

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»**

Фізико-математичний факультет
(повна назва інституту/факультету)

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей
(повна назва кафедри)

«На правах рукопису»

УДК 519.21

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

_____ Клесов О.І.
(підпис) (ініціали, прізвище)

“ _____ ” _____ 20__ р.

**Магістерська дисертація
на здобуття ступеня магістра**

зі спеціальності 8.04020101 «Математика»

на тему: «Про ймовірність виграшу в нескінченній кількості турнірів зі
змінним досвідом гравця»

Виконала: студентка VI курсу, групи ОМ-31м

_____ Пахнюк Альона Миколаївна
(прізвище, ім'я, по батькові)

_____ (підпис)

Науковий керівник доктор фізико-математичних наук, професор

_____ Пилипенко А.Ю.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

_____ (підпис)

Консультант «Охорона праці та безпека в надзвичайних ситуаціях»
(назва розділу)

_____ доцент Мітюк Л.О.

(вчені ступінь та звання, прізвище, ініціали)

_____ (підпис)

Рецензент кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий
співробітник інституту геофізики НАН України

_____ ім.С. І. Субботіна, Арясова О.В.

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

_____ (підпис)

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з
праць інших авторів без
відповідних посилань.

Студент _____
(підпис)

Київ – 2015 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Інститут (факультет) Фізико – математичний факультет

Кафедра Математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність 8.04020101 « Математика »

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Клесов О.І.

(підпис)

«__» _____ 2015р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Пахнюк Альоні Миколаївні

1. Тема дисертації: «Про ймовірність виграшу в нескінченній кількості турнірів зі змінним досвідом гравця»

науковий керівник дисертації: Пилипенко Андрій Юрійович,
доктор фіз.-мат. наук, професор,

затверджені наказом по університету від «__» _____ 20__р. № _____

2. Термін подання студентом: дисертації _____

3. Об'єкт дослідження: послідовності випадкових величин

4. Предмет дослідження: асимптотика сум та максимумів послідовності випадкових величин

5. Перелік завдань, які потрібно розробити :

1) вивчити теорію граничної поведінки сум випадкових величин;

- 2) ознайомитись з теорією граничної поведінки випадкових подій та максимумів;
- 3) встановити результати про поведінку суми випадкових величин у випадку певної функції щільності;
- 4) знайти достатні умови виграшу учасника в нескінченній кількості турнірів у випадку скінченного та нескінченного математичного сподівання.

6. Орієнтовний перелік публікацій: четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ 23-24 квітня 2015

7. Консультанти розділів дисертації

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
Охорона праці та безпека в надзвичайних ситуаціях	Доцент Мітюк Л. О.		

9. Дата видачі завдання _____

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Строк виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Вивчення літератури про граничну поведінку сум та максимумів випадкових величин		
2	Встановлення результатів		

	поведінки сум та максимумів випадкових величин у випадку певної функції щільності		
4	Доведення теореми про ймовірність виграшу у випадку скінченного математичного сподівання		
5	Дослідження ймовірності виграшу у випадку нескінченного математичного сподівання		

Студент

(підпис)

Пахнюк А.М.

(ініціали, прізвище)

Науковий керівник дисертації

(підпис)

Пилипенко А.Ю.

(ініціали, прізвище)

Реферат

Магістерська дисертація: 50 стор., 4 посилання

В магістерській дисертації розглянуто задачу про вивчення умов, за яких випадкове блукання з додатньою ймовірністю завжди перевищує величину наступного стрибка. Розглянуто випадки скінченного та нескінченного математичного сподівання стрибка.

А також досліджено граничну поведінку для сум та максимумів незалежних однаково розподілених випадкових величин з густиною, яка має певну асимптотичну поведінку.

Ключові слова: граничні теореми для сум та максимумів випадкових величин, лема Бореля-Кантеллі.

Реферат

Магистерская диссертация: 50 стр., 4 ссылки

В магистерской диссертации рассмотрена задача об изучении условий, при которых случайное блуждание с положительной вероятностью всегда превышает величину следующего прыжка. Рассмотрены случаи конечного и бесконечного математического ожидания прыжка.

А также исследовано предельное поведение для сумм и максимумов независимых одинаково распределенных случайных величин с плотностью, которая имеет определенное асимптотическое поведение.

Ключевые слова: предельные теоремы для сумм и максимумов случайных величин, лемма Бореля-Кантелли.

Зміст

Вступ.....	9
1. Теоретичні відомості.....	12
1.1 Гранична поведінка сум випадкових величин.....	12
1.2 Гранична поведінка випадкових подій.....	14
1.3 Гранична поведінка максимумів.....	15
2. Результати поведінки суми випадкових величин у випадку певної функції щільності.....	18
3. Ймовірність виграшу у випадку скінченного та нескінченного математичного сподівання.....	24
4. Допоміжні результати.....	33
5. Охорона праці та безпека в надзвичайних ситуаціях.....	
5.1.Оцінка важкості та напруженості праці.....	
5.2.Аналіз психологічних аспектів умов праці.....	
5.3.Нормування праці. Вибір оптимального режиму праці та відпочинку.....	
5.4.Санітарія та гігієна робочого місця.....	
5.5.Охорона праці при використанні технічних засобів забезпечення діяльності при виконанні дипломної роботи (дисертації).....	
Висновки.....	
Список використаних джерел.....	

Вступ

Нехай $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ – незалежні однаково розподіленні випадкові величини.

Розглянемо події $A_n = \{\xi_1 + \dots + \xi_n < \xi_{n+1}\}$, кожна з яких може відбуватись лише в «сходинковий» момент. Метою дослідження є вивчення умов за яких A_n відбувається нескінченно часто, або не відбувається починаючи з деякого моменту.

Тому наша задача пов'язана, з однієї сторони, з дослідженням асимптотики сум $\{\xi_1 + \dots + \xi_n\}_{n \geq 1}$, а з іншої сторони – з дослідженням послідовності максимумів $\{\max_{k=1, \dots, n} \xi_k\}$.

Дану задачу можна неформально перефразувати наступним чином.

В змаганнях приймає участь нескінченна кількість учасників лицарів. Перший вступає у двобій з другим, тоді переможець вступає у двобій з третім і т. д. Вважається, що кожен з лицарів має свій досвід у змаганнях, та ці досвіди є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, що змінюються після кожної зустрічі відповідно на їх суму. Перемагає той, в кого досвід більший.

Завдання полягає в тому, щоб визначити за яких умов лицар виживе, або загине, та з якою ймовірністю.

Дослідженням поведінки суми нескінченної кількості випадкових величин займалося чимало вчених, а справжню наукову основу заклав великий математик Якоб Бернуллі (1654-1705). Під час спостереження масових однорідних випадкових подій у них виявляються певні закономірності типу стабільності. Сформульований ним закон великих чисел стверджує, що емпіричне середнє (середнє арифметичне) кінцевої вибірки з фіксованого розподілу близьке до теоретичного середнього (математичного сподівання) цього розподілу.

Залежно від виду збіжності розрізняють слабкий закон великих чисел, коли має місце збіжність за ймовірністю, і посилений закон великих чисел, коли має місце збіжність майже напевно. Посилений закон великих чисел був встановлений А.М. Колмогоровим.

Видатна роль у розвитку теорії ймовірностей належить знаменитому математику Лапласу (1749 – 1827), який дав доказ однієї з форм центральної граничної теореми (теореми Муавра-Лапласа) про збіжність розподілу суми незалежних однаково розподілених випадкових величин до нормального розподілу. Слід також відзначити роботу Пуассона (1781-1840), він довів більш загальну, ніж у Якова Бернуллі, форму закону великих чисел. З ім'ям Пуассона пов'язаний один із законів розподілу, що грає велику роль в теорії ймовірностей.

У другій половині XIX століття значний доробок в дослідженнях поведінки суми випадкових величин зробили такі вчені: П. Л. Чебишов, А. А. Марков і О. М. Ляпунов.

Поняття стійкого розподілу було введено Леві в 1925 році в результаті вивчення властивостей сум однаково розподілених випадкових величин. Цей клас розподілу включає в себе розподіл з товстими хвостами і несиметричними щільностями розподілу. Довгий час цим розподілам не знаходилося застосування, в силу чого вони мало освітлювались в літературі. Вперше стійкий закон був використаний в астрономії в 1919 році до виходу монографії Леві. пізніше ці розподіли були використані в різних областях фізики, біології, геології.

Поряд із схемою сум незалежних випадкових величин схема максимуму посідає значне місце в теорії ймовірностей.

Задачі, пов'язані з екстремальними явищами, зустрічаються в різних областях. Це, наприклад, проблема повенів і посух, екстремальні метеорологічні явища, низка проблем в авіації.

Початок класичної теорії екстремальних значень незалежних випадкових величин пов'язують із роботами М.Фреше (1927), який вперше строго математично одержав один із граничних розподілів для максимальних значень, та Р.Фішера і Л.Тіппета (1928), які в доповнення до граничного розподілу Фреша знайшли два інших типи розподілів екстремальних значень. Центральний результат теорії – теорема про екстремальні типи був доведений у повному обсязі Б.В.Гнеденком (1943).

1. Теоретичні відомості

1.1. Гранична поведінка сум випадкових величин

Для дослідження та розв'язання поставленої задачі розглянемо деякі граничні теореми з теорії ймовірності, щоб побачити як веде себе сума нескінченної кількості випадкових величин. У випадку скінченного математичного сподівання маємо наступні результати:

Закон великих чисел: Нехай $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин визначених на одному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ зі скінченним математичним сподіванням $E\xi_i$ і дисперсіями $D\xi_i = 0$. Тоді:

$$\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} E\xi_k. [1]$$

Посилений закон великих чисел (Колмогорова):

1) Нехай $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – послідовність незалежних випадкових величин зі скінченним математичним сподіванням $E\xi_i$ і дисперсіями $D\xi_i$. Якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D\xi_k}{k^2}$ – збіжний, то має місце посилений закон великих чисел:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - E\xi_k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{м. н.}} 0.$$

2) Нехай $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин визначених на одному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Якщо $E|\xi_i| < \infty$, то

$$\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{м. н.}} E\xi_k. [1]$$

Центральна гранична теорема: Нехай $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – послідовність взаємно незалежних випадкових величин з однаковим розподілом F .

Припустимо, що $E\xi_i = 0$ і $D\xi_i = 1$. При $n \rightarrow \infty$ розподіл нормованих сум слабо збігається

$$S_n = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1),$$

де $\mathcal{N}(0,1)$ – стандартний нормальний розподіл зі щільністю

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. [1]$$

Тепер розглянемо випадок нескінченного математичного сподівання. Для сформулювання наступних граничних теорем, встановимо деякі означення.

Означення 1: Розподіл U випадкової величини ξ називається **стійким**, якщо для будь-якої послідовності однаково розподілених та незалежних випадкових величин $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, існують такі константи a_n, b_n , що розподіл випадкової величини $a_n \xi + b_n$ співпадає з розподілом суми:

$$a_n \xi + b_n \stackrel{D}{=} \sum_{i=1}^n \xi_n,$$

де рівність розуміється в сенсі рівності розподілів.

Означення 2: Неперервна функція $F(t)$ називається **повільно змінною**, якщо для довільного $\lambda > 0$ виконується умова

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(\lambda t)}{F(t)} = 1.$$

Неперервна функція $f(t)$ називається **правильно змінною**, якщо її можна представити у вигляді

$$f(t) = F(t)t^p,$$

де F – повільно змінна функція.

Теорема (Гнеденко): Нехай $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – послідовність невід’ємних незалежних випадкових величин з функцією розподілу

$$1 - F(x) \sim \frac{x^{-\alpha} L(x)}{\Gamma(1 - \alpha)}, \text{ при } x \rightarrow \infty,$$

де $0 < \alpha < 1$.

Тоді

$$\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} U_\alpha,$$

де a_n – числа, які обираються таким чином щоб $\frac{nL(a_n)}{a_n^\alpha} \rightarrow 1$. [2]

5.2. Гранична поведінка випадкових подій

Розглянемо деякі граничні теореми поведінки випадкових подій зокрема лему Бореля-Кантеллі для нескінченної послідовності випадкових подій $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, та лема Бореля-Кантеллі-Леві, випадок послідовності $\mathcal{F}_n$ -вимірних подій. Для цього наведемо наступне означення:

Нехай $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F})$ – ймовірнісний простір, $\{A_n\}_{n \geq 0} \subset \mathcal{F}$ – деяка послідовність подій.

Означення 3: Позначимо через

$$\{A_n \text{ н. ч.}\} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k$$

подію, яка означає, що відбувається нескінченно багато подій з $A_1, A_2, \dots$

Лема Бореля-Кантеллі:

а) Якщо нескінченна послідовність випадкових подій $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ є такою, що $\sum_{n \geq 1} P(A_n) < \infty$, то $P(A_n \text{ н. ч.}) = 0$.

б) Якщо випадкові події $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ є незалежними в сукупності та $\sum_{n \geq 1} P(A_n) = \infty$, то $P(A_n \text{ н. ч.}) = 1$. [1]

Лема Бореля-Кантеллі-Леві: Нехай $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – потік -алгебр. Якщо $B_1, B_2, \dots$ – деяка послідовність $\mathcal{F}_n$ -вимірних подій, то

$$P\left(\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{B_n} < \infty\right\} \Delta \left\{\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n | \mathcal{F}_{n+1}) < \infty\right\}\right) = 0.$$

Тобто, для майже всіх ω таких, що $\{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{B_n} < \infty\}$ виконується $\{\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n | \mathcal{F}_{n+1}) < \infty\}$ і навпаки, якщо $\{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{B_n} = \infty\}$, то $\{\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n | \mathcal{F}_{n+1}) = \infty\}$. [1]

1.3. Гранична поведінка максимумів

Розглянемо деякі граничні теореми для максимуму векторів у умовах асимптотичної незалежності компонент, для максимуму нормально розподілених векторів та для екстремальних значень.

Розглянемо випадковий вектор $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ у $\mathbb{R}^m$. Нехай $\bar{\xi}_n = (\xi_{n1}, \dots, \xi_{nm}), n \geq 1$, – послідовність незалежних копій $\bar{\xi}$,

$$\bar{z}_n = \max_{1 \leq i \leq n} \bar{\xi}_i = (z_{n1}, \dots, z_{nm}), z_{nj} = \max_{1 \leq i \leq n} \xi_{ij}.$$

Надалі будемо вважати, що компоненти випадкового вектора $\bar{\xi}$ задовольняють наступну умову:

$$\lim_{t \rightarrow x(F_1), s \rightarrow x(F_2)} \frac{P(\eta_1 > t, \eta_2 > s)}{P(\eta_1 > t) + P(\eta_2 > s)} = 0, \quad (1.1)$$

де $x(F) = \sup\{s: F(s) < 1\}$, $F_i(s)$ – функція розподілу випадкової величини $\eta_i, i = 1, 2$.

Теорема (гранична теорема для максимуму векторів в умовах асимптотичної незалежності компонент): Нехай $(\bar{\xi}_n)$ – послідовність незалежних копій випадкового вектора $\bar{\xi}$, і виконуються умови:

1) $\forall j, 1 \leq j \leq m$, маргінальна функція розподілу $F_i(s)$ належить області максимум притягання закону $G_j(x)$, тобто $F_i \in D(G_j)$ і задовольняє співвідношенню при $n \rightarrow \infty$

$$\left(F_j \left(\frac{x}{a_{nj}} + b_{nj} \right) \right)^n \xrightarrow{D} G_j(x),$$

для деяких констант $a_{nj} > 0, b_{nj}$;

2) $\forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq m$ випадковий вектор (ξ_i, ξ_j) задовольняє рівність (1.1).

Тоді

$$\bar{a}_n(\bar{z}_n - \bar{b}_n) \xrightarrow{D} \bar{\zeta},$$

де $\bar{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_m)$, ζ_i – незалежні і мають функцію розподілу $G_i(s)$, тобто виконується

$$P(\bar{a}_n(\bar{z}_n - \bar{b}_n) < \bar{x}) \xrightarrow{D} G(\bar{x}), \quad (1.2)$$

з $G(\bar{x}) = \prod_{j=1}^m G_j(x_j)$. [4]

Теорема (гранична теорема для максимуму нормально розподілених векторів): Якщо $\bar{\eta} = (\sigma_1 \eta_1, \dots, \sigma_m \eta_m)$ – нормально розподілений випадковий вектор, $(\bar{\eta})$ – послідовність незалежних копій $\bar{\eta}$,

$$z_{ni} = \sigma_1 \max_{1 \leq k \leq n} \eta_{ki}, \bar{z}_n = (z_{n1}, \dots, z_{nm}),$$

то при $n \rightarrow \infty$

$$a_n(\bar{z}_n - b_n \bar{\sigma}) \xrightarrow{D} \bar{z} = \sum_{k=1}^{m^*} \zeta_k \sum_{i \in I_k} \sigma_i e_i. \quad [4]$$

Теорема (загальна гранична теорема для екстремальних значень, Дж.Пікенс): Нехай $X_1 \dots X_n$ – незалежні випадкові m -вимірні вектори, які мають однакову функцію розподілу $F(\bar{x})$, $F_t(x)$ – одновимірні маргінальні функції розподілу

$$F(\cdot), t = 1, \dots, m, Z_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

Припустимо, що для деяких числових послідовностей $a_{nt}, b_{nt} > 0$ при $n \rightarrow \infty$

$$F_t^n(a_{nt} + b_{nt}x) \rightarrow \Lambda(x), \quad t = 1, \dots, m,$$

де $\Lambda(x) = \exp(-e^{-x})$, при $-\infty < x < \infty$. Нехай $U(p)$ – скінченна міра на m -вимірному одиничному симплексі S . Функція розподілу $G(\bar{x})$ буде граничною для

$$P(Z_{nt} < a_{nt} + b_{nt}x, t = 1, \dots, m) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

тоді і тільки тоді, коли вона може бути подана у вигляді:

$$G(\bar{x}) = \exp \left\{ - \int_S \max_{1 \leq t \leq m} (p_t e^{-x_t}) dU(\bar{p}) \right\}. [4]$$

Теорема (загальна гранична теорема для екстремальних значень, Л.де Хаан, С.І.Резнік): Наступні твердження еквівалентні:

- 1) $G(\bar{x})$ – багатовимірний екстремальний розподіл (тобто $G(\bar{x})$ задовольняє співвідношенню (1.2)) з Φ_1 маргінальними;
- 2) існує скінченна міра μ на $S_m = \{y \in [0, \infty]^m \setminus \{0\} : \|y\| = 1\}$, для якої

$$\int_{S_m} a_i \mu(d\bar{a}) = 1, i = 1, 2, \dots, m,$$

і така, що для $\bar{x} \geq 0$

$$G(\bar{x}) = \exp \left\{ - \int_{S_m} \bigvee_{i=1}^m \frac{a_i}{x_i} \mu(d\bar{a}) \right\};$$

- 3) існує сімейство функцій $g_i(t) \geq 0, t \in [0, 1], 1 \leq i \leq m$, для якого

$$\int_0^1 g_i(t) dt = 1, i = 1, 2, \dots, m, \text{ і таке, що для } \bar{x} \geq 0$$

$$G(\bar{x}) = \exp \left\{ - \int_0^1 \bigvee_{i=1}^m \frac{g_i(t)}{x_i} dt \right\}. [4]$$

2. Результати поведінки суми випадкових величин у випадку певної функції щільності

Нехай $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ – послідовність незалежних однаково розподілених невід’ємних випадкових величин, та $\xi_k \stackrel{d}{=} \xi$.

В даному параграфі розглянемо поведінку суми випадкових величин $\xi_1 + \dots + \xi_n$, якщо $p(x) \sim \frac{c}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}$, при $x \rightarrow \infty$. Для цього нам потрібно з’ясувати при яких α, β :

- а) p – може бути щільністю;
- б) існує математичне сподівання;
- в) як ведуть себе хвости розподілу випадкової величини ξ .

Теорема 2.1. (про існування щільності розподілу): Нехай $p \in C([0, \infty))$, $p(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}}$, при $x \rightarrow \infty$. Тоді

$$\int_0^{+\infty} p(x) dx < \infty$$

тоді і тільки тоді, коли або $\alpha > 1, \beta \in \mathbb{R}$, або $\alpha = 1, \beta > 1$.

Доведення: Маємо особливість в точці $+\infty$. За ознакою порівняння теорема справедлива у випадку виконання наступної умови:

$$\int_0^{+\infty} p(x) dx < \infty \Leftrightarrow \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}} dx < \infty. \quad (2.1)$$

1) Розглянемо випадок коли $\alpha > 1$. Зробивши заміну $\alpha = \gamma + 1, \gamma > 0$, маємо

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}(\ln x)^{\beta}} dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\gamma+1}(\ln x)^{\beta}} dx < \infty. \quad (2.2)$$

Оскільки, $\exists x_0 > 0 \forall x \geq x_0$, виконується нерівність:

$$\frac{1}{x^{1+\frac{\gamma}{2}} x^{\frac{\gamma}{2}} (\ln x)^\beta} \leq \frac{1}{x^{1+\frac{\gamma}{2}}}.$$

Тоді, для доведення збіжності інтегралу (2.2) достатньо довести збіжність інтегралу вигляду:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\frac{\gamma}{2}}} dx < \infty.$$

Це випливає з того, що $1 + \frac{\gamma}{2} > 1$.

2) Розглянемо випадок коли $0 < \alpha < 1$, зробивши заміну в (2.1)

$\alpha = \gamma + 1$, отримаємо, що $-1 < \gamma < 0$, а отже, $\frac{1}{2} < 1 + \frac{\gamma}{2} < 1$, тому інтеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\gamma+1} (\ln x)^\beta} dx = \infty.$$

3) У випадку $\alpha = 1$, зробивши заміну $\ln x = y, dy = \frac{1}{x} dx$ отримаємо наступне

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x (\ln x)^\beta} dx = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{y^\beta} dy < \infty \Leftrightarrow \beta > 1.$$

Теорема доведена.

Теорема 2.2. (про асимптотику хвостів функції розподілу):

1) Якщо $\alpha > 1, \beta \in \mathbb{R}$, то

$$\int_x^{+\infty} \frac{dy}{y^\alpha (\ln y)^\beta} \sim \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1} (\ln x)^\beta}, \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

2) Якщо $\alpha = 1, \beta > 1$, то

$$\int_x^{+\infty} \frac{dy}{y(\ln y)^\beta} \sim \frac{1}{(\beta-1)(\ln x)^{\beta-1}}, \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Доведення: 1) Для доведення твердження необхідно показати, що

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_x^{+\infty} \frac{dy}{y^\alpha (\ln y)^\beta}}{\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}(\ln x)^\beta}} = 1. \quad (2.3)$$

Для знаходження границі з рівності (2.3) використаємо правило Лопіталя, тобто продиференціюємо чисельник і знаменник та зробимо деякі перетворення, маємо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_x^{+\infty} \frac{dy}{y^\alpha (\ln y)^\beta}}{\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}(\ln x)^\beta}} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_x^{+\infty} \frac{dy}{y^\alpha (\ln y)^\beta} \right)'}{\left(\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}(\ln x)^\beta} \right)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{y^\alpha (\ln y)^\beta} \Big|_x^{+\infty}}{\frac{1}{(\alpha-1)} \left((1-\alpha)x^{-\alpha}(\ln x)^{-\beta} - \beta x^{1-\alpha}(\ln x)^{-\beta-1} \frac{1}{x} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}}{\frac{1}{(\alpha-1)} \left((1-\alpha)x^{-\alpha}(\ln x)^{-\beta} - \beta x^{-\alpha}(\ln x)^{-\beta-1} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\alpha}{x^\alpha (\ln x)^\beta \left((1-\alpha)x^{-\alpha}(\ln x)^{-\beta} - \beta x^{-\alpha}(\ln x)^{-\beta-1} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\alpha}{(1-\alpha) - \beta (\ln x)^{-1}} = \left| \frac{1}{\ln x} \rightarrow 0, \text{ при } x \rightarrow \infty \right| = \frac{1-\alpha}{1-\alpha} = 1. \end{aligned}$$

2) Друга частина теореми доводиться аналогічно як і в першому випадку. Знайдемо границю відношення функцій після чого знайшовши інтеграл членівника та після деяких перетворень отримаємо наступне

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_x^{+\infty} \frac{dy}{y(\ln y)^\beta}}{\frac{1}{(\beta-1)(\ln x)^{\beta-1}}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_x^{+\infty} \frac{d(\ln y)}{(\ln y)^\beta}}{\frac{1}{(\beta-1)(\ln x)^{\beta-1}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(\ln y)^{1-\beta}}{(1-\beta)} \Big|_x^{+\infty}}{\frac{1}{(\beta-1)(\ln x)^{\beta-1}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{(\ln x)^{1-\beta}}{(1-\beta)}}{\frac{(\ln x)^{1-\beta}}{(\beta-1)}} = 1. \end{aligned}$$

Теорема доведена.

Теорема 2.3. (про існування математичного сподівання): Нехай

ξ – випадкова величина, функція щільності має вигляд:

$$p(x) \sim \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}, \text{ при } x \rightarrow \infty, \alpha > 1, \beta \in \mathbb{R}.$$

Тоді $E\xi < \infty$ тоді і тільки тоді, коли або $\alpha > 2, \beta \in \mathbb{R}$, або $\alpha = 2, \beta > 1$.

Доведення: Запишемо формулу математичного сподівання випадкової величини ξ у інтегральному вигляді через функцію щільності, тобто:

$$E\xi = \int_0^{+\infty} xp(x)dx.$$

Маємо особливість в точці $+\infty$. За ознакою порівняння

$$E\xi < \infty \Leftrightarrow \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}(\ln x)^\beta} dx < \infty.$$

З теореми 2.1 випливає, коли $\alpha - 1 > 1, \beta \in \mathbb{R}$, або $\alpha - 1 = 1, \beta > 1$ інтеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}(\ln x)^\beta} dx < \infty.$$

Теорема доведена.

Теорема 2.4. (про збіжність до стійкого розподілу): Нехай $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – послідовність невід’ємних незалежних випадкових величин з функцією розподілу

$$1 - F(x) \sim \frac{c}{x^\alpha (\ln x)^\beta \Gamma(1 - \alpha)}, \text{ при } x \rightarrow \infty,$$

де $0 < \alpha < 1$.

Якщо

$$a_n \sim \left(n \left(\frac{\ln n}{\alpha} \right)^{-\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

то

$$\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} U_\alpha. \quad (2.4)$$

Доведення: За теоремою Гнеденко умова теореми (2.4) виконується якщо

$$\frac{nL(a_n)}{a_n^\alpha} \rightarrow 1,$$

де $L_n(x) = (\ln x)^{-\beta}$.

Перевіримо дану умову:

$$\frac{n(\ln a_n)^{-\beta}}{a_n^\alpha} \rightarrow 1,$$

або

$$n(\ln a_n)^{-\beta} \sim a_n^\alpha. \quad (2.5)$$

Прологарифмуємо ліву та праву частини (2.5)

$$\ln n - \beta (\ln a_n) \sim \alpha \ln a_n,$$

де $\beta(\ln a_n) \sim o(\ln a_n)$. Звідси

$$\ln n \sim \alpha \ln a_n,$$

або

$$\ln a_n \sim \frac{\ln n}{\alpha}. \quad (2.6)$$

Застосуємо дану еквівалентність (2.6) до формули (2.5), отримаємо

$$n \left(\frac{\ln n}{\alpha} \right)^{-\beta} \sim a_n^\alpha,$$

звідси

$$a_n \sim \left(n \left(\frac{\ln n}{\alpha} \right)^{-\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Теорема доведена.

Терема 2.5:

Доведення:

3. Ймовірність виграшу у випадку скінченного та нескінченного математичного сподівання

Нехай $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини та мають неперервний розподіл.

Розглянемо події $A_n = \{\xi_1 + \dots + \xi_n < \xi_{n+1}\}$, кожна з яких може відбуватись лише в «сходинковий» момент. Розглянемо за яких умов події A_n відбувається нескінченно часто, або не відбувається починаючи з деякого моменту.

Дану задачу можна неформально перефразувати наступним чином.

В змаганнях приймає участь нескінченна кількість учасників лицарів. Перший вступає у двобій з другим, тоді переможець вступає у двобій з третім і т. д. Вважається, що кожен з лицарів має свій досвід у змаганнях, та ці досвіди є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, що змінюються після кожної зустрічі відповідно на їх суму. Перемагає той, в кого досвід більший.

Завдання полягає в тому, щоб визначити за яких умов лицар виживе, або загине, та з якою ймовірністю.

Теорема 3.1: Нехай $E\xi_k = m < 0$. Тоді $P(\text{вижити}) = 0$.

Доведення: За законом великих чисел з ймовірністю 1 маємо

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_k}{n} \rightarrow c < 0, \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (3.1)$$

Тоді за лемою 4.3 з ймовірністю 1 виконується наступне:

$$\frac{\max(|\xi_1|, \dots, |\xi_n|)}{n} \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

Отже, починаючи з деякого номера $n_0 = n_0(\omega)$ за (3.1) та (3.2) з ймовірністю 1 виконується

$$\frac{\xi_{n+1}}{n+1} \geq -\frac{\max(|\xi_1|, \dots, |\xi_{n+1}|)}{n+1} \geq \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \cdot \frac{n}{n+1}.$$

Теорема доведена.

У випадку скінченного додатнього математичного сподівання доведемо, що існує таке значення досвіду x , що сума всіх попередніх досвідів більша за наступний з ймовірністю близькою до одиниці. Сформулюємо дане твердження у вигляді теореми про достатні умови того, що учасник перемагає у турнірі з ймовірністю $1 - \varepsilon$.

Теорема 3.2: Нехай $\xi_k \geq 0$ та $E\xi_k = m < \infty$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 \exists x$:

$$P(\forall n: x + \xi_1 + \dots + \xi_n > \xi_{n+1}) \geq 1 - \varepsilon. \quad (3.3)$$

Доведення: За законом великих чисел з ймовірністю 1 справедлива рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} = E\xi = m < \infty,$$

або

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \rightarrow m, n \rightarrow \infty.$$

Застосуємо дане твердження для $n + 1$ елементів

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_{n+1}}{n+1} \rightarrow m, n \rightarrow \infty \quad (3.4)$$

Очевидно, що з (3.4) випливає наступне, якщо ми домножимо ліву частину на величину $\frac{n+1}{n}$, границя цього значення не зміниться, тобто

$$\frac{n+1}{n} \cdot \frac{\xi_1 + \dots + \xi_{n+1}}{n+1} \rightarrow m, n \rightarrow \infty,$$

або

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_{n+1}}{n} \rightarrow m, n \rightarrow \infty.$$

Звідси слідує, що

$$\frac{\xi_{n+1}}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Знайдемо границю відношення випадкових величин при $n \rightarrow \infty$ використовуючи значення (3.5), тобто маємо

$$\frac{\xi_{n+1}}{\xi_1 + \dots + \xi_n} = \frac{\frac{\xi_{n+1}}{n}}{\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}} \rightarrow \frac{0}{m} = 0, n \rightarrow \infty. \quad (3.6)$$

За означенням границі, рівність (3.6) означає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N: \frac{\xi_{n+1}}{\xi_1 + \dots + \xi_n} \leq \varepsilon,$$

або

$$\exists N \forall n: \xi_{n+1} \leq \varepsilon(\xi_1 + \dots + \xi_n). \quad (3.7)$$

В нерівності (3.7) візьмемо $\varepsilon = 1$, маємо

$$P(\exists N \forall n > N: \xi_{n+1} \leq \xi_1 + \dots + \xi_n) = 1. \quad (3.8)$$

Розпишемо (3.8) за допомогою теорії множин, отримаємо

$$P\left(\bigcup_N \bigcap_{n \geq N} \{\xi_{n+1} \leq \xi_1 + \dots + \xi_n\}\right) = 1. \quad (3.9)$$

За теоремою про неперервність ймовірності, тобто

$$P(\bigcup_N A_N) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_N), \text{ якщо } A_1 \subset A_2 \subset A_3 \dots,$$

рівність (3.9) можна переписати наступним чином

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{n \geq N} \{\xi_{n+1} \leq \xi_1 + \dots + \xi_n\}\right) = 1. \quad (3.10)$$

За означенням границі, рівність (3.10) означає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \ N_0 \ \forall N > N_0: P\left(\bigcap_{n \geq N} \{\xi_{n+1} \leq \xi_1 + \dots + \xi_n\}\right) \geq 1 - \varepsilon,$$

тобто

$$P(\text{починаючи з номера } N_0 : \xi_{n+1} \leq \xi_1 + \dots + \xi_n) \geq 1 - \varepsilon,$$

або

$$P(\forall n \geq N_0 : \xi_{n+1} \leq \xi_1 + \dots + \xi_n) \geq 1 - \varepsilon. \quad (3.11)$$

Для подальшого доведення теореми доведемо та використаємо наступну нерівність

$$P(A \cap B) = P(B) - P(B \setminus A) \geq P(B) - P(\Omega \setminus A) = P(B) - P(\bar{A}). \quad (3.12)$$

Запишемо подію з формули (3.3) у вигляді перетину двох подій та застосуємо до даного виразу нерівність (3.12)

$$\begin{aligned} &P(\forall n \geq 1 : x + \xi_1 + \dots + \xi_n \geq \xi_{n+1}) = \\ &= P(\{\forall n, 1 \leq n < N_0 : x + \xi_1 + \dots + \xi_n \geq \xi_{n+1}\} \cap \\ &\quad \cap \{\forall n \geq N_0 : x + \xi_1 + \dots + \xi_n \geq \xi_{n+1}\}) \geq \\ &\geq P(\forall n \geq N_0 : x + \xi_1 + \dots + \xi_n \geq \xi_{n+1}) - \\ &\quad - P(\overline{\forall n, 1 \leq n < N_0 : x + \xi_1 + \dots + \xi_n \geq \xi_{n+1}}). \end{aligned}$$

Доведемо, що

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x: P(\overline{\forall n, 1 \leq n < N_0 : x + \xi_1 + \dots + \xi_n \geq \xi_{n+1}}) < \varepsilon.$$

Застосуємо до даної нерівності закон де Моргана, маємо

$$P(\exists n, 1 \leq n < N_0 : x + \xi_1 + \dots + \xi_n < \xi_{n+1}) < \varepsilon,$$

або

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{N_0} \{x + \xi_1 + \dots + \xi_n < \xi_{n+1}\}\right) < \varepsilon. \quad (3.13)$$

Нерівність (3.13) виконується, оскільки

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P \left(\bigcup_{n=1}^{N_0} \{x + \xi_1 + \dots + \xi_n < \xi_{n+1}\} \right) = P \left(\bigcup_{n=1}^{N_0} \{\infty < \xi_{n+1}\} \right) = 0.$$

Звідси випливає, що нерівність (3.3) виконується, тобто

$$P(\forall n \geq 1 : x + \xi_1 + \dots + \xi_n \geq \xi_{n+1}) \geq 1 - 2\varepsilon > 0.$$

Теорема доведена.

Розглянемо загальний випадок. Доведемо, що для всіх $n \geq 1$ події $\{\xi_1 + \dots + \xi_n > \xi_{n+1}\}$ одночасно виконуються з додатньою ймовірністю.

Теорема 3.3: Нехай $\xi_k \geq 0$ та $E\xi_k = m < \infty$. Тоді

$$P(\forall n \geq 1 : \xi_1 + \dots + \xi_n > \xi_{n+1}) > 0. \quad (3.14)$$

Доведення: За теоремою 3.2 маємо

$$\begin{aligned} P(x + \xi_1 + \dots + \xi_n > \xi_{n+1}) = \\ = P(x + \xi_{n_0} + \dots + \xi_n > \xi_{n+1}, n \geq n_0) > 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Оцінимо ймовірність (3.14) за допомогою теорії множин

$$\begin{aligned} P(\forall n \geq 1 : \xi_1 + \dots + \xi_n > \xi_{n+1}) &\geq \\ &\geq P(\{x + \xi_{n_0} + \dots + \xi_n > \xi_{n+1}, \forall n > n_0\} \cap \{\xi_1 + \dots + \xi_{n_0-1} > x\}) = \\ &= P(x + \xi_{n_0} + \dots + \xi_n > \xi_{n+1}, \forall n > n_0) \cdot P(\xi_1 + \dots + \xi_{n_0-1} > x) \end{aligned}$$

Для будь-якої перестановки чисел $1, 2, \dots, n_0 - 1$ має місце наступна нерівність

$$\begin{aligned} P\left(\xi_1 > \xi_2 > \xi_3 > \dots > \xi_{n_0-1} > \frac{x}{n_0}\right) = \\ = P\left(\xi_{\sigma_1} > \xi_{\sigma_2} > \dots > \xi_{\sigma_{n_0-1}} > \frac{x}{n_0}\right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Оскільки ξ має неперервний розподіл, то

$$(n_0 - 1)! \cdot P\left(\xi_1 > \xi_2 > \xi_3 > \dots > \xi_{n_0-1} > \frac{x}{n_0}\right) =$$

$$= P\left(\min_{n_0 \in \mathbb{N}}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_0-1}) > \frac{x}{n_0}\right).$$

Виберемо таке $n_0 > 0$, щоб виконувалась умова $P\left(\xi > \frac{x}{n_0}\right) > 0$. Звідси випливає, що

$$P\left(\min_{n_0 \in \mathbb{N}}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_0-1}) > \frac{x}{n_0}\right) = \left(P\left(\xi > \frac{x}{n_0}\right)\right)^{n_0}. \quad (3.17)$$

за формулою (3.15) та (3.17) має місце наступне

$$P(\forall n \geq 1: \xi_1 + \dots + \xi_n > \xi_{n+1}) \geq$$

$$= \frac{1}{(n_0 - 1)!} P(x + \xi_{n_0} + \dots + \xi_n > \xi_{n+1}, \forall n > n_0) \cdot \left(P\left(\xi > \frac{x}{n_0}\right)\right)^{n_0} > 0.$$

Теорема доведена.

В теоремах 3.2 та 3.3 було розглянуто та доведено достатні умови того, що лицар виживе у нескінченній кількості турнірів з додатною ймовірністю.

Зараз розглянемо випадки, коли для послідовності $\{\xi_n\}$, $n \geq 1$ виконуються певні умови. Тоді, події

$$\xi_k \geq \xi_1 + \dots + \xi_{k-1}, \text{ для } k > k_0$$

відбуваються нескінченно часто.

А також доведемо теорему, якщо виконується $\bar{F}(x) \sim \frac{b}{\ln x}$, $x \rightarrow \infty$ при певному значенні b то

$$P(\xi_n > (2 + \varepsilon)^n \text{ н. ч. }) = 1,$$

що в свою чергу означає $P(\text{вижити}) = 0$.

Лема 3.1: Нехай $\{\xi_n\}$, $n \geq 1$ – послідовність така, що нескінченно часто виконується $\sum_{k=1}^n \xi_k \geq (2 + \varepsilon)^n$. Тоді, події

$$\xi_k \geq \xi_1 + \dots + \xi_{k-1}, \text{ для } k > k_0 \quad (3.18)$$

відбуваються нескінченно часто.

Доведення: Доведемо методом від супротивного. Припустимо протилежне. Нехай

$$\xi_k < \xi_1 + \dots + \xi_{k-1}, \text{ для } k > k_0. \quad (3.19)$$

Позначимо через $M = \xi_1 + \dots + \xi_{k_0}$. Застосуємо (3.19) для $k = k_0 + 1$ отримаємо

$$\xi_1 + \dots + \xi_{k_0+1} \leq 2M,$$

для $k = k_0 + 2$

$$\xi_1 + \dots + \xi_{k_0+2} \leq 4M.$$

Продовжимо дану операцію до $k = k_0 + n$, отримаємо

$$\xi_1 + \dots + \xi_{k_0+n} \leq 2^n M, \quad (3.20)$$

або

$$\xi_1 + \dots + \xi_n \leq 2^n \left(\frac{M}{2^{k_0}} \right). \quad (3.21)$$

Тоді

$$1 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{(2 + \varepsilon)^n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \left(\frac{M}{2^{k_0}} \right)}{(2 + \varepsilon)^n} = 0$$

Отримали протиріччя. Теорема доведена.

З леми 3.1 випливають наступні наслідки.

Наслідок 3.1: Якщо $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ – незалежні однаково розподіленні та невід’ємні випадкові величини та $\xi_n > (2 + \varepsilon)^n$ відбуваються нескінченно часто, то події

$$\xi_k \geq \xi_1 + \dots + \xi_{k-1}$$

також відбуваються нескінченно часто.

Доведення: Якщо $\xi_n > (2 + \varepsilon)^n$, то $\sum_{k=1}^n \xi_k \geq (2 + \varepsilon)^n$. Отже, виконуються умови попередньої леми.

Наслідок 3.2: Якщо $P(\xi_n > (2 + \varepsilon)^n \text{ н. ч. }) = 1$, то лицар не виживе з ймовірністю 1.

Оскільки $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ – незалежні, то за лемою Бореля-Кантеллі умова $P(\xi_n > (2 + \varepsilon)^n \text{ н. ч. }) = 1$ рівносильна

$$\sum_{n \geq 1} P(\xi_n > (2 + \varepsilon)^n) = \infty. \quad (3.23)$$

Отже, достатньою умовою для наслідку 3.2 є виконання умови

$$\sum_{n \geq 1} \bar{F}((2 + \varepsilon)^n) = \infty, \text{ де } \bar{F}(x) = 1 - F(x) = P(\xi > x). \quad (3.24)$$

Ця умова виконується, наприклад у випадку, коли $\bar{F}((2 + \varepsilon)^n) = \frac{a}{n}$, оскільки ряд $\sum_{n \geq 1} \frac{a}{n}$ – розбіжний.

Позначимо через $x = (2 + \varepsilon)^n$, тоді $n = \frac{\ln x}{\ln(2 + \varepsilon)}$.

Таким чином ми довели наступну теорему.

Теорема 3.4: Якщо $\exists b > 0 \exists x_0 \forall x \geq x_0$ такі, що виконується $\bar{F}(x) \sim \frac{b}{\ln x}, x \rightarrow \infty$ то

$$P(\xi_n > (2 + \varepsilon)^n \text{ н. ч. }) = 1.$$

4. Допоміжні результати

Розглянемо та доведемо деякі допоміжні результати, які були використанні в написанні магістерської дисертації.

Лема 4.1: Нехай $\xi \geq 0$, тоді

$$\sum_k \bar{F}_\xi(k) < \infty \Leftrightarrow E\xi < \infty \Leftrightarrow \forall c > 0, \sum_k \bar{F}_\xi(ck) < \infty.$$

Доведення: Доведемо еквівалентність $\sum_k \bar{F}_\xi(k) < \infty \Leftrightarrow E\xi < \infty$. Для цього використаємо наступну нерівність:

$$\sum_k kP(\xi \in [k, k+1)) \leq E\xi \leq \sum_k (k+1)P(\xi \in [k, k+1)), \quad (4.1).$$

Оскільки

$$\begin{aligned} & \sum_k (k+1)P(\xi \in [k, k+1)) = \\ &= \sum_k kP(\xi \in [k, k+1)) + \sum_k P(\xi \in [k, k+1)) = \\ &= \sum_k kP(\xi \in [k, k+1)) + 1, \end{aligned}$$

тоді нерівність (4.1) перепишемо у вигляді:

$$\sum_k kP(\xi \in [k, k+1)) \leq E\xi \leq \sum_k kP(\xi \in [k, k+1)) + 1, \quad (4.2).$$

Першу суму нерівності (4.2) запишемо у розгорнутому вигляді та за допомогою перетворень зведемо її до суми функцій розподілу:

$$\begin{aligned} & \sum_k kP(\xi \in [k, k+1)) = \\ &= 0 \cdot P(\xi \in [0,1)) + 1 \cdot P(\xi \in [1,2)) + 2 \cdot P(\xi \in [2,3)) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0 \cdot (P(\xi \in [0,1)) + P(\xi \in [1,2)) + P(\xi \in [2,3)) + \dots) + \\
&+ 1 \cdot (P(\xi \in [1,2)) + P(\xi \in [2,3)) + \dots) + 1 \cdot (P(\xi \in [2,3)) + \dots) + \dots = \\
&= P(\xi \geq 1) + P(\xi \geq 2) + P(\xi \geq 3) + \dots = \sum_n P(\xi \geq n) = \sum_k \bar{F}_\xi(k).
\end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\sum_k \bar{F}_\xi(k) \leq E\xi \leq \sum_k \bar{F}_\xi(k) + 1, \quad (4.3)$$

а отже, $\sum_k \bar{F}_\xi(k) < \infty \Leftrightarrow E\xi < \infty$.

Випадок $E\xi < \infty \Leftrightarrow \forall c > 0, \sum_k \bar{F}_\xi(ck) < \infty$ доводиться аналогічно.
Лема доведена.

Лема 4.2:

1) Якщо $E\xi = m$, то $\forall c_+ > m, c_- < m$:

$$P(\exists n_0 \forall n \geq n_0 : c_- n \leq \xi_1 + \dots + \xi_n \leq c_+ n) = 1.$$

2) Якщо $E\xi = \infty$, то $\forall c$:

$$a) \quad P(\exists n_0 \forall n \geq n_0 \quad \xi_1 + \dots + \xi_n \geq cn) = 1;$$

$$b) \quad P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} = \infty\right) = 1.$$

Доведення:

1) Нехай $E\xi = m$. Тоді, із закону великих чисел випливає, що $P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} = m\right) = 1$. За означенням границі дану рівність запишемо наступним чином:

$$P\left(\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 \quad \left| \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - m \right| \leq \varepsilon\right) = 1. \quad (4.4)$$

З (4.4) випливає, що

$$P\left(\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 \left| \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - m \right| < \varepsilon\right) = 1. \quad (4.5)$$

Зробивши заміну $c = m + 1$ в (4.5), отримаємо

$$P(\exists n_0 \forall n \geq n_0 \xi_1 + \dots + \xi_n \leq cn) = 1. \quad (4.6)$$

Доведемо твердження 2). а) З теореми про монотонну збіжність виконується $\lim_{M \rightarrow \infty} E(\xi \wedge M) = +\infty$, це означає, що $\exists M: E(\xi \wedge M) > c + 1$. Отже, справедлива нерівність

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \geq \frac{\xi_1 \wedge M + \dots + \xi_n \wedge M}{n} \xrightarrow{n \geq n_0} E(\xi \wedge M) \geq c, \quad (4.7)$$

звідси

$$P(\exists n_0 \forall n \geq n_0 \xi_1 + \dots + \xi_n \geq cn) = 1. \quad (4.8)$$

б) З твердження 2.а) випливає

$$P\left(\bigcup_c \left\{ \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \geq c \right\}\right) = 1, \quad (4.9)$$

або

$$P\left(\bigcap_c \left\{ \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} < c \right\}\right) = 1. \quad (4.10)$$

За означенням границі з (4.10) випливає

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} = c\right) = 1, \quad (4.11)$$

де $c = m + 1$, а отже (4.11) можна записати наступним чином

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} = \infty\right) = 1.$$

Лема доведена.

Лема 4.3: Нехай $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ – послідовність незалежних однаково розподілених та невід’ємних випадкових величин зі скінченним математичним сподіванням $E\xi = m < \infty$.

Тоді

$$P\left(\frac{\max(\xi_1, \dots, \xi_n)}{n} \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty\right) = 1. \quad (4.12)$$

Доведення: Нехай Ω_0 така множина, що $\forall \omega \in \Omega_0$:

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \rightarrow m, \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (4.13)$$

Застосуємо дане твердження для $n + 1$ елементів

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_{n+1}}{n+1} \rightarrow m, n \rightarrow \infty \quad (4.14)$$

Очевидно, що з (4.14) випливає наступне, якщо ми домножимо ліву частину на величину $\frac{n+1}{n}$, границя цього значення не зміниться, тобто

$$\frac{n+1}{n} \cdot \frac{\xi_1 + \dots + \xi_{n+1}}{n+1} \rightarrow m, n \rightarrow \infty,$$

або

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_{n+1}}{n} \rightarrow m, n \rightarrow \infty.$$

Звідси слідує, що

$$\frac{\xi_{n+1}}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (4.15)$$

Припустимо, що $\frac{\max_{n \in \mathbb{N}}(\xi_1, \dots, \xi_n)}{n} \not\rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty$. Тоді

$$\exists \varepsilon > 0 \exists \{n_k\} \forall k: \frac{\xi_1 + \dots + \xi_{n_k}}{n_k} \geq \varepsilon.$$

Позначимо $l_k \in \{1, \dots, n_k\}$ – номер, де досягається максимум.

$$\varepsilon \leq \frac{\max(\xi_1, \dots, \xi_n)}{n_k} = \frac{\xi_{n_l}}{n_k} \leq \frac{\xi_{n_l}}{n_l}.$$

Це неможливо оскільки з (4.14) випливає, що

$$\frac{\xi_n}{n} \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Лема доведена.

5. Охорона праці та безпека в надзвичайних ситуаціях

5.1. Оцінка важкості та напруженості праці

Для об'єктивної оцінки умов праці на виробництві проводиться атестація робочих місць за умовами праці. Основна мета атестації полягає у врегулюванні відносин між роботодавцем і працівниками у галузі реалізації прав на належні й безпечні умови праці. Результати атестації використовуються для цілеспрямованої і планомірної роботи, спрямованої на покращення умов праці, зниження рівня травматизму і захворюваності, а також для надання пільг і компенсацій, передбачених чинним законодавством, таких як скорочена тривалість робочого часу, додаткова оплачувана відпустка, пільгова пенсія, оплата праці у підвищеному розмірі.

Виходячи з принципів гігієнічної класифікації, умови праці поділяються на 4 класи: оптимальні, допустимі, шкідливі та небезпечні (екстремальні).

1-й клас – ОПТИМАЛЬНІ умови праці – такі умови, при яких зберігається не лише здоров'я працюючих, а й створюються передумови для підтримання високого рівня працездатності.

2-й клас – ДОПУСТИМІ умови праці – характеризуються такими рівнями факторів виробничого середовища і трудового процесу, які не перевищують встановлених нормативів.

3-й клас – ШКІДЛИВІ умови праці – характеризуються такими рівнями шкідливих виробничих факторів, які перевищують нормативи і здатні завдавати несприятливого впливу організму працюючого та/або його нащадкам.

Шкідливі умови праці за ступенем перевищення гігієнічних нормативів та настання можливих змін в організмі працівників поділяються на 4 ступені:

1-й ступінь (3.1) – умови праці характеризуються такими рівнями шкідливих факторів виробничого середовища та трудового процесу, які, як правило, викликають функціональні зміни, що виходять за межі фізіологічних коливань (останні відновлюються при тривалішій, ніж початок

наступної зміни, перерві контакту з шкідливими факторами) та збільшують ризик погіршення здоров'я;

2-й ступінь (3.2) – умови праці характеризуються такими рівнями шкідливих факторів виробничого середовища і трудового процесу, які здатні викликати стійкі функціональні порушення, призводять у більшості випадків до зростання виробничо-обумовленої захворюваності, появи окремих ознак або легких форм професійної патології (як правило, без втрати професійної працездатності), що виникають після тривалої експозиції (10 років та більше);

3-й ступінь (3.3) – умови праці характеризуються такими рівнями шкідливих факторів виробничого середовища і трудового процесу, які призводять, окрім зростання виробничо-обумовленої захворюваності, до розвитку професійних захворювань, як правило, легкого та середнього ступенів важкості (з втратою професійної працездатності в період трудової діяльності);

4-й ступінь (3.4) – умови праці характеризуються такими рівнями шкідливих факторів виробничого середовища і трудового процесу, які здатні призводити до значного зростання хронічної патології та рівнів захворюваності з тимчасовою втратою працездатності, а також до розвитку важких форм професійних захворювань (з втратою загальної працездатності).

4-й клас – НЕБЕЗПЕЧНІ (ЕКСТРЕМАЛЬНІ) умови праці – характеризуються такими рівнями шкідливих факторів виробничого середовища і трудового процесу, вплив яких протягом робочої зміни (або ж її частини) створює загрозу для життя, високий ризик виникнення важких форм гострих професійних уражень.

Оцінка важкості трудового процесу здійснюється на підставі обліку фізичного динамічного навантаження, маси вантажу, що підіймається і переміщується, загального числа стереотипних робочих рухів, величини статичного навантаження, робочої пози, ступеню нахилу корпусу, переміщень в просторі.

Оцінка напруженості трудового процесу здійснюється на підставі обліку факторів, що характеризують напруженість праці, а саме, інтелектуальні, сенсорні, емоційні навантаження, ступінь монотонності праці, режим роботи.

5.2. Аналіз психологічних аспектів умов праці

На відміну від фізичної, розумова праця супроводжується меншими витратами енергетичних запасів, але це не свідчить про її легкість. Основним працюючим органом під час такого виду праці виступає мозок. При інтенсивній інтелектуальній діяльності потреба мозку в енергії підвищується і становить 15-20% від загального об'єму енергії, яка витрачається в організмі. При цьому вживання кисню 100 г кори головного мозку в 5 разів більше, ніж витрати скелетними м'язами тієї ж ваги при максимальному фізичному навантаженні. При читанні вголос витрати енергії підвищуються на 48%; при публічному виступі – на 94%; при роботі операторів обчислювальних машин – на 60-100%. Під час розумової праці значно активізуються аналітичні та синтетичні функції центральної нервової системи, прийом і переробка інформації, виникають функціональні зв'язки, нові комплекси умовних рефлексів, зростає роль функцій уваги, пам'яті, навантаження на зоровий та слуховий аналізатори.

Для розумової праці характерні: велика кількість стресів, мала рухливість, вимушена статична поза – все це зумовлює застійні явища у м'язах ніг, органах черевної порожнини і малого тазу, погіршення постачання мозку киснем, зростання потреби в глюкозі. При розумовій праці погіршується робота органів зору: стійкість ясного бачення, гострота зору, адаптаційна можливість ока.

Розумовій праці властивий найбільший ступінь зосередження уваги – в середньому у 5-10 разів вище, ніж при фізичній праці. Завершення робочого дня зовсім не перериває процесу розумової діяльності. Розвивається особливий стан організму – втома, що з часом може перетворитися на

перевтому. Все це призводить до порушення нормального фізіологічного функціонування організму. При розумовій праці мають місце зсуви в вегетативних функціях людини: підвищення кров'яного тиску, зміни електрокардіограми, вентиляції легень і вживання кисню, підвищення температури тіла.

Після закінчення розумової праці втома залишається довше, ніж після фізичної праці, однак навіть у стані перевтоми працівники здатні довгий час виконувати свої обов'язки без особливого зниження рівня працездатності і продуктивності. Як правило, під час розумової праці важко вимкнути механізм переробки інформації навіть під час відпочинку; люди працюють не лише 8-12 годин на добу, а майже постійно з короткими переключеннями. Це і є підтвердженням так званої інформативної теорії, згідно якої, людина під час сну переробляє інформацію, отриману в період активної бадьорості.

Кожний вид праці характеризується певним рівнем загальної рухової активності працівника, вимагає вибіркової, специфічної психологічної активності, пов'язаної з пізнанням, сприйняттям, спілкуванням тощо.

Незважаючи на те, що розумова робота не пов'язана з великими енергетичними витратами, вона ставить до організму не менше вимог, призводить до стомлення і перевтоми не менше, ніж інтенсивне фізичне навантаження.

5.3. Нормування праці. Вибір оптимального режиму праці та відпочинку

Серед факторів підвищення ефективності праці особливе місце належить раціональному режиму праці і відпочинку. Від його структури залежить динаміка втоми, відновлюваність функцій організму, працездатність і здоров'я, надійність і продуктивність праці. Під режимом праці і відпочинку розуміють загальну тривалість трудової діяльності протягом доби, тижня, місяця, року, частоту і тривалість періодів трудової активності і перерв у процесі цієї активності, співвідношення і чергування

цих періодів. Режим праці включає характеристики самого трудового процесу: інтенсивність чи екстенсивність, а також допустиму тривалість дії шкідливих факторів.

Незалежно від виду праці функціональний стан працівника змінюється внаслідок втоми, що призводить до зниження рівня оперативних резервів. Оптимізація діяльності забезпечує реалізацію тих резервних можливостей, які до цього не входили в оперативні резерви. Таким чином, з фізіологічної точки зору режим праці і відпочинку являє собою процес управління функціональним станом працівника з метою оптимізації діяльності.

Режим праці і відпочинку залежить від характеру виробничого процесу, тобто може бути однозмінним або багатозмінним, стандартним або нестандартним. Однак у всіх випадках він повинен бути науково обґрунтованим, раціональним.

Ефективність режиму праці і відпочинку оцінюється критеріями працездатності і функціонального стану працівників, економічними, гігієнічними та соціальними критеріями.

Розробка режимів праці і відпочинку передбачає:

- детальне вивчення характеру роботи, ліквідацію організаційних неполадок, оптимізацію виробничого середовища;
- проведення хронометражних спостережень робочого дня для встановлення періодів роботи і відпочинку;
- вивчення особливостей динаміки працездатності та графічний її аналіз на основі фізіологічних, психологічних і виробничих показників;
- раціоналізацію трудових процесів і впровадження заходів по запобіганню перевтоми працівників.

Розробка і впровадження нового режиму праці і відпочинку завершується перевіркою його ефективності за вищенаведеними критеріями. Якщо такий режим відповідає необхідним вимогам, то він може бути рекомендований як типовий.

Типовим називається такий режим праці і відпочинку, встановлений для працівників з різними умовами праці, який забезпечує приблизно однакові зміни в їх працездатності.

Основні вимоги до проектування внутрішньозмінних режимів праці і відпочинку зводяться до забезпечення поступового входження людини в роботу, ритмічності і послідовності дій, чергування робіт; обґрунтування тривалості обідньої перерви, кількості, тривалості і часу надання регламентованих перерв на відпочинок, змісту відпочинку та використання функціональної музики.

Упорядкування режиму праці і відпочинку передбачає регулювання таких трьох його параметрів, як загальний робочий час, тривалість періодів роботи і тривалість періодів відпочинку. Оптимізація часу роботи є вихідною умовою для мінімізації часу відпочинку і максимізації тривалості робочого часу.

Вирішальне значення для раціоналізації функціонального навантаження має встановлення абсолютних допустимих величин періодів роботи і відпочинку. Для нервово-напружених робіт тривалість неперервної роботи не повинна перевищувати 15 хв, а тривалість відпочинку 2-5 хв.

Таким чином, фізіологічною закономірністю є стабільність допустимої величини часу відпочинку при різних допустимих величинах часу роботи.

5.4. Санітарія та гігієна робочого місця

Санітарно-гігієнічні вимоги до робочих місць в офісах регулюються:

1. Законом України "Про охорону праці" (поточна редакція від 16.09.2008);
2. Правилами охорони праці під час експлуатації електронно-обчислювальних машин, затверджених наказом Державного комітету України з промислової безпеки, охорони праці та гірничого нагляду від 26 березня 2010 року N 65 (далі – Правила) та іншими нормативно-правовими актами;

3. Гігієнічною класифікацією праці за показниками шкідливості та небезпечності факторів виробничого середовища, важкості та напруженості трудового процесу N 4137-86, затвердженою МОЗ СРСР 12.08.86р та іншими нормативно-правовими актами.

Відповідно до ч. 1 ст. 13 Закону України «Про охорону праці», роботодавець зобов'язаний створити на робочому місці в кожному структурному підрозділі умови праці відповідно до нормативно-правових актів.

5.5. Охорона праці при використанні технічних засобів

Основні шкідливі та небезпечні фактори, що можуть впливати на організм людини під час роботи з персональним комп'ютером (ПК), такі:

- підвищений рівень електромагнітних випромінювань;
- підвищений рівень іонізуючих випромінювань;
- підвищений рівень статичної електрики;
- підвищена напруженість електростатичного поля;
- підвищена чи понижена іонізація повітря;
- підвищена яскравість світла;
- підвищене значення напруги в електромережі, замикання якої може статися крізь тіло людини;
- статичні перевантаження кістково-м'язового апарату та динамічні локальні перевантаження м'язів кистей рук;
- перенапруження зорового аналізатора;
- розумове перенапруження;
- емоційні перевантаження;
- монотонність праці.

До шкідливих випромінювань комп'ютера належать низькочастотні електромагнітні поля та іонізуюче (рентгенівське) випромінювання моніторів на електронно-променевих трубках (ЕПТ).

Попри невисокий рівень електромагнітного випромінювання, навіть порівняно з побутовими приладами, та недостатню вивченість впливу цього поля на людський організм, численними дослідженнями доведено можливість порушення перебігу вагітності жінок, якщо вони працюють на комп'ютері. Крім того, встановлено, що тривале перебування дітей в середовищі впливу низькочастотних магнітних полів збільшує ймовірність появи в них пухлин мозку. У зв'язку з цим існують певні обмеження в розміщенні комп'ютерів у робочому приміщенні, а також у допуску персоналу до роботи на комп'ютері.

Аби запобігти несприятливим наслідкам для здоров'я, у приміщеннях, де застосовується комп'ютерна техніка, потрібно:

- провести інструментальний контроль – заміряти та оцінити виробничі фактори на робочих місцях і в приміщеннях (виконують спеціально акредитовані/атестовані лабораторії);
- нормалізувати стан фізичних факторів на підставі рекомендацій, розроблених за результатами інструментального контролю;
- оцінити ергономічні параметри робочих місць, зокрема спеціальних меблів для користувачів ЕОМ;
- розробити та включити до посадових інструкцій доповнення, що враховують специфіку праці з використанням ЕОМ.

Працівники, які працюють з ЕОМ і ПЕОМ, підлягають обов'язковим медичним оглядам:

- попереднім – коли влаштовуються на роботу;
- періодичним – протягом трудової діяльності.

У Порядку проведення медоглядів працівників певних категорій, затвердженому наказом Міністерства охорони здоров'я України від 21.05.2007 р. № 246, наведено перелік протипоказань, коли не дозволено працювати з ЕОМ. Тому лікар, який здійснює медогляд, у разі потреби зробить відповідний запис у картці пацієнта.

Проте слід указати, що медогляди повинні проходити користувачі ПЕОМ з ВДТ, тобто моніторів з електропроменевими трубками. Для TFT-, плазмових та інших моніторів Міністерство охорони здоров'я України на цей час таку вимогу не встановило.

Висновки

В результаті дослідження поставленої задачі, було встановлено поведінку суми нескінченної кількості випадкових величин у випадку скінченного математичного сподівання, тобто розглянуто достатні умови того, що учасник перемагає в турнірі з ймовірністю близькою до одиниці. Іншими словами, існує таке значення досвіду x , що сума всіх попередніх досвідів більша за наступний з ймовірністю $1 - \varepsilon$.

Теорема 3.2: Нехай $\xi_k \geq 0$ та $E\xi_k = m < \infty$. Тоді $\forall \varepsilon \exists x$:

$$P(\forall n: x + \xi_1 + \dots + \xi_n > \xi_{n+1}) \geq 1 - \varepsilon.$$

Також встановлено та доведено більш загальний випадок. Тобто для будь-якого числа $n \geq 1$ подія $\{\xi_1 + \dots + \xi_n > \xi_{n+1}\}$ виконується з додатньою ймовірністю.

Теорема 3.3: Нехай $\xi_k \geq 0$ та $E\xi_k = m < \infty$. Тоді

$$P(\forall n \geq 1: \xi_1 + \dots + \xi_n > \xi_{n+1}) > 0.$$

У випадку нескінченного математичного сподівання маємо наступне, якщо подія $\{\xi_n > (2 + \varepsilon)^n\}$ відбувається нескінченно часто з ймовірністю 1, то лицар не виживе з такою ж ймовірністю.

В даній роботі було також розглянуто поведінку суми випадкових величин при певній функції щільності:

$$p(x) \sim \frac{c}{x^\alpha (\ln x)^\beta}, \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Отже, при заданих α, β виконується наступне:

а) при $\alpha > 1, \beta \in \mathbb{R}$ або $\alpha = 1, \beta > 1$ функція p – може бути щільністю;

б) при $\alpha > 2, \beta \in \mathbb{R}$ або $\alpha = 2, \beta > 1$ існує математичне сподівання;

в) поведінку хвостів розподілу випадкової величини ξ .

У результаті написання магістерської дисертації було також доведено та встановлено і деякі допоміжні результати про достатні та необхідні умови існування скінченного математичного сподівання, та поведінку $\max_{n \in \mathbb{N}} (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Список використаних джерел

1. Ширяев А. Н. Вероятность / А. Н. Ширяев., МГУ, 1957. – 581 с.
2. Гнеденко Б. В. Передельные распределения для сумм независимых случайных величин / Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмагоров. – Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. – 264 с.
3. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения / Вильям Феллер. – Москва: "Мир", 1967. – 498 с.
4. Мацак І. К. Елементи теорії естремальних значень / Іван Каленикович Мацак. – Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2014. – 211 с.