і для прикладної точності підрахунків достатньо утримувати не дуже велику кількість початкових членів ряду.

Результати останніх досліджень опубліковано у збірниках тез IV-ї міжуніверситетської наукової конференції з математики та фізики для студентів та молодих вчених [7] і XVI-й Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука [8].

1 КОНСИСТЕНТНІСТЬ І АСИМПТОТИЧНА ЄДИНІСТЬ М-ОЦІНОК

1.1 Постановка задачі та умови

Розглянемо модель регресії

$$X_j = g(j, \theta) + \varepsilon_j, j = \overline{1, N}, \quad (1.1.1)$$

де $g(\cdot, \cdot) : \mathbb{N} \times \Theta_\gamma \rightarrow R^1$ — неперервна функція, $\Theta_\gamma = \bigcup_{||a|| \leq 1} (\Theta + \gamma a)$, $\gamma > 0$

— деяке число, $\Theta \subset \mathbb{R}^q$ — обмежена опукла відкрита множина.

Відносно шуму ε_j припустимо, що

A1. ε_j , $j \in \mathbb{Z}$, є локальним функціоналом від гаусівської стаціонарної послідовності ξ_j , тобто $\varepsilon_j = G(\xi_j)$, $G(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, — борелева функція, причому $E\varepsilon_0 = 0$, $E\varepsilon_0^2 < \infty$.

A2. ξ_j , $j \in \mathbb{Z}$, — стаціонарна гаусівська послідовність з нульовим середнім, та коваріаційною функцією вигляду

$$B(n) = E\xi_0\xi_n = \sum_{k=0}^r A_k B_{a_k, \kappa_k}(n), \quad r \geq 0, \quad (1.1.2)$$

де $B_{a_k, \kappa_k}(n) = \frac{\cos(\kappa_k n)}{(1 + n^2)^{a_k/2}}$, $0 \leq \kappa_0 < \kappa_1 < \dots < \kappa_r < \pi$, $0 < a_k < 1$,

$k = \overline{0, r}$, $\sum_{k=0}^r A_k = 1$, $A_k \geq 0$.

Коваріаційна функція $B(n)$ має наступне спектральне представлення

$$B(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} f(\lambda) d\lambda, \quad n \in \mathbb{Z},$$

і спектральна щільність (с.щ.) f має вигляд

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^r A_k f_{a_k, \kappa_k}(\lambda), \quad \lambda \in [-\pi; \pi).$$

Зазначимо деякі властивості функції f_{a_k, κ_k} . Як відомо, у неперервному випадку, функції $B_{a_k, \kappa_k}(t) = \frac{\cos(\kappa_k t)}{(1 + t^2)^{a_k/2}}$, $t \in \mathbb{R}^1$, буде відповідати с.щ. вигляду

$$\tilde{f}_{a_k, \kappa_k}(\lambda) = \frac{C_1(a_k)}{2} \left[K_{\frac{a_k-1}{2}}(|\lambda + \kappa_k|) |\lambda + \kappa_k|^{\frac{a_k-1}{2}} + \right. \\ \left. K_{\frac{a_k-1}{2}}(|\lambda - \kappa_k|) |\lambda - \kappa_k|^{\frac{a_k-1}{2}} \right], \quad k = \overline{0, r},$$

$$C_1(a) = \frac{2^{\frac{1-a}{2}}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{a}{2})}$$

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty s^{\nu-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(s + \frac{1}{s} \right) z \right\} ds, \quad z \geq 0, \quad \nu \in \mathbb{R}^1,$$

є модифікованою функцією Бесселя 3-го роду порядку ν , або функцією Макдональда.

Зауважимо, що $K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$, і для $z \downarrow 0$.

$$K_\nu(z) \sim \Gamma(\nu) 2^{\nu-1} z^{-\nu}, \quad \nu > 0.$$

Таким чином, коли $\lambda \rightarrow \pm \varkappa_k$, $k = \overline{0, r}$,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{a_k, \varkappa_k}(\lambda) = \frac{C_2(a_k)}{2} & \left[|\lambda + \varkappa_k|^{(a_k-1)} (1 - h_k(|\lambda + \varkappa_k|)) + \right. \\ & \left. |\lambda - \varkappa_k|^{a_k-1} (1 - h_k(|\lambda - \varkappa_k|)) \right], \end{aligned}$$

$$\text{де, } C_2(a) = \frac{1}{2\Gamma(a) \cos(\frac{a\pi}{2})},$$

$$h_k(|\lambda|) = \frac{\Gamma(\frac{a_k+1}{2})}{\Gamma(\frac{3-a_k}{2})} \cdot \left| \frac{\lambda}{2} \right|^{1-a_k} + \frac{\Gamma(\frac{a_k+1}{2})}{4\Gamma(\frac{3+a_k}{2})} \cdot \left| \frac{\lambda}{2} \right|^2 - o(|\lambda|^2), \quad \lambda \rightarrow 0, \quad k = \overline{0, r}.$$

Зауважимо, що с.щ. для неперервного та дискретного випадків зв'язані співвідношенням

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} f_{a_k, \varkappa_k}(\lambda) d\lambda = B(n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda n} \tilde{f}_{a_k, \varkappa_k}(\lambda) d\lambda, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1.1.3)$$

Праву частину останньої рівності можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda n} \tilde{f}_{a_k, \varkappa_k}(\lambda) d\lambda &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \tilde{f}_{a_k, \varkappa_k}(\lambda + 2\pi k) d\lambda = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{a_k, \varkappa_k}(\lambda + 2\pi k) \right) d\lambda. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

З (1.1.3) та (1.1.4) випливає, що [9]

$$f(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda + 2\pi k),$$

де $\tilde{f}(\lambda) = \sum_{k=0}^r A_k \tilde{f}_{a_k, \varkappa_k}(\lambda)$ — с.щ. неперервного аналога функції $B(n)$.

1.2 Консистентність М-оцінок

Введемо деякі припущення.

С1. Функція $\rho(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, є невід'ємною, $\rho(0) = 0$, та задовольняє умові Ліпшиця: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ та деякої константи C_ρ :

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leq C_\rho |x - y|. \quad (1.2.1)$$

Позначимо $U^c = \Theta^c - \theta$, $S_N^*(u) = S_N(\theta + u)$. Припустимо також, що
C2. Для будь-якого $r > 0$ існує таке $\Delta(r) > 0$, що

$$\inf_{u \in U^c(\theta) \setminus v(r)} N^{-1} E S_N^*(u) \geq E \rho(\varepsilon(0)) + \Delta(r) \quad (1.2.2)$$

B1. (i) Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що

$$\sup_{u_1, u_2 \in U^c(\theta): \|u_1 - u_2\| \leq \delta} N^{-1} \sum_{j=1}^n |g(j, \theta + u_1) - g(j, \theta + u_2)| < \varepsilon. \quad (1.2.3)$$

(ii) Для будь-якого $r > 0$ існує таке $\varkappa = \varkappa(r) > 0$ таке, що

$$\sup_{u \in v^c(r) \cap U^c(\theta)} N^{-1} \sum_{j=1}^N (g(j, \theta + u) - g(j, \theta))^2 \leq \varkappa(r). \quad (1.2.4)$$

Теорема 1. Якщо виконано умови **A1**, **A2**, **B1**, **C1** та **C2**, то для будь-якого $r > 0$

$$P \left\{ \left\| \hat{\theta}_N - \theta \right\| \geq r \right\} = O(N^{-a})$$

при $N \rightarrow \infty$, де

$$a = \min_{k=0, r} a_k. \quad (1.2.5)$$

Доведення. Позначимо

$$\delta_N(\theta, u) = S_N^*(u) - E S_N^*(u),$$

$$\delta_N(\theta, 0) = S_N^*(0) - E S_N^*(0) = \sum_{j=1}^N \rho(\varepsilon_j) - N E \rho(\varepsilon_0).$$

За означенням М-оцінки маємо

$$S_N^*(\hat{\theta}_T - \theta) = \inf_{u \in U^c(\theta)} S_N^*(u), \quad S_N^*(u) = \sum_{j=1}^N \rho(X_j - g(j, \theta + u)),$$

$$S_N^*(\hat{\theta}_T - \theta) \leq S_N^*(0) = \delta_N(\theta, 0) + N E \rho(\varepsilon_0) \text{ м.н.}$$

Нехай $r_0 > 0$ таке число, що $\sup_{\tau \in \Theta^c} \|\tau - \theta\| \leq r_0$. За умови **C2** для будь-яких $r \in (0, r_0)$ і $\gamma' \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} & P \left(r \leq \left\| \hat{\theta}_N - \theta \right\| \leq r_0 \right) \leq \\ & \leq P \left(\left\{ r \leq \left\| \hat{\theta}_N - \theta \right\| \leq r_0 \right\} \cap \left\{ S_N^*(\hat{\theta}_T - \theta) \leq \delta_N(\theta, 0) + N E \rho(\varepsilon_0) \right\} \right) \leq \\ & \leq P \left(\inf_{u \in (v^c(r_0) \setminus v(r)) \cap U^c(\theta)} N^{-1} S_N^*(u) \leq N^{-1} \delta_N(\theta, 0) + E \rho(\varepsilon_0) \right) \leq \\ & \leq P \left(\inf_{u \in (v^c(r_0) \setminus v(r)) \cap U^c(\theta)} N^{-1} S_N^*(u) \right) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq N^{-1}\delta_N(\theta, 0) + \inf_{u \in (v^c(r_0) \setminus v(r)) \cap U^c(\theta)} N^{-1}ES_N^*(u) - \Delta(r) \leq \\
&\leq P(N^{-1}\delta_N(\theta, 0) \geq (1 - \gamma')\Delta(r)) + \\
&\quad + P\left(\inf_{u \in (v^c(r_0) \setminus v(r)) \cap U^c(\theta)} N^{-1}\delta_N(\theta, u) \leq -\gamma'\Delta(r)\right) \leq \\
&\leq P\left(\sup_{u \in v^2(r_0) \cap U^c(\theta)} N^{-1}|\delta_N(\theta, u)| \geq \gamma'\Delta(r)\right) + \\
&\quad + P(N^{-1}\delta_N(\theta, 0) \geq (1 - \gamma')\Delta(r)) = P_1 + P_2. \quad .
\end{aligned}$$

Оцінимо ймовірність P_1 . Нехай $F^{(1)}, \dots, F^{(p)} \subset v^c(r_0)$ — замкнені множини, діаметри яких не перевищують значення δ з умови **B1 (i)** для $r = r_0$ та $\varepsilon = \nu\Delta(r)\gamma'/2C_p$, $\nu \in (0, 1)$ — деяке число, причому $\bigcup_{i=1}^p F^{(i)} = v^c(r_0)$.

Зафіксуємо точки $u_i \in F^{(i)} \cap U^c(\theta)$, $i = \overline{1, p}$. Тоді

$$\begin{aligned}
P_1 &= P\left(\sup_{u \in \bigcup_{i=1}^p (F^{(i)} \cap U^c(\theta))} N^{-1}|\delta_N(\theta, u)| \geq \gamma'\Delta(r)\right) = \\
&= P\left(\bigcup_{i=1}^p \left(\sup_{u \in F^{(i)} \cap U^c(\theta)} N^{-1}|\delta_N(\theta, u)| \geq \gamma'\Delta(r)\right)\right) \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^p P\left(\sup_{u', u'' \in F^{(i)} \cap U^c(\theta)} N^{-1}|\delta_N(\theta, u') - \delta_N(\theta, u'')| + \right. \\
&\quad \left. + N^{-1}|\delta_N(\theta, u_i)| \geq \gamma'\Delta(r)\right).
\end{aligned}$$

Використовуючи умову **C1**, маємо

$$\begin{aligned}
|\delta_u(\theta, u') - \delta_N(\theta, u'')| &\leq |S_N^*(u') - S_N^*(u'')| + E|S_N^*(u') - S_N^*(u'')| \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^N |\rho(X_j - g(j, \theta + u')) - \rho(X_j - g(j, \theta + u''))| + \\
&+ E \sum_{j=1}^N |\rho(X_j - g(j, \theta + u')) - \rho(X_j - g(j, \theta + u''))| \leq \\
&\leq 2C_p \sum_{j=1}^N |g(j, \theta + u') - g(j, \theta + u'')|.
\end{aligned}$$

Таким чином, беручи до уваги умову **B1 (i)**,

$$\sup_{u'u'' \in F^i \cap U^c(\theta)} 2N^{-1}C_\rho \sum_{j=1}^N |g(j, \theta + u') - g(j, \theta + u'')| \leq 2C_\rho \varepsilon = \nu \gamma' \Delta(r).$$

Тому

$$P_1 \leq \sum_{j=1}^p P(N^{-1} |\delta_N(\theta, u_i)| \geq (1 - \nu)\gamma' \Delta(r)). \quad (1.2.6)$$

Оцінимо кожен з доданків останньої суми окремо:

$$P(N^{-1} |\delta_N(\theta, u_i)| \geq (1 - \nu)\gamma' \Delta(r)) \leq \frac{N^{-2} E \delta_N^2(\theta, u_i)}{((1 - \nu)\gamma' \Delta(r))^2},$$

де

$$\begin{aligned} \delta_N(\theta, u_i) &= S_N^*(u_i) - E S_N^*(u_i) = \\ &= \sum_{j=1}^N \rho(X_j - g(j, \theta + u_i)) - \sum_{j=1}^N E_\rho(X_j - g(j, \theta + u_i)). \end{aligned}$$

Позначимо

$$\Delta g(j, \theta + u_i) = g(j, \theta + u_i) - g(j, \theta).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \rho(X_j - g(j, \theta + u_i)) &= \rho(\varepsilon_j - \Delta g(j, \theta + u_i)), \\ E \delta_N^2(\theta, u_i) &= \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N E_\rho(\varepsilon_j - \Delta g(j, \theta + u_i)) \rho(\varepsilon_l - \Delta g(l, \theta + u_i)) - \\ &\quad - \left(\sum_{j=1}^N E_\rho(\varepsilon_j - \Delta g(j, \theta + u_i)) \right)^2. \end{aligned}$$

Нехай

$$\rho(\varepsilon_j - \Delta g(j, \theta + u_i)) = Z(\varepsilon_j) = Z(G(\xi_j)).$$

Оскільки при кожному фіксованому $j \in \overline{1, N}$

$$\begin{aligned} E Z^2(\varepsilon_j) &= E(\rho(G(\xi_j) - \Delta g(j, \theta + u_i)))^2 = \\ &= E |\rho(G(\xi_j) - \Delta g(j, \theta + u_i)) - \rho(0)|^2 \leq C_\rho^2 E |G(\xi_j) - \Delta g(j, \theta + u_i)|^2 \leq \\ &\leq 2C_\rho^2 (E G^2(\xi_0) + \Delta^2 g(j, \theta + u_i)) < \infty, \end{aligned}$$

то має місце розклад функції $Z(G(\cdot))$ у гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R}^1, \varphi(x)dx)$ в ряд за поліномами Чебишова-Ерміта, причому

$$Z(G(x)) = \rho(G(x) - \Delta g(j, \theta + u_i)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m(j, u_i)}{m!} H_m(x),$$

$$C_m(j, u_i) = \int_{\mathbb{R}^1} \rho(G(x) - \Delta g(j, \theta + u_i)) H_m(x) \varphi(x) dx, \quad m \geq 0,$$

$$C_0(j, u_i) = EZ(\varepsilon_0)$$

Маємо далі

$$EZ(G(\xi_j))Z(G(\xi_l)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m(j, u_i)C_m(l, u_i)}{m!} B^m(j-l).$$

Тоді при $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} N^{-2} E \delta_N^2(\theta, u_i) &= \\ &= N^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m(j, u_i)C_m(l, u_i)}{m!} B^m(j-l) - C_0(j, u_i)C_0(l, u_i) \right) = \\ &= N^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m(j, u_i)C_m(l, u_i)}{m!} B^m(j-l) \leq \\ &\leq N^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m^2(j, u_i)}{m!} \right) |B(j-l)|^m \leq \\ &\leq N^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N EZ^2(\varepsilon_j) |B(j-l)| \leq \\ &\leq 2C_\rho^2 N^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N (EG^2(\xi_0) + \Delta^2 g(j, \theta + u_i)) |B(j-l)| \leq \\ &\leq 2C_\rho^2 N^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N |B(j-l)| + 2C_\rho^2 N^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \Delta^2 g(j, \theta + u_i) |B(j-l)| = \\ &= S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Розглянемо спочатку

$$\begin{aligned} N^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N |B(j-l)| &= \sum_{k=0}^r A_k \left(N^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \frac{|\cos \varkappa_k(j-l)|}{(1+(j-l)^2)^{a_k/2}} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^r A_k \left(N^{-1} + 2N^{-1} \sum_{k=0}^r \left(1 - \frac{j}{N} \right) \frac{|\cos \varkappa_k j|}{(1+j^2)^{a_k/2}} \right) \leq \\ &= \sum_{k=0}^r A_k \left(N^{-1} + 2N^{-a_k} \sum_{k=0}^r \left(1 - \frac{j}{N} \right) \left(\frac{j}{N} \right)^{-a_k} \frac{1}{N} \right) \sim \end{aligned}$$

$$\sim 2 \sum_{k=0}^r A_k N^{-a_k} \int_0^1 (1-t)t^{-a_k} dt = 2 \sum_{k=0}^r \frac{A_k N^{-a_k}}{(1-a_k)(2-a_k)}.$$

тобто,

$$N^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N |B(j-l)| = O(N^{-a}), \quad (1.2.7)$$

де $a = \min_{k=0, \dots, r} a_k$. Таким чином, $S_1 = O(N^{-a})$.

Оцінимо суму S_2 , користуючись умовою **B1 (ii)**:

$$\begin{aligned} S_2 &= 2C_\rho^2 N^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \Delta^2 g(j, \theta + u_i) |B(j-l)| = \\ &= 2C_\rho^2 N^{-1} \sum_{j=1}^N \Delta^2 g(j, \theta + u_i) \left(N^{-1} \sum_{l=1}^N |B(j-l)| \right) \leq \\ &= 2C_\rho^2 N^{-1} \varkappa(r_0) \sum_{l=-N}^N |B(l)| \leq 4C_\rho^2 \varkappa(r_0) N^{-1} \sum_{l=0}^N |B(l)|. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} N^{-1} \sum_{l=0}^N |B(l)| &= \sum_{k=0}^r A_k \left(N^{-1} \sum_{l=0}^N \frac{|\cos \varkappa_k l|}{(1+l^2)^{a_k/2}} \right) \leq \\ &= \sum_{k=0}^r A_k N^{-a_k} \left(\sum_{l=0}^N \left(\frac{l}{N} \right)^{-a_k} \frac{1}{N} \right) \sim \sum_{k=0}^r A_k N^{-a_k} \int_0^1 t^{-a_k} dt = O(N^{-a}), \end{aligned}$$

то і

$$N^{-2} E \delta_N^2(\theta, u_i) = O(N^{-a}).$$

Отже

$$P(N^{-1} |\delta_N(\theta, u_i)| \geq (1-\nu)\gamma' \Delta(r)) = O(N^{-a}), \quad i = \overline{1, p}. \quad (1.2.8)$$

З (1.2.6) та (1.2.8) отримуємо

$$P_1 = O(N^{-a}). \quad (1.2.9)$$

Оцінимо P_2 . За нерівністю Чебишова

$$\begin{aligned} P_2 &\leq \frac{N^{-2} E \delta_N^2(\theta, 0)}{((1-\gamma') \Delta(r))^2} \\ N^{-2} E \delta_N^2(\theta, 0) &= N^{-2} E \left(\sum_{j=1}^N \rho(\varepsilon_j) - N E_\rho(\varepsilon_0) \right)^2 = \end{aligned}$$

$$= N^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=0}^N E \rho(\varepsilon_j) \rho(\varepsilon_l) - (E \rho(\varepsilon_0))^2.$$

Зауважимо, що

$$E \rho^2(\varepsilon_j) \leq E |\varepsilon_0|^2 < \infty,$$

тобто в гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R}^1, \varphi(u) du)$ існує розклад

$$\rho(G(u)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m}{m!} H_m(u), \quad C_m = \int_{\mathbb{R}} \rho(G(u)) H_m(u) \varphi(u) du, \quad m \geq 0,$$

за поліномами Чебишова-Ерміта.

Таким чином,

$$\begin{aligned} \rho(G(\xi_j)) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m}{m!} H_m(\xi_j), \\ E \rho(\varepsilon_j) \rho(\varepsilon_l) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m^2}{m!} B^m(j-l). \end{aligned}$$

Зокрема,

$$E \rho^2(\varepsilon_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m^2}{m!} < \infty.$$

Отже,

$$\begin{aligned} N^{-2} E \delta_N^2(\theta, 0) &= N^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \left(\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_m^2}{m!} B^m(j-l) \right) - (E \rho(\varepsilon_0))^2 \right) = \\ &= N^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m^2}{m!} B^m(j-l) \right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m^2}{m!} \left(N^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N |B(j-l)| \right). \end{aligned}$$

Користуючись (2.7), отримуємо, що $P_2 = O(T^{-a})$.

Отже, теорему доведено. ■

1.3. Асимптотична єдиність М-оцінок

Знайдемо достатні умови асимптотичної єдності М- оцінок параметрів моделі регресії (1.1.1).

Якщо функція регресії та функція втрат є диференційованими, то М-оцінка $\hat{\theta}_T$ задовольняє систему рівнянь

$$\nabla S_{N(\tau)} = 0, \tag{1.3.1}$$

де $\nabla S_{N(\tau)}$ — градієнт функції $S_{N(\tau)}$.

Нехай $g(j, \tau)$ є двічі неперервно диференційовною за $\tau \in \Theta^c$.
Позначимо

$$g_i(j, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau_j} g(j, \tau), \quad g_{il}(j, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau_j \partial \tau_l} g(j, \tau), \quad i, l = \overline{1, q}.$$

Буквами k будемо позначати додатні константи.
Запишемо

$$\tilde{J}_N(\theta) = \left(\tilde{J}_{il,N}(\theta) \right)_{i,l=1}^q,$$

$$\tilde{J}_N(\theta) = N^{-1} \sum_{j=1}^N g_i(j, \theta) g_l(j, \theta).$$

$\lambda_{\min}(A)(\lambda_{\max}(A))$ — найменше (найбільше) власне число додатно визначеної матриці A .

B2. Для деякого $\lambda_* > 0$ та $N > N_0$

$$\lambda_{\min}(\tilde{J}_N(\theta)) \geq \tilde{\lambda}_*. \quad (1.3.2)$$

B3. $\sup_{j \geq 0} \sup_{\tau \in \Theta^c} |g_i(j, \tau)| \leq k^i < \infty$, $\sup_{j \geq 0} \sup_{\tau \in \Theta^c} |g_{il}(j, \tau)| \leq k^{il} < \infty$.

Припустимо також, що

C3. Функція $\rho(x)$ є невід'ємною, $\rho(0) = 0$, парною, двічі неперервно диференційовною, та її похідні $\rho'(x) = \psi(x)$, $\rho''(x) = \psi'(x)$ задовольняють властивостям

(i) $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi(x)| = k_\psi < \infty$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi'(x)| = k_{\psi'} < \infty$;

(ii) $E\psi(G(\xi_0)) = 0$;

(iii) $E\psi'(G(\xi_0)) > 0$;

(iv) Для довільних $x, h \in \mathbb{R}^1$ та деякої константи $L < \infty$

$$|\psi'(x+h) - \psi'(x)| \leq L|h|.$$

Введемо позначення

$$\Phi_N^{il}(\tau_1, \tau_2) = \sum_{l=1}^N (g_{il}(j, \tau_1) - g_{il}(j, \tau_2))^2, \quad i, l = \overline{1, q}, \quad \tau_1, \tau_2 \in \Theta^c.$$

B4. $N^{-1} \Phi_N^{il}(\tau_1, \tau_2) \leq k_{il} \|\tau_1 - \tau_2\|^2$, $i, l = \overline{1, q}$, $i, l = \overline{1, q}$ при $N > N_0$.
Відносно М-оцінки припустимо, що

D1. $\hat{\theta}_N$ є слабо консистентною оцінкою θ , тобто для довільного $r > 0$ маємо

$$P \left\{ \left\| \hat{\theta}_N - \theta \right\| \geq r \right\} = O(N^{-a}) \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Теорема 2. Нехай виконуються умови **A1-A3**, **B2-B4**, **C3** та **D1**. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $N_0 = N_0(\varepsilon)$, що для $N > N_0$ система рівнянь

(3.1) має єдиний розв'язок з ймовірністю не менше $1 - \varepsilon$.

Доведення. Позначимо

$$H(j; \tau, \theta) = g(j, \tau) - g(j, \theta), \quad H_i(j; \tau, \theta) = g_i(j, \tau) - g_i(j, \theta),$$

$$H_{il}(j; \tau, \theta) = g_{il}(j, \tau) - g_{il}(j, \theta), \quad i, l = 1, \dots, q;$$

$$\gamma = \frac{1}{E\psi'(G(\xi_0))};$$

$$G_N(\tau) = (G_N^{il}(\tau))_{i,l=1}^q = \left(\gamma \frac{\partial^2 S_N(\tau)}{\partial \tau_i \partial \tau_l} \right)_{i,l=1}^q.$$

Для доведення теореми необхідно показати, що матриця Гессе $G_N(\tau)$ функціонала $\gamma S_N(\tau)$ є додатно визначеною матрицею в деякому околі істинного значення параметра θ з ймовірністю, що прямує до одиниці при $N \rightarrow \infty$.

Для довільних $i, l = \overline{1, q}$ маємо

$$\begin{aligned} G_N^{il}(\tau) &= \gamma N^{-1} \sum_{j=1}^N \psi'(X_j - g(j, \tau)) g_i(j, \tau) g_l(j, \tau) - \\ &- \gamma N^{-1} \sum_{j=1}^N \psi(X_j - g(j, \tau)) g_{il}(j, \tau) = G_1^{il}(\tau) + G_2^{il}(\tau). \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Розглянемо другий доданок у (1.3.3)

$$\begin{aligned} G_2^{il}(\tau) &= -\gamma N^{-1} \sum_{j=1}^N [\psi(G(\xi_j) - H(j; \tau, \theta)) - \psi(G(\xi_j))] g_{il}(j, \tau) - \\ &- \gamma N^{-1} \sum_{j=1}^N \psi(G(\xi_j) H_{il}(j; \tau, \theta)) - \gamma N^{-1} \sum_{j=1}^N \psi(G(\xi_j)) g_{il}(j, \tau) = \\ &= G_3^{il}(\tau) + G_4^{il}(\tau) + G_5^{il}(\tau). \end{aligned}$$

Завдяки умові **B3**,

$$|H(j; \tau, \theta)| = \left| \sum_{i=1}^q g_i(j, \tau^*) (\tau_1 - \theta_i) \right| \leq \|k\| \cdot \|\tau - \theta\|, \quad (1.3.4)$$

де $k = (k^1, \dots, k^q)$. Крім того, для деякого $\delta_N \in (0, 1)$ знаходимо

$$\begin{aligned} \psi(G(\xi_j) - H(j; \tau, \theta)) - \psi(G(\xi_j)) &= \\ &= \psi'(G(\xi_j) - \delta_N H(j; \tau, \theta)) H(j; \tau, \theta), \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Тоді із врахуванням умов **C3(i)** і формул (1.3.4) і (1.3.5) отримуємо

$$|G_3^{il}(\tau)| \leq k_{\psi'} k^{il} \gamma \|k\| \cdot \|\tau - \theta\|. \quad (1.3.6)$$

За умовою **B4**,

$$\begin{aligned} |G_4^{il}(\tau)| &\leq \gamma \left(N^{-1} \sum_{j=1}^N \psi^2(G(\xi_j)) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (N^{-1} \Phi_N^{il}(\tau, \theta))^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \gamma(k_{il})^{\frac{1}{2}} \left(\left| \zeta_N^{\frac{1}{2}} \right| + [E\psi^2(G(\xi_0))]^{\frac{1}{2}} \right) \|\tau - \theta\|, \\ \zeta_N &= N^{-1} \sum_{j=1}^N (\psi^2(G(\xi_j)) - E\psi^2(G(\xi_0))). \end{aligned}$$

З умови **C3(i)** випливає, що $E\psi^4(G(\xi_0)) < \infty$, а тому функцію $\psi^2(G(x))$, $x \in \mathbb{R}^1$, можна розкласти у ряд за поліномами Чебишова-Ерміта в гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R}^1, \varphi(x)dx)$

$$\begin{aligned} \psi^2(G(x)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k(\psi^2 \circ G)}{k!} H_k(x), \\ C_k(\psi^2 \circ G) &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(G(x)) H_k(x) \varphi(x) dx, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Використовуючи співвідношення (див. наприклад [3])

$$EH_m(\xi_j)H_k(\xi_l) = \delta_m^k \cdot k! B^k(j-l), \quad (1.3.7)$$

де δ_m^k — символ Кронекера, та очевидну рівність $E\psi^2(G(\xi_0)) = C_0(\psi^2 \circ G)$, отримуємо:

$$\text{cov}(\psi^2(G(\xi_j)), \psi^2(G(\xi_l))) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^2(\psi^2 \circ G)}{k!} B^k(j-l).$$

Виходячи з того, що $|B(n)| \leq 1$, $n \in \mathbb{Z}^1$, маємо

$$\begin{aligned} |\text{cov}(\psi^2(G(\xi_j)), \psi^2(G(\xi_l)))| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^2(\psi^2 \circ G)}{k!} |B(j-l)| = \\ &= D\psi^2(G(\xi_0)) |B(j-l)|. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Завдяки останній нерівності та (2.7),

$$\begin{aligned} E\zeta_N^2 &= EN^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \text{cov}(\psi^2(G(\xi_j)), \psi^2(G(\xi_l))) \leq \\ &D\psi^2(G(\xi_0)) N^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N |B(j-l)| = O(N^{-a}), \end{aligned}$$

і $E\zeta_N^2 \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

В цьому випадку маємо

$$|\zeta_N|^{\frac{1}{2}} = {}_1o_p(1),$$

де ${}_1o_p(1)$ з різними індексами позначатимемо невід'ємні випадкові величини, які прямують до нуля при $N \rightarrow \infty$ за ймовірністю. Таким чином,

$$|G_4^{il}(\tau)| \leq \gamma(k_{il})^{\frac{1}{2}} \left({}_1o_p(1) + [E\psi^2(G(\xi_0))]^{\frac{1}{2}} \right) \|\tau - \theta\|. \quad (1.3.9)$$

Аналогічно (1.3.8) знаходимо

$$|\text{cov}\psi(G(\xi_j), \psi(G(\xi_l)))| \leq D\psi(G(\xi_0)) \cdot |B(j-l)|. \quad (1.3.10)$$

З (1.3.10) випливає, що

$$E(G_5^{il})^2 = \gamma^2(k^{il})^2 E\psi(G(\xi_0)) N^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N |B(j-l)|.$$

Аналогічно оцінці $E\zeta_T^2$, отримуємо

$$|G_5^{il}| = {}_2o_p^{il}(1). \quad (1.3.11)$$

Бачимо, що з (1.3.6), (1.3.9) та (1.3.11) випливає

$$|G_2^{il}(\tau)| \leq \left(k_{\psi'} k^{il} \|\mathbf{k}\| + k_{il} \left({}_1o_p(1) + [E\psi^2(G(\xi_0))]^{\frac{1}{2}} \right) \right) \cdot \gamma \cdot \|\tau - \theta\| + {}_2o_p^{il}(1).$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned} G_1^{il}(\tau) &= \gamma N^{-1} \sum_{j=1}^N [\psi'(G(\xi_j)) - H(j; \tau, \theta)] g_i(j, \tau) g_l(j, \tau) + \\ &+ \gamma N^{-1} \sum_{j=1}^N \psi'(G(\xi_j)) \cdot [g_i(j, \tau) H_l(j; \tau, \theta) + g_l(j, \tau) H_i(j; \tau, \theta)] + \\ &+ \gamma N^{-1} \sum_{j=1}^N [\psi'(G(\xi_j)) - E\psi'(G(\xi_j))] g_i(j, \theta) g_l(j, \theta) + \tilde{J}_N^{il}(\theta) = \\ &= G_6^{il}(\tau) + G_7^{il}(\tau) + G_8^{il}(\tau) + \tilde{J}_N^{il}(\theta). \end{aligned}$$

За умовами **B3**, **C3(iv)** та (1.3.4)

$$G_6^{il}(\tau) \leq L k^i k^l \gamma \|\mathbf{k}\| \|\tau - \theta\|$$

Крім того, аналогічно (1.3.9)

$$G_7^{il}(\tau) \leq \gamma(k^i \|k_l\| + k^l \|k_i\|) \left({}_3o_p(1) + [E(\psi'(G(\xi_0)))^2]^{\frac{1}{2}} \right) \|\tau - \theta\|,$$

де $\mathbf{k}_i = (k^{il}, \dots, k^{iq})$, $i, l = \overline{1, q}$.

Нарешті, враховуючи нерівність

$$|\text{cov}(\psi'(G(\xi_j)), \psi'(G(\xi_l)))| \leq D\psi'(G(\xi_0)) \cdot |B(j-l)|,$$

яка виводиться аналогічно (3.10), маємо

$$E(G_8^{il}(\tau))^2 \leq \gamma^2 (k^i)^2 (k^l)^2 D\psi'(G(\xi_0)) N^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N |B(j-l)|,$$

звідки випливає $|G_8^{il}(\tau)| = {}_4o_p^{il}(1)$.

З отриманих оцінок випливає, що

$$\begin{aligned} & |G_1^{il}(\tau) - J_N^{il}(\theta)| \leq \\ & \leq \gamma \|\tau - \theta\| \cdot \left(Lk^i k^l \|k\| + (k^i \|k_l\| + k^l \|k_i\|) \cdot \right. \\ & \left. \cdot \left({}_3o_p(1) + \left[E(\psi(G(\xi_0))^2) \right]^{\frac{1}{2}} \right) \right) + {}_4o_p^{il}(1). \end{aligned}$$

Спираючись на властивість власних чисел суми двох симетричних матриць (див. [10], с.101-103), записуємо

$$\begin{aligned} |\lambda_{\min}(G_N(\tau)) - \lambda_{\min}(J_N(\theta))| & \leq q \max_{1 \leq i, l \leq q} |G_N^{il}(\tau) - J_N^{il}(\theta)| \leq \\ & \leq q \left(\max_{1 \leq i, l \leq q} |G_1^{il}(\tau) - J_N^{il}(\theta)| + \max_{1 \leq i, l \leq q} |G_2^{il}(\tau)| \right). \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Нехай $r = \frac{\tilde{\lambda}_*}{8q}$, де $\tilde{\lambda}_*$ — число з умови **B2**. Якщо відбувається подія

$$\Omega_r = \left\{ {}_1o_p(1) \leq r; {}_3o_p(1) \leq r; \max_{1 \leq i, l \leq q} \{ {}_2o_p(1), {}_4o_p(1) \} \leq r; \|\hat{\theta}_N - \theta\| \leq \frac{r}{R} \right\},$$

де

$$\begin{aligned} R & = \gamma \cdot \max_{1 \leq i, l \leq q} \left\{ k_{\psi'} k^{il} \|k\| + k_{il} (r + [E\psi^2(G(\xi_0))]^{\frac{1}{2}}); \right. \\ & \left. Lk^i k^l \|k\| + (k^i \|k_l\| + k^l \|k_i\|) (r + E(\psi'(G(\xi_0)))^2)^{\frac{1}{2}} \right\}, \end{aligned}$$

то з (1.3.12) знаходимо

$$\begin{aligned} P\{\Omega_r\} & \leq P\left\{ \left| \lambda_{\min}(G(\hat{\theta}_N)) - \lambda_{\min}(J_N(\theta)) \right| \leq 4qr \right\} \leq \\ & \leq P\left\{ \lambda_{\min}(G(\hat{\theta}_N)) - \lambda_{\min}(J_N(\theta)) \geq -\frac{\tilde{\lambda}_*}{2} \right\} \leq P\left\{ \lambda_{\min}(G(\hat{\theta}_N)) \geq \frac{\tilde{\lambda}_*}{2} \right\} \end{aligned}$$

для $N > N_0$, згідно з умовою **B2**. Тоді

$$\begin{aligned} P\{\overline{\Omega_r}\} & \leq P\{{}_1o_p(1) > r\} + P\{{}_3o_p(1) > r\} + \\ & + P\left\{ \max_{1 \leq i, l \leq q} \{ {}_2o_p^{il}(1), {}_4o_p^{il}(1) \} > r \right\} + P\left\{ \|\hat{\theta}_N - \theta\| > \frac{r}{R} \right\}. \end{aligned}$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ та $N > N_0$, отримуємо

$$P \{ {}_1o_p(1) > r \} \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad P \{ {}_3o_p(1) > r \} \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

$$P \left\{ \max_{1 \leq i, l \leq q} \{ {}_2o_p^{il}(1), {}_4o_p^{il}(1) \} > r \right\} \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Зауважимо, що якщо $N > N_0$, то

$$P \left\{ \left\| \hat{\theta}_N - \theta \right\| > \frac{r}{R} \right\} \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

тоді

$$P \{ {}_1o_p(1) > r \} + P \{ {}_3o_p(1) > r \} + \\ P \left\{ \max_{1 \leq i, l \leq q} \{ {}_2o_p^{il}(1), {}_4o_p^{il}(1) \} > r \right\} + P \left\{ \left\| \hat{\theta}_N - \theta \right\| > \frac{r}{R} \right\} \leq \varepsilon.$$

Таким чином, для $N > N_0$, $P \{ \overline{\Omega}_r \} > 1 - \varepsilon$. Це означає, що $\hat{\theta}_N$ є єдиним розв'язком системи рівнянь (1.3.1), з ймовірністю не менше $(1 - \varepsilon)$, оскільки матриця Гессе $G_N(\tau)$ функціонала $\gamma S_N(\tau)$ є додатно визначеною матрицею в деякому околі точки θ з ймовірністю, що прямує до одиниці при $N \rightarrow \infty$. ■

Висновки

1. Сформульовано умови до функції втрат та функції регресії, за яких М-оцінка є слабо консистентною.
2. Знайдено сукупність припущень до функції втрат та функції регресії, які забезпечують асимптотичну єдиність за ймовірністю М-оцінок.

2 АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ М-ОЦІНОК

2.1 Умови та формування основного результату

Позначимо

$$d_N^2(\theta) = \text{diag}(d_{iN}^2(\theta))_{i=1}^q, \quad d_{iN}^2(\theta) = \sum_{j=1}^N g_i^2(j, \theta),$$

$$\lim N^{-1} d_{iN}^2(\theta) > 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad i = \overline{1, q}.$$

Ці границі можуть дорівнювати, зокрема, нескінченності.

$$\text{Нехай також } d_{il,N}^2(\theta) = \sum_{j=1}^N g_{il}^2(j, \theta), \quad \tau \in \Theta^c, \quad i, l = \overline{1, q}.$$

Припустимо, що для всіх достатньо великих N ($N > N_0$) виконується умова **B5**.

$$\max_{1 \leq j \leq N} \sup_{\tau \in \Theta^c} \frac{|g_i(j, \tau)|}{d_{iN}(\theta)} \leq k^i N^{-1/2}, \quad (2.1.1)$$

$$\max_{1 \leq j \leq N} \sup_{\tau \in \Theta^c} \frac{|g_{il}(j, \tau)|}{d_{il,N}(\theta)} \leq k^{il} N^{-1/2}, \quad (2.1.2)$$

$$\frac{d_{il,N}(\theta)}{d_{iN}(\theta) d_{lN}(\theta)} \leq \tilde{k}^{il} N^{-1/2}, \quad i, l = \overline{1, q}. \quad (2.1.3)$$

C4. Функція $\rho(x)$ є неперервною, $\rho(0) = 0$, невід'ємною, парною, двічі неперервно диференційовною, та її похідні $\rho'(x) = \psi(x)$ і $\rho''(x) = \psi'(x)$ задовольняють властивостям

(i) $E\psi(G(\xi_0)) = 0$;

(ii) $E'\psi(G(\xi_0)) > 0$;

(iii) Для довільних $x, h \in \mathbb{R}^1$ та деякої константи $L < \infty$

$$|\psi'(x+h) - \psi'(x)| \leq L|h|.$$

Якщо виконується умова **C4(iii)**, то для кожного x та деякого $\eta = \eta(x) \in (0, 1)$

$$|\psi(x) - \psi(0)| = |\psi'(\eta x)| |x| \leq (|\psi'(0)| + L|\eta x|) |x| \leq |\psi'(0)| |x| + Lx^2.$$

або

$$|\psi(x)| \leq |\psi(0)| + |\psi'(0)| |x| + Lx^2.$$

Крім того,

$$|\psi'(x)| \leq |\psi'(0)| + L|x|.$$

Таким чином, випадкові послідовності $\psi(g(\xi_j))$ та $\psi'(g(\xi_j))$ мають моменти всіх порядків за умов **A1**, **A2**, зокрема,

$$E\psi^2(G(\xi_0)) < \infty, E(\psi'(G(\xi_0)))^2 < \infty.$$

Поліноми Чебишова-Ерміта $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$, $n > 0$, утворюють повну ортогональну систему в гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R}, \varphi(x)dx)$ функції інтегрованих з квадратом по відношенню до стандартної гаусівської щільності $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

Для функції $K \in L_2(\mathbb{R}^1, \varphi(x)dx)$ позначимо

$$C_n(K) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) H_n(x) \varphi(x) dx, \quad n \geq 0.$$

Зауважимо, що за умови **C4(iii)** $C_0(\psi \circ G) = E\psi(G(\xi_0)) = 0$.

Означення 2. Функція $K \in L_2(\mathbb{R}^1, \varphi(x)dx)$ має ранг Ерміта m , якщо або $C_1(K) \neq 0$ і $m = 1$, або для деякого $m \geq 2$, $C_1(K) = \dots = C_{m-1}(K) = 0$, $C_m(K) \neq 0$. будемо писати $\text{Hrank} K = m$.

Завдяки умові **C4** функції $\psi \circ G$ та $\psi' \circ G$ можна розкласти у ряди Фур'є за поліномами Чебишова-Ерміта в гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R}^1, \varphi(x)dx)$

$$\psi(g(x)) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n(\psi \circ G)}{n!} H_n(x),$$

$$\psi'(g(x)) = C_0(\psi' \circ G) + \sum_{n=m'}^{\infty} \frac{C_n(\psi' \circ G)}{n!} H_n(x).$$

де $m = \text{Hrank}(\psi \circ G)$, $m' = \text{Hrank}(\psi' \circ G)$.

Використовуючи співвідношення (1.3.7), отримуємо:

$$\text{cov}(\psi(G(\xi_j)), \psi(G(\xi_l))) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(\psi \circ G)}{n!} B^n(j-l).$$

Виходячи з того, що $|B(j)| \leq 1$, $j \in \mathbb{Z}$, маємо:

$$\begin{aligned} |\text{cov}(\psi(G(\xi_j)), \psi(G(\xi_l)))| &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(\psi \circ G)}{n!} |B(j-l)| = \\ &= E\psi^2(G(\xi_0)) |B(j-l)|. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Запишемо

$$J_N(\theta) = (J_{il,N}(\theta))_{i,l=1}^q,$$

$$J_{il,N}(\theta) = d_{iN}^{-1}(\theta) \sum_{j=1}^N g_i(j, \theta) g_l(j, \theta).$$

B6. Для деякого $\lambda_* > 0$

$$\lambda_{\min}(J_N(\theta)) \geq \lambda_*. \quad (2.1.5)$$

Введемо матричну міру $\mu_N(dx; \theta)$ на $([-\pi; \pi], \mathfrak{B}([-\pi; \pi]))$ з матрицею щільності

$$(\mu_N^{kl}(x; \theta))_{k,l=1}^q$$

$$\mu_N^{kl}(x; \theta) = g_N^k(x, \theta) \overline{g_N^l(x, \theta)} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g_N^k(x, \theta)|^2 dx \int_{-\pi}^{\pi} |g_N^l(x, \theta)|^2 dx \right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$g_N^k(x, \theta) = \sum_{j=1}^N e^{ixj} g_k(j, \theta), \quad k, l = \overline{1, q}.$$

$$\text{Зауважимо, що } d_{kN}^2(\theta) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |g_N^k(x, \theta)|^2 dx.$$

Введемо умову

B7. Сім'я мір $\mu_N(\cdot; \theta)$ слабо збігається до міри $\mu(\cdot; \theta)$ при $N \rightarrow \infty$.

Означення 3. Матрична міра $\mu(\cdot; \theta) = (\mu^{kl}(\cdot; \theta))_{k,l=1}^q$ називається спектральною мірою функції регресії $g(t, \theta)$.

Зауважимо, що з умов **B5** та **B7** випливає при $N \rightarrow \infty$

$$J_N(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \mu_N(dx; \theta) \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \mu(dx; \theta) = \mu([-\pi; \pi]; \theta) = J(\theta),$$

де $J(\theta)$ деяка невироджена матриця. Введемо позначення $\Lambda(\theta) = J^{-1}(\theta)$.

Введемо поняття μ -припустимості с.щ. $f(\lambda)$ (Детальніше, див. [11]).

Означення 4. С.щ. f називається μ -припустимою, якщо вона μ -інтегрована, тобто всі елементи матриці $\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) \mu(d\lambda)$ скінченні, і

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) \mu_N(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) \mu(d\lambda).$$

Наведемо загальні умови μ -припустимості с.щ. стаціонарної послідовності, яким, зокрема, задовольняє с.щ. f послідовності ξ_j , $j \in \mathbb{Z}$, з коваріаційною функцією (1.1.2). Головна умова полягає в тому, щоб сукупність точок сингулярності f не перетиналась із сукупністю атомів спектральної міри μ , яка є атомною для всіх відомих на сьогодні прикладів її існування (Детальніше, див. [12]).

Сформулюємо наступні умови для множини $J = \{-r, \dots, -1, 0, 1, \dots, r\}$.

(I) С.щ. $f \in ([-\pi; \pi] \setminus \{\varkappa_k, k \in J\})$ з $\varkappa_{-k} = -\overline{\varkappa_k}$, $k = \overline{0, r}$, $0 \leq \varkappa_0 < \varkappa_1 < \dots < \varkappa_r$ і

$$\lim_{\lambda \rightarrow \varkappa_k} |\lambda - \varkappa_k|^{1-a_k} = a_k > 0, \quad k = \overline{0, r}, \quad a_k \in (0, 1), \quad k \in J, \quad a_{-k} = a_k.$$

З попередньої формули отримуємо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ і $k \in J$, існує $\delta_k = \delta_k(\varepsilon)$ таке, що для $|\lambda - \varkappa_k| < \delta_k$

$$f(\lambda) < \frac{a_k + \varepsilon}{|\lambda - \kappa_k|^{1-a_k}}.$$

Тоді, для $|\lambda - \kappa_k| < \delta_k$, ми маємо наступне:

$$\{\lambda : f(\lambda) > c\} \subset V_k(c) = \left\{ \lambda : |\lambda - \kappa_k| < \left(\frac{a_k + \varepsilon}{c} \right)^{1/(1-a_k)} \right\}$$

Більш того c має задовольнити нерівність

$$\left(\frac{a_k + \varepsilon}{c} \right)^{1/(1-a_k)} \leq \delta_k,$$

і рівносильно

$$c \geq \frac{a_k + \varepsilon}{\delta_k^{1-a_k}(\varepsilon)} = c_k(\varepsilon).$$

(II) Нехай $\varepsilon_0 > 0$ — фіксоване. Тоді існує $c_0 = \max_{k \in J} c_k(\varepsilon_0)$ таке, що для $c \geq c_0$,

$$\{\lambda : f(\lambda) > c\} \subset \bigcup_{k \in J} V_k(c).$$

Теорема 3. Припустимо, що виконуються умови **B5**, **B7**, а також умови **(I)**, **(II)**, і с.щ. f інтегрована по відношенню до спектральної міри μ , тоді с.щ. $f \in \mu$ -припустимою.

Доведення. Доведення можна знайти в [12]. ■

Нехай $f^{(*1)}(\lambda) = f(\lambda)$ і для $n \geq 2$ $f^{(*n)}(\lambda)$ є n -та згортка с.щ. $f(\lambda)$ випадкової послідовності ξ_j , $j \in \mathbb{Z}$.

Припустимо, що

A3. $\int_{-\pi}^{\pi} f^{(*n)}(\lambda) \mu(d\lambda)$, $n \geq 1$ — додатно визначені матриці.

D3. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $N_0 = N_0(\varepsilon)$, що для $N > N_0$ система рівнянь $\nabla S_N(\tau) = 0$ має єдиний розв'язок з ймовірністю не менше $1 - \varepsilon$.

Сформулюємо основний результат цього розділу.

Теорема 4. Нехай виконуються умови **A1-A3**, **B5-B7**, **C4**, **D3** та або $\text{Hrank}(\psi \circ G) = 1$, $\alpha > \frac{1}{2}$, і в цьому випадку с.щ. f випадкової послідовності $\xi \in \mu$ -припустимою, або $\text{Hrank}(\psi \circ G) = m$, $\alpha m > 1$, де $\alpha = \min_{k=0, r} \alpha_k$. Тоді розподіл випадкового вектора $\hat{u}_N(\theta) = d_N(\theta)(\hat{\theta}_N - \theta)$ при $N \rightarrow \infty$ збігається до гаусівського розподілу $N(0, \sigma(\theta))$, де

$$\sigma(\theta) = 2\pi\gamma^2 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(\psi \circ G)}{n!} \Lambda(\theta) \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^{(*n)}(\lambda) \mu(d\lambda, \theta) \right) \Lambda(\theta). \quad (2.1.6)$$

2.2 Допоміжні твердження

Розглянемо нормовану М-оцінку

$$\hat{u}_N = \hat{u}_N(\theta) = d_N(\theta)(\hat{\theta}_N - \theta). \quad (2.1.1)$$

Зробимо заміну змінних, яка відповідає нормуванню (2.1.1), у функції регресії та її похідних, тобто

$$\begin{aligned} g(j, \tau) &= g(j, \theta + d_N^{-1}(\theta)u) = h(j, u), \\ g_i(j, \tau) &= g_i(j, \theta + d_N^{-1}(\theta)u) = h_i(j, u), \\ g_{il}(j, \tau) &= g_{il}(j, \theta + d_N^{-1}(\theta)u) = h_{il}(j, u), \quad i, l = \overline{1, q}. \end{aligned}$$

Будемо також використовувати позначення

$$\begin{aligned} H(j; u_1, u_2) &= h(j, u_1) - h(j, u_2), \\ H_i(j; u_1, u_2) &= h_i(j, u_1) - h_i(j, u_2), \quad i = \overline{1, q}. \end{aligned}$$

Введемо вектори $M_N(u) = (M_N^i(u))_{i=1}^q$,

$$M_N^i(u) = \gamma \sum_{j=1}^N \psi(X_j - h(j, u)) \frac{h_i(j, u)}{d_{iN}(\theta)}$$

та

$$\begin{aligned} \Psi_N(u) &= (\Psi_N^i(u))_{i=1}^q, \\ \Psi_N^i(u) &= \gamma \sum_{j=1}^N \psi(G(\xi_j)) \frac{h_i(j, u)}{d_{iN}(\theta)} + \sum_{j=1}^N H(j; 0, u) \frac{h_i(j, u)}{d_{iN}(\theta)}, \quad \gamma = \frac{1}{E\psi'(G(\xi_0))}. \end{aligned}$$

Вектори $M_N(u)$ та $\Psi_N(u)$ визначені для $u \in U_N^c(\theta)$, $U_N(\theta) = d_N(\theta)(\Theta - \theta)$.

Зауважимо, що за нашими припущеннями множини $U_N(\theta)$ розширюються до $\mathbb{R}^q$ при $N \rightarrow \infty$.

Тоді для довільних $R > 0 : v^c(R) = \{u \in \mathbb{R}^q : \|u\| \leq R\} \subset U_N(\theta)$ для $N > N_0(R)$

Легко зрозуміти статистичний зміст векторів $M_N(u)$ та $\Psi_N(u)$

Розглянемо функціонал

$$\gamma S_N(\theta + d_N^{-1}(\theta)u).$$

Тоді нормована М-оцінка задовольняє системі рівнянь

$$M_N(u) = 0. \quad (2.2.2)$$

Нехай

$$\eta_j = \gamma \psi(G(\xi_j)), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (2.2.3)$$

та спостереження мають вигляд

$$Y_j = g(j, \theta) + \eta_j, j = \overline{1, N}. \quad (2.2.4)$$

Тоді

$$\Psi_N(u) = 0$$

є системою нормальних рівнянь для знаходження нормованої оцінки найменших квадратів

$$\check{u}_N = \check{u}_N(\theta) = d_N(\theta) (\check{\theta}_N - \theta)$$

невідомого параметра θ допоміжної (віртуальної) нелінійної регресійної моделі (2.2.4).

Лема 1. Нехай виконуються умови **A1-A3, B5, C4**. Тоді для довільних $R > 0, r > 0$.

$$P \left\{ \sup_{u \in v^c(R)} \|M_N(u) - \Psi_N(u)\| > r \right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (2.2.5)$$

Доведення. Для фіксованого i

$$\begin{aligned} M_N^i(u) - \Psi_N^i(u) = \\ = \gamma \sum_{j=1}^N \frac{h_i(j, u)}{d_{iN}(\theta)} [\psi(G(\xi_j) + H(j; 0, u)) - \psi(G(\xi_j)) - \psi'(G(\xi_j))H(j; 0, u)] + \\ + \gamma \sum_{j=1}^N H(j; 0, u) \frac{h_i(j, u)}{d_{iN}(\theta)} \zeta_j = I_1(u) + I_2(u). \end{aligned}$$

$$\zeta_j = \psi'(G(\xi_j)) - E\psi'(G(\xi_j)), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Доведемо, що $I_1(u)$ та $I_2(u)$ збігається до нуля за ймовірністю за $u \in v^c(R)$. Нехай $u \in v^c(R)$ фіксоване. Тоді

$$EI_2^2(u) = \gamma^2 \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N H(j; 0, u) H(l; 0, u) \frac{h_i(j, u)}{d_{iN}(\theta)} \frac{h_i(l, u)}{d_{iN}(\theta)} \text{cov}(\zeta_j, \zeta_l). \quad (2.2.6)$$

За формулою Тейлора та нерівністю Коши-Буняковського

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq j \leq N} |H(j; 0, u)| &= \max_{1 \leq j \leq N} \left| \sum_{i=1}^q \frac{h_i(j, u_N^*)}{d_{iN}(\theta)} u_i \right| \leq \\ &\leq \|u\| \max_{1 \leq j \leq N} \left(\sum_{i=1}^q \left[\frac{h_i(j, u_N^*)}{d_{iN}(\theta)} \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

де $\|u_N^*\| \leq \|u\|$.

З цієї нерівності, завдяки (2.1.1), отримуємо

$$\max_{1 \leq j \leq N} |H(j; 0, u)| \leq N^{-1/2} \|k\| \|u\|, \quad (2.2.7)$$

де $k = (k^1, \dots, k^q)$ — вектор констант з нерівностей (2.1.1).

Застосовуючи нерівності (2.1.1) та (2.2.7) до інтегралу (2.2.6), знаходимо

$$EI_2^2(u) \leq \gamma^2 \|k\|^2 (k^i)^2 R^2 N^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \text{cov}(\zeta_j, \zeta_l).$$

Покажемо, що

$$N^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \text{cov}(\zeta_j, \zeta_l) \rightarrow 0, \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (2.2.8)$$

Аналогічно нерівності (2.1.4) маємо

$$|\text{cov}(\psi'(G(\xi_j)), \psi'(G(\xi_l)))| \leq D\psi'(G(\xi_0)) \cdot |B(j-l)|,$$

та, використовуючи (1.2.7),

$$N^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \text{cov}(\zeta_j, \zeta_l) \leq N^{-2} \cdot D\psi'(G(\xi_0)) \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N |B(j-l)| = O(N^{-a})$$

де a задано (1.2.5), тобто виконується (2.2.8). З цього випливає, що $I_2(u) \xrightarrow{P} 0$ при $N \rightarrow \infty$ поточково для $u \in v^c(R)$.

Для $u_1, u_2 \in v^c(R)$ розглянемо

$$\begin{aligned} I_2(u_1) - I_2(u_2) &= \gamma \sum_{j=1}^N H(j; 0, u_1) \frac{H_i(j; u_1 u_2)}{d_{iN}(\theta)} \zeta_j - \\ &- \gamma \sum_{j=1}^N H(j; u_1, u_2) \frac{h_i(j; u_2)}{d_{iN}(\theta)} \zeta_j = I_3(u_1, u_2) + I_4(u_1, u_2). \end{aligned}$$

Для довільних $h > 0$, $r > 0$ дослідимо ймовірність

$$\begin{aligned} P \left\{ \sup_{\|u_1 - u_2\| \leq h} |I_3(u_1, u_2)| > r \right\} &\geq r^{-1} E \sup_{\|u_1 - u_2\| \leq h} |I_3(u_1, u_2)| \leq \\ &\leq 2r^{-1} \gamma E |\psi'(G(\xi_0))| N \sup_{u \in v^c(R)} \max_{1 \leq j \leq N} |H(j; 0, u)| \cdot \\ &\cdot \sup_{\|u_1 - u_2\| \leq h} \max_{1 \leq j \leq N} \frac{|H(j; u_1, u_2)|}{d_{iN}(\theta)}, \quad (2.2.9) \\ &\sup_{\|u_1 - u_2\| \leq h} \max_{1 \leq j \leq N} \frac{|H(j; u_1, u_2)|}{d_{iN}(\theta)} \leq \end{aligned}$$

$$\leq h \max_{1 \leq j \leq N} \sum_{l=1}^q \left(\sup_{u \in v^c(R)} \frac{|h_{il}(j, u)|}{d_{il,N}(\theta)} \right) \frac{d_{il,N}(\theta)}{d_{iN}(\theta) d_{lN}(\theta)} \leq \sum_{l=1}^q k^{il} \tilde{k}^{il} h N^{-1}, \quad (2.2.10)$$

завдяки умовам (2.1.2), (2.1.3).

Застосуємо (2.2.7) та (2.2.10) до (2.2.9), і в результаті отримуємо

$$P \left\{ \sup_{\|u_1 - u_2\| < h} |I_3(u_1, u_2)| > r \right\} \leq k_1 r^{-1} N^{-\frac{1}{2}} h, \quad (2.2.11)$$

$$\text{з } k_1 = 2\gamma E |\psi'(G(\xi_0))| R \|k\| \left(\sum_{i,l=1}^q k^{il} \tilde{k}^{il} \right).$$

Аналогічним чином, згідно (2.1.1)

$$P \left\{ \sup_{\|u_1 - u_2\| < h} |I_4(u_1, u_2)| > r \right\} \leq r^{-1} E \sup_{|u_1 - u_2| \leq h} |I_4(u_1, u_2)| \leq$$

$$\leq 2r^{-1} \gamma E |\psi'(G(\xi_0))| N \sup_{u \in v^c(R)} \max_{1 \leq j \leq N} \frac{|h_i(j, u)|}{d_{iN}(\theta)}.$$

$$\cdot \sup_{\|u_1 - u_2\| \leq h} \max_{1 \leq j \leq N} |H(j; u_1, u_2)| \leq k_2 r^{-1} h \quad (2.2.12)$$

$$\text{з } k_2 = 2\gamma E |\psi'(G(\xi_0))| k^i \|k\|.$$

З (2.2.11) та (2.2.12) випливає, що

$$P \left\{ \sup_{\|u_1 - u_2\| \leq h} |I_2(u_1) - I_2(u_2)| > r \right\} \leq$$

$$\leq 2r^{-1} h (k_1 N^{-1/2} + k_2) \leq K_3 r^{-1} h. \quad (2.2.13)$$

Позначимо N_h скінченну h -сітку кулі $v^c(R)$. Тоді

$$\sup_{u \in v^c(R)} |I_2(u)| \leq \sup_{\|u_1 - u_2\| \leq h} |I_2(u_1) - I_2(u_2)| + \max_{u \in N_h} |I_2(u)|. \quad (2.2.14)$$

З (2.2.13) та (2.2.14) маємо для будь-якого $r > 0$

$$P \left\{ \sup_{u \in v^c(R)} |I_2(u)| > r \right\} \leq 2k_3 r^{-1} h + \left\{ \max_{u \in N_h} |I_2(u)| > \frac{r}{2} \right\}.$$

Для $\varepsilon > 0$ задамо $h = \frac{\varepsilon r}{4k_3}$. Тоді для $N > N_0$, завдяки поточковій

збіжності $I_2(u)$ до нуля за ймовірністю,

$$P \left\{ \max_{u \in N_{\frac{\varepsilon r}{4k_3}}} |I_2(u)| > \frac{r}{2} \right\} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

і, таким чином,

$$P \left\{ \max_{u \in v^c(R)} |I_2(u)| > r \right\} \leq \varepsilon.$$

З іншого боку, при фіксованих $1 \leq j \leq N$, $u \in v^c(R)$ існує таке $\delta \in (0, 1)$, що м.н.

$$\begin{aligned} & |\psi(G(\xi_j) + H(j; 0, u)) - \psi(G(\xi_j)) - \psi'(G(\xi_j))H(j; 0, u)| = \\ & = |\psi'(G(\xi_j)) + (j; 0, u) - \psi'(G(\xi_j))| \cdot |H(j; 0, u)| \leq \\ & \leq L \cdot |H(j; 0, u)|^2 \leq L \|k\|^2 R^2 N^{-1}. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Завдяки (2.1.1) і (2.2.15),

$$\sup_{u \in v^c(R)} |I_1(u)| \leq L \gamma k^i \|k\|^2 R^2 N^{-\frac{1}{2}} \text{ м.н.},$$

і Лему 1 доведено. ■

Введемо випадковий вектор

$$L_N(u) = (L_N^i(u))_{i=1}^q = \left(\sum_{j=1}^N \left(\eta_j - \sum_{i=1}^q \frac{g_l(j, \theta)}{d_{iN}(\theta)} u_l \right) \cdot \frac{g_i(j, \theta)}{d_{iN}(\theta)} \right)_{i=1}^q, \quad (2.2.16)$$

який відповідає допоміжній (віртуальній) лінійній регресійній моделі

$$Z_j = \sum_{l=1}^q g_l(j, \theta) \beta_l + \eta_j, \quad j = \overline{1, N}.$$

Система нормальних рівнянь

$$L_N(u) = 0 \quad (2.2.17)$$

задає нормовану лінійну оцінку найменших квадратів $\tilde{\beta}_N$ параметра $\beta \in \mathbb{R}^q$.
Покладемо

$$\tilde{u}_N = \tilde{u}_N(\theta) = d_N(\theta)(\tilde{\beta}_N - \beta). \quad (2.2.18)$$

Лема 2. Нехай виконуються умови **A1-A3**, **B5**, **C4**. Тоді для довільних $R > 0, r > 0$

$$P \left\{ \sup_{u \in v^c(R)} \|\Psi_N(u) - L_N(u)\| > r \right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (2.2.19)$$

Доведення.

$$\Psi_T^i(u) - L_T^i(u) = \sum_{j=1}^N \eta_j \frac{h_i(j, u)}{d_{iN}(\theta)} + \sum_{j=1}^N H(j; 0, u) \frac{h_i(j, u)}{d_{iN}(\theta)} -$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=1}^N \eta_j \frac{g_i(j, \theta)}{d_{iN}(\theta)} + \sum_{j=1}^N \frac{g_i(j, \theta)}{d_{iN}(\theta)} \sum_{l=1}^q \frac{g_l(j, \theta)}{d_{lN}(\theta)} u_l = \\
& = \sum_{j=1}^N \eta_j \frac{H_i(j; u, 0)}{d_{iN}(\theta)} + \sum_{j=1}^N H(j; 0, u) \frac{H_i(j; u, 0)}{d_{iN}(\theta)} + \\
& + \sum_{j=1}^N \frac{g_i(j, \theta)}{d_{iN}(\theta)} \left[H(j; 0, u) + \sum_{l=1}^q \frac{g_l(j, \theta)}{d_{lN}(\theta)} \right] = \\
& = I_5(u) + I_6(u) + I_7(u).
\end{aligned}$$

Для фіксованого $u \in v^c(R)$, за допомогою (12.7), (1.3.10), (2.2.3) та нерівності (4.16), отримуємо

$$\begin{aligned}
EI_5^2(u) &= \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \text{cov}(\eta_j, \eta_l) \frac{H_i(j; u, 0)}{d_{iN}(\theta)} \frac{H_i(l; u, 0)}{d_{iN}(\theta)} \leq \\
&\leq \left(\sum_{l=1}^q k^{il} \tilde{k}^{il} \right)^2 R^2 N^{-2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N |\text{cov}(\eta_j, \eta_l)| = O(N^{-\alpha}).
\end{aligned}$$

де α задано (1.2.5), тобто $I_5(u) \xrightarrow{P} 0$ при $N \rightarrow \infty$ поточково для $u \in v^c(R)$.

З іншого боку, завдяки (2.2.10)

$$E \sup_{||u_1 - u_2|| \leq h} |I_5(u_1) - I_5(u_2)| = \gamma E |\psi(G(\xi_0))| \left(\sum_{l=1}^q k^{il} \tilde{k}^{il} \right) h,$$

і аналогічно до $I_2(u)$ у доведенні Лема 1, можна показати рівномірну за $u \in v^c(R)$ збіжність $I_5(u)$ до нуля за ймовірністю.

Беручи до уваги нерівності (2.2.7) та (2.2.10), отримуємо

$$\sup_{u \in v^c(R)} |I_6(u)| \leq ||k|| \left(\sum_{l=1}^q k^{il} \tilde{k}^{il} \right) R^2 N^{-1/2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Зауважимо, що $I_7(u)$ можна записати у вигляді

$$I_7(u) = -\frac{1}{2} \sum_{l_1=1}^q \sum_{l_2=1}^q \left(\sum_{j=1}^N \frac{h_{l_1 l_2}(j, u_N^*)}{d_{l_1 N}(\theta) d_{l_2 N}(\theta)} \frac{g_i(j, \theta)}{d_{iN}(\theta)} \right) u_{l_1} u_{l_2}$$

для деякого $u_N^* \in v(R)$. Тоді за нерівністю Коші-Буняковського та **B5**

$$\begin{aligned}
|I_7(u)| &\leq \frac{k^i}{2} \sum_{l_1=1}^q \sum_{l_2=1}^q \left(k^{l_1 l_2} \tilde{k}^{l_1 l_2} |u_{l_1}| |u_{l_2}| \right) N^{-\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq \frac{q k^i}{2} \max_{l_1, l_2=1, q} \left[k^{l_1 l_2} \tilde{k}^{l_1 l_2} \right] ||u||^2 N^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Остання нерівність показує, що $\sup_{u \in v^c(R)} |I_7(u)| \xrightarrow{\rightarrow \infty} 0$, і Лему 2 доведено. ■

З (2.2.5) та (2.2.19) випливає

Наслідок 1. *Нехай виконуються умови A1-A2, B5, C4. Тоді для довільних $R > 0$, $r > 0$*

$$P \left\{ \sup_{u \in v^c(R)} \|M_N(u) - L_N(u)\| > r \right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Використовуючи (2.2.16) та (2.2.17), знайдемо явну формулу для $\tilde{u}_N$ (див (2.2.18)), якщо виконується B6.

Запишемо для довільного $i = \overline{1, q}$,

$$L_N^i(u) = \sum_{j=1}^N \left(\eta_j - \sum_{l=1}^q \frac{g_l(j, \theta)}{d_{lN}(\theta)} u_l \right) \frac{g_i(j, \theta)}{d_{iN}(\theta)} = 0,$$

або

$$\sum_{j=1}^N \eta_j \frac{g_i(j, \theta)}{d_{iN}(\theta)} = \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^q \frac{g_l(j, \theta)}{d_{lN}(\theta)} u_l \frac{g_i(j, \theta)}{d_{iN}(\theta)} = \sum_{l=1}^q J_{il,N}(\theta) u_l.$$

Отже маємо систему рівнянь відносно u :

$$J_N(\theta)u = d_N^{-1} \sum_{j=1}^N \eta_j \nabla g(j, \theta).$$

Звідки

$$\tilde{u}_N = \Lambda_N(\theta) d_N^{-1}(\theta) \sum_{j=1}^N \eta_j \nabla g(j, \theta),$$

де $\Lambda_N(\theta) = J_N^{-1}(\theta)$, $\nabla g(j, \theta)$ — вектор-градієнт функції $g(j, \theta)$

$$\nabla g(j, \theta) = \begin{bmatrix} g_1(j, \theta) \\ \dots \\ g_q(j, \theta) \end{bmatrix}.$$

Наступна теорема стверджує, що нормований відповідним чином векторний інтеграл від випадкового процесу $\eta(t)$, зважений градієнтом функції регресії, є асимптотично нормальним. Складність доведення такого факту полягає в тому, що процес, який стоїть в сумі є нелінійним перетворенням гаусівської випадкової послідовності з сильною залежністю.

Теорема 5. *Нехай виконано умови A1-A3, B5, B7 та с.ш. f випадкової послідовності ξ_j , $j \in \mathbb{Z}$ є μ -припустимою, якщо $m = \text{Hrank}(A) = 1$, $\alpha > 1/2$, або $\text{Hrank}(A) = m$, $\alpha m > 1$, де α задано (1.2.5). Тоді випадковий вектор*

$$\zeta_N = d_N^{-1}(\theta) \sum_{j=1}^N \eta_j \nabla g(j, \theta).$$

де $\eta_j = A(\xi_j)$, асимптотично, при $N \rightarrow \infty$, нормальний $N(0, \bar{\sigma})$, де

$$\bar{\sigma} = 2\pi \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(A)}{n!} \int_{-\pi}^{\pi} f^{*n}(\lambda) \mu(d\lambda, \theta).$$

Доведення. Цю теорему доведено в роботі [6]. ■

Сформулюємо теорему Брауера про нерухому точку (Детальніше, див. [13]).

Теорема 6. Нехай $F : v^c(R) \rightarrow v^c(R)$ — неперервне відображення. Тоді існує $x_0 \in v^c(R)$ таке, що $F(x_0) = x_0$.

Для $A \in \mathfrak{B}^q$ ($\mathfrak{B}^q$ — σ -алгебра борелевих підмножин $\mathbb{R}^q$) та $\varepsilon > 0$ нехай

$$A_\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^q : \inf_{y \in A} \|x - y\| < \varepsilon \right\}, \quad A_{-\varepsilon} = \mathbb{R}^q \setminus (\mathbb{R}^q \setminus A)_\varepsilon.$$

Теорема 7. Нехай μ — невід’ємна диференційовна функція на $[0, +\infty)$ така, що

$$(1) \quad b = \int_0^\infty |\mu'(\lambda)| \lambda^{q-1} d\lambda < +\infty; \quad (2) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mu(\lambda) = 0.$$

Тоді для довільної опуклої множини $C \in \mathfrak{B}^q$ та для довільних $\varepsilon, \beta > 0$ має місце нерівність

$$\int_{C_\varepsilon \setminus C_{-\beta}} \mu(\|\lambda\|) d\lambda \leq b \left(\frac{2\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma(\frac{q}{2})} \right) (\varepsilon + \beta).$$

Детальніше див §3 книги [14].

2.3 Доведення теореми про асимптотичну нормальність

Доведення. Враховуючи Теорему 5, маємо, що випадковий вектор $\tilde{u}_N$ є асимптотично нормальним $N(0, \sigma(\theta))$ при $N \rightarrow \infty$, де $\sigma(\theta)$ визначена формулою (2.1.6).

Дійсно, коваріаційна матриця вектора $\tilde{u}_N$ має вигляд

$$\sigma_N(\theta) = \Lambda_N(\theta) \bar{\sigma}_N \theta \Lambda_N(\theta).$$

де $\bar{\sigma}_N(\theta)$ — коваріаційна матриця вектора ζ_j з Теореми 5. Тоді

$$\sigma_N(\theta) = 2\pi\gamma^2 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(\phi \circ G)}{n!} \Lambda_N(\theta) \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^{*n}(\lambda) \mu_N(d\lambda, \theta) \right) \Lambda_N(\theta) \rightarrow$$

$$\rightarrow 2\pi\gamma^2 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(\phi \circ G)}{n!} \Lambda(\theta) \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^{*n}(\lambda) \mu(d\lambda, \theta) \right) \Lambda(\theta) = \sigma(\theta).$$

при $N \rightarrow \infty$.

Нам треба довести, що функція розподілу $F_N(y, \theta)$ випадкового вектору $\hat{u}_N = d_N(\theta)(\hat{\theta}_N - \theta)$ збігається при $N \rightarrow \infty$ до гаусівської функції розподілу $\Phi_{0, \sigma(\theta)}(y)$.

Покажемо, що для довільного $r > 0$

$$\Delta_N(R) = P \{ \|\hat{u}_N - \tilde{u}_N\| > r \} \rightarrow 0, N \rightarrow \infty. \quad (2.3.1)$$

Задамо подію $A_N = \{ \|\tilde{u}_N\| \in v^c(R - r) \}$, де R таке, що для $N > N_0$, завдяки асимптотичній нормальності $\tilde{u}_N$, виконується $P\{\bar{A}_N\} \leq \frac{\varepsilon}{3}$, де $\varepsilon > 0$ — фіксоване як завгодно мале число.

$$\text{Введемо також подію } B_N = \left\{ \sup_{u \in v^c(R)} \|\Lambda_N(\theta)(M_N(u) - L_N(u))\| \leq r \right\}.$$

З умови **B6** та наслідку з Лем 1 і 2 випливає, що для $N > N_0$

$$\begin{aligned} P\{\bar{B}_N\} &= P \left\{ \sup_{u \in v^c(R)} \|\Lambda_N(\theta)(M_N(u) - L_N(u))\| > r \right\} \leq \\ &\leq P \left\{ \lambda_{\max}(\Lambda_N(\theta)) \sup_{u \in v^c(R)} \|\Lambda_N(\theta)(M_N(u) - L_N(u))\| > r \right\} = \\ &= P \left\{ \frac{1}{\lambda_{\min}(J_N(\theta))} \sup_{u \in v^c(R)} \|(M_N(u) - L_N(u))\| > r \right\} \leq \\ &\leq P \left\{ \sup_{u \in v^c(R)} \|(M_N(u) - L_N(u))\| > \lambda_* r \right\} \leq \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Беручи до уваги умову **D3**, розглянемо також подію C_N , яка полягає в тому, що М-оцінка $\hat{u}_N$ є єдиним розв'язком системи рівнянь (2.2.2), причому, для $N > N_0$: $P\{\bar{C}_N\} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Отже, для $N > N_0$

$$P(A_N \cap B_N \cap C_N) \geq 1 - \varepsilon. \quad (2.3.2)$$

Маємо далі

$$\begin{aligned} \Lambda_N(\theta)L_N(u) &= \Lambda_N(\theta) \left(\sum_{j=1}^N \eta_j \cdot \frac{g_i(j, \theta)}{d_{iN}(\theta)} \right)_{i=1}^q - \\ &- \Lambda_N(\theta) \left(\sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^q u_l \frac{g_l(j, \theta)}{d_{lN}(\theta)} \frac{g_i(j, \theta)}{d_{iN}(\theta)} \right)_{i=1}^q = \tilde{u}_N - u. \end{aligned}$$

Якщо подія $A_N \cap B_N \cap C_N$ сталася, то для $u \in v^c(R)$

$$\begin{aligned} \|u + \Lambda_N(\theta)M_N(\theta)\| &= \|u + \Lambda_N(\theta)(M_N(\theta)L_N(\theta)) + \Lambda_N(\theta)L_N(\theta)\| = \\ &= \|u + \tilde{u}_N - u + \Lambda_N(\theta)(M_N(\theta) - L_N(\theta))\| \leq \\ &\leq \|\tilde{u}_N\| + \|\Lambda_N(\theta)(M_N(u) - L_N(u))\| \leq R - r + r = R. \end{aligned}$$

тобто $F_N(u) = u + \Lambda(\theta)M_N(u)$ – неперервне відображення $v^c(R)$ в $v^c(R)$.

Для того, щоб довести (2.3.1), застосуємо теорему Брауера про нерухому точку (Теорема 6) до $F_N(u)$, тоді отримаємо, що існує точка $u_N^0 \in v^c(R)$ така, що $F(u_N^0) = u_N^0$, або, завдяки тому, що $\Lambda_N(\theta)$ – невироджена, $M_N(u_N^0) = 0$. Завдяки виконанню події C_N , єдиним розв’язком системи рівнянь (2.2.2.) в кулі $v^c(R)$ є нормована М-оцінка $\hat{u}_N$.

Таким чином, $\{A_N \cap B_N \cap C_N\} \subset \{\hat{u}_N \in v^c(R)\}$ і $P\{\hat{u}_N \in v^c(R)\} \geq 1 - \varepsilon$.

Зауважимо, що з (2.3.2) випливає

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &\leq \left\{ \{\hat{u}_N \in v^c(R)\} \cap B_N \right\} = \\ &= P \left\{ \{\hat{u}_N \in v^c(R)\} \cap \left\{ \sup_{u \in v^c(R)} \|\Lambda_N(\theta)(M_N(u) - L_N(u))\| \leq r \right\} \right\} \leq \\ &= P \{ \|\Lambda_N(\theta)(M_N(\hat{u}_N) - L_N(\hat{u}_N))\| \leq r \} = P \{ \|\Lambda_N(\theta)L_N(\hat{u}_N)\| \leq r \} = \\ &= P \{ \|\tilde{u}_N - \hat{u}_N\| \leq r \}. \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Тоді з (2.3.3) випливає (2.3.1).

Позначимо $\Pi(-\infty; y \pm \vec{\varepsilon}) = (-\infty; y_1 \pm \vec{\varepsilon}) \times \dots \times (-\infty; y_q \pm \vec{\varepsilon})$, $\varepsilon \geq 0$.

Беручи до уваги (4.26), отримуємо для функції розподілу $F_N(y, \theta) = P\{\hat{u}_N \in \Pi(-\infty, y)\}$ для будь-яких $y \in \mathbb{R}^q$ та довільного $\varepsilon \geq 0$.

$$F_N(y, \theta) = P\{\tilde{u}_N \in \Pi(-\infty; y, -\vec{\varepsilon})\} - \Delta_N(\varepsilon), \quad (2.3.4)$$

$$F_N(y, \theta) = P\{\tilde{u}_N \in \Pi(-\infty; y, +\vec{\varepsilon})\} + \Delta_N(\varepsilon). \quad (2.3.5)$$

Завдяки Теоремі 5,

$$\left| P\{\tilde{u}_N \in \Pi(-\infty; y, +\vec{\varepsilon})\} - \Phi_{0, \sigma(\theta)}(y \pm \vec{\varepsilon}) \right| \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (2.3.6)$$

Нехай $\varphi(y, \theta)$ — гаусівська щільність, що відповідає функції розподілу $\Phi_{0, \sigma(\theta)}(y)$.

Оскільки $\lambda_{\min}(\sigma(\theta)) = \underline{\lambda} > 0$, $\lambda_{\max}(\sigma(\theta)) = \bar{\lambda} < +\infty$, то

$$\varphi(y, \theta) \leq (2\pi\underline{\lambda})^{-q/2} \exp \left\{ -\|y\|^2 / 2\bar{\lambda} \right\} = \nu(\|y\|).$$

Якщо $A = \Pi(-\infty, y)$, то $A_{-\varepsilon} = \Pi(-\infty, y - \vec{\varepsilon}]$,

$$\left(\Pi(-\infty, y + \vec{\varepsilon}] \right)_{-\varepsilon} = \Pi(-\infty, y] = A^c \quad \nu(\|y\|)$$

$\left(\Pi\left(-\infty, y + \vec{\varepsilon}\right]\right)_{-\varepsilon} = \Pi(-\infty, y] = A^c$. Тепер застосуємо Теорему 7 до $\nu(\|y\|)$, для будь-якого $\omega \neq 0$ отримуємо

$$\left|\Phi_{0,\sigma(\theta)}(y) - \Phi_{0,\sigma(\theta)}(y + \vec{\omega})\right| = \int_{\Pi} \varphi(y, \theta) dy \leq b \left(\frac{2\pi^{\frac{q}{2}}}{\Gamma(\frac{q}{2})}\right) \cdot |\omega|,$$

де

$$\Pi = \begin{cases} \Pi(-\infty, y + \vec{\omega}) \setminus A^c, & \text{якщо } \omega > 0, \\ A \setminus A_{\omega}, & \text{якщо } \omega < 0. \end{cases}$$

Для будь-яких $y \in \mathbb{R}^q$ та для довільного $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} F_N(y, \theta) - \Phi_{0,\sigma(\theta)}(y) &\leq \Delta_N(\varepsilon) + P\left\{\tilde{u}_N \in \Pi(-\infty, y + \vec{\varepsilon})\right\} - \Phi_{0,\sigma(\theta)}(y) \leq \\ &\leq F_N(y, \theta) - \Phi_{0,\sigma(\theta)}(y) \leq \Delta_N(\varepsilon) + \left|P\left\{\tilde{u}_N \in \Pi(-\infty, y + \vec{\varepsilon})\right\} - \Phi_{0,\sigma(\theta)}(y)\right| \leq \\ &\leq F_N(y, \theta) - \Phi_{0,\sigma(\theta)}(y) \leq \Delta_N(\varepsilon) + \left|P\left\{\tilde{u}_N \in \Pi(-\infty, y + \vec{\varepsilon})\right\} - \Phi_{0,\sigma(\theta)}(y + \vec{\varepsilon})\right| + \\ &\quad + \left|\Phi_{0,\sigma(\theta)}(y + \vec{\varepsilon}) - \Phi_{0,\sigma(\theta)}(y)\right|. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{0,\sigma(\theta)}(y) - F_N(y, \theta) &\leq \Delta_N(\varepsilon) - P\left\{\tilde{u}_N \in \Pi(-\infty, y - \vec{\varepsilon})\right\} + \Phi_{0,\sigma(\theta)}(y) \leq \\ &\leq \Delta_N(\varepsilon) + \left|\Phi_{0,\sigma(\theta)}(y) - P\left\{\tilde{u}_N \in \pi(-\infty, y - \vec{\varepsilon})\right\}\right| \leq \\ &\leq \Delta_N(\varepsilon) + \left|P\left\{\Phi_{0,\sigma(\theta)}(y - \vec{\varepsilon}) - \tilde{u}_N \in \Pi(-\infty, y - \vec{\varepsilon})\right\}\right| + \\ &\quad + \left|\Phi_{0,\sigma(\theta)}(y) - \Phi_{0,\sigma(\theta)}(y - \vec{\varepsilon})\right|. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Зі співвідношень (2.3.1)-(2.3.8), отримуємо, що $|F_N(y, \theta) - \Phi_{0,\sigma(\theta)}(y)| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Таким чином, Теорему 4 доведено. ■

Висновки

1. Запропоновано скупність умов до функції регресії, випадкового шуму та функції втрат, яка забезпечує асимптотичну нормальність М-оцінок.
2. За допомогою двох лем редукції, центральної граничної теореми для зваженої суми від нелінійно перетвореної гаусівської стаціонарної сильно залежної послідовності, теореми Брауера про нерухому точку та припущення про асимптотичну єдиність за ймовірністю оцінок, доведено теорему про асимптотичну нормальність М-оцінок.

3 ОЦІНЮВАННЯ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ КОВАРІАЦІЙНИХ МАТРИЦЬ ГРАНИЧНИХ РОЗПОДІЛІВ

3.1 Оцінки хвостів рядів Парсеваля.

У гільбертовому просторі $L_2(R, \varphi(x)dx)$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, розглянемо тотожність Парсеваля

$$E\psi^2(G(\xi(0))) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(G(x))\varphi(x)dx = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{C_n^2(\psi \circ G)}{n!} \quad (3.1.1)$$

для розкладу функції $\psi(G(x))$ в ряд Фур'є за поліномами Чебишова-Ерміта. Скористаємось рекурентною формулою для поліномів Чебишева-Ерміта (див., наприклад, [15])

$$H'_n(x) = nH_{n-1}(x) \quad (3.1.2)$$

Маємо

$$\begin{aligned} C_{n-1}(\phi \circ G) &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(G(x))H_{n-1}(x)\varphi(x)dx = \\ &= \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(G(x))nH_{n-1}(x)\varphi(x)dx = \\ &= \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(G(x))H'_n(x)\varphi(x)dx = \\ &= \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(G(x))\varphi(x)dH_n(x) = \\ &= \frac{1}{n} \psi(G(x))H_n(x)\varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)(\psi(G(x))\varphi(x))'dx = \\ &= -\frac{1}{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi(G(x))G'(x)H_n(x)\varphi(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} \psi(G(x))\varphi'(x)H_n(x)dx \right) = \\ &= -\frac{1}{n} C_n((\psi' \circ G)G') + \frac{1}{n} C_n(x(\psi \circ G)). \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо співвідношення

$$C_{n-1}(\psi \circ G) = -\frac{1}{n}C_n((\psi' \circ G)G') + \frac{1}{n}C_n(x(\psi \circ G)), \quad (3.1.3)$$

або

$$C_n(\psi \circ G) = -\frac{1}{n+1}C_{n+1}((\psi' \circ G)G') + \frac{1}{n+1}C_{n+1}(x(\psi \circ G)). \quad (3.1.4)$$

Із формули (3.1.1) маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(G(x))\varphi(x)dx - \sum_{k=m}^N \frac{C_k^2(\psi \circ G)}{k!} = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{C_k^2(\psi \circ G)}{k!}. \quad (3.1.5)$$

Для оцінювання хвоста ряду (3.1.5) скористаємось рівністю (3.1.4):

$$\begin{aligned} \frac{C_k^2(\psi \circ G)}{k!} &= \frac{1}{k!} \left(-\frac{1}{k+1}C_{k+1}(\psi'(G)G') + \frac{1}{k+1}C_{k+1}C_{k+1}(x(\psi \circ G)) \right)^2 \leq \\ &\leq \frac{2}{k!} \left(\frac{C_{k+1}^2(\psi'(G)G')}{(k+1)^2} + \frac{C_{k+1}^2(x(\psi \circ G))}{(k+1)^2} \right) = \\ &= \frac{2}{k+1} \left(\frac{C_{k+1}^2(\psi'(G)G')}{(k+1)!} + \frac{C_{k+1}^2(x(\psi \circ G))}{(k+1)!} \right), \quad k \geq n+1. \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{C_k^2(\psi \circ G)}{k!} \leq \\ &\leq \frac{2}{N+2} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{C_{k+1}^2(\psi'(G)G')}{(k+1)!} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{C_{k+1}^2(x(\psi \circ G))}{(k+1)!} \right) = \\ &= \frac{2}{N+2} \left(\sum_{k=N+2}^{\infty} \frac{C_{k+1}^2(\psi'(G)G')}{k!} + \sum_{k=N+2}^{\infty} \frac{C_{k+1}^2(x(\psi \circ G))}{k!} \right) \leq \\ &\leq \frac{2}{N+2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\psi'(G(x)))^2 (G'(x))^2 \varphi(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \psi^2(G(x)) \varphi(x) dx \right). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Оскільки за умовами нашої роботи інтеграли в правій частині (3.1.7) скінченні, то

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{C_k^2(\psi \circ G)}{k!} \leq C \cdot N^{-1}. \quad (3.1.8)$$

Формула (3.1.8) є асимптотичною, тобто при $n \rightarrow \infty$, оцінкою. Вона є змістовною з теоретичної точки зору, але для практичного застосування треба

порахувати інтеграли (3.1.7), щоб знати константу C , яка може виявитись досить великою.

Наведемо підрахунки перших членів ряду (3.1.1) та лівої частини формули (3.1.7) для прикладів функцій втрат та їх похідних із Додатку. У якості функції G ми беремо третій поліном Чебишова-Ерміта $H_3(x) = x^3 - 3x$.

I. О.н.к.

$$\rho(x) = x^2, \psi(x) = 2x, \psi(G(x)) = 2(x^3 - 3x).$$

$$E(\psi^2(G(x))) = \int_{-\infty}^{\infty} (2(x^3 - 3x))^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 4.$$

$$C_j(\psi \circ G) : C_1(\psi \circ G) = 2,$$

$$C_3(\psi \circ G) = C_5(\psi \circ G) = C_7(\psi \circ G) = C_9(\psi \circ G) = 0.$$

$$\frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} : \frac{C_1^2(\psi \circ G)}{1!} = 4,$$

$$\frac{C_3^2(\psi \circ G)}{3!} = \frac{C_5^2(\psi \circ G)}{5!} = \frac{C_7^2(\psi \circ G)}{7!} = \frac{C_9^2(\psi \circ G)}{9!} = 0.$$

$$\sum_{j=1}^9 \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 4.$$

$$E(\psi^2(G(x))) - \sum_{j=1}^9 \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.$$

II.

$$\rho(x) = (2\nu)^{-1} (1 - \exp\{-\nu x^2\}), \psi(x) = x \exp\{-\nu x^2\},$$

$$\psi(G(x)) = (x^3 - 3x) \exp\{-\nu(x^3 - 3x)\}.$$

Коефіцієнти прораховані для значення параметру $\nu = 0.1$.

$$E(\psi^2(G(x))) = \int_{-\infty}^{\infty} ((x^3 - 3x) \cdot \exp\{-\nu(x^3 - 3x)\})^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1.06825898$$

$$C_j(\psi \circ G) : C_1(\psi \circ G) = -0.58847369, C_3(\psi \circ G) = 1.45809364,$$

$$C_5(\psi \circ G) = -5.08036905, C_7(\psi \circ G) = 20.95228298,$$

$$C_9(\psi \circ G) = -86.25597596.$$

$$\frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} : \frac{C_1^2(\psi \circ G)}{1!} = 0.34630128, \frac{C_3^2(\psi \circ G)}{3!} = 0.35433951,$$

$$\frac{C_5^2(\psi \circ G)}{5!} = 0.21508458, \frac{C_7^2(\psi \circ G)}{7!} = 0.08710281, \frac{C_9^2(\psi \circ G)}{9!} = 0.02050290.$$

$$\sum_{j=1}^9 \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 1.02333109.$$

$$E(\psi^2(G(x))) - \sum_{j=1}^9 \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.04492789.$$

III.

$$\rho(x) = \nu x \cdot \arctg(\mu x) - \nu(2\mu)^{-1} \ln(1 + \mu^2 x^2), \psi(x) = \nu \cdot \arctg(\mu x),$$

$$\psi(G(x)) = \nu \cdot \arctg(\mu(x^3 - 3x)).$$

Коефіцієнти прораховані для значень параметрів $\mu = 1, \nu = 1$.

$$E(\psi^2(G(x))) = \int_{-\infty}^{\infty} (\nu \cdot \arctg(\mu(x^3 - 3x)))^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.80654930.$$

$$C_j(\psi \circ G) : C_1(\psi \circ G) = -0.38582426, C_3(\psi \circ G) = 1.60684569,$$

$$C_5(\psi \circ G) = -4.45319594, C_7(\psi \circ G) = 13.85631089,$$

$$C_9(\psi \circ G) = -37.18948645.$$

$$\frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} : \frac{C_1^2(\psi \circ G)}{1!} = 0.14886036, \frac{C_3^2(\psi \circ G)}{3!} = 0.43032551,$$

$$\frac{C_5^2(\psi \circ G)}{5!} = 0.16525795, \frac{C_7^2(\psi \circ G)}{7!} = 0.03809471, \frac{C_9^2(\psi \circ G)}{9!} = 0.00381134.$$

$$\sum_{j=1}^9 \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.78634987.$$

$$E(\psi^2(G(x))) - \sum_{j=1}^9 \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.02019943.$$

IV.

$$\rho(x) = \frac{x^2}{x^2 + c^2}, \psi(x) = \frac{2c^2 x}{(x^2 + c^2)^2}, \psi(G(x)) = \frac{2c^2(x^3 - 3x)}{((x^3 - 3x)^2 + c^2)^2}.$$

Коефіцієнти прораховані для значення параметру $c = 2$.

$$E(\psi^2(G(x))) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2c^2(x^3 - 3x)}{((x^3 - 3x)^2 + c^2)^2} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.06871706.$$

$$C_j(\psi \circ G) : C_1(\psi \circ G) = -0.14526595, C_3(\psi \circ G) = 0.34131014,$$

$$C_5(\psi \circ G) = -1.18240148, C_7(\psi \circ G) = 5.11031837,$$

$$C_9(\psi \circ G) = -24.86109653.$$

$$\frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} : \frac{C_1^2(\psi \circ G)}{1!} = 0.02110220, \frac{C_3^2(\psi \circ G)}{3!} = 0.01941544,$$

$$\frac{C_5^2(\psi \circ G)}{5!} = 0.01165061, \frac{C_7^2(\psi \circ G)}{7!} = 0.00518162, \frac{C_9^2(\psi \circ G)}{9!} = 0.00170325.$$

$$\sum_{j=1}^9 \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.05905311.$$

$$E(\psi^2(G(x))) - \sum_{j=1}^9 \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.00966395.$$

V.

$$\rho(x) = 2 \ln ch \frac{x}{2}, \psi(x) = th \frac{x}{2}, \psi(G(x)) = th \frac{x^3 - 3x}{2}.$$

$$E(\psi^2(G(x))) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(th \frac{x^3 - 3x}{2} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.34729763.$$

$$C_j(\psi \circ G) : C_1(\psi \circ G) = -0.24724198, C_3(\psi \circ G) = 1.06619798,$$

$$C_5(\psi \circ G) = -2.96787456, C_7(\psi \circ G) = 9.00005283,$$

$$C_9(\psi \circ G) = -20.72679459.$$

$$\frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} : \frac{C_1^2(\psi \circ G)}{1!} = 0.06112860, \frac{C_3^2(\psi \circ G)}{3!} = 0.18946302,$$

$$\frac{C_5^2(\psi \circ G)}{5!} = 0.07340233, \frac{C_7^2(\psi \circ G)}{7!} = 0.01607162, \frac{C_9^2(\psi \circ G)}{9!} = 0.00118386.$$

$$\sum_{j=1}^9 \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.34124943.$$

$$E(\psi^2(G(x))) - \sum_{j=1}^9 \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.00604821.$$

VI. Зрізана о.н.к.

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, |x| \leq r, \\ \frac{r^2}{2}, |x| > r. \end{cases}, \psi(x) = x \cdot \chi_{[-r,r]}(x) = \begin{cases} x, |x| \leq r, \\ 0, |x| > r. \end{cases}$$

$$\psi(G(x)) = (x^3 - 3x) \cdot \chi_{[-r,r]}(x^3 - 3x) = \begin{cases} x^3 - 3x, |x^3 - 3x| \leq r, \\ 0, |x^3 - 3x| > r. \end{cases}$$

Коефіцієнти прораховані для значення параметру $r = 2$.

$$E(\psi^2(G(x))) = \int_{-\infty}^{\infty} ((x^3 - 3x) \cdot \chi_{[-r,r]}((x^3 - 3x))^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1.83964883.$$

$$C_j(\psi \circ G) : C_1(\psi \circ G) = -0.86385546, C_3(\psi \circ G) = 1.83964883,$$

$$C_5(\psi \circ G) = -6.04698825, C_7(\psi \circ G) = 25.05180846,$$

$$C_9(\psi \circ G) = -111.43735488, C_{11}(\psi \circ G) = 372.32170507,$$

$$C_{13}(\psi \circ G) = 1984.27600129, C_{15}(\psi \circ G) = -82829.05347494,$$

$$C_{17}(\psi \circ G) = 1706866.95992607.$$

$$\frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} : \frac{C_1^2(\psi \circ G)}{1!} = 0.74624626, \frac{C_3^2(\psi \circ G)}{3!} = 0.56405130,$$

$$\frac{C_5^2(\psi \circ G)}{5!} = 0.30471722, \frac{C_7^2(\psi \circ G)}{7!} = 0.12452244, \frac{C_9^2(\psi \circ G)}{9!} = 0.03422146,$$

$$\frac{C_{11}^2(\psi \circ G)}{11!} = 0.00347281, \frac{C_{13}^2(\psi \circ G)}{13!} = 0.00063230,$$

$$\frac{C_{15}^2(\psi \circ G)}{15!} = 0.00524645, \frac{C_{17}^2(\psi \circ G)}{17!} = 0.00819088.$$

$$\sum_{j=1}^{17} \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 1.79130114.$$

$$E(\psi^2(G(x))) - \sum_{j=1}^{17} \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.04834769.$$

VII. Оцінка Т'юкі.

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} \cdot \left(r^2 - \frac{x^2}{2}\right), & |x| \leq r, \\ \frac{r^4}{4}, & |x| > r. \end{cases}$$

$$\psi(x) = x(r^2 - x^2) \cdot \chi_{[-r,r]}(x) = \begin{cases} x(r^2 - x^2), & |x| \leq r, \\ 0, & |x| > r. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \psi(G(x)) &= (x^2 - 3x)(r^2 - (x^3 - 3x)^2) \cdot \chi_{[-r,r]}(x^3 - 3x) = \\ &= \begin{cases} (x^3 - 3x)(r^2 - (x^3 - 3x)^2), & |x^3 - 3x| \leq r, \\ 0, & |x^3 - 3x| > r. \end{cases} \end{aligned}$$

Коефіцієнти прораховані для значення параметру $r = 1.15$.

$$\begin{aligned} E(\psi^2(G(x))) &= \int_{-\infty}^{\infty} ((x^3 - 3x)(r^2 - (x^3 - 3x)^2) \cdot \\ &\quad \cdot \chi_{[-r,r]}(x^3 - 3x))^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.06904834 \end{aligned}$$

$$C_j(\psi \circ G) : C_1(\psi \circ G) = -0.03998107, C_3(\psi \circ G) = 0.09272757,$$

$$C_5(\psi \circ G) = -0.35230307, C_7(\psi \circ G) = 1.93325385,$$

$$C_9(\psi \circ G) = -14.83492260, C_{11}(\psi \circ G) = 155.76185342,$$

$$C_{13}(\psi \circ G) = -2127.18246567, C_{15}(\psi \circ G) = 35286.83662612,$$

$$C_{17}(\psi \circ G) = -671060.88710587, C_{19}(\psi \circ G) = 14089464.19014442.$$

$$\frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} : \frac{C_1^2(\psi \circ G)}{1!} = 0.00159849, \frac{C_3^2(\psi \circ G)}{3!} = 0.00143307,$$

$$\frac{C_5^2(\psi \circ G)}{5!} = 0.00103431, \frac{C_7^2(\psi \circ G)}{7!} = 0.00074156, \frac{C_9^2(\psi \circ G)}{9!} = 0.00060647,$$

$$\frac{C_{11}^2(\psi \circ G)}{11!} = 0.00060781, \frac{C_{13}^2(\psi \circ G)}{13!} = 0.00072666,$$

$$\frac{C_{15}^2(\psi \circ G)}{15!} = 0.00095219, \frac{C_{17}^2(\psi \circ G)}{17!} = 0.00126606,$$

$$\frac{C_{19}^2(\psi \circ G)}{19!} = 0.00163190.$$

$$\sum_{j=1}^{19} \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.01059852.$$

$$E(\psi^2(G(x))) - \sum_{j=1}^{19} \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.05844982.$$

VIII. Оцінка Ендрюса.

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & |x| \leq \pi, \\ 2, & |x| > \pi. \end{cases}, \psi(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases},$$

$$\rho(G(x)) = \begin{cases} \sin(x^3 - 3x), & |x^3 - 3x| \leq \pi, \\ 0, & |x^3 - 3x| > \pi. \end{cases}$$

$$E(\psi^2(G(x))) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sin(x^3 - 3x) \mathbb{I}_{[|x^3 - 3x| \leq \pi]} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.65862123.$$

$$C_j(\psi \circ G) : C_1(\psi \circ G) = -0.48547137, C_3(\psi \circ G) = 1.08472807,$$

$$C_5(\psi \circ G) = -3.69016216, C_7(\psi \circ G) = 15.85457751,$$

$$C_9(\psi \circ G) = -75.97671615.$$

$$\frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} : \frac{C_1^2(\psi \circ G)}{1!} = 0.23568245 \frac{C_9^2(\psi \circ G)}{9!} = 0.01590736,$$

$$\frac{C_3^2(\psi \circ G)}{3!} = 0.19610583, \frac{C_5^2(\psi \circ G)}{5!} = 0.11347747, \frac{C_7^2(\psi \circ G)}{7!} = 0.04987453, .$$

$$\sum_{j=1}^9 \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.61104764.$$

$$E(\psi^2(G(x))) - \sum_{j=1}^9 \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.04757359.$$

IX. Оцінка Хьюбера.

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & |x| \leq r, \\ r|x| - \frac{r^2}{2}, & |x| > r. \end{cases}, \psi(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq \pi, \\ r \cdot \text{sign}(x), & |x| > \pi. \end{cases}$$

$$\psi(G(x)) = \begin{cases} x^2 - 3x, & |x^3 - 3x| \leq \pi, \\ r \cdot \text{sign}(x^3 - 3x), & |x^3 - 3x| > \pi. \end{cases}$$

Коефіцієнти прораховані для значення параметру $r = 2$.

$$E(\psi^2(G(x))) = \int_{-\infty}^{\infty} ((x^3 - 3x)\mathbb{I}_{(x^3-3x) \in [-\pi, \pi]})^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} dx + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} ((r \cdot \text{sign}(x^3 - 3x))\mathbb{I}_{(x^3-3x) \notin [-\pi, \pi]})^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} dx = 2.02164988.$$

$$C_j(\psi \circ G) : C_1(\psi \circ G) = -0.64789160, C_3(\psi \circ G) = 2.48754043,$$

$$C_5(\psi \circ G) = -7.12680758, C_7(\psi \circ G) = 22.67620594,$$

$$C_9(\psi \circ G) = -57.66235224.$$

$$\frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} : \frac{C_1^2(\psi \circ G)}{1!} = 0.41976352, \frac{C_3^2(\psi \circ G)}{3!} = 1.03130956,$$

$$\frac{C_5^2(\psi \circ G)}{5!} = 0.42326155, \frac{C_7^2(\psi \circ G)}{7!} = 0.10202586, \frac{C_9^2(\psi \circ G)}{9!} = 0.00916266.$$

$$\sum_{j=1}^9 \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 1.98552316.$$

$$E(\psi^2(G(x))) - \sum_{j=1}^9 \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.03612673.$$

Х. Оцінка Хемпела

$$\rho(x) = \begin{cases} x^2/2, |x| \leq \nu, \\ \nu|x| - \frac{\nu^2}{2}, \nu < |x| \leq \mu, \\ \nu\mu - \frac{(\nu+\mu-|x|)^2}{2}, \mu < |x| \leq \nu + \mu, \\ \nu\mu, |x| > \nu + \mu. \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} x, |x| \leq \nu, \\ \nu \cdot \text{sign}(x), \nu < |x| \leq \mu, \\ (\nu + \mu - |x|)\text{sign}(x), \mu < |x| \leq \nu + \mu, \\ 0, |x| > \nu + \mu. \end{cases}$$

$$\psi(G(x)) = \begin{cases} x^3 - 3x, |x^3 - 3x| \leq \nu, \\ \nu \cdot \text{sign}(x^3 - 3x), \nu < |x^3 - 3x| \leq \mu, \\ (\nu + \mu - |x^3 - 3x|)\text{sign}(x^3 - 3x), \mu < |x^3 - 3x| \leq \nu + \mu, \\ 0, |x^3 - 3x| > \nu + \mu. \end{cases}$$

Коефіцієнти прораховані для значень параметрів $\nu = 2, \mu = 3$.

$$E(\psi^2(G(x))) = \int_{-\infty}^{\infty} ((x^3 - 3x)\mathbb{I}_{|x^3-3x| \leq \nu})^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-\infty}^{\infty} ((\nu \cdot \text{sign}(x^3 - 3x)) \mathbb{I}_{[\nu < |x^3 - 3x| \leq \mu]})^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} dx + \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} (((\nu + \mu - |x^3 - 3x|) \text{sign}(x^2 - 3x)) \mathbb{I}_{[\mu < |x^3 - 3x| \leq \nu + \mu]})^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} dx = \\
& = 1.89958241.
\end{aligned}$$

$$C_j(\psi \circ G) : C_1(\psi \circ G) = -0.79225974, C_3(\psi \circ G) = 1.93991878,$$

$$C_5(\psi \circ G) = -6.73190380, C_7(\psi \circ G) = 27.56092019,$$

$$C_9(\psi \circ G) = -109.38671479, C_{11}(\psi \circ G) = 163.40414590,$$

$$C_{13}(\psi \circ G) = 5629.06614610, C_{15}(\psi \circ G) = -132523.78728906,$$

$$C_{17}(\psi \circ G) = 2264082.83718019.$$

$$\frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} : \frac{C_1^2(\psi \circ G)}{1!} = 0.62767550, \frac{C_3^2(\psi \circ G)}{3!} = 0.62721414,$$

$$\frac{C_5^2(\psi \circ G)}{5!} = 0.37765441, \frac{C_7^2(\psi \circ G)}{7!} = 0.15071514, \frac{C_9^2(\psi \circ G)}{9!} = 0.03297358,$$

$$\frac{C_{13}^2(\psi \circ G)}{13!} = 0.00508853, \frac{C_{15}^2(\psi \circ G)}{15!} = 0.01343037,$$

$$\frac{C_{17}^2(\psi \circ G)}{17!} = 0.01441173.$$

$$\sum_{j=1}^{17} \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 1.84983233.$$

$$E(\psi^2(G(x))) - \sum_{j=1}^{17} \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.04975009.$$

XI. о.н.м.

$$\rho(x) = |x|, \psi(x) = \text{sign}(x), \psi(G(x)) = \text{sign}(x^3 - 3x).$$

$$E(\psi^2(G(x))) = \int_{-\infty}^{\infty} (\text{sign}(x^3 - 3x))^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} dx = 1.$$

$$C_j(\psi \circ G) : C_1(\psi \circ G) = -0.44182034, C_3(\psi \circ G) = 1.51001300,$$

$$C_5(\psi \circ G) = -4.53003900, C_7(\psi \circ G) = 16.24103905,$$

$$C_9(\psi \circ G) = -62.41402568, C_{11}(\psi \circ G) = 215.63180970,$$

$$C_{13}(\psi \circ G) = -526.11299336, C_{15}(\psi \circ G) = 7993.11701183,$$

$$C_{17}(\psi \circ G) = -435534.86792082, C_{19}(\psi \circ G) = 15999693.80812662.$$

$$\frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} : \frac{C_1^2(\psi \circ G)}{1!} = 0.19520521, \frac{C_3^2(\psi \circ G)}{3!} = 0.38002321,$$

$$\frac{C_5^2(\psi \circ G)}{5!} = 0.17101044, \frac{C_7^2(\psi \circ G)}{7!} = 0.05233559, \frac{C_9^2(\psi \circ G)}{9!} = 0.01073498,$$

$$\frac{C_{11}^2(\psi \circ G)}{11!} = 0.00116485, \frac{C_{13}^2(\psi \circ G)}{13!} = 0.00004445,$$

$$\frac{C_{15}^2(\psi \circ G)}{15!} = 0.00004886, \frac{C_{17}^2(\psi \circ G)}{17!} = 0.00053331,$$

$$\frac{C_{19}^2(\psi \circ G)}{19!} = 0.00210440.$$

$$\sum_{j=1}^{19} \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.81320530.$$

$$E(\psi^2(G(x))) - \sum_{j=1}^{19} \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.18679470.$$

XII. L_p -оцінки

$$\rho(x) = |x|^p, p \in (1, 2), \psi(x) = p|x|^{p-1} \text{sign}(x),$$

$$\psi(G(x)) = p|x^3 - 3x|^{p-1} \text{sign}(x^3 - 3x).$$

Коефіцієнти прораховані для значення параметру $p = 1.5$.

$$E(\psi^2(G(x))) = \int_{-\infty}^{\infty} (p|x^3 - 3x|^{p-1} \text{sign}(x^3 - 3x))^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 3.39752925$$

$$C_j(\psi \circ G) : C_1(\psi \circ G) = -0.59390142, C_3(\psi \circ G) = 3.79759254,$$

$$C_5(\psi \circ G) = -7.47809307, C_7(\psi \circ G) = 20.12566095,$$

$$C_9(\psi \circ G) = -49.11001055, C_{11}(\psi \circ G) = -56.26951167,$$

$$C_{13}(\psi \circ G) = 2746.90280301, C_{15}(\psi \circ G) = -29299.63468247,$$

$$C_{17}(\psi \circ G) = 3706.41343521, C_{19}(\psi \circ G) = 10345287.02375389.$$

$$\frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} : \frac{C_1^2(\psi \circ G)}{1!} = 0.35271890, \frac{C_3^2(\psi \circ G)}{3!} = 2.40361818,$$

$$\frac{C_5^2(\psi \circ G)}{5!} = 0.46601563, \frac{C_7^2(\psi \circ G)}{7!} = 0.08036552, \frac{C_9^2(\psi \circ G)}{9!} = 0.00664626,$$

$$\frac{C_{11}^2(\psi \circ G)}{11!} = 0.00007932, \frac{C_{13}^2(\psi \circ G)}{13!} = 0.00121173,$$

$$\frac{C_{15}^2(\psi \circ G)}{15!} = 0.00065648, \frac{C_{17}^2(\psi \circ G)}{17!} = 0.00000004,$$

$$\frac{C_{19}^2(\psi \circ G)}{19!} = 0.00087981.$$

$$\sum_{j=1}^{19} \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 3.31219189.$$

$$E(\psi^2(G(x))) - \sum_{j=1}^{19} \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.08533737.$$

XIII. Зрізана о.н.м.

$$\rho(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \leq r, \\ r, & |x| > r. \end{cases}, \psi(x) = \begin{cases} \text{sign}(x), & |x| \leq r, \\ 0, & |x| > r. \end{cases},$$

$$\psi(G(x)) = \begin{cases} \text{sign}(x^3 + 3x), & |x^3 + 3x| \leq r, \\ 0, & |x^3 + 3x| > r. \end{cases}.$$

Коефіцієнти прораховані для значення параметру $r = 2$.

$$E(\psi^2(G(x))) = \int_{-\infty}^{\infty} (\text{sign}(x^3 + 3x) \mathbb{I}_{[|x^3+3x| \leq r]})^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.95449974.$$

$$C_j(\psi \circ G): C_1(\psi \circ G) = -0.54980227, C_3(\psi \circ G) = 1.18606720,$$

$$C_5(\psi \circ G) = -3.99012939, C_7(\psi \circ G) = 17.42884032,$$

$$C_9(\psi \circ G) = -89.30152710, C_{11}(\psi \circ G) = 498.65245598,$$

$$C_{13}(\psi \circ G) = -2917.58885480, C_{15}(\psi \circ G) = 20855.38240936,$$

$$C_{17}(\psi \circ G) = -321842.95579121, C_{19}(\psi \circ G) = 9615684.15175585.$$

$$\frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} : \frac{C_1^2(\psi \circ G)}{1!} = 0.30228254, \frac{C_3^2(\psi \circ G)}{3!} = 0.23445923,$$

$$\frac{C_5^2(\psi \circ G)}{5!} = 0.13267610, \frac{C_7^2(\psi \circ G)}{7!} = 0.06027073, \frac{C_9^2(\psi \circ G)}{9!} = 0.02197631,$$

$$\frac{C_{11}^2(\psi \circ G)}{11!} = 0.00622931, \frac{C_{13}^2(\psi \circ G)}{13!} = 0.00136700,$$

$$\frac{C_{15}^2(\psi \circ G)}{15!} = 0.00033261, \frac{C_{17}^2(\psi \circ G)}{17!} = 0.00029122,$$

$$\frac{C_{19}^2(\psi \circ G)}{19!} = 0.00076009.$$

$$\sum_{j=1}^{19} \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.76064515.$$

$$\mathbb{E}(\psi^2(G(x))) - \sum_{j=1}^{19} \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.19385459.$$

3.2. Обчислення коваріаційних матриць граничних нормальних розподілів М-оцінок.

Всі відомі спектральні міри $\mu(d\lambda, \theta)$ є атомними, причому кількість атомів є скінченною. Припустимо, що міра $\mu(d\lambda, \theta)$ має атоми в двох точках $\pm\lambda(\theta)$. Тоді формулу (2.1.6) можна представити у вигляді

$$\sigma(\theta) = \left(2\pi\gamma^2 \sum_{k=m}^{\infty} \frac{C_k^2(\psi \circ G)}{k!} f^{*k}(\lambda(\theta)) \right) \cdot \Lambda(\theta), \quad (3.2.1)$$

і проблема обчислення коваріаційної матриці зводиться до оцінки швидкості збіжності числового ряду перед матрицею $\Lambda(\theta)$ в формулі (3.2.1).

Нехай $N+1 > m$ — фіксоване натуральне число. Тоді для будь-якого $k \geq N+1$

$$\begin{aligned} f^{*k}(\lambda(\theta)) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda(\theta)t} B^k(t) \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} |B(t)|^k \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} |B(t)|^{N+1} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} |B(t)|^{N+1} \right) = \frac{1}{2\pi} B_{N+1}, \end{aligned}$$

де $B(t)$, $t \in Z$, — коваріаційна функція послідовності ξ_j , $|B(t)| \leq B(0) = 1$.

Таким чином, для хвоста ряду (3.2.1) маємо оцінку

$$\begin{aligned} \sigma_{N+1}(\theta) &= 2\pi\gamma^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{C_k^2(\psi \circ G)}{k!} f^{*k}(\lambda(\theta)) \leq \\ &\leq \gamma^2 B_{N+1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(G(x)) \varphi(x) dx - \sum_{k=m}^N \frac{C_k^2(\psi \circ G)}{k!} \right). \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Тепер використовуючи значення величин правої частини нерівності (3.2.2), які ми порахували раніше, знайдемо значення оцінки величини $\sigma(\theta)$ для всіх розглянутих прикладів. Для цього ми візьмемо

$$B(t) = \frac{\cos \alpha t}{(1+t^2)^{\alpha/2}}, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \alpha = \frac{4}{5}.$$

І. О.н.к.

$\rho(x) = x^2$, $\psi(x) = 2x$, $E(\psi^2(G(x))) = 4$, $m=1$, $\gamma^2 = 0.25$. Візьмемо $N = 9$,

тоді $\sum_{j=1}^9 \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 4, B_{10} = 1.003937.$

Таким чином, $\sigma_{10}(\theta) = 0.25 \cdot 1.003937 \cdot (4 - 4) = 0.$

II. $\rho(x) = (2\nu)^{-1} (1 - \exp\{-\nu x^2\}), \quad \psi(x) = x \exp\{-\nu x^2\}, \quad \nu = 0.1,$
 $E(\psi^2(G(x))) = 1.06825898, \quad m=1, \quad \gamma^2 = 3.81288.$ Візьмемо $N = 9,$ тоді

$$\sum_{j=1}^9 \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 1.02333109, B_{10} = 1.003937.$$

Таким чином,

$$\sigma_{10}(\theta) = 3.81288 \cdot 1.003937 \cdot (1.06825898 - 1.02333109) = 0.171979.$$

III. $\rho(x) = \nu x \cdot \arctg(\mu x) - \nu(2\mu)^{-1} \ln(1 + \mu^2 x^2), \quad \psi(x) = \nu \cdot \arctg(\mu x),$
 $\mu = 1, \quad \nu = 1, \quad E(\psi^2(G(x))) = 0.80654930, \quad m=1, \quad \gamma^2 = 0.817616.$ Візьмемо

$N = 9,$ тоді $\sum_{j=1}^9 \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.78634987, B_{10} = 1.003937.$

Таким чином,

$$\sigma_{10}(\theta) = 0.817616 \cdot 1.003937 \cdot (0.80654930 - 0.78634987) = 0.016580.$$

IV. $\rho(x) = \frac{x^2}{x^2 + c^2}, \quad \psi(x) = \frac{2c^2 x}{(x^2 + c^2)^2}, \quad c = 2, \quad E(\psi^2(G(x))) = 0.06871706,$

$m=1, \quad \gamma^2 = 0.145577.$ Візьмемо $N = 9,$ тоді $\sum_{j=1}^9 \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.05905311,$

$$B_{10} = 1.003937.$$

Таким чином,

$$\sigma_{10}(\theta) = 0.145577 \cdot 1.003937 \cdot (0.06871706 - 0.05905311) = 0.0014123876.$$

V. $\rho(x) = 2 \ln ch \frac{x}{2}, \quad \psi(x) = th \frac{x}{2}, \quad E(\psi^2(G(x))) = 0.34729763, \quad m=1,$

$$\gamma^2 = 12.0625. \quad \text{Візьмемо} \quad N = 9, \quad \text{тоді} \quad \sum_{j=1}^9 \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.34124943,$$

$$B_{10} = 1.003937.$$

Таким чином,

$$\sigma_{10}(\theta) = 12.0625 \cdot 1.003937 \cdot (0.34729763 - 0.34124943) = 0.07324364.$$

VI. Зрізана о.н.к.

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, |x| \leq r, \\ \frac{r^2}{2}, |x| > r. \end{cases}, \quad \psi(x) = x \cdot \chi_{[-r,r]}(x) = \begin{cases} x, |x| \leq r, \\ 0, |x| > r. \end{cases}, \quad r = 2,$$

$$E(\psi^2(G(x))) = 1.83964883, \quad m=1, \quad \gamma^2 = 1.15495. \quad \text{Візьмемо} \quad N = 17, \quad \text{тоді}$$

$$\sum_{j=1}^{17} \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 1.79130114, \quad B_{18} = 1.000013.$$

Таким чином,

$$\sigma_{18}(\theta) = 1.15495 \cdot 1.000013 \cdot (1.83964883 - 1.79130114) = 0.055840.$$

VII. Оцінка Г'юкі.

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} \cdot \left(r^2 - \frac{x^2}{2}\right), |x| \leq r, \\ \frac{r^4}{4}, |x| > r. \end{cases},$$

$$\psi(x) = x(r^2 - x^2) \cdot \chi_{[-r,r]}(x) = \begin{cases} x(r^2 - x^2), |x| \leq r, \\ 0, |x| > r. \end{cases}, \quad r = 1.15,$$

$$E(\psi^2(G(x))) = 0.06904834, \quad m=1, \quad \gamma^2 = 0.112552. \quad \text{Візьмемо} \quad N = 19, \quad \text{тоді}$$

$$\sum_{j=1}^{19} \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.01059852, \quad B_{20} = 1.000009.$$

Таким чином,

$$\sigma_{20}(\theta) = 0.112552 \cdot 1.000009 \cdot (0.06904834 - 0.01059852) = 0.00657870.$$

VIII. Оцінка Ендрюса.

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & |x| \leq \pi, \\ 2, & |x| > \pi. \end{cases}, \quad \psi(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases},$$

$E(\psi^2(G(x))) = 0.65862123$, $m=1$, $\gamma^2 = 19.0514$. Візьмемо $N = 9$, тоді

$$\sum_{j=1}^9 \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.61104764, \quad B_{10} = 1.003937.$$

Таким чином,

$$\sigma_{10}(\theta) = 1.15495 \cdot 19.0514 \cdot (0.65862123 - 0.61104764) = 1.04678141.$$

IX. Оцінка Хьюбера.

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & |x| \leq r, \\ r|x| - \frac{r^2}{2}, & |x| > r. \end{cases}, \quad \psi(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq \pi, \\ r \cdot \text{sign}(x), & |x| > \pi. \end{cases}, \quad r = 2,$$

$E(\psi^2(G(x))) = 2.02164988$, $m=1$, $\gamma^2 = 0.17469$. Візьмемо $N = 9$, тоді

$$\sum_{j=1}^9 \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 1.98552316, \quad B_{10} = 1.003937.$$

Таким чином,

$$\sigma_{10}(\theta) = 1.003937 \cdot 0.17469 \cdot (2.02164988 - 1.98552316) = 0.00633582.$$

X. Оцінка Хемпела

$$\rho(x) = \begin{cases} x^2/2, & |x| \leq \nu, \\ \nu|x| - \frac{\nu^2}{2}, & \nu < |x| \leq \mu, \\ \nu\mu - \frac{(\nu+\mu-|x|)^2}{2}, & \mu < |x| \leq \nu + \mu, \\ \nu\mu, & |x| > \nu + \mu. \end{cases},$$

$$\psi(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq \nu, \\ \nu \cdot \text{sign}(x), & \nu < |x| \leq \mu, \\ (\nu + \mu - |x|)\text{sign}(x), & \mu < |x| \leq \nu + \mu, \\ 0, & |x| > \nu + \mu. \end{cases},$$

$\nu = 2$, $\mu = 3$, $E(\psi^2(G(x))) = 1.89958241$, $m=1$, $\gamma^2 = 1.06549$. Візьмемо

$$N = 17, \text{ тоді } \sum_{j=1}^{17} \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 1.84983233, B_{18} = 1.000013.$$

Таким чином,

$$\sigma_{18}(\theta) = 1.000013 \cdot 1.06549 \cdot (1.89958241 - 1.84983233) = 0.05300890.$$

XI. о.н.м.

$\rho(x) = |x|, \psi(x) = \text{sign}(x), E(\psi^2(G(x))) = 1, m=1, \gamma^2 = 37.7987$. Візьмемо

$$N = 19, \text{ тоді } \sum_{j=1}^{19} \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.81320530, B_{18} = 1.000009.$$

Таким чином,

$$\sigma_{20}(\theta) = 1.000009 \cdot 37.7987 \cdot (1 - 0.81320530) = 7.06066037.$$

XII. L_p -оцінки

$\rho(x) = |x|^p, p \in (1, 2), \psi(x) = p|x|^{p-1}\text{sign}(x), p = 1.5, E(\psi^2(G(x))) = 3.39752925, m=1, \gamma^2 = 1.29018$. Візьмемо $N = 19$, тоді

$$\sum_{j=1}^{19} \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 3.31219189, B_{18} = 1.000009.$$

Таким чином,

$$\sigma_{20}(\theta) = 1.000009 \cdot 1.29018 \cdot (3.39752925 - 3.31219189) = 0.11010155.$$

XIII. Зрізана о.н.м.

$$\rho(x) = \begin{cases} |x|, |x| \leq r, \\ r, |x| > r. \end{cases}, \psi(x) = \begin{cases} \text{sign}(x), |x| \leq r, \\ 0, |x| > r. \end{cases}, r = 2,$$

$E(\psi^2(G(x))) = 0.95449974, m=1, \gamma^2 = 1736.69$. Візьмемо $N = 19$, тоді

$$\sum_{j=1}^{19} \frac{C_j^2(\psi \circ G)}{j!} = 0.76064515, B_{18} = 1.000009.$$

Таким чином,

$$\sigma_{20}(\theta) = 1.000009 \cdot 1736.69 \cdot (0.95449974 - 0.76064515) = 336.6683578951.$$

Неважко побачити, що у більшості випадків для оцінки коваріаційних матриць (1.3.8) достатньо утримувати лише перші декілька членів ряду (3.2.1).

Висновки

1. Отримано числові оцінки хвостів рядів Парсеваля для розкладів L_2 -норми функцій $\psi \circ G$, де $G(x) = H_3(x) = x^3 - 3x$ – 3-й поліном Чебишева-Ерміта, $\psi(x)$ – похідна функції втрат із Додатку. Ці оцінки показують, що частинні суми рядів Парсеваля достатньо точно апроксимують суми рядів для достатньо невеликих значень N .
2. Для типового прикладу граничної коваріаційної матриці M -оцінок знайдено похибки їх обчислень з використанням числових результатів із пункту 1.

4 ОХОРОНА ПРАЦІ ТА БЕЗПЕКА В НАДЗВИЧАЙНИХ СИТУАЦІЯХ

Вступ

Написання магістерської роботи передбачає, найперше, роботу із значеною кількістю джерел інформації, у якості яких можуть виступати як паперові, так і електронні носії даних. Природньо, що більшість з цих джерел, є науковою літературою. Для успішного використання подібних джерел, необхідно вміти зосереджено читати, розуміти та вміти використовувати або інтерпретувати прочитане, розуміти сенс прочитаного як загалом, так і у окремих деталях. Зважаючи на широке поширення інформаційних технологій, об'єктивно, головним інструментом у сприйнятті інформації є планшетний комп'ютер, основними інструментами у обробці та створенні інформації є персональний комп'ютер або ноутбук. Окремо доцільно відмітити, що магістерська дисертація є результатом не тільки значного розумового, а й фізичного, та морального навантаження. Розумова праця потребує значної мобілізації уваги, процесів мислення та різноманітних психічних функцій, які зазвичай супроводжуються нервово-психічним та емоціональним напруженням. Зважаючи на це, для вдалого завершення роботи над магістерською дисертацією досить важливим є знання, розуміння та слідування окремим нормам охорони праці.

4.1 Оцінка напруженості праці

Оцінка важкості трудового процесу здійснюється на підставі обліку фізичного динамічного навантаження, маси вантажу, що підіймається і переміщується, загального числа стереотипних робочих рухів, величини статичного навантаження, робочої пози, ступеню нахилу корпусу, переміщень в просторі [16]. Характеристика важкості трудового процесу має нагальне зміст

для професій, що передбачають фізичну працю. У випадку розумової праці, більш нагальне значення має оцінка напруженості трудового процесу, що здійснюється на підставі обліку факторів, що характеризують напруженість праці, а саме, інтелектуальні, сенсорні, емоційні навантаження, ступінь монотонності праці, режим роботи.

Виходячи з плану виконання магістерської дисертації та користуючись таблицею «Класи умов праці за показниками напруженості трудового процесу» [16] було отримано оцінку напруженості праці – **шкідливий клас умов праці (І ступінь)**:

1. Інтелектуальне навантаження – шкідливий клас умов праці (І ступінь):

- вирішування складних завдань з вибором за відомими алгоритмами;
- сприймання результатів числових обчислень з наступним порівнянням фактичних значень з їх теоретичним значенням, надання заключної оцінки по числовим обчисленням;
- здійснення обробки, виконання завдання та його перевірка;
- проведення роботи за встановленим графіком з можливим його коректуванням у ході діяльності.
- щільність сигналів та повідомлень в середньому за годину становила до 75 одиниць
- кількість об'єктів одночасного спостереження до 5 одиниць

2. Сенсорні навантаження – шкідливий клас умов праці (І ступінь):

- навантаження на зоровий аналізатор - робота за екранами електронних пристроїв сприйняття та обробки інформації складала більше 4 годин за день;

- навантаження на слуховий аналізатор та голосовий апарат — співпраця з науковим керівником, перегляд відеозаписів лекцій — до 16 годин за тиждень.

3. Емоційне навантаження – шкідливий клас умов праці (І ступінь):

- несуть відповідальність за функціональну якість основної роботи, науковий керівник вимагає виправлень за рахунок зусиль магістранта.

4. Монотонність навантажень – середнє фізичне навантаження:

- час активних дій складає більш ніж 20% від загального витраченого часу;
- монотонність виробничої обстановки складала менше 75% від загальної кількості витраченого часу.

5. Режим праці – середнє фізичне навантаження:

- фактична тривалість робочого дня складала 6-7 годин.

Оцінка напруженості праці здійснювалася на підставі обліку наявних значущих показників. Кінцева оцінка напруженості праці була встановлена за показником, який має найвищий ступінь напруженості.

4.2 Аналіз психологічних аспектів умов праці

На відміну від фізичної, розумова праця супроводжується меншими витратами енергетичних запасів, але це не свідчить про її легкість. Основним працюючим органом під час такого виду праці виступає мозок. При цьому вживання кисню 100 г кори головного мозку в 5 разів більше, ніж витрати скелетними м'язами тієї ж ваги при максимальному фізичному навантаженні. Під час розумової праці значно активізуються аналітичні та синтетичні функції центральної нервової системи, прийом і переробка інформації, виникають функціональні зв'язки, нові комплекси умовних рефлексів, зростає роль функцій уваги, пам'яті, навантаження на зоровий та слуховий аналізатори.

Для розумової праці характерні: велика кількість стресів, мала рухливість, вимушена статична поза – все це зумовлює застійні явища у м'язах ніг, органах черевної порожнини і малого тазу, погіршення постачання мозку киснем, зростання потреби в глюкозі. При розумовій праці погіршується робота органів зору: стійкість ясного бачення, гострота зору, адаптаційна можливість ока. Розумовій праці властивий найбільший ступінь зосередження уваги – в середньому у 5-10 разів вище, ніж при фізичній праці. Завершення робочого дня зовсім не перериває процесу розумової діяльності. Розвивається особливий стан організму – втома, що з часом може перетворитися на перевтому. Все це призводить до порушення нормального фізіологічного функціонування організму. При розумовій праці мають місце зсуви в вегетативних функціях людини: підвищення кров'яного тиску, зміни електрокардіограми, вентиляції легень і вживання кисню, підвищення температури тіла.

4.3 Нормування праці. Вибір оптимального режиму праці та відпочинку

Серед факторів підвищення ефективності праці особливе місце належить раціональному режиму праці і відпочинку. Від його структури залежить динаміка втоми, відновлюваність функцій організму, працездатність і здоров'я, надійність і продуктивність праці. Під режимом праці і відпочинку розуміють загальну тривалість трудової діяльності протягом доби, тижня, місяця, року, частоту і тривалість періодів трудової активності і перерв у процесі цієї активності, співвідношення і чергування цих періодів. Незалежно від виду праці функціональний стан працівника змінюється внаслідок втоми, що призводить до зниження рівня оперативних резервів. Оптимізація діяльності забезпечує реалізацію тих резервних можливостей, які до цього не входили в оперативні резерви. Режим праці і відпочинку протягом робочої зміни визначається такими факторами, як тривалість робочого дня, час початку і закінчення роботи, час надання і тривалість обідньої перерви, кількість і тривалість регламентованих

перерв на відпочинок (макропауз), наявність мікропауз у трудовому процесі. Тижневий режим праці і відпочинку характеризується встановленою кількістю робочих днів і годин, порядком чергування днів роботи і відпочинку, чергуванням роботи в різні зміни. Річний режим праці і відпочинку характеризується загальною кількістю днів і годин роботи, періодичністю і тривалістю основної і додаткових відпусток.

Ефективність режиму праці і відпочинку оцінюється критеріями працездатності і функціонального стану працівників, економічними, гігієнічними та соціальними критеріями.

Основні вимоги до проектування внутрішньозмінних режимів праці і відпочинку зводяться до забезпечення поступового входження людини в роботу, ритмічності і послідовності дій, чергування робіт; обґрунтування тривалості обідньої перерви, кількості, тривалості і часу надання регламентованих перерв на відпочинок, змісту відпочинку та використання функціональної музики. Упорядкування режиму праці і відпочинку передбачає регулювання таких трьох його параметрів, як загальний робочий час, тривалість періодів роботи і тривалість періодів відпочинку. Оптимізація часу роботи є вихідною умовою для мінімізації часу відпочинку і максимізації тривалості робочого часу. Численними дослідженнями фізіологів встановлено певні фізіологічні закономірності, які покладені в основу розробки режимів праці і відпочинку. Ці закономірності зводяться ось до чого: $\square$ час роботи залежить від її інтенсивності: чим важча робота, чим вищий її темп, тим менша допустима щільність робочого часу.

Вирішальне значення для раціоналізації функціонального навантаження має встановлення абсолютних допустимих величин періодів роботи і відпочинку. Для нервово-напружених робіт тривалість неперервної роботи не повинна перевищувати 15 хв, а тривалість відпочинку 2-5 хв.

4.4 Санітарія та гігієна робочого місця

Під час роботи над магістерською дисертацією постійно намагалася дотримуватися правил санітарії та гігієни робочого місця згідно з Законом України «Про охорону праці» від 14.10.1992 року [26].

Вимоги щодо приміщення були забезпечені максимально у міру можливостей магістранта, зокрема

- Площа кімнати - 12,0 кв.м.
- Обсяг - 30,0 куб.м.
- Робоче місце достатньо ізольоване від сонячних променів.

Вимоги щодо організації робочого місця було забезпечено у міру можливостей.

- Монітор ПК розміщено на основному робочому столі, системний блок — з лівого боку.
- Розміри столу відповідають рекомендованим.
- Робоче сидіння — стілець, має такі основні елементи: сидіння, спинку.
- Монітор та клавіатура розташовані на оптимальній відстані від очей - 600 мм .

Відносно вікон робоче місце повинно бути розміщено так, щоб природне світло було збоку, краще з лівого, та забезпечувався коефіцієнт природної освітленості не нижче 1,5%. Робоче місце, обладнане ПК повинно бути розташоване так, щоб уникнути потрапляння прямого світла в очі. Джерела штучного світла рекомендується розташувати з обох сторін від екрану паралельно напрямку зору. Щоб уникнути відблисків від екрану, клавіатури, освітлювальних пристроїв, сонця в напрямку очей необхідно застосовувати антиблискові сітки, спеціальні фільтри для екрану, захисні козирки, жалюзі на вікнах. Штучне освітлення приміщення має бути обладнане системою загального рівномірного освітлення. Загальне освітлення має бути виконане у

вигляді суцільних або перерваних ліній світильників, що розміщуються збоку від робочих місць (переважно зліва) паралельно лінії зору.

Згідно ДСанПіН 3.3.6.042-99 «Санітарні норми мікроклімату виробничих приміщень» [17], під мікрокліматом приміщень розуміють клімат їхнього внутрішнього середовища, який визначається факторами, що діють на організм людини.

Робоче місце знаходиться в сухому, вентиляваному приміщенні. Температура повітря у приміщенні підтримується в межах від +18 до +28 °C при вологості 40-60%.

Персональний комп'ютер, мережеві пристрої підключені до електромережі з допомогою справних штепсельних з'єднань і електричних роз'ємів заводського виготовлення. Забезпечені всі умови використання електронних приладів згідно ПУЕ 6, що був чинним на етапі введення будинку у експлуатацію.

4.2 Охорона праці при використанні технічних засобів забезпечення діяльності при виконанні магістерської дисертації

Основні шкідливі та небезпечні фактори, що можуть впливати на організм людини під час роботи з персональним комп'ютером (ПК), такі:

- підвищений рівень електромагнітних випромінювань;
- підвищений рівень іонізуючих випромінювань;
- підвищений рівень статичної електрики;
- підвищена напруженість електростатичного поля;
- підвищена чи понижена іонізація повітря;
- підвищена яскравість світла;
- пряма і відбита блискітливість;

- підвищене значення напруги в електромережі;
- статичні перевантаження кістково-м'язового апарату та динамічні локальні перевантаження м'язів кистей рук;
- перенапруження зорового аналізатора
- розумове перенапруження;
- емоційні перевантаження;
- монотонність праці.

До шкідливих випромінювань комп'ютера належать низькочастотні електромагнітні поля. Аби запобігти несприятливим наслідкам для здоров'я, у приміщеннях, де застосовується комп'ютерна техніка, потрібно:

- проводити інструментальний контроль
- заміряти та оцінювати виробничі фактори на робочих місцях і в приміщеннях (виконують спеціально акредитовані/атестовані лабораторії);
- нормалізувати стан фізичних факторів на підставі рекомендацій, розроблених за результатами інструментального контролю;
- оцінювати ергономічні параметри робочих місць, зокрема спеціальних меблів для користувачів ПК.

Окрім іншого, слід пам'ятати, що використання мобільних телефонів є відносно небезпечним, оскільки вони — джерело високочастотного електромагнітного випромінювання. При користуванні мобільними телефонами варто взяти до уваги такі рекомендації:

- тривалість розмови не має перевищувати 3 хв.;
- перерва між розмовами – не менше 15 хв.;
- в умовах нестійкого прийому, коли потужність випромінювання мобільного телефону автоматично зростає, слід утриматися від тривалих переговорів або знайти місце зі стійким прийомом;

- використання гарнітури «вільні руки», спілкування за допомогою SMS значно знижують вплив випромінювання від мобільного телефону.

Висновки

Враховуючи викладені вище нормативи та рекомендації, вказівки щодо нормування праці, санітарії та гігієни робочого місця та охорони праці, можна зробити висновок, що умови праці були максимально задовільними у рамках доступних об'єктивних можливостей, та достатніми для успішного та продуктивного виконання поставлених завдань у рамках підготовки та виконання магістерської дисертації

ВИСНОВКИ

1. Отримано сукупність умов на елементи регресійної моделі з дискретним часом та функції втрат, які забезпечують нормальність граничного розподілу М-оцінок.
2. За допомогою двох лем редукції, центральної граничної теореми для залежної суми від нелінійно перетвореної гаусівської стаціонарної сильно залежної послідовності, теореми Брауера про нерухому точку та припущення про асимптотичну єдиність М-оцінок, доведено теорему про асимптотичну нормальність М-оцінок.
3. Доведено теорему про асимптотичну єдиність М-оцінок, оскільки для отримання основного результату ми використовуємо припущення про асимптотичну єдиність оцінки.
4. Доведено теорему про консистентність М-оцінок, яка потрібна для доведення асимптотичної єдиності за ймовірністю М-оцінок.
5. Проведено оцінювання швидкості збіжності коваріаційних матриць граничних розподілів М-оцінок, які представлено рядами. Ці оцінки показують, що частинні суми рядів Парсеваля достатньо точно апроксимують суми рядів вже для невеликих порядків частинних сум.
6. Для типового прикладу граничної коваріаційної матриці М-оцінок знайдено похибки їх обчислень з використанням числових результатів попереднього пункту.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Huber P.J. Robust statistics / P.J. Huber, Wiley, 1981.
2. Капітоненко А. А. Асимптотична нормальність М-оцінок параметрів регресії з корельованими спостереженнями, Магістерська дисертація, НТУУ “КПІ” / А.А. Капітоненко. – К., 2014. – 103 с.
3. Иванов А.В. Статистический анализ случайных полей / А.В. Иванов, Н.Н. Леоненко. – К.:”Вища школа”, 1986. – 215 с.
4. Ivanov A.V. Asymptotic Theory of Nonlinear Regression / A.V. Ivanov – Kluwer Academic Publishers , 1997. – 327 p.
5. Жураковський Б.М. Виявлення прихованих періодичностей в моделі регресії з сильною залежністю. Магістерська дисертація, НТУУ “КПІ” / Б.М. Жураковський. – К., 2010. – 74 с.
6. Ivanov A.V. Limit theorems for weighted nonlinear transformations of Gaussian stationary processes with singular spectra / A.V. Ivanov, N. Leonenko, M.D. Ruiz-Medina, I. N. Savich // The Annals of Probability. – 2013. –Vol.41, No.2. – p. 1088–1114.
7. Фіжук Р.В. Про обчислення граничних коваріацій М-оцінок параметрів регресії: шістнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука, 14-15 травня 2015 р., Київ: Матеріали конф. С.3. Теорія ймовірностей та математична статистика – К.: НТУУ “КПІ” 2015. – с. 83.
8. Фіжук Р.В. Оцінювання та обчислення кореляційних матриць граничних нормальних розподілів М-оцінок: четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, 23-25 квітня 2015 р., Київ: Матеріали конф. С.1. Математичного аналізу, теорії ймовірностей, диференціальних рівнянь – К.: НТУУ “КПІ” 2015. – с. 32.
9. Хеннан Э. Многомерные временные ряды / Э. Хеннан. – М.: “Мир”, 1974. – 576 с.
10. Wilkinson I.H. The algebraic eigen value problem / I.H. Wilkinson – Oxford:

Clarendon Press, 1962. – 662 p.

11. Ибрагимов И. А. Гауссовские случайные процессы / И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов. – М.: «Наука», 1970. – 384 с.

12. Іванов О.В. μ -припустимість спектральної щільності сильно залежного випадкового шуму в нелінійних моделях регресії / О.В. Іванов, І.М. Савич. Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2009. – №1. - с. 143-148.

13. Гончаренко Ю.В. Теорема Брауера / Ю.В. Гончаренко, С.И. Ляшко. – К.: “КИИ”, 2000. – 48с.

14. Бхаттачария Р.Н. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические распределения / Р.Н. Бхаттачария, Р. Ранга Рао. – М.: “Наука”, 1982. – 288 с.

15. Грандштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Грандштейн, И.М. Рыжик. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 1100 с.

16. Охорона праці. Методичні вказівки до розділу дипломних проектів спеціалістів та магістерських дисертацій для підготовки спеціалістів та магістрів з гуманітарного напрямку підготовки усіх форм навчання. – Київ: Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», 2014. – 27 с.

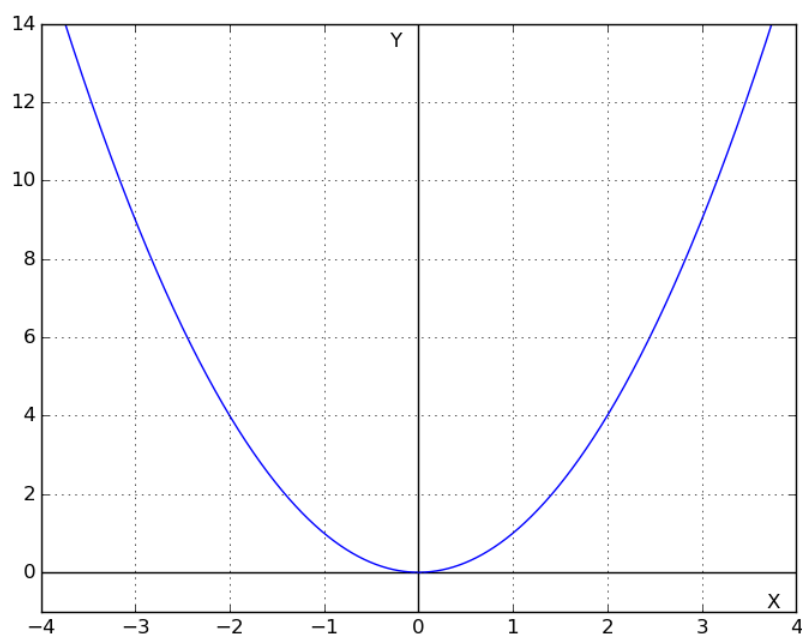
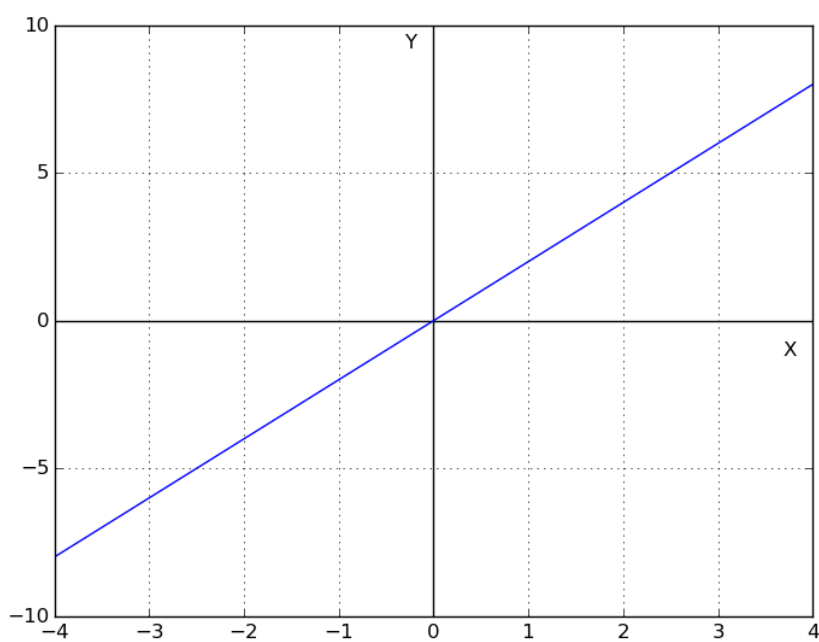
17. Арламов О. Ю. : конспект лекцій з дисципліни «Охорона праці в галузі» – Київ: Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», 2011. – 94 с.

18. ДСанПіН 3.3.6.042-99 «Санітарні норми мікроклімату виробничих приміщень» [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://mozdocs.kiev.ua/view.php?id=1972>

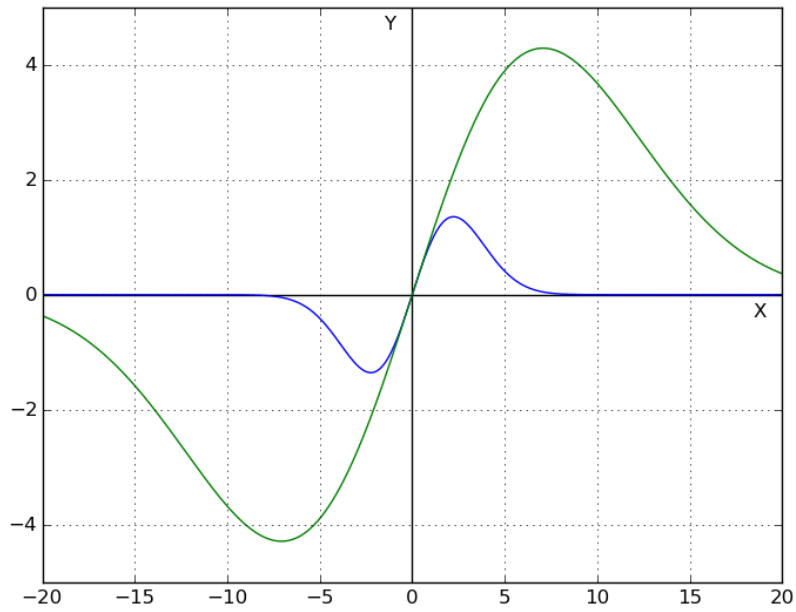
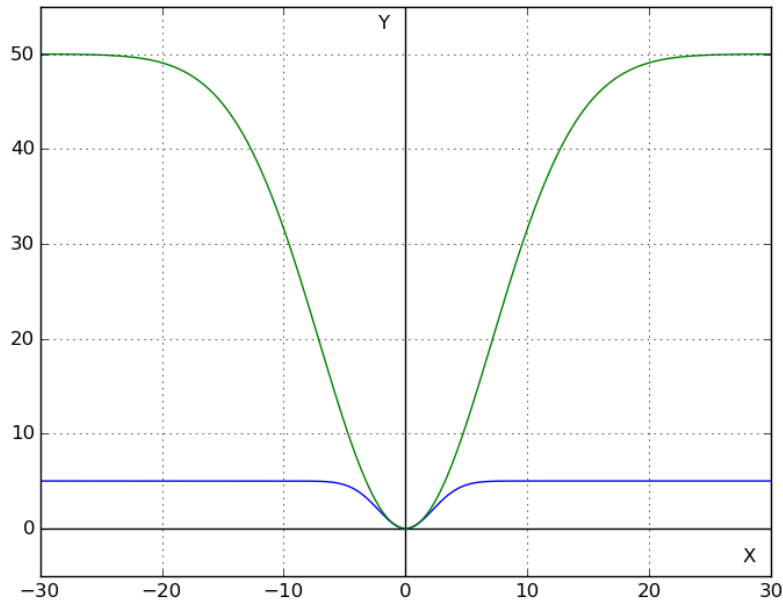
ДОДАТОК. ФУНКЦІЇ ВТРАТ ТА ЇХ ПОХІДНІ

І. О.Н.К.

$$\rho(x) = x^2, \psi(x) = 2x, \gamma^2 = 0.25.$$

Рис. 1. $\rho(x)$ Рис. 2. $\psi(x)$

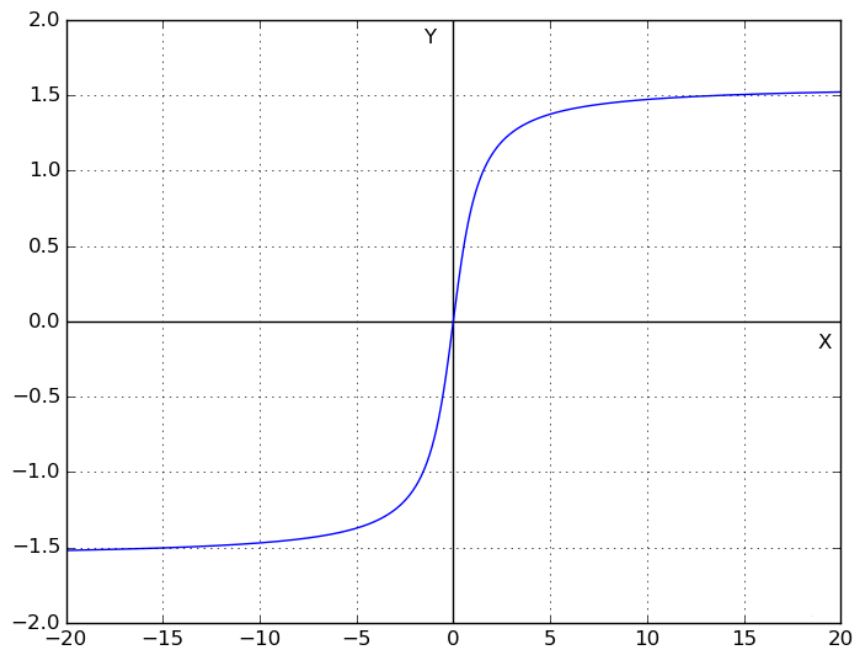
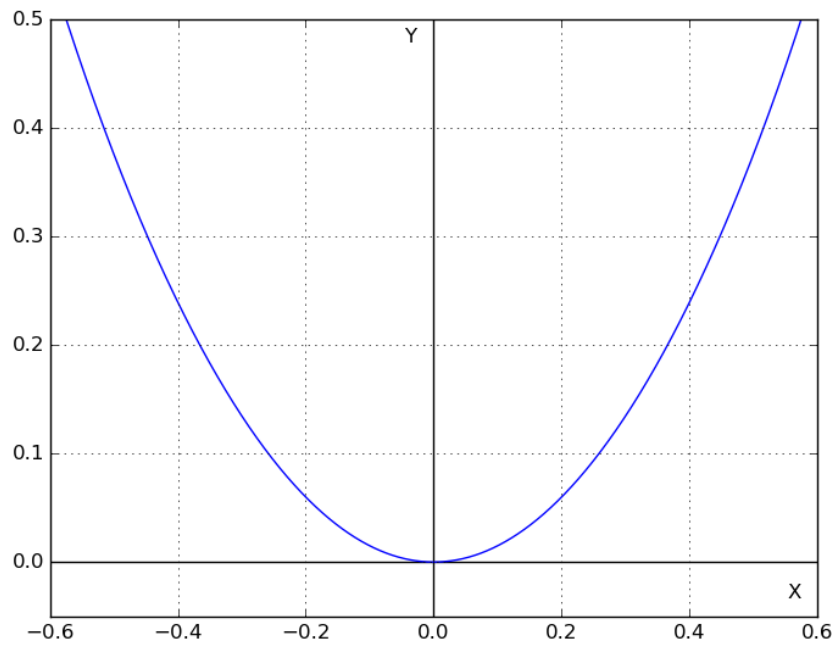
II. $\rho(x) = (2\nu)^{-1} (1 - \exp\{-\nu x^2\})$, $\psi(x) = x \exp\{-\nu x^2\}$, $\gamma^2 = 3.81288$.



III.

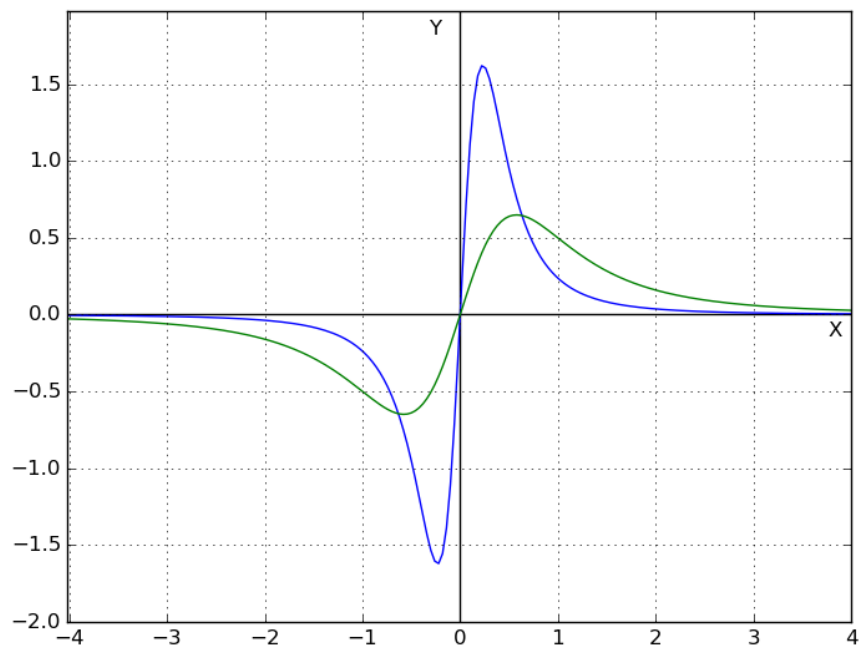
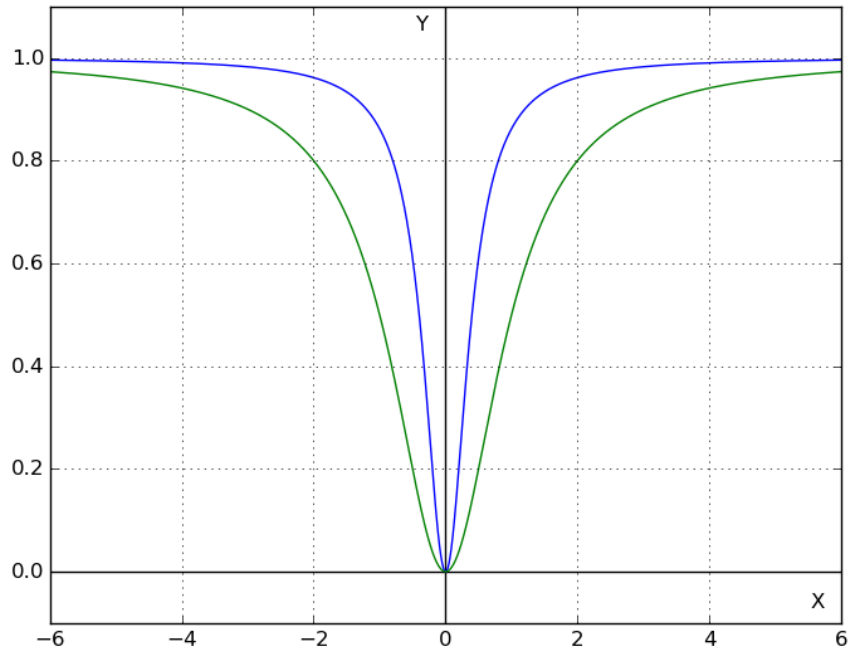
$$\rho(x) = \nu x \cdot \operatorname{arctg}(\mu x) - \nu(2\mu)^{-1} \ln(1 + \mu^2 x^2), \psi(x) = \nu \cdot \operatorname{arctg}(\mu x),$$

$$\gamma^2 = 0.817616.$$



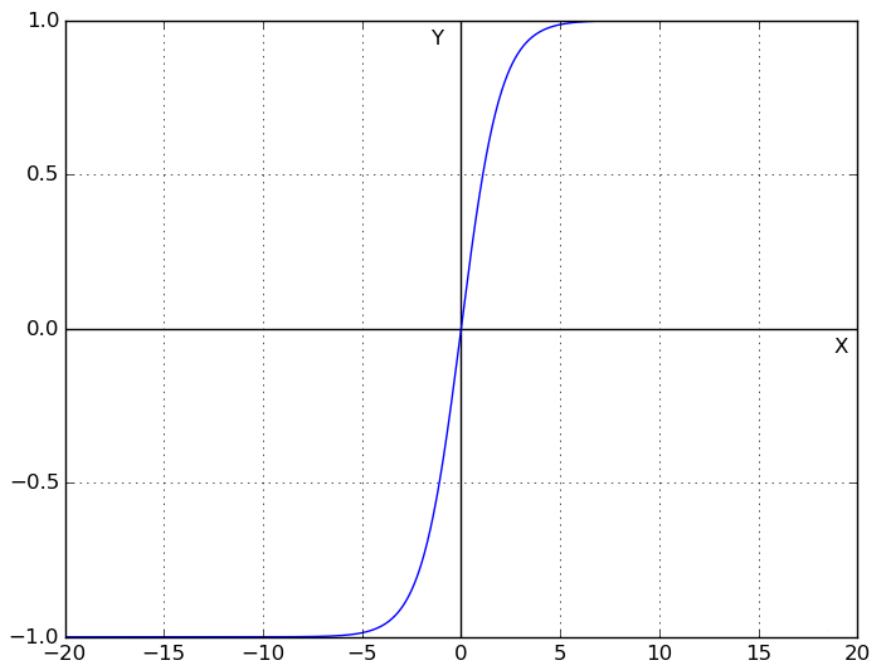
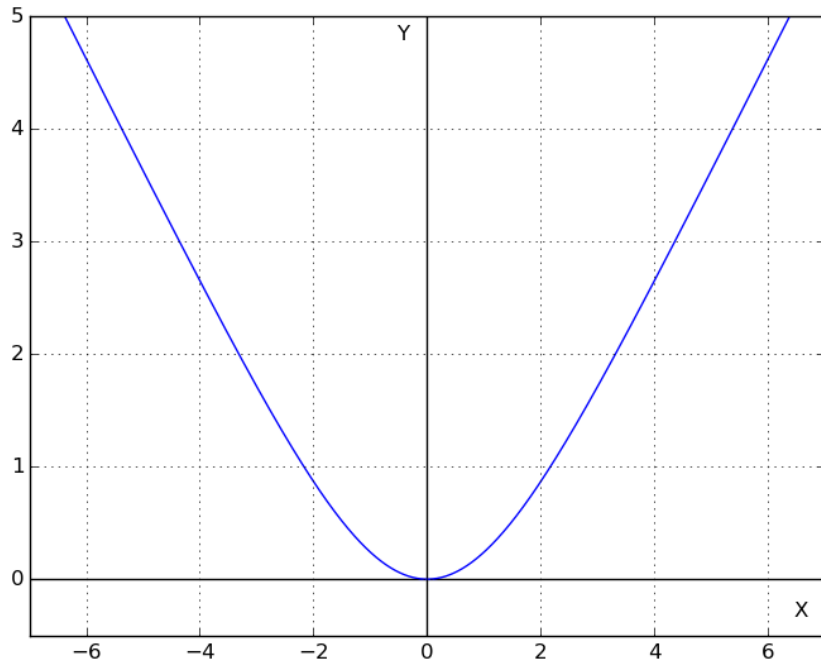
IV.

$$\rho(x) = \frac{x^2}{x^2 + c^2}, \psi(x) = \frac{2c^2 x}{(x^2 + c^2)^2}, \gamma^2 = 0.145577.$$



V.

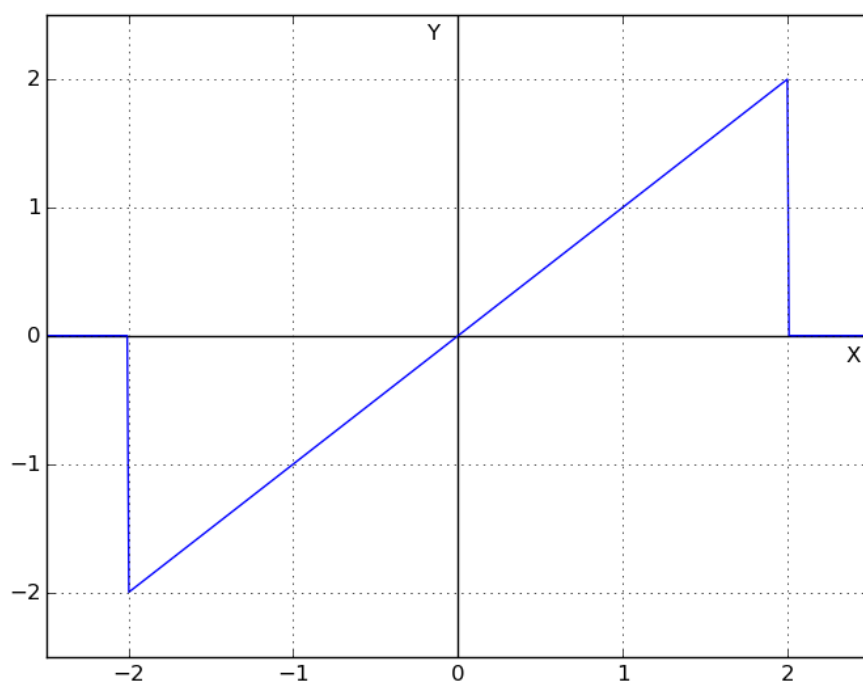
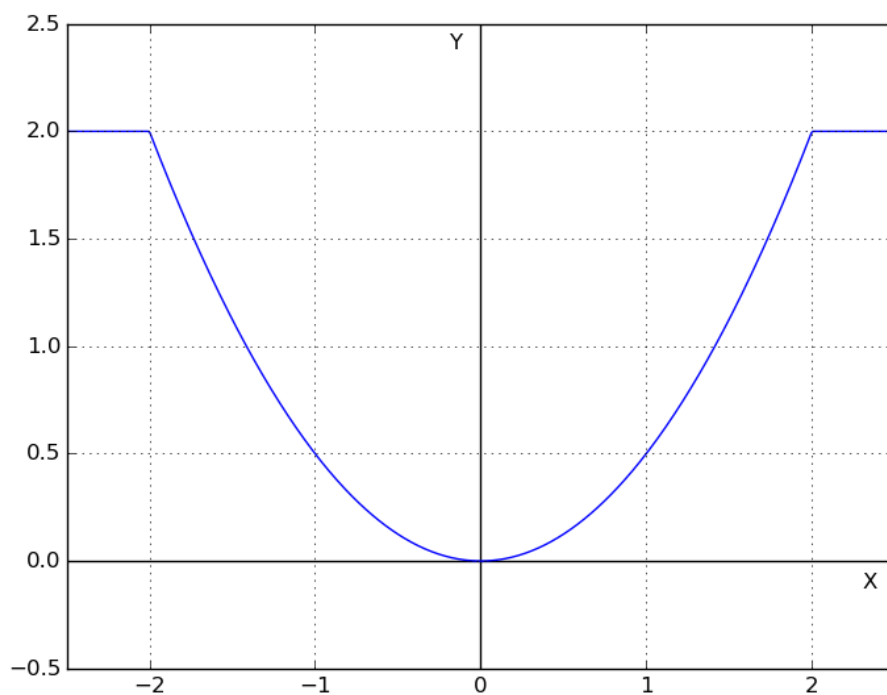
$$\rho(x) = 2 \ln ch \frac{x}{2}, \psi(x) = th \frac{x}{2}, \gamma^2 = 12.0625.$$



VI.

Зрізана о.н.к.

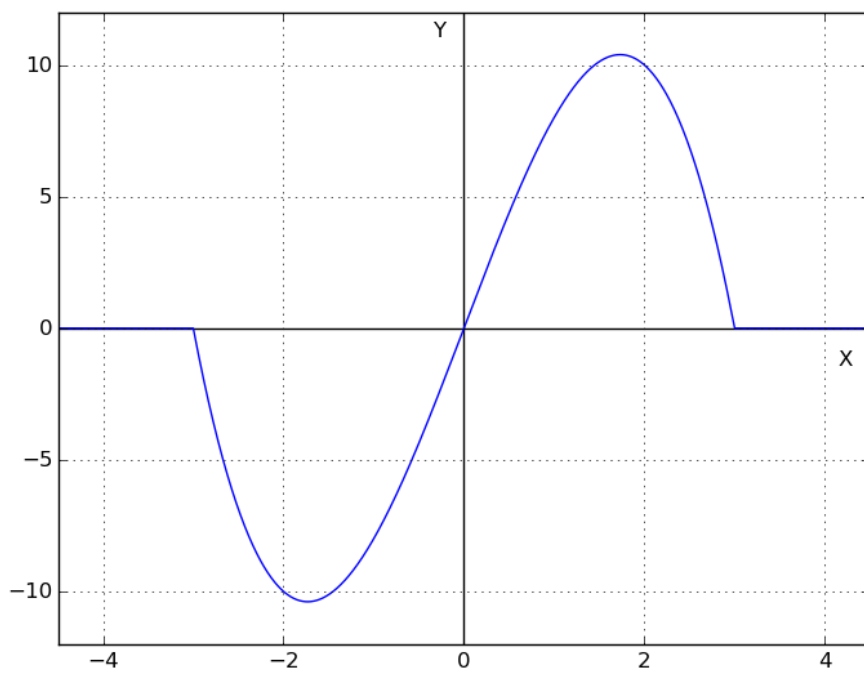
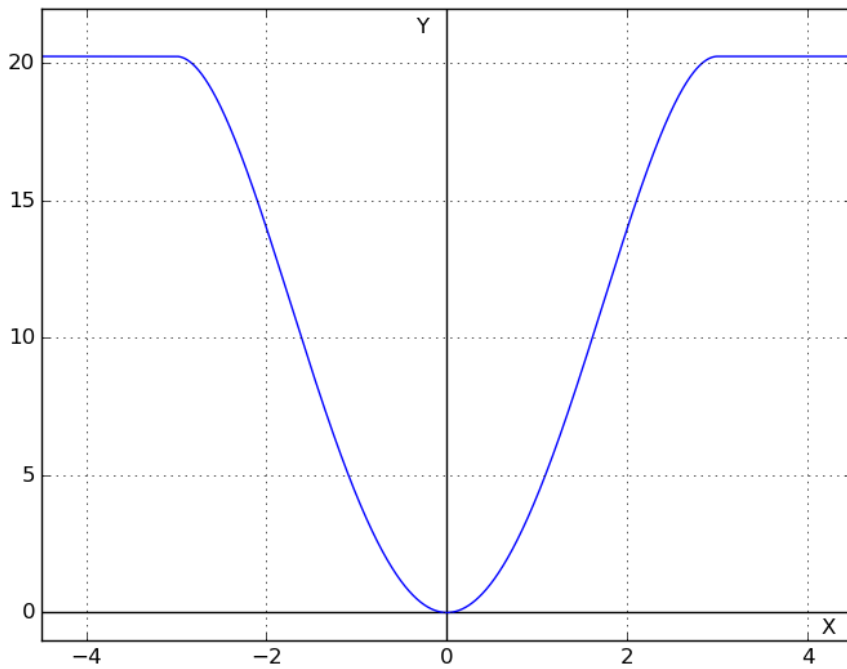
$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & |x| \leq r, \\ \frac{r^2}{2}, & |x| > r. \end{cases}, \psi(x) = x \cdot \chi_{[-r,r]}(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq r, \\ 0, & |x| > r. \end{cases}, \gamma^2 = 1.15495.$$



VII. Оцінка Т'юкі.

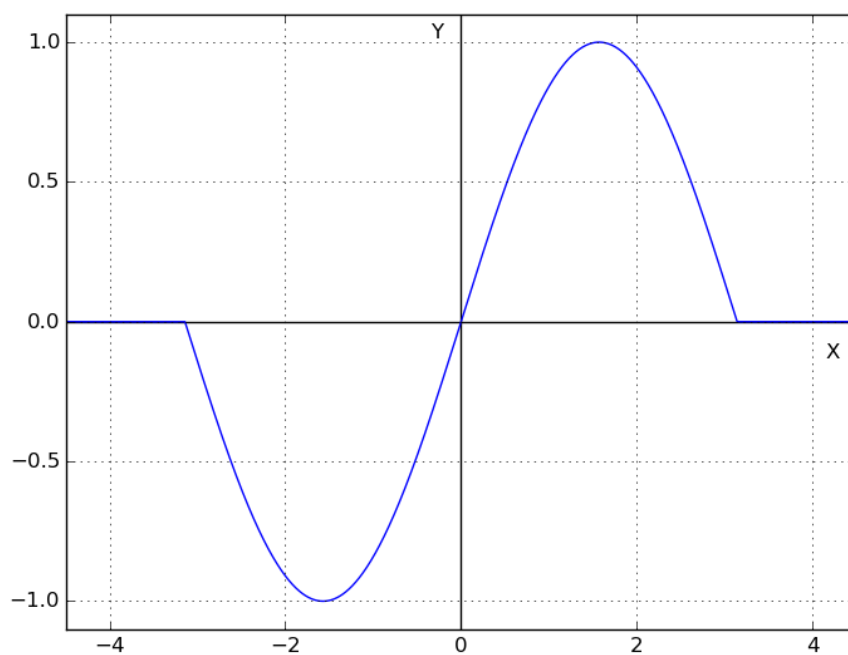
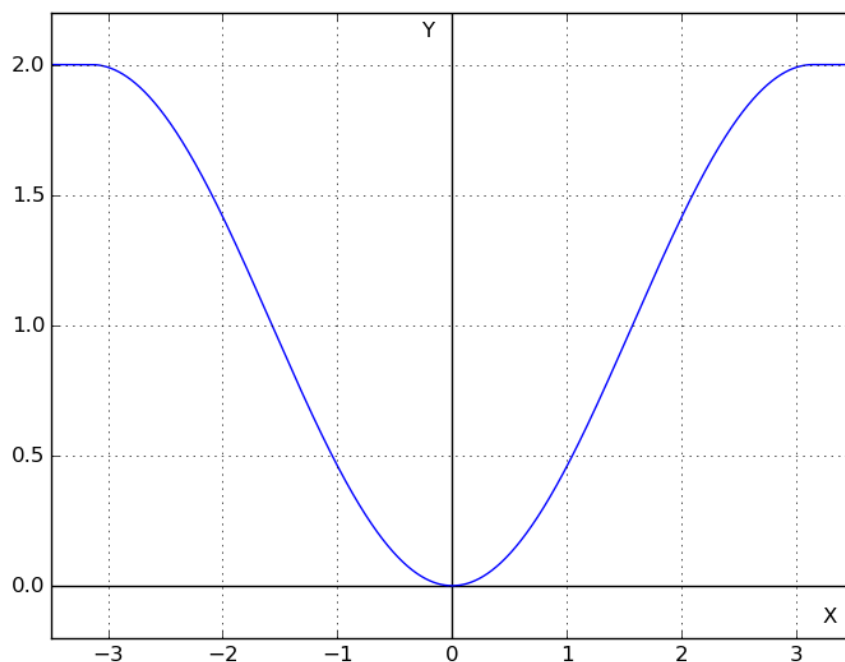
$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} \cdot \left(r^2 - \frac{x^2}{2}\right), & |x| \leq r, \\ \frac{r^4}{4}, & |x| > r. \end{cases}$$

$$\psi(x) = x(r^2 - x^2) \cdot \chi_{[-r,r]}(x) = \begin{cases} x(r^2 - x^2), & |x| \leq r, \\ 0, & |x| > r. \end{cases}, \gamma^2 = 0.112552.$$



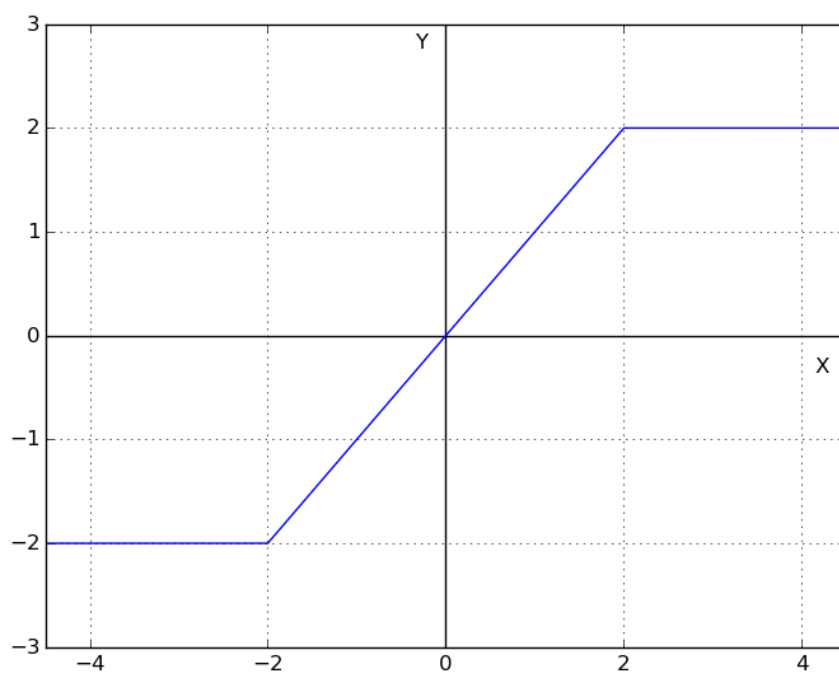
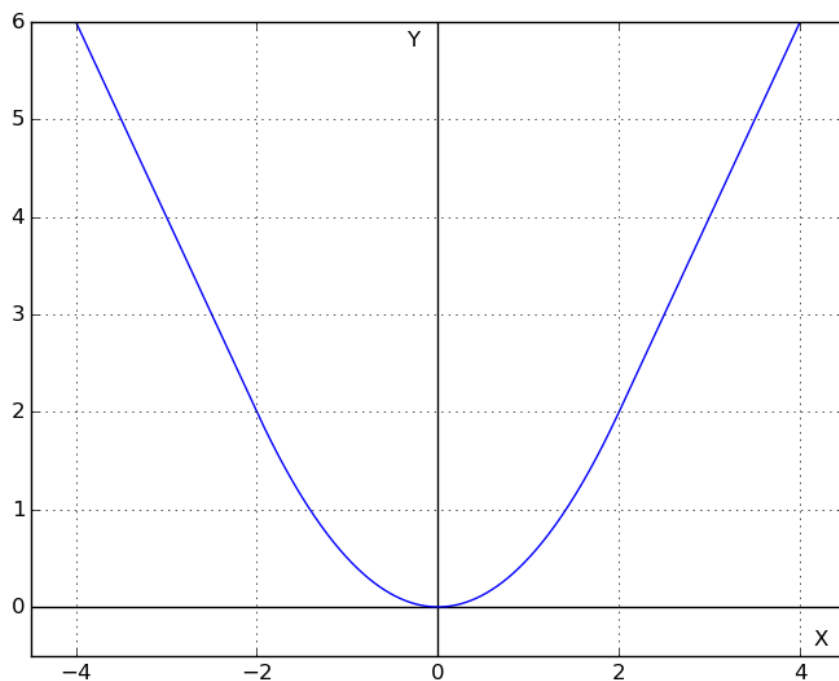
VIII. Оцінка Ендрюса.

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 - \cos x, & |x| \leq \pi, \\ 2, & |x| > \pi. \end{cases}, \quad \psi(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}, \quad \gamma^2 = 19.0514.$$



ІХ. Оцінка Хьюбера.

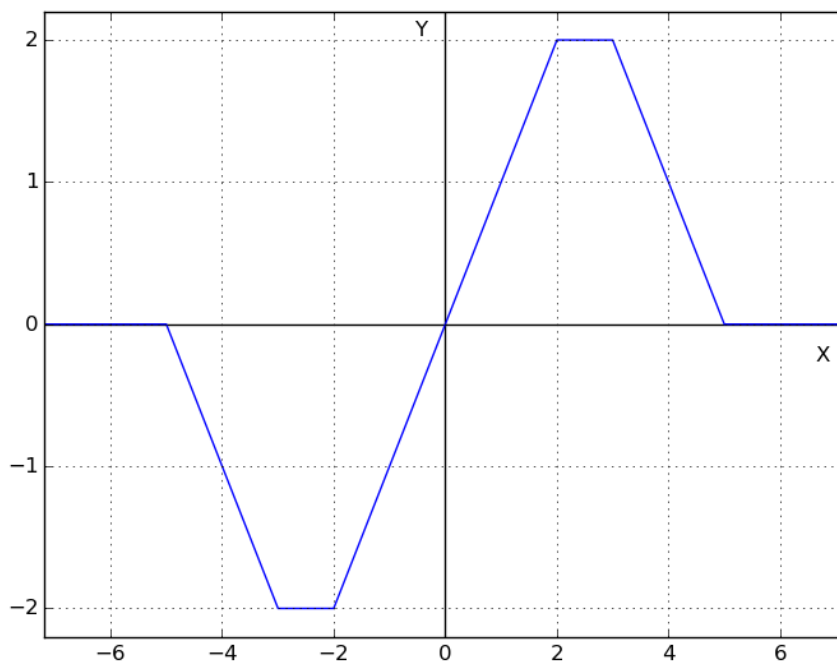
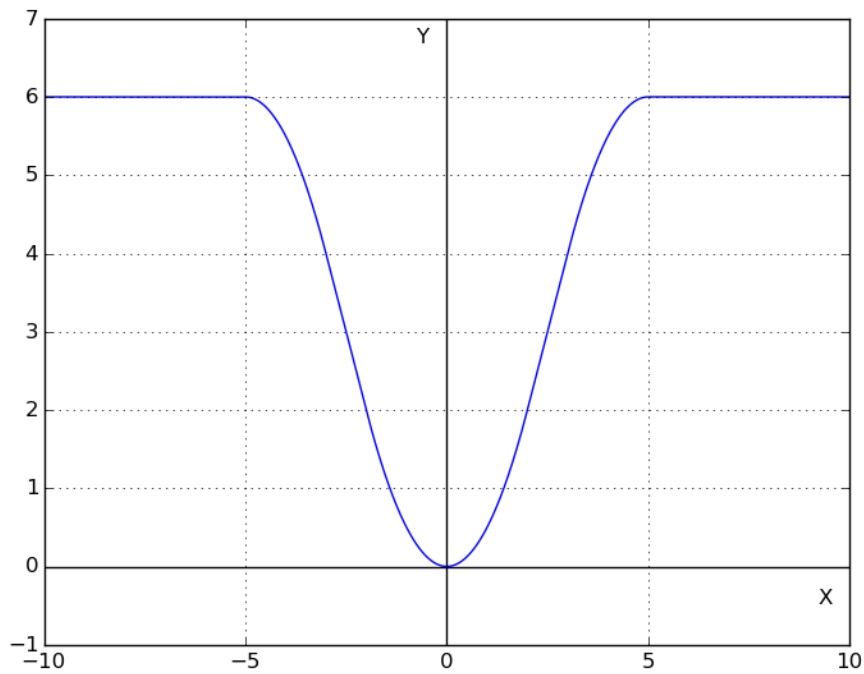
$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & |x| \leq r, \\ r|x| - \frac{r^2}{2}, & |x| > r. \end{cases}, \psi(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq \pi, \\ r \cdot \text{sign}(x), & |x| > \pi. \end{cases}, \gamma^2 = 0.17469.$$



X. Оцінка Хемпела

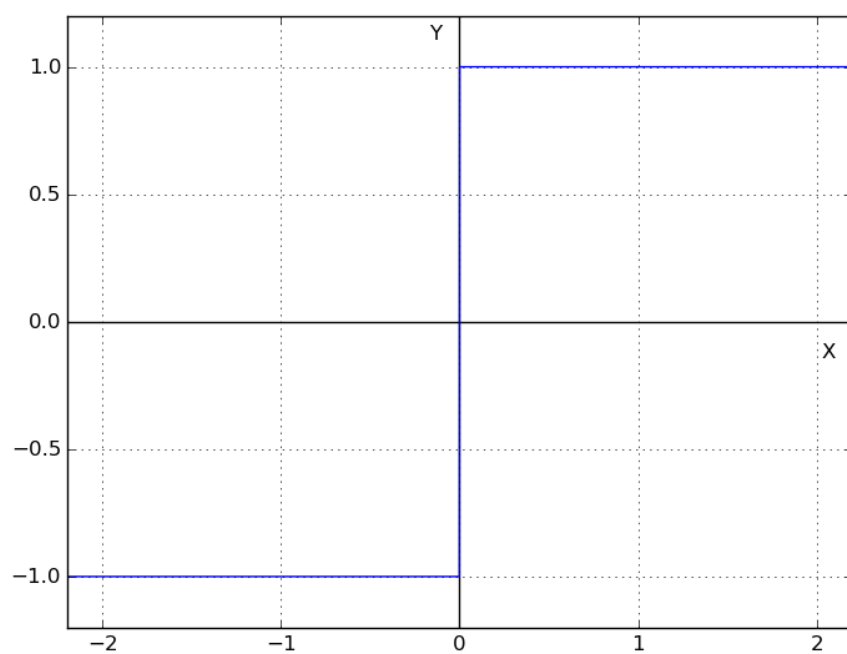
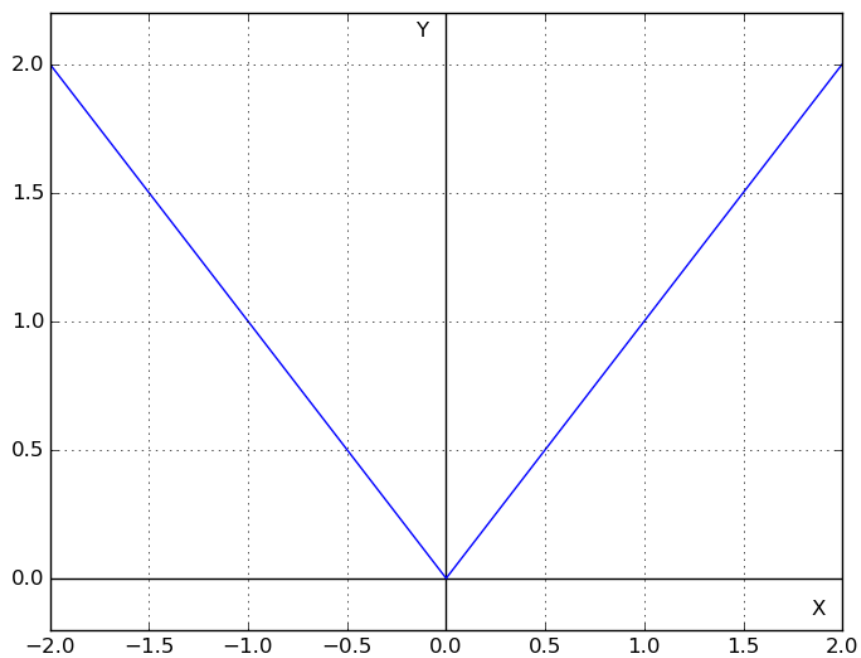
$$\rho(x) = \begin{cases} x^2/2, |x| \leq \nu, \\ \nu|x| - \frac{\nu^2}{2}, \nu < |x| \leq \mu, \\ \nu\mu - \frac{(\nu+\mu-|x|)^2}{2}, \mu < |x| \leq \nu + \mu, \\ \nu\mu, |x| > \nu + \mu. \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} x, |x| \leq \nu, \\ \nu \cdot \text{sign}(x), \nu < |x| \leq \mu, \\ (\nu + \mu - |x|)\text{sign}(x), \mu < |x| \leq \nu + \mu, \\ 0, |x| > \nu + \mu. \end{cases}, \gamma^2 = 1.06549.$$



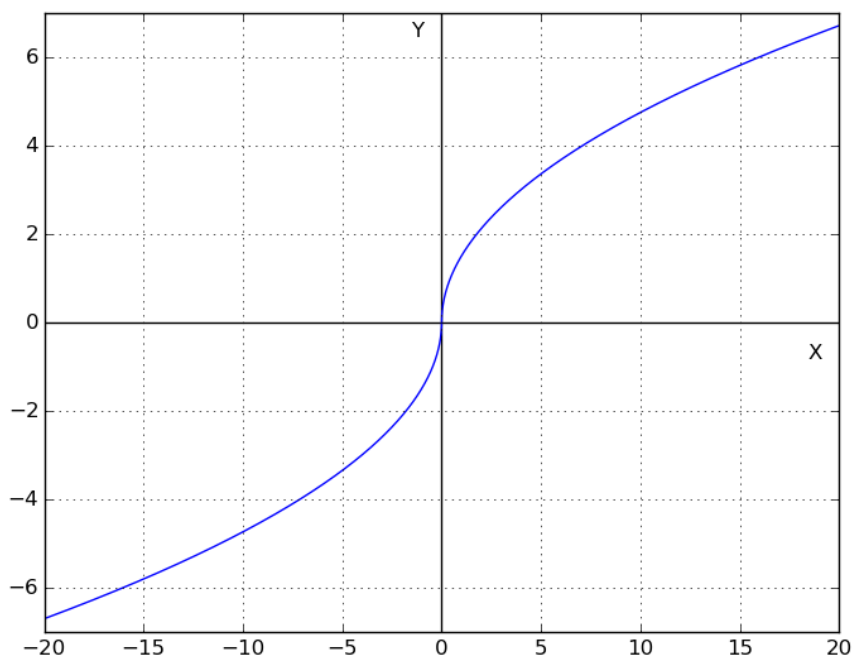
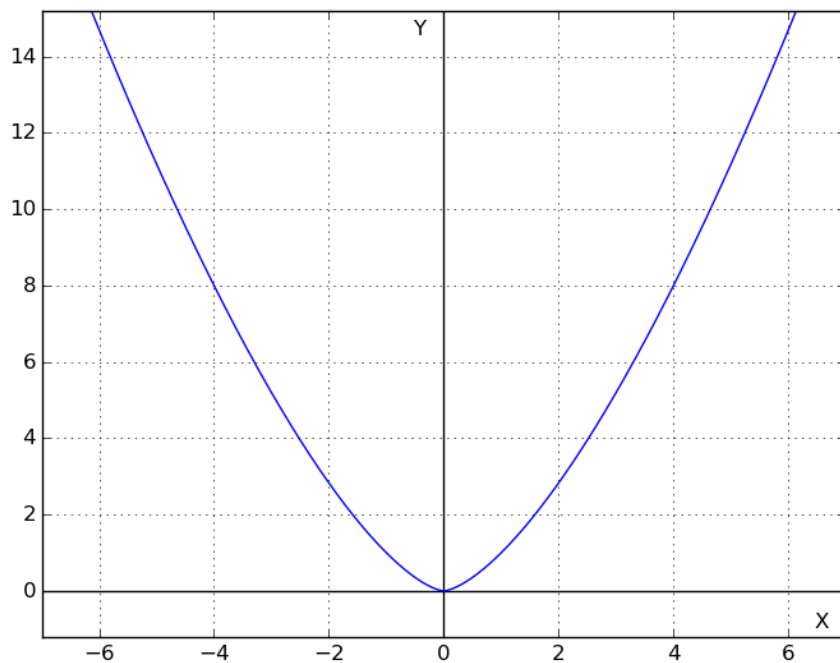
XI. o.H.M.

$$\rho(x) = |x|, \psi(x) = \text{sign}(x), \gamma^2 = 37.7987.$$



XII. L_p -оцінки

$\rho(x) = |x|^p, p \in (1, 2), \psi(x) = p|x|^{p-1}\text{sign}(x), \gamma^2 = 1.29018$.



ХІІІ. Зрізана о.н.м.

$$\rho(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \leq r, \\ r, & |x| > r. \end{cases}, \psi(x) = \begin{cases} \text{sign}(x), & |x| \leq r, \\ 0, & |x| > r. \end{cases}, \gamma^2 = 1736.69.$$

