Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут» імені Ігоря Сікорського

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ ТА ЛІНІЙНА АЛГЕБРА. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

ЗБІРНИК ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ І ЗРАЗКИ РОЗВ'ЯЗАНЬ

для студентів економічних спеціальностей

Київ 2016

«Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Збірник індивідуальних завдань і зразки розв’язань». Навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей / Уклад.: З.П.Ординська, Л.А.Репета. – К.: НТУУ «КПІ», 2016.- 124 с.

Гриф надано Методичною радою ФМФ НТУУ «КПІ»
(*Протокол № 7 від 20.09.2016*)

Навчальне видання

Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне числення функцій однієї змінної.
Збірник індивідуальних завдань і зразки розв’язань
для студентів економічних спеціальностей

Укладачі: *Ординська Зоя Павлівна*, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Репета Леся Анатоліївна, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор *О. І. Клесов*, д-р. фіз.-мат. наук, професор.

Рецензент *П. В. Задерей*, д-р. фіз.-мат. наук, професор. Завідувач кафедрою вищої математики Київського національного університету технологій і дизайну

В. І. Стогній, канд. фіз.-мат. наук, доц.

За редакцією укладачів
Електронна версія

Київ 2016

Передмова

Навчально-методичний посібник «Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Збірник індивідуальних завдань і зразки розв'язань» для студентів економічних спеціальностей містить добірку індивідуальних завдань із зазначених розділів і відповідає вимогам програми з вищої математики для студентів технічних вищих навчальних закладів.

Кожна частина індивідуальних завдань містить 20 рівноцінних варіантів, які можуть бути запропановані до розв'язування студентам у повному обсязі або частково.

На допомогу виконання завдань після кожної теми наведено приклад роз'язання та оформлення типового варіанта.

Автори сподіваються, що посібник допоможе опанувати основні навички роз'вязування типових задач вищої математики з розділів «Аналітична геометрія та лінійна алгебра. Диференціальне числення функцій однієї змінної».

Варіант 1

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

$f(x)=2x^2+3x+1$.

2. Розв'яжіть матричне рівняння $A\cdot X=B$,

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 7\\ 0 & 4 & 8\end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

а) матричним методом;

б) за формулами Крамера

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0,\\ 2x_1+x_2+2x_3=10,\\ x_1-3x_2+x_3=-2.\end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -3 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 2 & -1\\ 3 & 3 & -9 & 0 & 6\\ 1 & 2 & -5 & -1 & 3\end{array}\right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix}4 & -2 & -1\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор $\vec{x}=\{-2;11;14\}$ за векторами $\vec{p}=\{1;1;3\}$, $\vec{q}=\{1;2;1\}$, $\vec{r}=\{-4,1,1\}$.

7. Чи колінеарні вектори $\vec{c}_1=2\vec{a}+4\vec{b}$ і $\vec{c}_2=3\vec{b}-\vec{a}$, побудовані на векторах $\vec{a}=\{1;-2;3\}$ і $\vec{b}=\{3;0;-1\}$?

8. Чи компланарні вектори $\vec{a}=\{2;3;1\}$, $\vec{b}=\{-1;0;-1\}$, $\vec{c}=\{2;2;2\}$?

9. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $3x-2y-7=0$ і $x+3y-6=0$ та відтинає на осі абсцис відрізок, що дорівнює 3.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4},$$

$$x+2y+3z-14=0.$$

11. Знайдіть точку M', симетричну точці $M(0;-3;-2)$ відносно прямої

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1,5}{-1}=\frac{z}{1}.$$

12. Дано координати точок $M_0(0;-1;1)$, $M_1(1;0;1)$, $M_2(4;6;1)$, $M_3(6;-1;0)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $9x^2+4y^2-18x-27=0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина $-O(0,0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y=\pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $b=15, F(-10,0)$;

б) $a=13, \varepsilon=14/13$;

в) D: $x=-4$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через вершини гіперболи $12x^2-13y^2=156$ і має центр у точці $A(0,-2)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho=2\sin 4\varphi$ у полярній системі координат.

Варіант 2

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$f(x)=x^2+5x+2$.

2. Розв'яжіть матричне рівняння $X\cdot A=B$,

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

а) матричним методом;

б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2, \\ x_1+2x_2+x_3=3, \\ x_1+x_2+2x_3=-1. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array}\right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор $\vec{x}=\{2;-3;1\}$ за векторами $\vec{p}=\{2,1,8\}$, $\vec{q}=\{2;-3;1\}$, $\vec{r}=\{1;-1;2\}$.

7. Чи колінеарні вектори $\vec{c}_1=\vec{a}+2\vec{b}$ і $\vec{c}_2=3\vec{a}-\vec{b}$, побудовані на векторах $\vec{a}=\{1;0;1\}$, $\vec{b}=\{-2;3;5\}$?

8. Чи компланарні вектори $\vec{a}=\{3;2;1\}$, $\vec{b}=\{2;3;4\}$, $\vec{c}=\{3;1;-1\}$?

9. Знайдіть проекцію точки $A(-8,\ 12)$ на пряму, що проходить через точки $B(2,\ -3)$ і $C(-5,\ 1)$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{5},$$

$$x+2y-5z+20=0.$$

11. Знайдіть точку M', симетричну точці $M(2;-1;1)$ відносно прямої

$$\frac{x-4,5}{1}=\frac{y+3}{-0,5}=\frac{z-2}{1}.$$

12. Дано координати точок $M_0(0;1;1)$, $M_1(-13;0;6)$, $M_2(10;1;-3)$, $M_3(-2;1;3)$. Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $25x^2+9y^2+100x-18y-116=0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина $-O(0,0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y=\pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $b=2, F(4\sqrt{2},0)$;

б) $a=7, \varepsilon=\sqrt{85}/7$;

в) D: $x=5$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через вершини гіперболи $4x^2-9y^2=36$ і має центр у точці $A(0,4)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho=2\sin 4\varphi$ у полярній системі координат.

Варіант 3

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$f(x)=x^3+x^2-7x+3.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння $A\cdot X\cdot B=C$,

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 7\\ 6 & 5 & 9\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:
а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=-1,\\ 2x_1+x_2-4x_3=-3,\\ 3x_1+2x_2+x_3=1.\end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 4 & 3 & 5 & 2\\ 2 & 1 & 9 & 2 & 7 & 3\\ 4 & 4 & 7 & 6 & 8 & 5\end{array}\right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор $\vec{x}=\{-12;13;-4\}$ за векторами $\vec{p}=\{1;2;3\}$, $\vec{q}=\{1;4;1\}$, $\vec{r}=\{5;1;-3\}$.

7. Чи колінеарні вектори $\vec{c}_1=5\vec{a}+3\vec{b}$ і $\vec{c}_2=2\vec{a}-\vec{b}$, побудовані на векторах $\vec{a}=\{-2;4;1\}$, $\vec{b}=\{1;-2;7\}$?

8. Чи компланарні вектори $\vec{a}=\{1;5;2\}$, $\vec{b}=\{-1;1;-1\}$, $\vec{c}=\{1;1;1\}$?

9. Дані дві вершини трикутника ABC: $A(-4,\ 4)$, $B(4,\ -12)$ і точка $M(4,\ 2)$ перетину його висот. Знайдіть вершину C.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{2},$$
$$x-3y+7z-24=0.$$

11. Знайдіть точку M', симетричну точці $M(1;1;1)$ відносно прямої

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1,5}{-2}=\frac{z-1}{1}.$$

12. Дано координати точок $M_0(0;4;1)$, $M_1(6;-8;-2)$, $M_2(-4;10;-1)$, $M_3(0;-2;-3)$. Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $4x^2+9y^2-16x+18y-11=0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина $-O(0,0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y=\pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $A(3,0), B(2,\sqrt{5}/3)$;

б) $c=5, \varepsilon=5/4$;

в) D: $y=-2$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через фокуси гіперболи $24y^2-25x^2=600$ і має центр у точці $A(0,-8)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho=2(1-\sin 2\varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 4

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix},$$

$f(x)=3x^2-2x+8$.

2. Розв'яжіть матричне рівняння $A\cdot X=B$,

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 7\\ 8 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

а) матричним методом;

б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases}3x_1+4x_2-x_3=-2,\\ 5x_1+3x_2-4x_3=-2,\\ 4x_1+2x_2+3x_3=5.\end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & 2 & 7\\ 5 & 4 & 3 & 12\\ 1 & 1 & 1 & 3\\ 7 & 1 & 1 & 9\end{array}\right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ 0 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор $\vec{x}=\{11;14;12\}$ за векторами $\vec{p}=\{2;4;3\}$, $\vec{q}=\{1;2;-1\}$, $\vec{r}=\{4;4;5\}$.

7. Чи колінеарні вектори $\vec{c}_1=4\vec{a}+3\vec{b}$ і $\vec{c}_2=8\vec{a}-\vec{b}$, побудовані на векторах $\vec{a}=\{1;2;-3\}$, $\vec{b}=\{2;-1;-1\}$?

8. Чи компланарні вектори $\vec{a}=\{1;-1;-3\}$, $\vec{b}=\{3;2;1\}$, $\vec{c}=\{2;3;4\}$?

9. Знайдіть рівняння прямої, що відтинає на осі ординат відрізок, рівний 2, і проходить паралельно прямій $2y-x=3$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{2},$$

$$2x-y+4z=0.$$

11. Знайдіть точку M', симетричну точці $M(1;2;3)$ відносно прямої

$$\frac{x-0,5}{0}=\frac{y+1,5}{-1}=\frac{z-1,5}{1}.$$

12. Дано координати точок $M_0(0;1;2)$, $M_1(2;0;2)$, $M_2(8;-1;7)$, $M_3(12;1;1)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $25x^2 - 9y^2 + 100x + 18y - 134 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – екцентриситет, $y = \pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $\varepsilon = \sqrt{21}/5$, $A(-5,0)$;

б) $A(\sqrt{80},3)$, $B(4\sqrt{6},3/\sqrt{2})$;

в) D: $y = 1$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через точку $O(0,0)$ і має центр у вершині параболи $y^2 = 3(x-4)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 3\sin 6\varphi$ у полярній системі координат.

Варіант 5

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 5\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix},$$

$$f(x)=x^2-3x-1.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння

$$X\cdot A=B, \qquad A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 0 & 1\\ 2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

а) матричним методом;

б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=-4,\\ x_1+2x_2-4x_3=19,\\ -3x_1+4x_2+2x_3=3.\end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 3 & 4 & 0\\ 7 & 14 & 20 & 27 & 0\\ 5 & 10 & 16 & 19 & -2\\ 3 & 5 & 6 & 13 & 5\end{array}\right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix}6 & 0 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор $\vec{x}=\{-3;-2;2\}$ за векторами $\vec{p}=\{1;2;1\}$, $\vec{q}=\{2;2;-3\}$, $\vec{r}=\{-1;1;4\}$.

7. Чи колінеарні вектори $\vec{c}_1=-2\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}$, побудовані на векторах $\vec{a}=\{3;5;4\}$, $\vec{b}=\{5;9;7\}$?

8. Чи компланарні вектори $\vec{a}=\{3;3;1\}$, $\vec{b}=\{1;-2;1\}$, $\vec{c}=\{1;1;1\}$?

9. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(2,\ -3)$ і точку перетину прямих $2x-y=5$ і $x+y=1$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-5}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{0},$$
$$3x+y-5z-12=0.$$

11. Знайдіть точку M', симетричну точці $M(1;0;-1)$ відносно прямої
$$\frac{x-3,5}{2}=\frac{y-1,5}{2}=\frac{z}{0}.$$

12. Дано координати точок $M_0(0;1;-2)$, $M_1(1;-12;8)$, $M_2(0;11;-10)$, $M_3(0;-1;2)$. Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $4x^2-9y^2-16x-18y-29=0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0,0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y=\pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $2a=22,\ \varepsilon=\sqrt{57}/11$;

б) $k=2/3,\ 2c=10\sqrt{3}$;

в) вісь симетрії Ox і $A(27,9)$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через фокуси еліпса $9x^2+25y^2=1$ і має центр у точці $A(0,6)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho=2/(1+\cos\varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 6

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix},$$

$f(x)=x^2-x-1$.

2. Розв'яжіть матричне рівняння

$$A\cdot X\cdot B=C,\qquad A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -2 & 0\end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

а) матричним методом;

б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases}3x_1-2x_2+4x_3=-17,\\ 4x_1+3x_2-2x_3=18,\\ 3x_1+x_2+3x_3=-7.\end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 14\\ 3 & 2 & 1 & 10\\ 1 & 1 & 1 & 6\\ 1 & 1 & 0 & 3\end{array}\right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор $\vec{x}=\{-12;-2;-15\}$ за векторами $\vec{p}=\{1;2;-1\}$, $\vec{q}=\{-4;3;1\}$, $\vec{r}=\{2;4;5\}$.

7. Чи колінеарні вектори $\vec{c_1}=\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{c_2}=4\vec{a}+2\vec{b}$, побудовані на векторах $\vec{a}=\{1;4;-2\}$, $\vec{b}=\{1;1;-1\}$?

8. Чи компланарні вектори $\vec{a}=\{3;1;-1\}$, $\vec{b}=\{-2;-1;0\}$, $\vec{c}=\{5;2;-1\}$?

9. Довести, що чотирикутник $ABCD$ – трапеція, якщо $A(3,\ 6)$, $B(5,\ 2)$, $C(-1,\ -3)$, $D(-5,\ 5)$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-2},$$

$$x+3y-5z+9=0.$$

11. Знайдіть точку M', симетричну точці $M(2;1;0)$ відносно прямої

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y+1,5}{-1}=\frac{z+0,5}{1}.$$

12. Дано координати точок $M_0(1;-1;0)$, $M_1(7;-5;-1)$, $M_2(-3;13;0)$, $M_3(1;1;-2)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $y^2-2x-2y-1=0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0,0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y=\pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $b=\sqrt{15}$, $\varepsilon=\sqrt{10}/25$;

б) $k=3/4$, $2a=16$;

в) вісь симетрії Ox і $A(4,-8)$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через лівий фокус гіперболи $3x^2-4y^2=12$ і має центр у точці $A(0,-3)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho=3(1+\sin\varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 7

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & -2\end{pmatrix},$$

$$f(x)=x^2-2x+1.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння $A\cdot X=B$,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & 8 & 5\\ 2 & 7 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

а) матричним методом;

б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=4,\\ 2x_1+x_2+2x_3=2,\\ 3x_1-x_2+x_3=0.\end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 1 & 5 & 4 & 3 & 1\\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1\end{array}\right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор $\vec{x}=\{-4;13;16\}$ за векторами $\vec{p}=\{1;3;1\}$, $\vec{q}=\{7;-1;4\}$, $\vec{r}=\{-1;2;3\}$.

7. Чи колінеарні вектори $\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}$ і $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$, побудовані на векторах $\vec{a}=\{1;-2;5\}$, $\vec{b}=\{3;-1;0\}$?

8. Чи компланарні вектори $\vec{a}=\{4;3;1\}$, $\vec{b}=\{1;-2;1\}$, $\vec{c}=\{2;2;2\}$?

9. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(3,\ 1)$ перпендикулярно до прямої BC, якщо $B(2,\ 5)$, $C(1,\ 0)$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1},$$

$$x-2y+5z+17=0.$$

11. Знайдіть точку M', симетричну точці $M(-2;-3;0)$ відносно прямої

$$\frac{x+0,5}{1}=\frac{y+1,5}{0}=\frac{z-0,5}{1}.$$

12. Дано координати точок $M_0(1;3;1)$, $M_1(0;-2;-1)$, $M_2(-3;-1;6)$, $M_3(-5;-3;0)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $y^2-4x-2y-7=0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина $-O(0,0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y=\pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $a=4, F(3,0)$;

б) $b=2\sqrt{10}, F(-11,0)$;

в) D: $x=-2$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через фокус еліпса $3x^2-4y^2=12$ і має центр у точці A – його верхній вершині.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho=2(1-\cos\varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 8

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$f(x)=-2x^2+8x-6.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння $X\cdot A=B$,

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

а) матричним методом;

б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=-3, \\ 2x_1+x_2+3x_3=8, \\ 3x_1-4x_2+x_3=5. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & 23 \end{array}\right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор $\vec{x}=\{4;5;-7\}$ за векторами $\vec{p}=\{1;2;1\}$, $\vec{q}=\{2;-1;1\}$, $\vec{r}=\{-1,1,-3\}$.

7. Чи колінеарні вектори $\vec{c}_1=6\vec{a}-3\vec{b}$ і $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$, побудовані на векторах $\vec{a}=\{3;4;-1\}$, $\vec{b}=\{2;-1;1\}$?

8. Чи компланарні вектори $\vec{a}=\{4;3;1\}$, $\vec{b}=\{6;7;4\}$, $\vec{c}=\{2;0;-1\}$?

9. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-2,\ 1)$ паралельно прямій MN, якщо $M(-3,\ -2)$, $A(1,\ 6)$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+-4}{1},$$

$$x-2y+4z-19=0.$$

11. Знайдіть точку M', симетричну точці $M(-1;0;-1)$ відносно прямої

$$\frac{x}{-1}=\frac{y-1,5}{0}=\frac{z-2}{1}.$$

12. Дано координати точок $M_0(1;2;3)$, $M_1(14;3;-2)$, $M_2(-9;2;7)$, $M_3(3;2;1)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $4x^2+25y^2+16x-50y-59=0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина $-O(0,0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y=\pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $b=4, F(9,0)$;

б) $a=5, \varepsilon=7/5$;

в) D: $x=6$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через вершину гіперболи $x^2-16y^2=64$ і має центр у точці $A(0,-2)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho=3(1-\cos 2\varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 9

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix},$$

$f(x)=x^3-4x$.

2. Розв'яжіть матричне рівняння $A\cdot X\cdot B=C$,

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 9 & 7\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}7 & 8 & 7\\ 8 & 9 & 6\\ 5 & 6 & 8\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

а) матричним методом;

б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases}x_1+3x_2-x_3=0,\\ 2x_1-4x_2+4x_3=6,\\ 3x_1+2x_2+x_3=4.\end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 1 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -2 & -1 & -5\\ 2 & -1 & -3 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 3 & -6 & -10\end{array}\right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ -1 & 1 & 5\end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор $\vec{x}=\{0,0,2\}$ за векторами $\vec{p}=\{2,2,3\}$, $\vec{q}=\{4;-3;-1\}$, $\vec{r}=\{-6;1;-1\}$.

7. Чи колінеарні вектори $\vec{c_1}=3\vec{a}-9\vec{b}$ і $\vec{c_2}=-3\vec{b}-\vec{a}$, побудовані на векторах $\vec{a}=\{-2;-3;-2\}$, $\vec{b}=\{1;0;5\}$?

8. Чи компланарні вектори $\vec{a}=\{3;2;1\}$, $\vec{b}=\{1;-3;-7\}$, $\vec{c}=\{1;2;3\}$?

9. Знайдіть точку, симетричну точці $M(2,\ -1)$ відносно прямої $x-2y+3=0$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+4}{-1},$$

$$2x-y+3z+23=0.$$

11. Знайдіть точку M', симетричну точці $M(0;2;1)$ відносно прямої

$$\frac{x-1,5}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{1}.$$

12. Дано координати точок $M_0(-3;1;-1)$, $M_1(-7;0;5), M_2(11;1;-5)$, $M_3(-1;-1;-1)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $4x^2+36y^2+72y-108=0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0,0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y=\pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $A(0,\sqrt{3}), B(\sqrt{14/3},1)$;

б) $2c=22, \varepsilon=11/10$;

в) D: $y=-4$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через фокуси гіперболи $4x^2-5y^2=80$ і має центр у точці $A(0,-4)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho=4\sin 3\varphi$ у полярній системі координат.

Варіант 10

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$f(x)=2x^2+6x-3$.

2. Розв'яжіть матричне рівняння $A\cdot X=B$,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

а) матричним методом;

б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-3x_3=2, \\ x_1-4x_2+5x_3=2, \\ 3x_1+4x_2-3x_3=4. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор $\vec{x}=\{-1;13;10\}$ за векторами $\vec{p}=\{1;2;3\}$, $\vec{q}=\{3;-3;1\}$, $\vec{r}=\{-2;4;1\}$.

7. Чи колінеарні вектори $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$ і $\vec{c}_2=3\vec{b}-6\vec{a}$, побудовані на векторах $\vec{a}=\{-1;4;2\}$, $\vec{b}=\{3;-2;6\}$?

8. Чи компланарні вектори $\vec{a}=\{3;7;2\}$, $\vec{b}=\{-2;0;-1\}$, $\vec{c}=\{2;2;1\}$?

9. Знайдіть точку O перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$, якщо $A(-1,\ -3)$, $A(3,\ 5)$, $C(5,\ 2)$, $D(3,\ -5)$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{0},$$

$$2x-3y-5z-7=0.$$

11. Знайдіть точку M', симетричну точці $M(3;-3;-1)$ відносно прямої

$$\frac{x-6}{5}=\frac{y-3,5}{4}=\frac{z+0,5}{0}.$$

12. Дано координати точок $M_0(0;-1;1)$, $M_1(1;0;1)$, $M_2(4;6;1)$, $M_3(6;-1;0)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $4x^2+9y^2+24x+36y+36=0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина $-O(0,0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y=\pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $\varepsilon=7/8$, $A(8,0)$;

б) $A(3,-\sqrt{3/5})$, $B(\sqrt{13/5},6)$;

в) D: $y=4$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через точку $O(0,0)$ і має центр у точці A – вершині параболи $y^2=-(x+5)/2$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho=4\sin 4\varphi$ у полярній системі координат.

Варіант 11

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A=\begin{pmatrix}-4 & 8 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & -3 & -1\end{pmatrix},$$

$f(x)=x^2-5x+3$.

2. Розв'яжіть матричне рівняння $X\cdot A=B$,

$$A=\begin{pmatrix}5 & 5 & 3\\ 3 & 4 & 2\\ 4 & 3 & 5\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}6 & 4 & 6\\ 0 & 3 & -5\end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

а) матричним методом;

б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases}3x_1+4x_2+3x_3=3,\\ 4x_1+5x_2-3x_3=4,\\ 2x_1+3x_2-4x_3=2.\end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}3 & 2 & 4 & 4 & 5 & 2\\ 7 & 5 & 9 & 8 & 9 & 3\\ 5 & 3 & 7 & 9 & 4 & 3\\ 6 & 5 & 7 & 5 & -5 & -3\end{array}\right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix}5 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор $\vec{x}=\{-1;9;12\}$ за векторами $\vec{p}=\{1;3;2\}$, $\vec{q}=\{-2,-1,3\}$, $\vec{r}=\{3,2,-1\}$.

7. Чи колінеарні вектори $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$ і $\vec{c}_2=3\vec{b}+6\vec{a}$, побудовані на векторах $\vec{a}=\{5;0;-1\}$, $\vec{b}=\{7;2;3\}$?

8. Чи компланарні вектори $\vec{a}=\{1;-2;6\}$, $\vec{b}=\{1;0;1\}$, $\vec{c}=\{2;-6;17\}$?

9. Через точку перетину прямих $6x-4y+5=0$, $2x+5y+8=0$ провести пряму, паралельну осі абсцис.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3},$$

$$4x-2y-z-11=0.$$

11. Знайдіть точку M', симетричну точці $M(-1;2;0)$ відносно прямої

$$\frac{x+0,5}{1}=\frac{y+0,7}{-0,2}=\frac{z-2}{2}.$$

12. Дано координати точок $M_0(-2;-2;3)$, $M_1(4,6,2)$, $M_2(-6;12;3)$, $M_3(-2;0;1)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $4x^2-36y^2-72y-180=0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина $-O(0,0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y=\pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $2a=24,\ \varepsilon=\sqrt{22}/6$;

б) $k=\sqrt{2/3},\ 2c=10$;

в) вісь симетрії Ox і $A(-7,-7)$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через правий фокус еліпса $33x^2+49y^2=1617$ і має центр у точці $A(1,7)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho=3(\cos\varphi+1)$ у полярній системі координат.

Варіант 12

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix},$$

$f(x)=5x^2+2x-8$.

2. Розв'яжіть матричне рівняння $A\cdot X\cdot B=C$,

$$A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 2\\ 4 & 5 & 3\\ 5 & 4 & 4\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -3 & -4\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 6\\ 4 & 7\end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

а) матричним методом;

б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases}x_1+2x_3=7,\\ x_1+3x_2=7,\\ 2x_1-2x_2+x_3=1.\end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}5 & 1 & -3 & -6\\ 2 & -5 & 7 & 9\\ 4 & 2 & -4 & -7\\ 5 & -2 & 2 & 1\end{array}\right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 0\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор $\vec{x}=\{5,-6,2\}$ за векторами $\vec{p}=\{1;2;3\}$, $\vec{q}=\{-4;1;-2\}$, $\vec{r}=\{2;-3;-1\}$.

7. Чи колінеарні вектори $\vec{c}_1=5\vec{a}-2\vec{b}$ і $\vec{c}_2=5\vec{b}+3\vec{a}$, побудовані на векторах $\vec{a}=\{0;3;-2\}$, $\vec{b}=\{1;-2;1\}$?

8. Чи компланарні вектори $\vec{a}=\{6;3;4\}$, $\vec{b}=\{-1;-2;-1\}$, $\vec{c}=\{2;1;2\}$?

9. Відомі рівняння сторони AB трикутника ABC $4x+y=12$, його висот BH $5x-4y=12$ і AM $x+y=6$. Знайдіть рівняння двох інших сторін трикутника ABC.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{-1},$$

$$3x-2y-4z-8=0.$$

11. Знайдіть точку M', симетричну точці $M(3;3;3)$ відносно прямої

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1,5}{0}=\frac{z-3}{1}.$$

12. Дано координати точок $M_0(1;0;-1)$, $M_1(-2;-1;4)$, $M_2(11;0;5)$, $M_3(-1;0;1)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $4x^2-25y^2+16x+50y-109=0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина $-O(0,0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y=\pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $2b=4$, $\varepsilon=5\sqrt{29}/29$;

б) $k=12/13$, $2a=26$;

в) вісь симетрії Ox і $A(-5,15)$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через лівий фокус гіперболи $3x^2-5y^2=30$ і має центр у точці $A(0,6)$.

16. 16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho=1/(2-\sin\varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 13

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix},$$

$$f(x)=x^3-4x^2+x-1.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння $A\cdot X=B$,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 1\\ 4 & 1 & 5\end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

а) матричним методом;

б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases}3x_1+x_2+2x_3=-2,\\ x_1+3x_2+2x_3=2,\\ 2x_1+x_2-x_3=-1.\end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}7 & 8 & -5 & 6 & -4 & 5\\ 6 & 7 & -4 & 4 & 3 & 5\\ 5 & 9 & 7 & 5 & 7 & 3\end{array}\right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор $\vec{x}=\{16;2;10\}$ за векторами $\vec{p}=\{2;1;1\}$, $\vec{q}=\{-6;1;-1\}$, $\vec{r}=\{8;-1;4\}$.

7. Чи колінеарні вектори $\vec{c}_1=2\vec{a}+3\vec{b}$ і $\vec{c}_2=2\vec{b}+3\vec{a}$, побудовані на векторах $\vec{a}=\{-2;7;-1\}$, $\vec{b}=\{-3;5;2\}$?

8. Чи компланарні вектори $\vec{a}=\{7;3;4\}$, $\vec{b}=\{-1;-2;-1\}$, $\vec{c}=\{4;2;4\}$?

9. Дано дві вершини трикутника ABC: $A(-6,\ 2)$, $B(2,\ -2)$ і точка перетину його висот $H(1,\ 2)$. Знайдіть координати точки M перетину сторони AC і висоти BH.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{2},$$
$$x+2y-z-2=0.$$

11. Знайдіть точку M', симетричну точці $M(2;-2;-3)$ відносно прямої
$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+0,5}{0}=\frac{z+1,5}{0}.$$

12. Дано координати точок $M_0(1;-2;-1)$, $M_1(2;-1;-1)$, $M_2(5;0;4)$, $M_3(7;-2;-2)$.
Знайдіть :
а) канонічні рівняння прямої M_1M_2;
б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;
г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;
д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $4x^2-9y^2+24x-36y-36=0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:
а) еліпса; б) гіперболи;
в) параболи, якщо її вершина – (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – екцентриситет, $y=\pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).
а) $a=6, F(-4,0)$;
б) $b=3, F(7,0)$;
в) D: $x=-7$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через фокуси еліпса $16x^2-41y^2=656$ і має центр у точці A – його нижній вершині.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho=5(1-\sin 2\varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 14

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix},$$

$$f(x)=2x^3-8x+6.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння $X\cdot A=B$,

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 4 & 5\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 2 & 0\\ 1 & 4 & 5\end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

а) матричним методом;

б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases}3x_1-2x_2+x_3=6,\\ 7x_1+x_2+4x_3=10,\\ x_2+5x_3=4.\end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & 3 & 5 & -1\\ 2 & 6 & 5 & 6 & 1\\ 3 & 7 & 4 & 8 & 2\\ 3 & 5 & 1 & 9 & 1\end{array}\right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix}5 & -2 & 2\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор $\vec{x}=\{13;-3;6\}$ за векторами $\vec{p}=\{3;1;4\}$, $\vec{q}=\{2;-2;-1\}$, $\vec{r}=\{1;1;1\}$.

7. Чи колінеарні вектори $\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}$ і $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$, побудовані на векторах $\vec{a}=\{3;7;0\}$, $\vec{b}=\{1;-3;4\}$?

8. Чи компланарні вектори $\vec{a}=\{2;3;2\}$, $\vec{b}=\{4;7;5\}$, $\vec{c}=\{2;0;-1\}$?

9. Знайдіть рівняння висот трикутника ABC, що проходить через вершини A і B, якщо $A(-4,\ 2)$, $B(3,\ -5)$, $C(5,\ 0)$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+2}{3},$$

$$5x-y+4z+3=0.$$

11. Знайдіть точку M', симетричну точці $M(-1;0;1)$ відносно прямої

$$\frac{x+0,5}{0}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-4}{2}.$$

12. Дано координати точок $M_0(2;0;0)$, $M_1(-4;5;1)$, $M_2(2;0;-4)$, $M_3(-2;0;-2)$. Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $y^2-6x+8y+22=0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина $-O(0,0)$(A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y=\pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $b=7, F(5,0)$;

б) $a=11, \varepsilon=12/11$;

в) D: $x=10$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через вершину гіперболи $2x^2-9y^2=18$ і має центр у точці $A(0,4)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho=3(2-\cos 2\varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 15

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -4 \end{pmatrix},$$

$f(x)=x^2-6x+9$.

2. Розв'яжіть матричне рівняння

$$A\cdot X\cdot B=C,\ A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:
а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1, \\ 2x_1+2x_3=4, \\ 3x_1+2x_2=5. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 9 & 8 & -3 \\ 6 & 9 & 9 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор $\vec{x}=\{13;16;-1\}$ за векторами $\vec{p}=\{1;2;1\}$, $\vec{q}=\{2;3;1\}$, $\vec{r}=\{-1;1;4\}$.

7. Чи колінеарні вектори $\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}$ і $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$, побудовані на векторах $\vec{a}=\{3;7;0\}$, $\vec{b}=\{1;-3;4\}$?

8. Чи компланарні вектори $\vec{a}=\{5;3;4\}$, $\vec{b}=\{-1;0;-1\}$, $\vec{c}=\{4;2;4\}$?

9. Обчисліть координати точки перетину перпендикулярів, проведених через середини сторін трикутника, вершинами якого служать точки $A(2,\ 3)$, $B(0,\ -3)$, $C(6,\ -3)$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3},$$
$$x+3y+5z-42=0.$$

11. Знайдіть точку M', симетричну точці $M(0;-3;-2)$ відносно прямої

$$\frac{x+0,5}{0}=\frac{y+1,5}{-1}=\frac{z-1,5}{1}.$$

12. Дано координати точок $M_0(3;-1;2)$, $M_1(7;5;0)$, $M_2(-1;-5;2)$, $M_3(1;-1;-2)$. Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $y^2-8x-6y-7=0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0,0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y=\pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $A(-\sqrt{17/3},1/3)$, $B(\sqrt{21}/2,1/2)$;

б) $k=1/2$, $2b=6$;

в) D: $y=-1$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через фокуси гіперболи $5x^2-11y^2=55$ і має центр у точці $A(0,5)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho=6\sin 4\varphi$ у полярній системі координат.

Варіант 16

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 5\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix},$$

$f(x)=9x^2-4$.

2. Розв'яжіть матричне рівняння

$$X\cdot A\cdot B=C,\ A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & -3\end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

а) матричним методом;

б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=2,\\ 3x_1+3x_2+2x_3=5,\\ x_1-x_2+x_3=-3.\end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2 & -1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2\\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3\\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6\end{array}\right)$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix}7 & -6 & 3\\ 0 & 4 & 0\\ 5 & -2 & 5\end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор $\vec{x}=\{11;11;27\}$ за векторами $\vec{p}=\{1;1;5\}$, $\vec{q}=\{5;1;1\}$, $\vec{r}=\{-1;-5;-1\}$.

7. Чи колінеарні вектори $\vec{c}_1=2\vec{a}+4\vec{b}$ і $\vec{c}_2=3\vec{b}-\vec{a}$, побудовані на векторах $\vec{a}=\{1;3;4\}$, $\vec{b}=\{3;1;-1\}$?

8. Чи компланарні вектори $\vec{a}=\{3;10;5\}$, $\vec{b}=\{-2,-2,-3\}$, $\vec{c}=\{2,4,3\}$?

9. Запишіть рівняння висоти, проведеної через вершину A трикутника ABC, знаючи рівняння його сторін:

$AB\ -2x-y-3=0$,

$AC\ -x+5y-7=0$,

$BC\ -3x-2y+13=0$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-3}{-1}=\frac{y-4}{5}=\frac{z-4}{2},$$

$$7x+y+4z-47=0.$$

11. Знайдіть точку M', симетричну точці $M(1;0;1)$ відносно площини

$$4x+6y+4z-25=0.$$

12. Дано координати точок $M_0(2;1;0)$, $M_1(3;2;0)$, $M_2(6;3;5)$, $M_3(8;1;-1)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $25x^2+4y^2+150x-8y+129=0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y=\pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $\varepsilon=3/5$, $A(0,8)$;

б) $A(\sqrt{6},0)$, $B(-2\sqrt{2},1)$;

в) D: $y=9$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через точку $B(1,4)$ і має центр у точці A – вершині параболи $y^2=-(x-4)/3$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho=2\cos 6\varphi$ у полярній системі координат.

Варіант 17

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix},$$

$f(x)=9-x^2$.

2. Розв'яжіть матричне рівняння

$$X\cdot A\cdot B=C,\ A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

а) матричним методом;

б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+3x_3=5, \\ 3x_1-3x_2-4x_3=5. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 3 & 4 & -2 & 3 & 1 \\ 8 & 5 & 5 & -4 & 4 & 2 \\ 7 & 4 & 7 & -3 & 7 & -1 \\ 4 & 3 & -1 & -3 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор $\vec{x}=\{-1;-1;2\}$ за векторами $\vec{p}=\{2;1;3\}$, $\vec{q}=\{2;-3;1\}$, $\vec{r}=\{1;2;1\}$.

7. Чи колінеарні вектори $\vec{c_1}=\vec{a}+2\vec{b}$ і $\vec{c_2}=3\vec{a}-\vec{b}$, побудовані на векторах $\vec{a}=\{1;2;3\}$, $\vec{b}=\{-2;5;5\}$?

8. Чи компланарні вектори $\vec{a}=\{-2,-4,-3\}$, $\vec{b}=\{4;3;1\}$, $\vec{c}=\{6;7;4\}$?

9. Дано трикутник з вершинами $A(3,\ 1)$, $B(-3,\ -1)$ і $C(5,\ -12)$. Знайдіть рівняння і Обчисліть довжину його медіани, проведеної із вершини C.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{5},$$

$$2x+3y+7z-52=0.$$

11. Знайдіть точку M', симетричну точці $M(-1;0;-1)$ відносно площини

$$2x+6y-2z+11=0.$$

12. Дано координати точок $M_0(3;5;1)$, $M_1(-3;9;2)$, $M_2(7;-9;1)$, $M_3(3;3;3)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $16x^2+25y^2+64x+50y-311=0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0,0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y=\pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $2a=22,\ \varepsilon=10/11$;

б) $k=\sqrt{11}/5,\ 2c=12$;

в) вісь симетрії Ox і $A(-7,5)$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через лівий фокус еліпса $3x^2-7y^2=21$ і має центр у точці $A(-1,-3)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho=3/(1-\cos 2\varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 18

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix},$$

$f(x)=2x^2+8x+8$.

2. Розв'яжіть матричне рівняння $X\cdot A=B$,

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 5\\ 3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 1\\ -3 & -1 & -1\\ 2 & 5 & 3\end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

а) матричним методом;

б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases}3x_1+x_2+x_3=4,\\ x_1+3x_2+x_3=6,\\ x_1+x_2+3x_3=0.\end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 3 & 4 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3\\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1\\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3\end{array}\right)$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix}5 & 0 & -2\\ 6 & 9 & -6\\ -2 & 0 & 5\end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор $\vec{x}=\{1;2;6\}$ за векторами $\vec{p}=\{1;2;3\}$, $\vec{q}=\{1;-3;-1\}$, $\vec{r}=\{-4;2;-1\}$.

7. Чи колінеарні вектори $\vec{c}_1=5\vec{a}-3\vec{b}$ і $\vec{c}_2=2\vec{a}-\vec{b}$, побудовані на векторах $\vec{a}=\{3;4;-1\}$, $\vec{b}=\{1;-2;2\}$?

8. Чи компланарні вектори $\vec{a}=\{3;1;-1\}$, $\vec{b}=\{1;0;-1\}$, $\vec{c}=\{8;3;-2\}$?

9. Запишіть рівняння прямої, що проходить через початок координат і точку перетину прямих $2x+5y-8=0$ і $2x+3y+4=0$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{2},$$

$$3x+4y+7z-16=0.$$

11. Знайдіть точку M', симетричну точці $M(0;2;1)$ відносно площини

$$2x+4y-3=0.$$

12. Дано координати точок $M_0(-1;1;0)$, $M_1(0;1;1)$, $M_2(1;6;4)$, $M_3(-1;0;6)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $x^2+4y^2-8x+8y+16=0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y=\pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $b=5,\ \varepsilon=12/13$;

б) $k=12/13,\ 2a=26$;

в) вісь симетрії Oy і $A(-9,6)$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через ліву вершину параболи $5x^2-9y^2=45$ і має центр у точці $A(0,-6)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho=2(1-\cos 3\varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 19

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -4 & 0 & 5\\ 2 & 4 & -7\end{pmatrix},$$

$$f(x)=5-4x-x^2.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння

$$A\cdot X\cdot B=C,\quad A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:
а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases}x_1+3x_2=6,\\ x_1-x_2-x_3=0,\\ 2x_1+2x_2+3x_3=-2.\end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 3 & -2 & 4\\ 2 & -1 & 2 & -3 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 2 & 4\\ 4 & 4 & 6 & -3 & 9\end{array}\right)$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix}7 & 2 & -2\\ 4 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор $\vec{x}=\{4;11;11\}$ за векторами $\vec{p}=\{2;3;3\}$, $\vec{q}=\{-1;4;-2\}$, $\vec{r}=\{-1;-2;4\}$.

7. Чи колінеарні вектори $\vec{c}_1=4\vec{a}+3\vec{b}$ і $\vec{c}_2=8\vec{a}-3\vec{b}$, побудовані на векторах $\vec{a}=\{1;-2;5\}$, $\vec{b}=\{2;2;-1\}$?

8. Чи компланарні вектори $\vec{a}=\{4;2;2\}$, $\vec{b}=\{-3;-3;-3\}$, $\vec{c}=\{2;1;2\}$?

9. Знайдіть рівняння перпендикулярів до прямої $3x+5y-15=0$, проведених через точки перетину даної прямої з осями координат.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-5}{-2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+4}{-1},$$

$$2x-5y+4z+24=0.$$

11. Знайдіть точку M', симетричну точці $M(2;1;0)$

відносно площини $y+z+2=0$.

12. Дано координати точок $M_0(4;-2;-6)$, $M_1(2;-4;4)$, $M_2(4;-2;1)$, $M_3(0;-2;2)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $25x^2-4y^2+150x+8y+121=0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина $-O(0,0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y=\pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $a=9, F(7,0)$;

б) $b=6, F(12,0)$;

в) D: $x=-1/4$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через фокуси еліпса $24x^2-25y^2=600$і має центр у точці A, де A – його верхня вершина.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho=3(1-\cos 4\varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 20

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

$f(x)=3x^2-7x+5$.

2. Розв'яжіть матричне рівняння

$A\cdot X=B$,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

а) матричним методом;

б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1+3x_2+4x_3=5, \\ 5x_1-7x_2+8x_3=-11, \\ 4x_1+5x_2-7x_3=20. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 11 \\ 2 & 1 & -3 & 4 & -5 \\ 2 & -13 & 11 & -8 & 49 \\ 4 & 9 & -13 & 14 & -37 \end{array}\right)$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор $\vec{x}=\{8;6;-4\}$ за векторами $\vec{p}=\{2;1;3\}$, $\vec{q}=\{-1;-3;1\}$, $\vec{r}=\{1,-5,-7\}$.

7. Чи колінеарні вектори $\vec{c_1}=-3\vec{a}+2\vec{b}$ і $\vec{c_2}=\vec{a}+2\vec{b}$, побудовані на векторах $\vec{a}=\{3;5;4\}$ і $\vec{b}=\{5;9;7\}$?

8. Чи компланарні вектори $\vec{a}=\{4;1;2\}$, $\vec{b}=\{9;2;5\}$, $\vec{c}=\{1;1;-1\}$?

9. Дано рівняння сторін чотирикутника: $x-y=0$, $x+3y=0$, $x-y-4=0$, $3x+y-12=0$. Знайдіть рівняння його діагоналей.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-1}{8}=\frac{y-8}{-5}=\frac{z+5}{12},$$
$$x-2y-3z+18=0.$$

11. Знайдіть точку M', симетричну точці $M(-2;2;0)$ відносно площини
$$4x-5y-z-7=0.$$

12. Дано координати точок $M_0(-1;-3;1), M_1(5;-7;0)$, $M_2(-5;1;1), M_3(-1;-1;-1)$.
Знайдіть :
а) канонічні рівняння прямої M_1M_2;
б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;
в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;
г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;
д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $16x^2-25y^2+64x-50y-361=0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:
а) еліпса; б) гіперболи;
в) параболи, якщо її вершина – $O(0,0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y=\pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).
а) $b=5, F(-10,0)$;
б) $a=9, \varepsilon=4/3$;
в) D: $x=12$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через праву вершину гіперболи $3x^2-16y^2=48$ і має центр у точці $A(1,3)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho=5(2-\sin\varphi)$ у полярній системі координат.

Задачі економічного змісту

17. Витрати i-го виду сировини (i = 1, 2, 3) на виробництво j-го виду продукції (j =1, 2, 3) дорівнюють a_{ij} одиниць. Запаси i-го виду сировини дорівнюють b_{ij} одиниць. Визначити план виробництва, що забезпечує використання всієї сировини, розв'язавши складену систему методом Гаусса.

Таблиця 1

Варі-ант	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3
1	1	1	1	2	1	3	1	3	1	39	65	65
2	2	1	1	1	2	1	1	1	2	54	56	58
3	1	2	3	2	1	4	3	2	1	94	109	86
4	3	4	1	5	3	4	4	2	3	124	150	142
5	2	1	3	1	2	4	3	4	2	104	125	151
6	3	2	4	4	3	2	3	1	3	164	158	126
7	1	1	1	2	1	2	3	1	1	57	95	91
8	1	2	2	2	1	3	3	4	1	102	122	156
9	1	3	1	2	4	4	3	2	1	105	214	122
10	2	3	3	1	4	5	3	4	3	178	228	220
11	3	4	3	4	5	3	2	3	4	230	274	211
12	1	0	2	1	3	0	2	2	1	74	94	118
13	3	1	2	1	3	2	2	1	1	148	152	98
14	3	2	1	7	0	1	0	2	5	152	196	192
15	1	1	1	2	0	2	2	3	0	81	108	131
16	2	1	1	3	3	2	1	1	1	110	222	84
17	1	2	1	2	0	3	3	3	1	116	147	199
18	3	1	1	1	3	1	1	1	3	146	150	154
19	1	3	0	1	1	1	2	2	3	122	93	219
20	3	4	1	5	0	4	1	1	1	252	186	96

18. Щоб забезпечити споживачів деякою продукцією, побудовано заводи A і B. Визначити зони тяжіння для цих заводів і скласти рівняння граничної лінії, якщо заводи A і B мають

координати $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, собівартість виробництва одиниці продукції дорівнює P_A і P_B, а витрати на її перевезення Q_A і Q_B для заводів *A* і *B* відповідно.

Таблиця 2

Варі-ант	x_1	y_1	P_A	Q_A	x_2	y_2	P_B	Q_B
1	2	0	3	2	4	0	8	2
2	–1	0	4	2	1	0	9	2
3	1	0	2	3	5	0	15	3
4	–2	0	3	3	2	0	16	3
5	–3	0	5	2	–1	0	10	2
6	0	0	1	2	2	0	6	2
7	2	0	2	2	4	0	7	2
8	–2	0	1	2	0	0	6	2
9	–1	0	3	3	3	0	16	3
10	–3	0	4	3	1	0	17	3
11	4	0	2	2	6	0	7	2
12	–3	0	3	2	–1	0	8	2
13	5	0	5	3	9	0	18	3
14	2	0	4	3	6	0	17	3
15	1	0	5	2	3	0	10	1
16	0	0	2	2	2	0	7	2
17	–1	0	1	3	3	0	14	3
18	–3	0	1	3	1	0	14	3
19	1	0	3	2	3	0	8	2
20	–2	0	2	2	0	0	7	2

Приклад розв'язання варіанта індивідуального завдання

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix},\qquad f(x)=2x^2-3x+5.$$

Розв'язання. Запишемо за означенням многочлен від матриці A: $f(A)=2A^2-3A+5E$, де E – одинична матриця того ж порядку, що і матриця A. Виконаємо дії.

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+3\cdot2+(-1)\cdot0 & 1\cdot3+3\cdot(-2)+(-1)\cdot1 & 1\cdot(-1)+3\cdot1+(-1)\cdot4\\ 2\cdot1-2\cdot2+1\cdot0 & 2\cdot3-2\cdot(-2)+1\cdot1 & 2\cdot(-1)-2\cdot1+1\cdot4\\ 0\cdot1+1\cdot2+4\cdot0 & 0\cdot3+1\cdot(-2)+4\cdot1 & 0\cdot(-1)+1\cdot1+4\cdot4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}7 & -4 & -2\\ -2 & 11 & 0\\ 2 & 2 & 17\end{pmatrix}.$$

Підставимо знайдений добуток в $f(A)$, помноживши кожен його елемент на 2, кожен елемент матриці A на (-3) і кожен елемент одиничної матриці на (-5) та додамо відповідні елементи трьох матриць.

$$f(A)=2\begin{pmatrix}7 & -4 & -2\\ -2 & 11 & 0\\ 2 & 2 & 17\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}14 & -8 & -2\\ -4 & 22 & 0\\ 4 & 4 & 34\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & -9 & 3\\ -6 & 6 & -3\\ 0 & -3 & -12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 14-3-5 & -8-9-0 & -2+3-0 \\ -4-6-0 & 22+6-5 & 0-3-0 \\ 4-0-0 & 4-3-0 & 34-12-5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -17 & 1 \\ -10 & 23 & -3 \\ 4 & 1 & 17 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $f(A)=\begin{pmatrix} 6 & -17 & 1 \\ -10 & 23 & -3 \\ 4 & 1 & 17 \end{pmatrix}$.

2. Розв'яжіть матричне рівняння $A\cdot X=B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Щоб знайти матрицю X, необхідно помножити зліва обидві частини матричного рівняння на обернену до A матрицю A^{-1}, за умови, що вона існує. Тоді

$$A^{-1}AX=A^{-1}B,\quad X=A^{-1}B.$$

Обчислимо детермінант матриці A:

$$\det A=5\cdot(-2)-1\cdot(-3)=-7.$$

Оскільки детермінант матриці A відмінний від нуля, то матриця A невироджена і для неї існує обернена A^{-1}.

Знайдемо алгебраїчні доповнення матриці A: $A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot(-2)=-2$, $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot(-3)=3$, $A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot 1=-1$, $A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 5=5$ і запишемо обернену матрицю

$$A^{-1}=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Матриці A^{-1} та B узгоджені (кількість стовпців A^{-1} дорівнює кількості рядків B), тому можна обчислити їх добуток

$$X=A^{-1}B=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 & 2 & -5 \\ 13 & 11 & 11 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $X=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 & 2 & -5 \\ 13 & 11 & 11 \end{pmatrix}$.

3. Розв'яжіть систему: а) матричним методом; б) за формулами Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 14. \end{cases}$$

Розв'язання: а) матричним методом.

Запишемо систему у вигляді матричного рівняння

$$A \cdot X = B,$$

де $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Обчислимо детермінант матриці коефіцієнтів системи

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot (-3) -$$

$$-3 \cdot (-1) \cdot (-3) - 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 4 = -22.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення матриці A

$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(4-6) = 2$,

$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4$, $A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4+3) = -7$,

$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 9 = 17$, $A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(2-3) = 1$,

$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4+3) = -7$,

$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3$

і запишемо обернену матрицю $A^{-1} = -\frac{1}{22}\begin{pmatrix} -6 & -7 & -1 \\ 2 & 17 & -7 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Тоді $X = A^{-1}B$.

$$X = -\frac{1}{22}\begin{pmatrix} -6 & -7 & -1 \\ 2 & 17 & -7 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} = -\frac{1}{22}\begin{pmatrix} -6\cdot(-1)+(-7)\cdot 2+(-1)\cdot 14 \\ 2\cdot(-1)+17\cdot 2+(-7)\cdot 14 \\ 4\cdot(-1)+1\cdot 2+(-3)\cdot 14 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{22}\begin{pmatrix} -22 \\ -66 \\ -44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

б) за формулами Крамера:

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -22.$$

Знайдемо детермінанти Δ_i, $i = 1, 2, 3$. Для цього замінимо i– ий стовпчик матриці A стовпчиком вільних членів і обчислимо детермінанти одержаних матриць.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 14 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -22, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 14 & 4 \end{vmatrix} = -66,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 14 \end{vmatrix} = -44.$$

Звідси $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-22}{-22} = 1$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-66}{-22} = 3$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-44}{-22} = 2$.

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 9 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 2 & -7 \end{array}\right).$$

Розв'язання. Система, яку задано розширеною матрицею, сумісна у разі рівності рангів основної та розширеної матриць. Знайдемо ці ранги методом еквівалентних перетворень. Для зручності поміняємо місцями перший і останній рядки.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 9 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 2 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & 0 & 2 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 9 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Зробимо нулі у першому стовпці починаючи з другого рядка: перший рядок додамо до другого, перший рядок помножимо на 4 і додамо до третього та перший рядок помножимо на 2 і додамо до останнього рядка.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & 0 & 2 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 9 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & 0 & 2 & 2 & -7 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 4 & -10 \\ 0 & -3 & 9 & 9 & 12 & -30 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 4 & -10 \end{array}\right)$$

Усі елементи третього рядка мають спільний множник 3, на який можна скоротити. Після скорочення матриця набуде вигляду

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & 0 & 2 & 2 & -7 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 4 & -10 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 4 & -10 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 4 & -10 \end{array}\right).$$

Оскільки три останніх рядки однакові, залишимо другий рядок без змін, а третій та четвертий віднімемо від другого:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -1 & 0 & 2 & 2 & -7 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Основна і розширена матриці мають два не нульових рядки, що означає що їх ранги дорівнюють 2. Отже, система сумісна і має безліч розв'язків (ранг менше кількості невідомих системи). Знайдемо ці розв'язки. Врахуємо, що мінор, який містить змінні x_1, x_2 відмінний від нуля: $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$. Тому ці змінні візьмемо за базові, а змінні x_3, x_4, x_5 – вільні. Перенесемо вільні змінні у праву частину рівностей і виразимо базові змінні через вільні.

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = -7 - 2x_4 - 2x_5 \\ -x_2 = -10 - 3x_3 - 3x_4 - 4x_5 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_1 = 7 + 2x_4 + 2x_5 - x_2 \\ x_2 = 10 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -3 - 3x_3 - x_4 - 2x_5 \\ x_2 = 10 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 \end{cases}.$$

Змінні x_3, x_4, x_5 – вільні, вони можуть набувати будь-яких значень. Тому загальний розв'язок системи запишемо у вигляді

$$X = \begin{pmatrix} -3 - 3C_1 - C_2 - 2C_3 \\ 10 + 3C_1 + 3C_2 + 4C_3 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння матриці та знайдемо його розв'язки.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

$$(3-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda)+1+1-5+\lambda-3+\lambda-3+\lambda=0,$$

$$(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-6)=0,\quad \lambda_1=2,\quad \lambda_2=3,\quad \lambda_3=6.$$

Отже, матриця A має три власних числа. Знайдемо власні вектори, підставляючи по черзі значення $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ у систему

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1-x_2+x_3=0, \\ -x_1+(5-\lambda)x_2-x_3=0, \\ x_1-x_2+(3-\lambda)x_3=0. \end{cases}$$

Власному числу $\lambda_1=2$ відповідає власний вектор X_1, координати якого задовольняють систему

$$\begin{cases} (3-2)x_1-x_2+x_3=0, \\ -x_1+(5-2)x_2-x_3=0, \\ x_1-x_2+(3-2)x_3=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ -x_1+3x_2-x_3=0, \\ x_1-x_2+x_3=0. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} 2x_2=0, \\ x_1=-x_3 \end{cases}$ і власний вектор $X_1=C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Аналогічно знаходять власні вектори $X_2=C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ та $X_3=C_3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

де C_1,C_2,C_3 – відмінні від нуля дійсні числа.

Відповідь: власні числа матриці $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$; власні вектори $X_1 = C_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $X_2 = C_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ та $X_3 = C_3\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

6. Розкласти вектор $\vec{x} = \{9;3;18\}$ за векторами $\vec{p} = \{1;2;4\}$, $\vec{q} = \{3;1;-3\}$, $\vec{r} = \{-2;2;1\}$.

Розв'язання. Покажемо, що вектори $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ утворюють базис. Для цього обчислимо визначник

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\2 & 1 & 2\\4 & -3 & 1\end{vmatrix} = 1 + 24 + 12 + 8 + 6 - 6 = 45.$$

Оскільки визначник не дорівнює нулю, то вектори $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ утворюють базис. Тому вектор $\vec{x}$ запишемо у вигляді

$$\vec{x} = \alpha\,\vec{p} + \beta\,\vec{q} + \gamma\,\vec{r}$$

або у матричному вигляді

$$\begin{pmatrix}-9\\3\\18\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Знайдемо координати α, β, γ, розв'язавши систему

$$\begin{cases}\alpha + 3\beta - 2\gamma = -9\\2\alpha + \beta + 2\gamma = 3\\4\alpha - 3\beta + \gamma = 18\end{cases}.$$

Методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\2 & 1 & 2\\4 & -3 & 1\end{vmatrix} = 45, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix}-9 & 3 & -2\\3 & 1 & 2\\18 & -3 & 1\end{vmatrix} = 90,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -9 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 18 & 1 \end{vmatrix} = -135, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -9 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 18 \end{vmatrix} = 45.$$

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \quad \beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -3, \quad \gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$$

Відповідь: $\vec{x} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$.

7. Чи колінеарні вектори $\vec{c_1}$ і $\vec{c_2}$, побудовані на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = \{1; 4; -2\}$, $\vec{b} = \{-3; 2; -1\}$, $\vec{c_1} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$, $\vec{c_2} = \vec{a} - 5\vec{b}$?

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $\vec{c_1}$ і $\vec{c_2}$.

$$3\vec{a} = \{3; 12; -6\}, \quad 4\vec{b} = \{-12; 8; -4\}, \quad 5\vec{b} = \{-15; 10; -5\}$$

$$\vec{c_1} = \{3; 12; -6\} - \{-12; 8; -4\} = \{15; 4; -2\},$$

$$\vec{c_2} = \{1; 4; -2\} + \{-15; 10; -5\} = \{-14; 14; -7\}.$$

Оскільки координати векторів $\vec{c_1}$ і $\vec{c_2}$ не пропорційні, то вектори $\vec{c_1}$ і $\vec{c_2}$ не колінеарні.

Відповідь: вектори $\vec{c_1}$ і $\vec{c_2}$ не колінеарні.

8. Чи компланарні вектори $\vec{a} = \{1; 5; -2\}$, $\vec{b} = \{3; 0; -1\}$, $\vec{c} = \{-2; -4; 3\}$?

Розв'язання. Три вектора будуть компланарними, якщо визначник, складений з їх координат дорівнює нулю. В іншому випадку вектори не компланарні. Складемо з координат векторів визначник і обчислимо його

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 10 + 24 - 4 - 45 = -15.$$

Відповідь: вектори не компланарні, оскільки визначник не дорівнює нулю.

9. Знайдіть рівняння прямої, що відтинає на осі ординат відрізок, рівний 3, і проходить паралельно прямій $y-4x=-1$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння заданої прямої як рівняння з кутовим коефіцієнтом $y=4x-1$. Кутовий коефіцієнт дорівнює 4. Оскільки у паралельних прямих кутові коефіцієнти рівні, то рівняння шуканої прямої має вигляд $y=4x+b$. З умови, що пряма відтинає на осі ординат відрізок, рівний 3 знайдемо значення b: $\pm 3=4\cdot 0+b$. Отже, маємо рівняння двох прямих

$$y=4x+3 \text{ та } y=4x-3.$$

Відповідь: $y=4x+3$, $y=4x-3$.

10. Знайдіть точку перетину прямої $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1}$ і площини $2x+3y-5z+3=0$.

Розв'язання. Для того, щоб знайти точку перетину прямої з площиною необхідно записати параметричні рівняння прямої. Оскільки напрямний вектор прямої має координати $\{3;1;1\}$, а точка M_0, що належить прямій має координати$(-1;2;3)$, то параметричні рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} x=-1+3t \\ y=2+t \\ z=3+t \end{cases}.$$

Координати точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ – перетину прямої і площини задовольняють обидва рівняння

$$\begin{cases} x=-1+3t \\ y=2+t \\ z=3+t \end{cases} \quad \text{і} \quad 2x+3y-5z+3=0.$$

Отже, маємо $2(-1+3t)+3(2+t)-5(3+t)+3=0$.

З останнього рівняння знаходимо значення параметра t:

$$-2+6t+6+3t-15-5t+3=0,\ \ 4t=8,\ \ t=2.$$

Підставляючи знайдене значення параметра у рівняння прямої, знайдемо координати точки перетину:

$$\begin{cases} x_1 = -1+6 \\ y_1 = 2+2 \\ z_1 = 3+2 \end{cases}, \qquad M_1(5,4,5).$$

Відповідь: $M_1(5,4,5)$.

11.1. Знайдіть точку M', симетричну точці $M(3;-2;1)$ відносно прямої $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Розв'язання. Запишемо рівняння площини, що проходить через точку $M(3;-2;1)$ перпендикулярно до прямої $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$. У цьому випадку напрямний вектор прямої є вектором нормалі площини, тобто

$$(x-3)+(y+2)-(z-1)=0 \quad \text{або} \qquad x+y-z=0.$$

Знайдемо точку Q перетину прямої з площиною (див. приклад 10). Це точка $Q(4,-1,0)$. Точка Q є серединою відрізка MM', тому її координати задовольняють рівності

$$x_Q=\frac{x_M+x_{M'}}{2}, \quad y_Q=\frac{y_M+y_{M'}}{2}, \quad z_Q=\frac{z_M+z_{M'}}{2},$$

тобто

$$4=\frac{3+x_{M'}}{2}, \quad -1=\frac{-2+y_{M'}}{2}, \quad 0=\frac{1+z_{M'}}{2}.$$

Звідси знаходимо координати точки $M'(5,0,-1)$.

Відповідь: $M'(5,0,-1)$.

11.2. Знайдіть точку M', симетричну точці $M(-2,3,1)$ відносно площини $3x+2y+2z+7=0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку $M(-2,3,1)$ перпендикулярно до площини $3x+2y+2z+7=0$, тобто $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-1}{2}$.

Знайдемо точку Q перетину прямої з площиною (див. приклад 10) : $Q(1,1,3)$. Точка Q є серединою відрізка MM', тому її координати задовольняють рівності

$$1=\frac{-2+x_{M'}}{2},\quad 1=\frac{3+y_{M'}}{2},\qquad 3=\frac{1+z_{M'}}{2}.$$

Звідси точка M' має координати $(4,-1,5)$.

Відповідь: $M'(4,-1,5)$.

12. Дано координати точок $M_0(2,3,1)$, $M_1(1,2,-1)$, $M_2(3,1,-2)$, $M_3(-2,3,-2)$. Знайти:

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

Розв'язання.

а) Скористаємось рівняннями прямої, що проходить через дві задані точки:

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{1-2}=\frac{z+1}{-2+1}\quad \text{або}\quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-1}.$$

б) На площині $M_1M_2M_3$ візьмемо довільну точку $M(x,y,z)$ і запишемо вектори $\overrightarrow{M_1M}=(x-1,y-2,z+1)$, $\overrightarrow{M_1M_2}=(2,-1,-1)$, $\overrightarrow{M_1M_3}=(-3,1,-1)$. Ці три вектора будуть компланарні (тому що належать одній площині).

Скористаємось умовою компланарности векторів:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Розв'язавши це рівняння отримаємо рівняння площини $M_1 M_2 M_3$: $\quad 2x+5y-z-13=0$.

в) Запишемо рівняння площини α, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1 M_2 M_3$, використавши той факт, що паралельні площини мають однакові вектори нормалі. Вектором нормалі площини $M_1 M_2 M_3$ є вектор $\vec{n}=(2,5,-1)$.

Тому рівняння площини α має вигляд:

$$2(x-2)+5(y-3)-(z-1)=0,$$

або після розкриття дужок $\quad 2x+5y-z-18=0$.

г) Щоб записати рівняння площини β, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_3}$, скористаємось загальним рівнянням площини, в якому координати вектора $\overrightarrow{M_1M_3}$ є координатами вектора нормалі:

$$-3(x-2)+(y-3)-(z-1)=0 \quad \text{або} \quad 3x-y+z-4=0.$$

д) Щоб записати рівняння прямої l, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1 M_2 M_3$ зауважимо, що вектор нормалі площини $M_1 M_2 M_3$ і напрямний вектор прямої l колінеарні. Тому рівняння прямої l має вигляд:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-1}{-1}.$$

13. Визначте тип кривої $9x^2+16y^2+18x-96y+9=0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

Розв'язання. Виділимо у рівнянні кривої повні квадрати. Маємо

$$9(x^2+2x+1)+16(y^2-6y+9)-153+9=0.$$

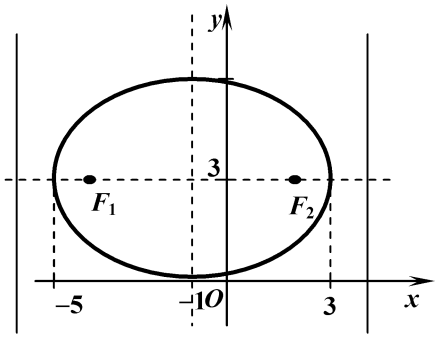
Звідси

$$9(x+1)^2+16(y-3)^2=144 \quad \text{або} \quad \frac{(x+1)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{9}=1.$$

Останнє рівняння – канонічне рівняння еліпса з центром у точці $O(-1;3)$. Велика піввісь $a=4$, мала піввісь $b=3$. Відстань між фокусами $2c=2\sqrt{25-9}=2\sqrt{7}$. Фокуси розміщені на осі Ox і мають координати

$$F_1(-1-\sqrt{7};0) \text{ і } F_2(-1+\sqrt{7};0).$$

Ексцентриситет еліпса $\varepsilon=\frac{\sqrt{7}}{4}$, директриси еліпса $d=-1\pm\frac{16}{\sqrt{7}}$.



14. Запишіть канонічне рівняння: а) еліпса, якщо $2a=22, \varepsilon=\sqrt{57}/11$; б) гіперболи, якщо $2c=32, \varepsilon=8/5$; в) параболи, якщо її вершина – $O(0,0)$, вісь симетрії Ox і $A(-5,15)$.

Розв'язання. а) Оскільки $2a=22$, то $a=11$. Ексцентриситет еліпса $\varepsilon=\frac{c}{a}$. Звідси $c=a\varepsilon$, тобто $c=11\frac{\sqrt{57}}{11}=\sqrt{57}$. Враховуючи, що півосі еліпса і відстань між фокусами задовольняють умову $a^2-b^2=c^2$, знайдемо значення $b^2=11^2-57=64$. Отже, рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{11^2}+\frac{y^2}{8^2}=1 \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{121}+\frac{y^2}{64}=1.$$

б) Для гіперболи $2c=32 \Rightarrow c=16$. Ексцентриситет дорівнює $\varepsilon=\frac{c}{a}$. Звідси $a=\frac{c}{\varepsilon}\Rightarrow a=16\frac{5}{8}=10$. Враховуючи, що півосі

гіперболи і відстань між фокусами задовольняють умову $a^2+b^2=c^2$, знайдемо значення $b^2=16^2-10^2=156$. Отже, рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{156}=1.$$

в) Рівняння параболи з вершиною у точці $O(0,0)$ і віссю симетрії Ox $y^2=2px$, якщо $x\ge 0$ і $y^2=-2px$, якщо $x\le 0$. Точка $A(-5,15)$ належить параболі, тому її координати задовольняють рівняння $15^2=-2p(-5)\Rightarrow p=\frac{15^2}{10}=\frac{45}{2}$. Звідси рівняння шуканої параболи $y^2=-45x$.

Відповідь: а) рівняння еліпса $\frac{x^2}{121}+\frac{y^2}{64}=1$;

б) рівняння гіперболи $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{156}=1$;

в) рівняння параболи $y^2=-45x$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через вершини еліпса $9x^2+25y^2=225$ і має центр у точці $A(0,7)$.

Розв'язання. Рівняння кола з центром у точці $O(a,b)$ радіуса R має вигляд $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Знайдемо радіус кола з умов задачі.

Запишемо канонічне рівняння еліпса і знайдемо координати його фокусів. Для цього ліву і праву частини заданого рівняння поділимо на 225.

$$9x^2+25y^2=225 \quad \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Звідси $c^2=a^2-b^2$, $c^2=25-9=16$. Фокуси еліпса знаходяться у точках $F_1(-4;0)$ та $F_2(4;0)$ і належать колу з центром у точці $A(0,7)$. Знайдемо квадрат радіуса кола $R^2=(0+4)^2+(7-0)^2=65$. Тому шукане рівняння має вигляд $x^2+(y-7)^2=65$.

Відповідь: $x^2+(y-7)^2=65$.

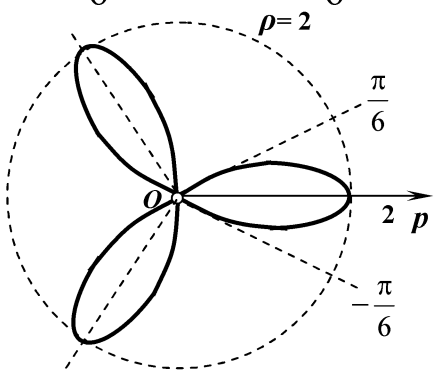
16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 2\cos 3\varphi$ у полярній системі координат.

Розв'язання. З'ясуємо, для яких значень кута φ визначено функцію $\rho = 2\cos 3\varphi$. Оскільки полярний радіус ρ задає відстань від полюса до точки кривої, то його значення не можуть бути від'ємними. Це означає, що права частина рівності задовольняє умову $2\cos 3\varphi \geq 0$. Звідси

$$\cos 3\varphi \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 3\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{ де } n \in \mathbb{Z} \quad \text{або}$$

$$-\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi n, \; n \in \mathbb{Z}.$$

Коли $n = 0$ одержимо кут $-\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$, у якому розташовано частину кривої. Найбільшого значення $\rho = 2$ у цій області функція $\rho = 2\cos 3\varphi$ досягає, коли $\varphi = 0$. Якщо значення кута φ збільшуються від 0 до $\frac{\pi}{6}$, то значення косинуса зменшуються від 1 до 0, а відповідно зменшуються і значення полярного радіуса $\rho = 2\cos 3\varphi$ від 2 до 0. Аналогічно, зменшення кута від 0 до $-\frac{\pi}{6}$ призводять до зменшення значень полярного радіуса $\rho = 2\cos 3\varphi$ від 2 до 0. Тому в області $-\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$ крива має вигляд замкненої пелюстки. Оскільки функція $2\cos 3\varphi$ має період $T = \frac{2}{3}\pi$, рисунок повториться у кутах $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}$ $(n = 1)$ та $\frac{7\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$ $(n = 2)$.



17. Для забезпечення споживачів деякою продукцією побудовано заводи *A* і *B*. Визначити зони тяжіння для цих заводів і скласти рівняння граничної лінії, якщо *A*(1; 0), *B*(3; 0), собівартість виробництва одиниці продукції $p_A = 1$, $p_B = 6$ і витрати на їх перевезення $Q_A = 2$, $Q_B = 2$ для заводів *A* і *B* відповідно.

Розв'язання. Під зоною тяжіння для заводу *A* розуміють множину таких точок, у якій вартість одиниці продукції цього заводу буде меншою, ніж вартість одиниці аналогічної продукції заводу *B*.

Зафіксуємо довільну точку *M*(*x*; *y*). Відстань від цієї точки до заводів *A* і *B* позначимо $|AM|$ і $|BM|$. Тоді вартість одиниці продукції з відповідного заводу для цієї точки буде включати в себе собівартість виробництва продукції та витрати на її перевезення, тобто для заводу *A*:

$$P_A + Q_A|AM| = 1 + 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2},$$

а для заводу *B*:

$$P_B + Q_B|BM| = 6 + 2\sqrt{(x-3)^2 + y^2}.$$

Граничну лінію складають точки, для яких ці суми врівноважені, тобто

$$P_A + Q_A|AM| = P_B + Q_B|BM|$$

або

$$1 + 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 6 + 2\sqrt{(x-3)^2 + y^2}.$$

Звідси

$$2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 5 + 2\sqrt{(x-3)^2 + y^2}.$$

Після піднесення обох частин рівності до квадрата і зведення подібних маємо рівняння

$$\frac{(x-2)^2}{225/144} + \frac{y^2}{9/16} = 1.$$

Отже, гранична лінія являє собою еліпс.

Варіант 1

1. Знайдіть область визначення

$$y=\lg\frac{x-5}{x^2-10x+24}-\sqrt[3]{x+5}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2}{2n^2-3}=\frac{3}{2}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-n)^2+(1+n)^2}{(1-n)^3+(1+n)^3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)$.

4. Обчисліть границі

а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^2-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$;

б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$;

г) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+11x+15}{3x^2+5x-12}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$;

е) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1}$;

ж) $x=0$

з) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$;

і) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$;

ї) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$;

к) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos8x}{3x^2}$.

5. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$:

$\alpha(x)=x-x^2-\sqrt{x}$;

$\beta(x)=x+x^3-3\sqrt[3]{x}\quad(x\to0)$.

6. Доведіть, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ при $x\to0$ є нескінченно малими одного порядку малості:

$$f(x)=\operatorname{tg}2x,\ \varphi(x)=\arcsin x.$$

7. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$;

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x}+\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sin\sqrt{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+3x^2\right)}{x^3-5x^2}$.

8. Обчисліть границю

$$\lim_{x\to0}\left[1-\ln\left(1+x^3\right)\right]^{3/x^2\arcsin x}.$$

9. Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1, \\ x^2+2, & -1\le x<1, \\ 2x, & x\ge 1. \end{cases}$$

10. Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}+1;\ x_1=3,\ x_2=4.$$

11. Знайдіть похідну функцій:

а) $y=\sqrt{x^3+\sqrt{x^2+1}}$;

б) $y=(\operatorname{tg}x)^x$;

в) $\begin{cases} x=t^2, \\ y=t+t^3, \end{cases}\ t\in R.$

12. Знайдіть y' і y'':

а) $y^2=8x$;

б) $\begin{cases} x=(2t+3)\cos t, \\ y=3t^3. \end{cases}$

13. Для даної функції y і аргументу x_0 обчисліть $y'''(x_0)$: $y=\sin^2 x,\ x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

14. Запишіть формулу для похідної n-го порядку функції

$$y=\ln x.$$

15. Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{\operatorname{tg}^2 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{5-5e^{-3x}}$.

16. Запишіть рівняння дотичної до кривої $y=x^2-7x+3$ у точці з абсцисою $x=1$.

17. Доведіть, що лінія $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=t^3 \end{cases}$ нахилена до осі Ox під гострим кутом в усіх своїх точках.

18. Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а) $y=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^3}$;

б) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$;

в) $y=e^{2x-x^2}$.

19. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y=\ln(x^2-2x+2)$ на відрізку $[0;3]$.

Варіант 2

1. Знайдіть область визначення

$$y=\sqrt[6]{\frac{(x-2)(x-3)}{x^2}}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+4}{2n+3}=\frac{5}{2}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2-2n}-\sqrt{n^2-3}\right)$.

4. Обчисліть границі

а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+x}$;

б) $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$;

г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+5x-7}{x^3-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x-5}{2x^2+x+7}$;

ж) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-7x+2}{x^4+2x-4}$;

з) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$;

і) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$;

ї) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$;

к) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{5x}$.

5. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$:

$\alpha(x)=x^3-3x-2$; $\beta(x)=x-2$ $(x\to2)$.

6. Доведіть, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ при $x\to0$ є нескінченно малими одного порядку малості $f(x)=1-\cos x$, $\varphi(x)=3x^2$.

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[\operatorname{tg}x]^{\pi-2x}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^3-2^x+1}{e^x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg}3x}$.

9. Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0,\\ (x+1)^2, & 0<x\le 2,\\ -x+4, & x>2.\end{cases}$$

10. Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$f(x)=5^{\frac{1}{x-3}}-1;\ x_1=3,\ x_2=4.$

11. Знайдіть похідну функцій:

а) $y=\dfrac{x^3}{3\sqrt{\left(1+x^4\right)^3}}$;

б) $y=\left(\arcsin x\right)^x$;

в) $\begin{cases} x=\sin^2 t,\\ y=\cos^2 t,\end{cases}\quad 0<t<\dfrac{\pi}{2}.$

12. Знайдіть y' і y'':

а) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{7}=1;$

б) $\begin{cases} x=2\cos^2 t,\\ y=3\sin^2 t.\end{cases}$

13. Для даної функції y і аргументу x_0 обчисліть $y'''\left(x_0\right)$: $y=\operatorname{arctg} x,\ x_0=1.$

14. Запишіть формулу для похідної n-го порядку функції

$$y=\frac{1}{x}.$$

15. Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a^{\ln x}-x}{x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty} x^4\sin\left(\dfrac{a}{x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$.

16. Запишіть рівняння дотичної до кривої $y=x^2-16x+7$ у точці з абсцисою $x=1$.

17. На параболі $y=x^2$ вибрані дві точки з абсцисами $x_1=1$ і $x_2=3$. Через ці точки проведена січна. У якій точці параболи дотична до неї буде паралельна цій січній?

18. Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а) $y=\dfrac{e\ln x}{x}$;

б) $y=\dfrac{x+1}{\left(x-1\right)^2}$;

в) $y=e^{\frac{1}{(5+x)}}$.

19. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y=\dfrac{3x}{\left(x^2+1\right)}$ на відрізку $[0;5]$.

Варіант 3

1. Знайдіть область визначення $y=(x-2)\sqrt[4]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$.

2. Доведіть, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-1}{2n^2+1}=2.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^4+(1+n)^4}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n^3+5n}}{\sqrt{n}}$.

4. Обчисліть границі

а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\left(x^2+3x+2\right)^2}{x^3+2x^2-x-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{6+x-x^2}{x^3-27}$;

г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$;

е) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+7x-4}{x^5+2x-1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-3x+4}{3x^2-2x+1}$;

з) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$;

і) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$;

ї) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{3x}$;

к) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 5x}{2x^2}$.

5. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$:

$$\alpha(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+3x}};$$

$$\beta(x)=\frac{1}{\sqrt{x^3-2x}}\quad(x\to+\infty).$$

6. Доведіть, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ при $x\to0$ є нескінченно малими одного порядку малості $f(x)=\operatorname{arctg}^2 3x$, $\varphi(x)=4x^2$.

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x\to0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{1/x}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{\arcsin x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 7x}{\operatorname{tg}2x}$.

9. Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1,\\ x^2+1, & -1<x\le 1,\\ -x+3, & x>1.\end{cases}$$

10. Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x)=\frac{(x+7)}{(x-2)};\ x_1=2,\ x_2=3.$$

11. Знайдіть похідну функцій:

а) $y=\dfrac{\sqrt{3x^3-2x^2+1}}{x^2}$;

б) $y=(\arccos x)^{\frac{1}{x}}$;

в) $\begin{cases} x=a\,\mathrm{ch}\,t, \\ y=b\,\mathrm{sh}\,t,\end{cases}\quad -\infty<t<0$.

12. Знайдіть y' і y'':

а) $y=x+\mathrm{arctg}\,y$;

б) $\begin{cases} x=6\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t.\end{cases}$

13. Для даної функції y і аргументу x_0 обчисліть $y'''(x_0)$: $y=\ln\left(2+x^2\right),\ x_0=0.$

14. Запишіть формулу для похідної n-го порядку функції

$$y=2^x.$$

15. Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,x-x}{x-\sin x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\ln(x-1)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$.

16. Запишіть рівняння дотичної до кривої $y=\sqrt{x-4}$ у точці з абсцисою $x=8$.

17. Складіть рівняння дотичних до лінії $y=x-\dfrac{1}{x}$ у точках її перетину з віссю Ox.

18. Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а) $y=exe^{-x}$;

б) $y=x+\ln(x^2-4)$.

в) $y=\dfrac{2(x+1)^2}{x-2}$.

19. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y=\dfrac{(2x-1)}{(x-1)^2}$ на відрізку $\left[-\dfrac{1}{2};0\right]$.

Варіант 4

1. Знайдіть область визначення

$$y=\sqrt[4]{x^2-3x+2}+\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-5}{3n+1}=\frac{2}{3}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3}$;

б)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n^2+1)(n^2-4)}-\sqrt{n^4-9}\right).$$

4. Обчисліть границі .

а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2+2x-16}{x^3-8}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-x^6}{x^2-2x+5}$;

ж) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+7}{3x^4-5x^2+10}$;

з) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$;

і) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{2-3x}$;

ї) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-1}{4x+1}\right)^{3x-1}$;

к) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{2\sin x}$.

5. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$:

$\alpha(x)=\sqrt{x}-2,\qquad \beta(x)=x^2-16$

$(x\to4)$.

6. Доведіть, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ при $x\to0$ є нескінченно малими одного порядку малості $f(x)=\sin3x,\ \varphi(x)=5x.$

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+4}{x^2-x-4}\right)^{x^2}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$;

б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2^{\sqrt{x+1}}-1}{\arcsin\sqrt[3]{x+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{x^3+27x}$.

9. Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ -(x-1)^2, & 0<x<2,\\ x-3, & x\ge 2.\end{cases}$$

10. Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x)=\frac{(x-5)}{(x+3)};\ x_1=-2,\ x_2=-3.$$

11. Знайдіть похідну функцій:

а) $y=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

б) $y=(\operatorname{sh}x)^{\operatorname{sh}x}$;

в) $\begin{cases}x=2^{-t},\\ y=2^{2t},\end{cases}\quad t\in R.$

12. Знайдіть y' і y'':

а) $\operatorname{arctg}y=4x+5y.$

б) $\begin{cases}x=\dfrac{1}{(t+2)},\\ y=\left(\dfrac{t}{t+2}\right)^2.\end{cases}$

13. Для даної функції y і аргументу $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$; обчисліть $y'''(x_0)$:

$y=e^x\cos x,\ x_0=0.$

14. Запишіть формулу для похідної n-го порядку функції

$$y=\cos x.$$

15. Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-4\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)}{1-x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\dfrac{x^2}{2}-x-1}{\cos x-\dfrac{x^2}{2}-1}$.

16. Запишіть рівняння дотичної до кривої $y=\sqrt{x+4}$ у точці з абсцисою $x=-3$.

17. Складіть рівняння нормалі до лінії $y=2-\sqrt{x}$ у точці її перетину з бісектрисою першого координатного кута.

18. Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а) $y=x+\dfrac{4}{x+2}$;

б) $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$; в) $y=x\ln^2 x.$

19. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y=(x+2)e^{1-x}$ на відрізку $[-2;2]$.

Варіант 5

1. Знайдіть область визначення

$$y=\sqrt{\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^3-1}{3n^3+1}=\frac{7}{3}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)^2-(n+2)^3+(n-1)^2}{(4-n)^3};$$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{n\left(n^4-1\right)}-\sqrt{n^5-8}\right)$.

4. Обчисліть границі .

а) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\left(x^2+2x-3\right)^2}{x^3+4x^2-9}$;

б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$;

в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-7x+6}{x^2-5x+6}$;

г) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4-x^2+x+1}{x^4-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-1}{3x^4+2x+5}$;

ж) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2-x}$;

з) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$;

і) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$;

ї) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+8}{x-2}\right)^{x+4}$;

к) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{3x^2}$.

5. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$:

$\alpha(x)=x^3+x-2$; $\beta(x)=x-1$ $(x\to1)$.

6. Доведіть, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ при $x\to0$ є нескінченно малими одного порядку малості $f(x)=\cos3x-\cos x$, $\varphi(x)=7x^2$.

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{\frac{x+3}{x^2-5}}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(e^{1/x}-1\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}6x}{2x^2-3x}$.

9. Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x)=\begin{cases}-2(x+1), & x\le -1,\\ (x+1)^3, & -1<x<0,\\ x, & x\ge 0.\end{cases}$$

10. Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$f(x)=4^{\frac{1}{3-x}}$; $x_1=2,\ x_2=3.$

11. Знайдіть похідну функцій:

а) $y=\mathrm{th}\left(\ln 3x+1\right)$,

б) $y=\arccos\sqrt[x]{\sin x}$;

в) $\begin{cases}x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}},\\ y=\sqrt{1+\sqrt{t}},\end{cases}\quad t\in\left(1,\infty\right).$

12. Знайдіть y' і y'':

а) $y^2=25x-4.$

б) $\begin{cases}x=e^{-2t},\\ y=e^{4t}.\end{cases}$

13. Для даної функції y і аргументу x_0 обчисліть $y'''\left(x_0\right)$: $y=e^x\sin 2x,\ x_0=0.$

14. Запишіть формулу для похідної $x=2$-го порядку функції

$$y=\sin x.$$

15. Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{a}\mathrm{ctg}(x-a)$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2\left(1-\sqrt{x}\right)}-\dfrac{1}{3\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\mathrm{tg}\,x}-1}{\mathrm{tg}\,x-x}$.

16. Запишіть рівняння дотичної до кривої $y=x^3-2x^2+4x-7$ у точці $(2,1)$.

17. Складіть рівняння тієї нормалі до лінії $y=x\ln x$, що паралельна прямій $2x-2y+3=0$.

18. Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а) $y=\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{2}{x^2}$;

б) $y=\dfrac{4x-x^2-4}{x}$;

в) $y=\dfrac{4e^{x^2}-1}{e^{x^2}}$.

19. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y=\ln(x^2+2x+4)e^{1-x}$ на відрізку $\left[-1;\dfrac{3}{2}\right]$.

Варіант 6

1. Знайдіть область визначення

$$y=\sqrt{\log_2\log_3|x-2|}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+1}{3n^2+2}=\frac{4}{3}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+n)^3-(1+n)^2}{(1+n)^3+(n-1)^3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n^2+1)(n^2-4)}-\sqrt{n^4-9}\right)$.

4. Обчисліть границі .

а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^3-2x-1)^2}{x^4+2x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{12+x-x^2}{x^3-27}$;

г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-3x-1}{x^4-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$;

е) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x+1}{3x^2+2x-5}$;

з) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$;

і) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{-5x}$;

ї) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+1}{3x-1}\right)^{2x+1}$;

к) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin5x}{\sin3x}$.

5. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$:

$\alpha(x)=\sin\left(\sqrt{x}-2\right)$;

$\beta(x)=x-4\quad(x\to4)$.

6. Доведіть, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ при $x\to0$ є нескінченно малими одного порядку малості $f(x)=x^2-\cos2x,\ \varphi(x)=6x^2$.

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tg^2x}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg}x}$;

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-2x}}{\operatorname{tg}x}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin3x}{2x}$.

9. Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 2,\\ x+1, & x>2.\end{cases}$$

10. Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$f(x)=9^{\frac{1}{2-x}}$; $x_1=0,\ x_2=2.$

11. Знайдіть похідну функцій:

а) $y=x\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$;

б) $y=\left(\operatorname{arctg}x\right)^{x^2}$;

в) $\begin{cases}x=\ln\sin\dfrac{t}{2}, & 0<t<\pi.\\ y=\ln\sin t,\end{cases}$

12. Знайдіть y' і y'':

а) $\operatorname{arcctg}y=4x+5y.$

б) $\begin{cases}x=\sqrt{t},\\ y=\sqrt[5]{t}.\end{cases}$

13. Для даної функції y і аргументу x_0 обчисліть $y'''\left(x_0\right)$: $y=e^x\cos x,\ x_0=0.$

14. Запишіть формулу для похідної $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$; -го порядку функції

$$y=\frac{1}{x+5}.$$

15. Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\pi-2\operatorname{arctg}x\right)\ln x;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x};$

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-x)+\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\pi x}.$

16. Запишіть рівняння дотичної до кривої $y=x^3-5x^2+7x-2$ у точці $(1,1)$.

17. Під яким кутом графік функції $y=e^{\frac{x}{2}}$ перетинає пряму $x=2$?

18. Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а) $y=x-\ln x$;

б) $y=\dfrac{x^2}{4x^2-1}$;

в) $y=x^2e^{-\frac{x^2}{2}}$.

19. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y=\dfrac{x^3}{x^2-x+1}$ на відрізку $\left[-1;1\right]$.

Варіант 7

1. Знайдіть область визначення

$$y=\sqrt{\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-1}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9-n^3}{2n^3+1}=\frac{9}{2}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\sqrt[3]{4-n^3}\right)$.

4. Обчисліть границі

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^5+x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{5x^2+3x-26}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$;

е) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^6-5x^2+2}{2x^3+4x-5}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^4+3x^2-9}$;

з) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$;

і) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$;

ї) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{4x}$;

к) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

5. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$:

$\alpha(x)=\operatorname{tg}\left(x^3+x\right)$; $\beta(x)=x$ $(x\to 0)$.

6. Доведіть, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ при $x\to 0$ є нескінченно малими одного порядку малості $f(x)=\sqrt{1+x}-1$, $\varphi(x)=2x$.

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x\to 1}(1-x)^{\sin\pi x}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\operatorname{tg}\sqrt{x}-2\sin x}{x+x^2+\operatorname{tg}x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(xe^{1/x}-x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\operatorname{arctg}2x}$.

9. Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1,\\ 2x, & 1<x\le 3,\\ x+2, & x>3.\end{cases}$$

10. Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$f(x)=2^{\frac{1}{x-5}}+1;\ x_1=4,\ x_2=5.$

11. Знайдіть похідну функцій:

а) $y=\mathrm{ch}^2\left(x^2+x\sqrt{x}+3\right)$,

б) $y=\left(\cos x\right)^{\sin x}$;

в) $\begin{cases} x=t^2+6t+5,\\ y=\dfrac{t^3-54}{t}, \end{cases}\quad t\in\left(0,\infty\right).$

12. Знайдіть y' і y'':

а) $y^2-x=\cos y.$

б) $\begin{cases} x=\dfrac{2t}{1+t^3},\\ y=\dfrac{t^2}{1+t^2}. \end{cases}$

13. Для даної функції y і аргументу x_0 обчисліть $y'''\left(x_0\right)$: $y=\sin 2x,\ x_0=\pi.$

14. Запишіть формулу для похідної n-го порядку функції

$y=e^{-2x}.$

15. Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)x;$

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\mathrm{ctg}\,x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right);$

в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x\ln(x-a)}{\ln\left(e^x-e^a\right)}.$

16. Запишіть рівняння дотичної до кривої $x^2-y^2+xy-11=0$ у точці (3, 2).

17. Знайдіть кути, під якими перетинаються криві $y=2-x^2$ і $y=x^3$.

18. Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а) $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$;

б) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

в) $y=xe^{\frac{1}{x}}$.

19. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^3$ на відрізку $\left[1;2\right]$.

Варіант 8

1. Знайдіть область визначення

$$y=\sqrt{\log_{0,3}\frac{x-1}{x+5}}\ .$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3}{2n^2+1}=2\ .$$

3. Обчисліть границю послідовності

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-4n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n+3}\right)$.

4. Обчисліть границі

а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1-x)}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^4-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+5x^2-4x}{3x^2+11x-7}$;

ж) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-4x+2}{4x^3+2x-5}$;

з) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$;

і) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{1-x^3}$;

ї) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{5x}$;

к) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\pi-2x}$.

5. Порівняйте нескінченно малі функції $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$; і $\beta(x)$:

$\alpha(x)=\left(x^3+2\right)^{-1}$;

$\beta(x)=\left(x^{10}-15\right)^{-1/3}\quad(x\to\infty)$.

6. Доведіть, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ при $x\to0$ є нескінченно малими одного порядку малості $f(x)=\sin x+\sin 5x,\ \varphi(x)=2x.$

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x\to2}\left(\operatorname{ctg}\pi x\right)^{2-x}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos x}}{x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}$.

9. Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1,\\ 2x, & 1<x\le 3,\\ x+2, & x>3.\end{cases}$$

10. Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$f(x)=5^{\frac{1}{x-4}}-2;\ x_1=3,\ x_2=4.$

11. Знайдіть похідну функцій:

а) $y=\sin\cos^2 x$; б) $y=x^{x^x}$;

в) $\begin{cases} x=e^{-t}, \\ y=t^3, \end{cases}\quad t\in R.$

12. Знайдіть y' і y'':

а) $3x+\sin y=5y.$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{9x}-3}{\sqrt{3-x}-\sqrt{2x}}$;

13. Для даної функції y і аргументу x_0 обчисліть $y'''(x_0)$: $y=(2x+1)^5,\ x_0=1.$

14. Запишіть формулу для похідної n-го порядку функції $y=\ln(3+x).$

15. Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to \pi}(\pi-x)\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\ln(1-x)}.$

16. У якій точці кривої $y^2=4x^3$ дотична перпендикулярна до прямої $x+3y-1=0$?

17. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^3+2x^2-x-2$ у точці $x=1$.

18. Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а) $y=\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^4}$;

б) $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$;

в) $y=\dfrac{2+x}{(x+1)^2}.$

19. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y=\sqrt{x-x^3}$ на відрізку $[-2;-1]$.

Варіант 9

1. Знайдіть область визначення

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)};\ .$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-2n^2}{4n^2+2}=-\frac{1}{2}\ .$$

3. Обчисліть границю послідовності

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^3}{(1+n)^2-(1+n)^3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+2}-\sqrt{n^2+2n-3}\right)$.

4. Обчисліть границі

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}{x^2+x}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$;

е) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{7x^2+5x+9}{1+4x-x^3}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+2x}{x^2+7x+1}$;

з) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$;

і) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$;

ї) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x+3}{2x-4}\right)^{x+2}$;

к) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\sin 2x}{x^2}$.

5. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$:

$\alpha(x)=\sin\left(x-\sqrt{x}\right)$;

$\beta(x)=2\sqrt{x}\quad(x\to 0)$.

6. Доведіть, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ при $x\to 0$ є нескінченно малими одного порядку малості

$$f(x)=\frac{3x}{1-x},\ \varphi(x)=\frac{x}{4+x}.$$

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x\to 0}(\cos\pi x)^{\frac{1}{x\sin\pi x}}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x}{\operatorname{tg}\sqrt{x}+x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(\operatorname{tg}x-x)}{\ln(1+\sin x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\operatorname{tg}3x}$.

9. Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le 0,\\ 0, & 0<x\le 2,\\ x-2, & x>2.\end{cases}$$

10. Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$f(x)=6^{\frac{1}{x-3}}+3;\ x_1=3,\ x_2=4.$

11. Знайдіть похідну функцій:

а) $y=x\arcsin\ln x$;

б) $y=(\sin x)^{\arcsin x}$;

в) $\begin{cases}x=2t-1,\\ y=t^3,\end{cases}\quad t\in R.$

12. Знайдіть y' і y'':

а) $\operatorname{tg}y=3x+5y.$

б) $\begin{cases}x=4t+2t^2,\\ y=5t^3-3t^2.\end{cases}$

13. Для даної функції y і аргументу x_0 обчисліть $y'''(x_0)$: $y=\ln(1+x),\ x_0=2.$

14. Запишіть формулу для похідної n-го порядку функції

$$y=\sqrt{x}.$$

15. Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(e^{x^2}-1\right)}{\cos x-1}$.

16. Запишіть рівняння дотичної до кривої $y=x^2-6x+2$ у точці з абсцисою $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$;.

17. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^2+e^{2x}$ у точці $x=0$.

18. Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а) $y=\dfrac{x^2}{x-2}$;

б) $y=\ln\left(x^2+1\right)$;

в) $y=x^2e^{\frac{1}{x}}$.

19. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y=4-e^{-x^2}$ на відрізку $[0;1]$.

Варіант 10

1. Знайдіть область визначення

$$y=\sqrt{5-x-\frac{6}{x}}\ .$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-1}{2n^3+1}=\frac{3}{2}\ .$$

3. Обчисліть границю послідовності

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3-5}\right)n\sqrt{n}$.

4. Обчисліть границі

а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{2x^2+7x-4}{x^3+64}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^2+3x+1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-7x+5}{4x^5-3x^3+2}$;

з) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$;

і) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x}\right)^{2x+1}$;

ї) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x-1}\right)^{x-1}$;

к) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\,tg\,x}$.

5. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$:

$\alpha(x)=\arcsin\left(2-\sqrt{x}\right)$;

$\beta(x)=4-x\quad(x\to4)$.

6. Доведіть, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ при $x\to0$ є нескінченно малими одного порядку малості

$$f(x)=\frac{3x^2}{2+x},\ \varphi(x)=7x^2.$$

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{xe^x+1}{x\pi^x+1}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}$;

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$.

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-5x+6}$.

9. Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x)=\begin{cases}2x^2, & x\le 0,\\ x, & 0<x\le 1,\\ 2+x, & x>1.\end{cases}$$

10. Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$f(x)=7^{\frac{1}{5-x}}+1;\ x_1=4,\ x_2=5.$

11. Знайдіть похідну функцій:

а) $y=\mathrm{chtg}\sqrt{\sin x}$;

б) $y=(\mathrm{ch}\,3x)^{\mathrm{sh}\,x}$;

в) $\begin{cases}x=\arccos t,\\ y=\arcsin t^2,\end{cases}\quad t\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

12. Знайдіть y' і y'':

а) $xy=ctg\,y.$

б) $\begin{cases}x=\dfrac{\ln t}{t},\\ y=t\ln t.\end{cases}$

13. Для даної функції y і аргументу x_0 обчисліть $y'''(x_0)$: $y=\dfrac{1}{2}x^2e^x,\ x_0=0.$

14. Запишіть формулу для похідної n-го порядку функції

$$y=xe^{3x}.$$

15. Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x-x}{2\sin x+x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2a}}\dfrac{1-\sin\alpha x}{(2ax-\pi)^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-\cos\alpha x}{e^{\beta x}-\cos\beta x}$.

16. Запишіть рівняння дотичної до кривої $y=\dfrac{x^3}{9-x^3}$ у точці з абсцисою $x=4$.

17. Знайдіть кути, під якими перетинаються криві $y=(2-x)^2$ і $y=-x^2+4x+4$.

18. Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а) $y=\dfrac{x}{9-x}$;

б) $y=\dfrac{x^3}{x^2-x+1}$;

в) $y=xe^x$.

19. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$ на відрізку $[1;2]$.

Варіант 11

1. Знайдіть область визначення

$$y=\frac{\sqrt{4x-x^2}}{\log_3|x-4|}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{1-2n^2}=-\frac{1}{2}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(1+n)^3-(n-2)^3}{n^3+2n-3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{8n^3+5}-2n\right)n$.

4. Обчисліть границі

а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$;

г) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{4x^2+19x-5}{2x^2+11x+5}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5x-7}{2x^2-x+10}$;

е) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+5x+7}{3x^4-2x^2+x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^5+6x^4-x^3}{2x^2+6x+1}$;

з) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$;

і) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$;

ї) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-3}{x+4}\right)^{x+3}$;

к) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

5. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$:

$\alpha(x)=e^x-1$; $\beta(x)=x^2$ $(x\to0)$.

6. Доведіть, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ при $x\to0$ є нескінченно малими одного порядку малості

$$f(x)=2x^3,\ \varphi(x)=\frac{5x^3}{4-x}.$$

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x\to0}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)^{\operatorname{ctg}x}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3x}{\sin x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^{\sqrt{x}}-csx}{\sin\sqrt{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos3x-\cos x}{2x^2}$.

9. Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x, & 0\le x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

10. Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x)=\frac{x-3}{x+4};\quad x_1=-5,\ x_2=-4.$$

11. Знайдіть похідну функцій:

а) $y=\sqrt{\cos x}\,2^{\sqrt{\cos x}}$;

б) $y=(\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

в) $\begin{cases}x=t\ln t,\\ y=\dfrac{\ln t}{t},\end{cases}\quad t\in(0,\infty).$

12. Знайдіть y' і y'':

а) $y=e^y+4x$;

б) $\begin{cases}x=e^t\cos t,\\ y=e^t\sin t.\end{cases}$

13. Для даної функції y і аргументу x_0 обчисліть $y'''(x_0)$: $y=\arcsin x,\ x_0=0.$

14. Запишіть формулу для похідної n-го порядку функції

$x_1=-1$

15. Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\operatorname{arctg}x^2-\pi}$;

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$.

16. Запишіть рівняння дотичної до кривої $y=\dfrac{x^2}{4}-27x+60$ у точці з абсцисою $x=2$.

17. Знайдіть коефіцієнти b і c в рівнянні параболи $y=x^2+bx+c$, якщо відомо, що вона дотикається до прямої $y=x$ у точці $M_0(1;1)$.

18. Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а) $y=x+\operatorname{arctg}2x$;

б) $y=x^2-2\ln x$;

в) $y=\dfrac{x^3}{x^2-x+1}$.

19. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y=xe^x$ на відрізку $[-2;0]$.

Варіант 12

1. Знайдіть область визначення

$$y=\sqrt{\log^2{}_3(x-3)-1}\ .$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+1}{3n^3-5}=\frac{2}{3}\ .$$

3. Обчисліть границю послідовності

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+n)^3+(2+n)^3}{(3+n)^3+(4+n)^3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt[3]{3+n^3}\right)$.

4. Обчисліть границі

а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-x^2-3x-3}{x^3-x^2-x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x-2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x+1}{x^4-x^3+2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2-7x}{2x^2+7x-3}$;

ж) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4-3x-2x^2}{3x^4+5x}$;

з) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}x}$;

і) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$;

ї) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-3}{7x+4}\right)^{x}$;

к) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x-\sin^2 x}{x^2}$.

5. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$:

$\alpha(x)=\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$;

$\beta(x)=1+\sqrt[3]{x-1}\quad(x\to0)$.

6. Доведіть, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ при $x\to0$ є нескінченно малими одного порядку малості

$$f(x)=\frac{x^2}{5+x},\ \varphi(x)=\frac{4x^2}{x-1}.$$

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x\to0}\left(1-x^2\sin x\right)^{1/\ln(1+3x)}\ .$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3 x}{\operatorname{arctg}x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2^{x-1}-1}{x^2-3x+2}$.

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 4x}{\operatorname{tg}5x}$.

9. Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi,\\ 2, & x\ge\pi.\end{cases}$$

10. Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$f(x)=\dfrac{x+5}{x-2}$; $x_1=3,\ x_2=2.$

11. Знайдіть похідну функцій:

а) $y=2\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{ctg}\dfrac{1}{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+3x+5}{4x^3-2x^2+1}$;

в) $\begin{cases}x=\dfrac{1}{t+1},\\ y=\left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2,\end{cases}\quad t\ne-1.$

12. Знайдіть y' і y'':

а) $\ln y-\dfrac{y}{x}=7$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$;

13. Для даної функції y і аргументу x_0 обчисліть $y'''(x_0)$: $y=(5x-4)^5$, $x_0=2$.

14. Запишіть формулу для похідної n-го порядку функції $y=\ln(5+x^2)$.

15. Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$;

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{a}{6x}$.

16. Запишіть рівняння дотичної до кривої $y=-\dfrac{x^2}{2}+7x-\dfrac{15}{2}$ у точці з абсцисою $x=3$.

17. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=e^{1-x^2}$ у точці $x=-1$.

18. Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а) $y=\dfrac{\ln x}{x}$; б) $y=x^3e^{-\frac{x^2}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}$;

19. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y=(x-2)e^x$ на відрізку $[-2;1]$.

Варіант 13

1. Знайдіть область визначення

$$y=\sqrt{\frac{x^2-1}{(x-4)(x+3)}-1}\ .$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-2n^2}{n^2+3}=-2\ .$$

3. Обчисліть границю послідовності

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3+n)^3+(4+n)^3}{(2+n)^4-(1+n)^4}$;

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$; .

4. Обчисліть границі

а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$;

г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-7x+5}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$;

е) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{5x^3-3x^2+7}{2x^4+3x^2+1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7-3x^4}{2x^3+3x^2-5}$;

з) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$;

і) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$;

ї) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x-5}{3x+4}\right)^{2x}$;

к) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 7x+\sin 3x}{x\sin x}\right)$.

5. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$:

$\alpha(x)=\sqrt[3]{x}-3$; $\beta(x)=27-x$ $(x\to27)$.

6. Доведіть, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ при $x\to0$ є нескінченно малими одного порядку малості

$f(x)=\sin 8x,\ \varphi(x)=\arcsin 5x.$

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x\to0}\left(\cos x+\operatorname{arctg}^2 x\right)^{1/\operatorname{arctg}x}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin^2(x-1)}{x^2-3x+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{\ln(1+2x)}$.

9. Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x<2,\\ 2x, & x\ge 2.\end{cases}$$

10. Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x)=5^{\frac{1}{x-4}}-2;\ x_1=3,\ x_2=4.$$

8. Знайдіть похідну функцій:

а) $y=\dfrac{\arccos 7x}{\sqrt{1-x}}$;

б) $y=(\cos x)^{\frac{1}{x}}$;

в) $\begin{cases} x=a\cos t,\\ y=b\sin t,\end{cases}\quad t\in(0,\pi).$

12. Знайдіть y' і y'':

а) $y^2+x^2=\sin y.$

б) $\begin{cases} x=5\cos t,\\ y=4\sin t.\end{cases}$

13. Для даної функції y і аргументу x_0 обчисліть $y'''(x_0)$: $y=x\sin x,\ x_0=\dfrac{\pi}{2}.$

14. Запишіть формулу для похідної $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^3+x^2}}$;-го порядку функції

$$y=e^{4x}.$$

15. Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{c^x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg}4x-12\operatorname{tg}x}{3\sin 4x-12\sin x}$.

16. Запишіть рівняння нормалі до кривої $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}-2\operatorname{tg}x}{1+\cos 4x}$; у точці з абсцисою $x=\dfrac{\pi}{2}$.

17. Під яким кутом графік функції $y=e^{\frac{x^2}{2}}$ перетинає пряму $x=2$?

18. Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а) $y=x+2\sqrt{-x}$;

б) $y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)$;

19. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y=(x-1)e^{-x}$ на відрізку $[0;3]$.

Варіант 14

1. Знайдіть область визначення

$$y = \lg \log_2 \frac{x-1}{x^3-8}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{2-n^2} = -3.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(1-n)^3+(1+n)^3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{(n+1)^3}-\sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$.

4. Обчисліть границі

а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$;

в) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{2x^2-9x+10}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+5x-7}{3x^2+x+1}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-3x+1}{1+2x-x^4}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^4+7x^{3-3}}{3x^2-5x+1}$;

з) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;

і) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x-5}$;

ї) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{4x-5}\right)^{2x}$;

к) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 5x}{2x^2}$.

5. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$:

$$\alpha(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}; \qquad \beta(x) = \frac{x-4}{x+4}$$

$(x \to 4)$.

6. Доведіть, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ при $x \to 0$ є нескінченно малими одного порядку малості

$f(x) = \sin 3x + \sin x,\ \varphi(x) = 10x.$

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x\to 4\pi} (\cos x)^{5/\operatorname{tg} 5x \sin 2x}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{\operatorname{tg} 5x}$.

9. Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0,\\ x^2-1, & 0\le x<1,\\ -x, & x\ge 1.\end{cases}$$

10. Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$f(x)=4^{\frac{2}{x-1}}-3;\ x_1=1,\ x_2=2.$

11. Знайдіть похідну функцій:

а) $y=\ln\left(x+\sqrt{4x+x^2}\right)$;

б) $y=x^{\sin^2 x}$;

в) $\begin{cases} x=\operatorname{tg} t,\\ y=\sin 2t+2\cos t,\end{cases}$

$t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

12. Знайдіть y' і y'':

а) $e^y=4x-7y.$

б) $\begin{cases} x=5\cos^2 t,\\ y=3\sin^2 t.\end{cases}$

13. Для даної функції y і аргументу x_0 обчисліть $y'''(x_0)$: $y=x^2\ln x,\ x_0=\dfrac{1}{3}.$

14. Запишіть формулу для похідної n-го порядку функції $y=\dfrac{1}{x-7}$.

15. Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x-1}$.

16. Запишіть рівняння дотичної до кривої $y=4\operatorname{tg}3x$ у точці з абсцисою $x=\dfrac{\pi}{9}$.

17. Доведіть, що дотичні до гіперболи $y=\dfrac{x-4}{x-2}$ у точках її перетину з осями координат паралельні.

18. Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а) $y=\dfrac{3-x^2}{x+2}$; б) $y=\dfrac{(x-2)^2}{x+1}$;

в) $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

19. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y=\dfrac{x}{9-x^2}$ на відрізку $[-2;2]$.

Варіант 15

1. Знайдіть область визначення

$$y=\log_2\frac{(x-2)(x-3)}{x^5}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3n^2-1}=\frac{1}{3}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^3-2n}{(1+n)^4-(1-n)^4}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-3}\right)$.

4. Обчисліть границі $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

а) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$;

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{9x}-3}{\sqrt{3-x}-\sqrt{2x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$;

г) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{9x^2+17x-2}{x^2+2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-2}{3x^3-x-4}$;

е) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{3x^2-4x+1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+7}{2-3x+4x^2}$;

з) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$;

і) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x}$;

ї) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x-2}{3x+1}\right)^{5x}$;

к) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos2x-\cos4x}{3x^2}$.

5. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$:

$\alpha(x)=x\sin\sqrt{x}$; $\beta(x)=\sqrt{x^3}$ $(x\to0)$.

6. Доведіть, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ при $x\to0$ є нескінченно малими одного порядку малості

$f(x)=\cos7x-\cos x,\ \varphi(x)=2x^2$.

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x\to3}\left(\frac{9-2x}{3}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{8}}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x}{\operatorname{tg}\pi(x+2)}$;

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{x+1}-3}{\ln\left(1+x\sqrt{1+xe^x}\right)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 2x}$.

9. Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x^2+1, & 0\le x<2,\\ x+1, & x\ge 2.\end{cases}$$

10. Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$f(x)=2^{\frac{5}{1-x}}-1;\ x_1=0,\ x_2=1.$

11. Знайдіть похідну функцій:

а) $y=e^{-x}\operatorname{sh} ax$; б) $y=\sqrt{x^x}$;

в) $\begin{cases}x=t^3+2,\\ y=0{,}5t^2,\end{cases}\quad t\in R.$

12. Знайдіть y' і y'':

а) $4\sin^2(x+y)=x.$

б) $\begin{cases}x=\operatorname{arctg} t,\\ y=\ln\left(1+t^2\right).\end{cases}$

13. Для даної функції y і аргументу x_0 обчисліть $y'''(x_0)$: $y=x\sin 2x,\ x_0=-\dfrac{\pi}{4}.$

14. Запишіть формулу для похідної n-го порядку функції

$y=5^x.$

15. Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{ctg\,\pi x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(e^x+1\right)-2(e^x-1)}{x^3}$.

16. Запишіть рівняння нормалі до кривої $y=6\operatorname{tg}5x$ у точці з абсцисою $x=\dfrac{\pi}{20}$.

17. У якій точці кривої $y=2x^2$ дотична перпендикулярна до прямої $4x-3y+2=0$?

18. Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а) $y=x^2e^{-x}$;

б) $y=-\ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

в) $y=\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2$.

19. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y=\dfrac{(1+\ln x)}{x}$ на відрізку $[\frac{1}{e};e]$.

Варіант 16

1. Знайдіть область визначення

$$y = \lg \frac{(x-5)(x-3)}{x^2 - 6x + 18}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3}{n^3 - 1} = 3.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а) $y = \dfrac{1}{x}$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3}\right)\sqrt{n}$.

4. Обчисліть границі .

а) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 - 3x^2 + 4}$;

б) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{4x^2 + 7x - 2}{3x^2 + 8x + 4}$;

г) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$;

д) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{18x^2 + 5x}{8 - 3x - 9x^2}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2 - 5x + 2}{4x^3 + 2x - 1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3 - 3x + 1}{7x + 5}$;

з) $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2}$;

і) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{3x-1}$;

ї) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{3x-4}{x+6}\right)^{x-1}$;

к) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}$.

5. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$:

$\alpha(x) = x - \sin x$; $\beta(x) = x$ $(x \to 0)$.

6. Доведіть, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ при $x \to 0$ є нескінченно малими одного порядку малості

$f(x) = 1 - \cos 2x$, $\varphi(x) = 8x^2$.

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x\to0} (\cos x)^{1/x}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1 - \sin\frac{x}{2}}{\pi - x}$;

б) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{3^{5x-3} - 3^{2x^2}}{\operatorname{tg} \pi x}$;

в) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{tg(x+2)}{x^2 - 4}$.

9. Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 0,\\ 1, & 0<x\le 2,\\ x^2-2, & x>2.\end{cases}$$

10. Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x)=8^{\frac{4}{x-2}}-1;\ x_1=2,\ x_2=3.$$

11. Знайдіть похідну функцій:

а) $y=\arccos\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}$;

б) $y=\left(\cos 2x\right)^{\sin 3x}$;

в) $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^3\right), \\ y=t-\operatorname{arctg}t, \end{cases}$ $t>0.$

12. Знайдіть y' і y'':

а) $\sin y=7x+3y.$

б) $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

13. Для даної функції y і аргументу x_0 обчисліть $y'''\left(x_0\right)$: $y=x\cos 2x,\ x_0=\dfrac{\pi}{12}.$

14. Запишіть формулу для похідної n-го порядку функції

$$y=e^{-5x}.$$

15. Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$.

16. Запишіть рівняння дотичної до кривої $y=4\sin 6x$ у точці з абсцисою $x=\dfrac{\pi}{18}$.

17. Під яким кутом графік функції $y=x^2-4x+5$ перетинає пряму $x-y+1=0$?

18. Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а) $y=\dfrac{\left(x-1\right)^2}{x^2+1}$;

б) $y=\ln\left(x^2+1\right)$;

в) $y=\left(2x+3\right)e^{-2(x+1)}$.

19. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y=e^{4x-x^2}$ на відрізку $[1;3]$.

Варіант 17

1. Знайдіть область визначення

$$y=\sqrt[6]{\frac{x^2-6x+8}{x^4}}\ .$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4+2n^2}{1-3n^2}=-\frac{2}{3}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-3)^2-(n+1)^3}{(3n-1)^2+(3+2n)^3}$;

б)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^6+9n}-\sqrt{(n^4-1)(n^2+5)}}{n}.$$

4. Обчисліть границі

а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$;

б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt[3]{16x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-b^x}{x\sqrt{1-x^2}}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^3-2x^2+5x}{3x^2+7x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-3}$;

е) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{11x^3+3x}{2x^2-2x+1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x-7}{3x^4+2x^3+1}$;

з) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$;

і) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x}\right)^{-3x}$;

ї) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{3x+10}\right)^{3x}$;

к) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}3x-\sin3x}{2x^2}$.

5. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$: $\alpha(x)=x\sin(1/x)$; $\beta(x)=x$ $(x\to0)$.

6. Доведіть, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ при $x\to0$ є нескінченно малими одного порядку малості

$f(x)=3\sin^2 4x,\ \varphi(x)=x^2-x^4.$

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin4x)^{1/x}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin\pi(x+7)}$;

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin7x}{x^2+\pi x}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x+2)}{x^3+8}$.

9. Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0,\\ \sin x, & 0\le x<\pi,\\ 3, & x\ge\pi.\end{cases}$$

10. Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$f(x)=5^{\frac{4}{3-x}}+1;\ x_1=2,\ x_2=3.$

11. Знайдіть похідну функцій:

а) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$;

б) $y=(\arccos 3x)^{2x}$;

в) $\begin{cases} x=\sqrt{1-\sqrt[3]{t}},\\ y=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}},\end{cases}\quad 0<t<1.$

12. Знайдіть y' і y'':

а) $\operatorname{tg} y=4y-5x.$

б) $\begin{cases} x=3(t-\sin t),\\ y=3(1-\cos t).\end{cases}$

13. Для даної функції y і аргументу x_0 обчисліть $y'''(x_0)$: $y=x^4\ln x,\ x_0=1.$

14. Запишіть формулу для похідної n-го порядку функції

$$y=\ln(4+x).$$

15. Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} x-1}{1-\cos x}$;

б) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{x^n-a^n}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$.

16. З'ясуйте, у яких точках кривої $y=\sin 2x$ дотична утворює з віссю Ox кут $\dfrac{\pi}{4}$.

17. Доведіть, що нормалі до лінії $y=x^2-x+1$, проведені у точках з абсцисами $x_0=0$, $x_1=-1, x_2=\dfrac{5}{2}$, перетинаються в одній точці.

18. Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а) $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$;

б) $y=\dfrac{x^2+6}{x^2+1}$;

в) $y=(x+1)e^{2x}$.

19. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y=\dfrac{x^5-8}{x^4}$ на відрізку $[-3;-1]$.

Варіант 18

1. Знайдіть область визначення

$$y=(x+5)\sqrt[4]{\frac{8+x^3}{8-x^3}}\ .$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3+15}{6-2n^3}=-\frac{5}{2}\ .$$

3. Обчисліть границю послідовності

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+10)^2+(3n+1)^2}{(n+3)^2-(n+1)^3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+5)}-n\right)$.

4. Обчисліть границі

а) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$;

б) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-4x-5}{3x^2+2x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^4-5x^2+1}{x^2-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+3x+5}{4x^3-2x^2+1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^4-3x^2}{1+2x+3x^2}$;

з) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$;

і) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$;

ї) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-3}{x+4}\right)^{6x+1}$;

к) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{\pi-4x}$.

5. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$:

$\alpha(x)=x^2\cos(1/x)$; $\beta(x)=x$ $(x\to0)$.

6. Доведіть, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ при $x\to0$ є нескінченно малими одного порядку малості

$f(x)=\mathrm{tg}\left(x^2+2x\right)$, $\varphi(x)=x^2+2x$.

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-\pi/2}}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\mathrm{tg}\,x}{\cos 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x}{tg\ 4x}$.

9. Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<-1,\\ x^2+1, & -1\le x\le 2,\\ 2x, & x>2.\end{cases}$$

10. Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x)=\frac{3x}{x-4};\ x_1=4,\ x_2=5.$$

11. Знайдіть похідну функцій:

а) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

б) $y=\left(\operatorname{arctg} x\right)^{x^{-3}}$;

в) $\begin{cases}x=e^t\cos t,\\ y=e^t\sin t,\end{cases}\quad t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right).$

12. Знайдіть y' і y'':

а) $y=7x-\operatorname{ctg} y.$

б) $\begin{cases}x=3\left(\sin t-t\cos t\right),\\ y=3\left(\cos t+t\sin t\right).\end{cases}$

13. Для даної функції y і аргументу x_0 обчисліть $y'''\left(x_0\right)$:

$y=x+\operatorname{arctg} x,\ x_0=1.$

14. Запишіть формулу для похідної n-го порядку функції

$$y=\frac{1}{x-6}.$$

15. Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{tg} x\right)^{\operatorname{tg} 2x}$.

16. З'ясуйте, у якій точці кривої $y=2x^3-1$ дотична утворює з віссю Ox кут $\dfrac{\pi}{3}$.

17. У якій точці кривої $y=\dfrac{x-1}{x+4}$ дотична перпендикулярна до прямої $y=x$?

18. Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а) $y=\left(x-5\right)x^{\frac{3}{2}}$;

б) $y=x\ln x$;

в) $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$.

19. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y=\dfrac{e^{2x}+1}{e^x}$ на відрізку $[-1;2]$.

Варіант 19

1. Знайдіть область визначення

$$y=\sqrt{x^2-4x+3}+\frac{1}{\sqrt{8+2x-x^2}}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3-n^2}{1+2n^2}=-\frac{1}{2}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3+(3n+2)^3}{(2n+3)^3-(n-1)^3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}\right)\sqrt{n^3+8}$.

4. Обчисліть границі

а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{\left(x^2-x-2\right)^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{\sqrt[3]{x^3+x^2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-5x-12}{x^2-5x+6}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$;

е) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^3+5x^2-3}{2x^2-x+7}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+3}{x^3-4x^2-x}$;

з) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$;

і) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x+1}\right)^{4x-2}$;

ї) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+3}{3x-1}\right)^{2x}$;

к) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos4x-\cos^3 4x}{3x^2}$.

5. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$:

$$\alpha(x)=\frac{\operatorname{arctg}x}{x};\qquad \beta(x)=\frac{1}{x-2}$$

$(x\to\infty)$.

6. Доведіть, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ при $x\to0$ є нескінченно малими одного порядку малості

$$f(x)=\arcsin\left(x^2-x\right),\ \varphi(x)=x^3-x.$$

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x\to0}\left(2-3^{\sin^2 x}\right)^{\frac{1}{\ln\cos x}}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin\pi(x+2)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{1-\sqrt{x^2+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{\operatorname{tg}\left(x-4\right)}$.

9. Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\le 0,\\ 2^x, & 0<x\le 2,\\ x+3, & x>2.\end{cases}$$

10. Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$; $x_1=1,\ x_2=2.$

11. Знайдіть похідну функцій:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln\left(2x-5\right)}{e^{\sin\pi x}-1}$;

б) $y=\left(\arccos x\right)^{\cos x}$;

в) $\begin{cases}x=e^t,\\ y=e^{2t},\end{cases}\quad t\in R.$

12. Знайдіть y' і y'':

а) $xy-6=\cos y.$

б) $\begin{cases}x=\sin 2t,\\ y=\cos^2 t.\end{cases}$

13. Для даної функції y і аргументу x_0 обчисліть $y'''\left(x_0\right)$: $y=\cos^2 x,\ x_0=\dfrac{\pi}{4}.$

14. Запишіть формулу для похідної n-го порядку функції $y=10^x$.

15. Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-2\operatorname{tg} x}{1+\cos 4x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\ln x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\cos ax\right)}{\ln\left(\cos bx\right)}$.

16. З'ясуйте, в якій точці кривої $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-7x+9$ дотична утворює з віссю Ox кут $-\pi/4$.

17. Доведіть, що лінія $y=2x^3+x^5+x+10$ в усіх своїх точках нахилена до осі Ox під гострим кутом.

18. Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а) $y=\dfrac{x^3}{9-x^3}$; б) $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$;

в) $y=\left(x-1\right)e^{3x+1}$;

19. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y=x\ln x$ на відрізку $[\dfrac{1}{e^2};1]$.

Варіант 20

1. Знайдіть область визначення

$$y=\sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x-4}}\ .$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2-3n}=-\frac{2}{3}\ .$$

3. Обчисліть границю послідовності

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n+2)^3}{(3n+2)^2+(4n+1)^2}$;

б)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n^3+1)(n^2+3)}-\sqrt{n(n^4+2)}}{\sqrt{n}}.$$

4. Обчисліть границі

а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[3]{x^2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3x^2-3x+2}{x^2-x-12}$;

г) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2-x-30}{x^3+125}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+2}{6x^2+5x+1}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-7}{x^4-2x^3+1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^4+5x}{2x^2-3x-7}$;

з) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$;

і) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{3-2x}$;

ї) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+5}{x-10}\right)^{5x}$;

к) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin 2x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}\ 2x}\right)$.

5. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$:

$\alpha(x)=\operatorname{arctg} x-\dfrac{\pi}{2}$; $\quad\beta(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x\to+\infty)$.

6. Доведіть, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ при $x\to0$ є нескінченно малими одного порядку малості

$f(x)=\sin 7x+\sin x,\ \varphi(x)=4x.$

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos 3x)^{\sec x}\ .$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а) $\lim\limits_{x\to2\pi}\dfrac{(x-2\pi)^2}{\operatorname{tg}(\cos x-1)}$;

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$.

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$.

9. Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x)=\begin{cases} -x+2, & x\le -2,\\ x^3, & -2<x\le 1,\\ 2, & x>1.\end{cases}$$

10. Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$f(x)=2^{\frac{3}{x+2}}+1;\ x_1=-2,\ x_2=-1.$

11. Знайдіть похідну функцій:

а) $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{th}3x)$;

б) $y=(\ln 3x)^{\operatorname{sh}x}$;

в) $\begin{cases} x=2(t-\sin t),\\ y=2(1-\cos t),\end{cases}\quad t\in R.$

12. Знайдіть y' і y'':

а) $3y=7+xy^3$; б) $\begin{cases} x=e^{3t},\\ y=e^{-3t}.\end{cases}$

13. Для даної функції y і аргументу x_0 обчисліть $y'''(x_0)$: $y=\ln(x^2-4)$, $x_0=3$.

14. Запишіть формулу для похідної n-го порядку функції $y=7^x$.

15. Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin x)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1}{2\sin^2 x-1}$.

16. Визначить, у яких точках кривої $y=\dfrac{x^3}{3}-5\dfrac{x^2}{2}+7x+4$ дотична утворює з віссю Ox кут $\pi/4$.

17. Складіть рівняння дотичної та нормалі до гіперболи $y=1/x$ у точці $x=-1/2$.

18. Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а) $y=\dfrac{2}{x^2+2x}$;

б) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$;

в) $y=\ln(x^2-2x+6)$.

19. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y=x^3e^{x+1}$ на відрізку $[-4;0]$.

Задачі економічного змісту

20.1–20.10. Деяка компанія визначила, що її функції прибутку і вартості є відповідно $R(x) = a\ln(x+1)$ і $C(x) = bx + c$, де x – ціна за одиницю продукції, що визначається у гривнях. Знайти таке значення x, що максимізує прибуток компанії $P(x) = R(x) - C(x)$. Чому дорівнює максимальний прибуток? При яких значеннях x прибуток зростає, а при яких спадає?

Для варіантів 1-10 дані наведені у таблиці 1.

Таблиця 1.

№ вар.	a	b	c	№ вар.	a	b	c
1	204	4	50	**6**	150	3	40
2	350	5	100	**7**	180	3	60
3	100	2	80	**8**	160	4	50
4	300	5	60	**9**	200	5	100
5	120	4	30	**10**	240	4	70

20.11–20.20. Деяка компанія підрахувала, що вартість виробництва x виробів визначається функцією $C(x) = ae^{\frac{x}{b}}$. Середня вартість визначена як $\overline{C}(x) = \dfrac{C(x)}{x}$. Знайти при якій кількості виробів середня вартість буде мінімальною. Чому дорівнює мінімальна середня вартість?

При якій кількості виробів середня вартість зростає, а при якій спадає?

Для варіантів 11-20 дані наведені в таблиці 2.

Таблиця 2.

№ вар.	a	b	№ вар.	a	b
11	20	5	**21**	45	15
13	40	10	**17**	40	8
14	35	7	**18**	30	5
15	30	6	**19**	15	3
16	25	10	**20**	20	7

21. Попит на кількість виробів описується функцією $f(p) = a - bp^2$, $0 < p < c$, де $p-$ ціна виробу. Знайти еластичність попиту $E(p)$. Для ціни $p = p_0$ визначити, чи є попит еластичним.

Таблиця 4.

№ варіанта	a	b	c	p_0
1	16	4	2	1
2	45	5	3	2
3	64	4	4	3
4	100	4	5	2
5	144	4	6	3
6	245	5	7	4
7	256	4	8	5
8	324	4	9	5
9	300	3	10	6
10	242	2	11	7
11	8	2	2	1
12	18	2	3	1
13	48	3	4	2
14	125	5	5	3
15	72	2	6	5
16	147	3	7	4
17	128	2	8	7
18	243	3	9	6
19	500	5	10	8
20	363	3	11	9

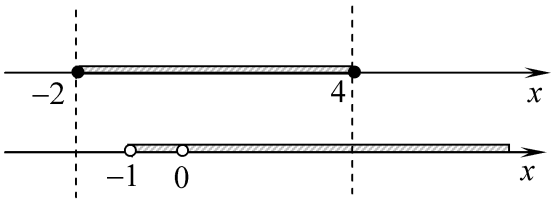
Приклад розв'язання варіанта Індивідуального завдання

1. Знайдіть область визначення функції $f(x)=\dfrac{\sqrt{8+2x-x^2}}{\ln(x+1)}$.

Розв'язання. Задана функція визначена для всіх значень x, що задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} 8+2x-x^2 \ge 0, \\ x+1>0, \\ \ln(x+1)\ne 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} (x+2)(x-4)\le 0, \\ x>-1, \\ x\ne 0. \end{cases}$$

Звідси дістанемо $x\in(-1;0)\cup(0;4]$ (див. рис.)



Відповідь: $x\in(-1;0)\cup(0;4]$.

2. Доведіть, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-5}{3n+1}=\dfrac{2}{3}$.

Розв'язання. Задамо довільне число $\varepsilon>0$ і розглянемо модуль різниці $\left|\dfrac{2n-5}{3n+1}-\dfrac{2}{3}\right|=\left|\dfrac{6n-15-6n-2}{3(3n+1)}\right|=\dfrac{17}{3(3n+1)}$.

Нерівність $\left|\dfrac{2n-5}{3n+1}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$ буде виконуватись, коли

$$\frac{17}{3(3n+1)}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\frac{1}{3}\left(\frac{17}{3}\varepsilon-1\right).$$

Виберемо $N=\left[\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{17}{3}\varepsilon-1\right)\right]$, де $[x]$ – ціла частина числа x. Отже, для $\forall\varepsilon>0$ існує такий номер $N=\left[\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{17}{3}\varepsilon-1\right)\right]$, що для усіх

$n > N$ виконується нерівність $\left|\frac{2n-5}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$, що і доводить твердження.

3. Обчисліть границю послідовності а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)^3 - (n+1)^3}{(2n+3)^2 + (4+n)^2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3}\right)\sqrt{n}$.

Розв'язання. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n-1)^3 - (n+2)^3}{(n+1)^2 + (n-2)^2}$. Розкриємо дужки у чисельнику та знаменнику дробу

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^3 - (n+2)^3}{(n+1)^2 + (n-2)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - 3n^2 + 3n - 1 - n^3 - 6n^2 - 12n - 8}{n^2 + 2n + 1 + n^2 - 4n + 4} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-9n^2 - 8n - 9}{2n^2 - 2n + 5}.$$

Коли $n \to \infty$ чисельник і знаменник дробу прямують до нескінченності, тобто маємо невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для її розкриття поділимо чисельник і знаменник на найвищий степінь n, а саме на n^2.

Маємо,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-9n^2 - 8n - 9}{2n^2 - 2n + 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{-9 - \frac{8}{n} - \frac{-9}{n^2}}{2 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}} = \frac{-9 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{8}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{9}{n^2}}{2 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{8}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2}} =$$

$$= \frac{-9 - 0 - 0}{2 - 0 + 0} = -\frac{9}{2}.$$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3}\right)\sqrt{n}$. Коли $n \to \infty$ у дужках маємо невизначеність типу $[\infty - \infty]$. Переведемо ірраціональність у знаменник, помноживши та поділивши на спряжений вираз $\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-3}\right)$. Одержимо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}\right)\sqrt{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-3}\right)\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+2-n+3\right)\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-3}}.$$

Поділимо чисельник і знаменник на найвищий степінь n, а саме на $\sqrt{n}$. Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{3}{n}}}=\frac{5}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{3}{n}}}=$$

$$=\frac{5}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{5}{2}.$$

Відповідь: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)^3-(n+2)^3}{(n+1)^2+(n-2)^2}=-\frac{9}{2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}\right)\sqrt{n}=\frac{5}{2}$.

4. Обчисліть границі

а) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$; б) $\lim\limits_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{x^2-81}$; в) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{2x^2+7x+3}{3x^2+8x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to-4}\frac{x^3+64}{7x^2+27x-4}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-2x+1}{3x^2+x-4}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+3x-4}{2x^2+x+1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7x+4}{3x-5x^2+1}$; з) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{\sqrt{5x+6}-4}$; і) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$;

ї) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+5}{3x-2}\right)^{2x}$; к) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{4x^2}$.

Розв'язання. а) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$. Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. Це означає, що число -3 є коренем

многочленів $x^3+7x^2+15x+9$ та $x^3+8x^2+21x+18$. Розкладемо їх на множники: $x^3+7x^2+15x+9=(x+3)^2(x+1)$

$x^3+8x^2+21x+18=(x+3)^2(x+2)$.

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)^2(x+1)}{(x+3)^2(x+2)}=\lim_{x\to-3}\frac{x+1}{x+2}=\frac{-3+1}{-3+2}=2;$$

б) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x^2-81}$. Маємо невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Переведемо ірраціональність у знаменник, помноживши чисельник і знаменник на спряжений до чисельника вираз

$$\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{x^2-81}=\lim_{x\to9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x^2-81)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to9}\frac{x-9}{(x^2-81)(\sqrt{x}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to9}\frac{x-9}{(x-9)(x+9)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to9}\frac{1}{(x+9)(\sqrt{x}+3)}=\frac{1}{108};$$

в) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+7x+3}{3x^2+8x-3}$. Маємо невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Розкладемо чисельник і знаменник на множники:

$$\lim_{x\to-3}\frac{2x^2+7x+3}{3x^2+8x-3}=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(2x+1)}{(x+3)(3x-1)}=\lim_{x\to-3}\frac{2x+1}{3x-1}=\frac{-6+1}{-9-1}=\frac{1}{2};$$

г) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^3+64}{7x^2+27x-4}$. Маємо невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Розкладемо чисельник і знаменник на множники:

$$\lim_{x\to-4}\frac{x^3+64}{7x^2+27x-4}=\lim_{x\to-4}\frac{(x+4)(x^2-4x+16)}{(x+4)(7x-1)}=\lim_{x\to-4}\frac{x^2-4x+16}{7x-1}=$$

$$=\frac{16+16+16}{-28-1}=-\frac{48}{29};$$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+1}{3x^2+x-4}$. Маємо невизначеність типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Для її розкриття поділимо чисельник і знаменник на найвищий степінь x, а саме на x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-2x+1}{3x^2+x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}=\frac{5-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{3+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}}=\frac{5}{3};$$

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+3x-4}{2x^2+x+1}$. Маємо невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для її розкриття поділимо чисельник і знаменник на найвищий степінь x, а саме на x^3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+3x-4}{2x^2+x+1}=\frac{4+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}}{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{4+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}=$$

$$=\frac{4+0-0}{0+0+0}=\infty;$$

ж) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7x+4}{3x-5x^2+1}$. Маємо невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для її розкриття поділимо чисельник і знаменник на найвищий степінь x, а саме на x^2.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7x+4}{3x-5x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{7}{x}+\frac{4}{x^2}}{\frac{3}{x}-5+\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7}{x}+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}}{-5+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x}+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\frac{0+0}{-5+0+0}=0;$$

з) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{\sqrt{5x+6}-4}$. Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. Помножимо чисельник і знаменник на спряжений до знаменника вираз і розкладемо чисельник на множники:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{\sqrt{5x+6}-4}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2-2x+4)(\sqrt{5x+6}+4)}{(\sqrt{5x+6}-4)(\sqrt{5x+6}+4)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2-2x+4)(\sqrt{5x+6}+4)}{5x+6-16}=$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2-2x+4)(\sqrt{5x+6}+4)}{5x-10} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2-2x+4)(\sqrt{5x+6}+4)}{5(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-2x+4)(\sqrt{5x+6}+4)}{5} =$$

$$= \frac{(4-4+4)(\sqrt{10+6}+4)}{5} = \frac{32}{5};$$

і) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$. Оскільки вираз у дужках прямує до 1, маємо невизначеність $\left[1^{\infty}\right]$. Додамо і віднімемо у дужках одиницю:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4-2x}{1-2x}-1\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{1-2x}\right)^{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{1-2x}\right)^{(x+1)\frac{3}{1-2x}\frac{1-2x}{3}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\frac{3}{1-2x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+1}{1-2x}} = e^{-3/2};$$

ї) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+5}{3x-2}\right)^{2x}$. Вираз у дужках прямує до $\frac{1}{3}$, а степінь прямує до $-\infty$, тому увесь вираз прямує до $+\infty$.

к) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{4x^2}$. Маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. Розкладемо на множники чисельник:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{4x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos^2 x)}{4x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\sin^2 x}{4x^2}$. Застосуємо першу важливу границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin^2 x}{4x^2} = \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\cos x = \frac{1}{4}.$$

Відповідь: а) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}=2$; б) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x^2-81}=\frac{1}{108}$;

в) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{2x^2+7x+3}{3x^2+8x-3}=\frac{1}{2}$; г) $\lim\limits_{x\to-4}\frac{x^3+64}{7x^2+27x-4}=-\frac{48}{29}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+1}{3x^2+x-4}=\dfrac{5}{3}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x-4}{2x^2+x+1}=\infty$;

ж) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x+4}{3x-5x^2+1}=0$; з) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{5x+6}-4}=\dfrac{32}{5}$;

і) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}=e^{-3/2}$; ї) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+5}{3x-2}\right)^{2x}=\infty$;

к) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{4x^2}=\dfrac{1}{4}$.

5. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$:

$\alpha(x)=x^2\sin^2 x$; $\beta(x)=x\operatorname{tg}x$ $(x\to0)$.

Розв'язання. Знайдемо границю відношення функцій коли $x\to0$:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin^2 x}{x\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to0}\frac{x\sin^2 x}{\dfrac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to0}x\sin x\cos x=0.$$

Оскільки границя відношення функцій дорівнює нулю, то $\alpha(x)$ вищого порядку малості ніж $\beta(x)$.

Відповідь: $\alpha(x)=o(\beta(x))$, $x\to0$.

6. Доведіть, що функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ при $x\to0$ є нескінченно малими одного порядку малості:

$f(x)=x^2+3x$, $\varphi(x)=\sin 5x$.

Розв'язання. Знайдемо границю відношення функцій коли $x\to0$:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+3x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x+3)}{\dfrac{x\sin x}{x}}=\lim_{x\to0}x+3=3.$$

Границя відношення функцій стала і відмінна від нуля, отже нескінченно малі функції одного порядку малості.

7. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x^2)}{x\arcsin x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{2x}-1)x}{\ln\cos 5x}$.

Розв'язання. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$. Маємо невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Розглянемо чисельник. При $x\to 0$ $\operatorname{tg}x\sim x$, $\sin x\sim x$, тобто $\sin x\sim\operatorname{tg}x$. Оскільки різниця еквівалентних нескінченно малих функцій $\alpha(x)$ і $\beta(x)$– нескінченно мала вищого порядку, ніж $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ і вона не дорівнює нулю, то у цьому прикладі не можна $\operatorname{tg}x-\sin x$ замінити на $x-x=0$. З цієї ж причини не можна замінити чисельник на $\operatorname{tg}x-x$ або $x-\sin x$. Зробимо перетворення:

$$\operatorname{tg}x-\sin x=\operatorname{tg}x(1-\cos x)=2\operatorname{tg}x\sin^2\frac{x}{2}\sim 2x\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^3}{2}.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^3}{2}}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x^2)}{x\arcsin x}$. Маємо невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Використаємо еквівалентності $\arcsin x\sim x$, $\ln(1+2x^2)\sim 2x^2$, $x\to 0$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x^2)}{x\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{x\cdot x}=2$.

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{2x}-1)x}{\ln\cos 5x}$. Маємо невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Знаменник перетворимо $\ln\cos 5x=\ln(\sqrt{1-\sin^2 5x})=\dfrac{1}{2}\ln(1-\sin^2 5x)$

і скористаємось еквівалентностями

$e^{2x}-1\sim 2x$, $\ln\cos 5x=\dfrac{1}{2}\ln(1-\sin^2 5x)\sim-\dfrac{1}{2}\sin^2 5x\sim-\dfrac{25x^2}{2}$, $x\to 0$.

Маємо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{2x}-1)x}{\ln\cos 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot x}{-\dfrac{25x^2}{2}}=-\dfrac{4}{25}$.

Відповідь: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x^2)}{x\arcsin x}=2$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{2x}-1)x}{\ln\cos 5x}=-\dfrac{4}{25}$.

8. Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x\cos 3x}{1+\operatorname{tg}x\cos 5x}\right)^{2/x^3}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність типу $[1]^{\infty}$. Для її розкриття перетворимо вираз у дужках, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

$\cos 3x=1-2\sin^2\dfrac{3}{2}x\sim 1-\dfrac{9}{2}x^2$, $\cos 5x=1-2\sin^2\dfrac{5}{2}x\sim 1-\dfrac{25}{2}x^2$,

$\operatorname{tg}x\sim x$, $x\to 0$.

Тоді

$$\frac{1+\operatorname{tg}x\cos 3x}{1+\operatorname{tg}x\cos 5x}\sim\frac{1+1-\dfrac{9}{2}x^2}{1+1-\dfrac{25}{2}x^2}=\frac{4-9x^2}{4-25x^2}=\frac{4-25x^2+16x^2}{4-25x^2}=.$$

$$=1+\frac{16x^2}{4-25x^2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x\cos 3x}{1+\operatorname{tg}x\cos 5x}\right)^{2/x^3}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{16x^2}{4-25x^2}\right)^{2/x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{16x^2}{4-25x^2}\right)^{\frac{4-25x^2}{16x^2}\cdot\frac{16x^2}{4-25x^2}\cdot\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{16x^2}{4-25x^2}\cdot\frac{2}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{16x^2}{4-25x^2}\cdot\frac{2}{x^3}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{32}{x(4-25x^2)}}=e^{+\infty}=\infty.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}x\cos 3x}{1+\operatorname{tg}x\cos 5x}\right)^{2/x^3}=\infty$.

9. Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x)=\begin{cases}2, & x<-1,\\ 1-x, & -1\le x\le 2,\\ \ln x, & x>2.\end{cases}$$

Розв'язання. Функцію задано різними формулами на різних проміжках. На кожному з проміжків $(-\infty,-1)$, $(-1,2)$, $(2,+\infty)$ функція неперервна як елементарна. Отже, розриви можуть бути лише у точках $x=-1$ та $x=2$. Знайдемо ліві та праві границі функції у цих точках.

$\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1-0} 2=2 \quad\Rightarrow$ функція неперервна зліва у точці $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to -1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1+0}(1-x)=2$ функція неперервна справа у точці $x=-1$.

Оскільки у точці $x=-1$ існують границі зліва і справа рівні між собою і рівні значенню функції у цій точці, то $x=-1$ є точкою неперервності.

Дослідимо точку $x=2$.

$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0}(1-x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0}\ln x=\ln 2$.

У точці $x=2$ існують скінченні границі зліва і справа функції $f(x)$ нерівні між собою. Тому функція $f(x)$ розривна, точка $x=2$ є точкою розриву першого роду.

10. Дослідіть функцію $f(x)=2^{\frac{2}{3-x}}$ на неперервність у точках $x_1=3,\ x_2=4$.

Розв'язання. Дана функція є елементарною, як суперпозиція елементарних функцій. Її визначено для всіх $x\in\mathbb{R}$, крім $x=3$. Отже, функція є неперервною в усіх точках $x\ne 3$, а значить і у точці $x=4$. У точці $x=3$ функцію не визначено. Знайдемо праву і ліву границі у $x=3$.

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = \lim_{x\to 3-0} 2^{\frac{2}{3-x}} = 2^{+\infty} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 3+0} f(x) = \lim_{x\to 3+0} 2^{\frac{2}{3-x}} = 2^{-\infty} = 0.$$

Оскільки границя зліва нескінченна, то згідно класифікації точок розриву $x = 3$ є точкою розриву другого роду.

11. Знайдіть похідну функцій:

а) $y = x^2 \operatorname{tg}\sqrt{x}$; б) $y = (\sin x)^{\ln x}$; в) $\begin{cases} x = 5e^t, \\ y = e^{2t^3}, \end{cases} \quad t \in R.$

Розв'язання. а) Скористаємось правилами диференціювання добутку функцій $(uv)' = u'v + v'u$ та обчислення похідної складеної функції $f(\varphi(x))' = f'((\varphi(x)) \cdot (\varphi(x)'$.

$y = x^2 \operatorname{tg}\sqrt{x} \quad \Rightarrow$

$$y' = (x^2)' \operatorname{tg}\sqrt{x} + (\operatorname{tg}\sqrt{x})' x^2 = 2x \operatorname{tg}\sqrt{x} + \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} x^2 =$$

$$= 2x \operatorname{tg}\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}.$$

б) Для знаходження похідної функції $y = (\sin x)^{\ln x}$ застосуємо логарифмічне диференціювання. Логарифмуємо ліву і праву частини рівності

$$\ln y = \ln((\sin x)^{\ln x}) \Rightarrow \ln y = \ln x \ln \sin x.$$

Одержали функцію, задану неявно. За правилом диференціювання неявно заданої функції маємо

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{x} \ln \sin x + \ln x \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\ln \sin x}{x} + \ln x \operatorname{ctg} x \Rightarrow$$

$y' = y(\frac{\ln \sin x}{x} + \ln x \operatorname{ctg} x)$ або $y' = (\sin x)^{\ln x}(\frac{\ln \sin x}{x} + \ln x \operatorname{ctg} x)$.

в) Функцію $y = y(x)$ задано параметрично $\begin{cases} x = 5e^t, \\ y = e^{2t^3}, \end{cases} \quad t \in R.$

Користуючись формулою диференціювання функції, заданої параметрично $y' = \frac{y'_t}{x'_t}$ та складеної функції маємо

$$y' = \frac{e^{2t^3} \cdot 2 \cdot 3t^2}{5e^{5t}} \Rightarrow y' = \frac{6}{5} t^2 e^{2t^3 - 5t}.$$

12. Знайдіть y' і y'': а) $\ln(x^2 + y) = 3x + 1$; б) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln t. \end{cases}$

Розв'язання. а) Функцію $\ln(x^2 + y) = 3x + 1$ задано неявно. Про диференціюємо ліву і праву частини рівності, пам'ятаючи, що $y = y(x)$ є функцією.

$$\ln(x^2 + y) = 3x + 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2 + y}(2x + y') = 3 \Rightarrow y' = 3(x^2 + y) - 2x.$$

Перша похідна також є функцією, заданою неявно. Диференціюємо за x одержане співвідношення $y'' = 3(2x + y') - 2$. Підставимо в одержану рівність вираз для першої похідної

$$y'' = 3(2x + 3(x^2 + y) - 2x) - 2 \Rightarrow y'' = 9(x^2 + y) - 2.$$

б) Функцію $y = y(x)$ задано параметрично $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln t. \end{cases}$

Користуючись формулою диференціювання функції, заданої параметрично знайдемо першу похідну

$y' = \dfrac{1/t}{1/\sqrt{1 - t^2}} \Rightarrow y' = \dfrac{\sqrt{1 - t^2}}{t}$. Продиференціюємо повторно одержану рівність за змінною x, тобто $y'' = \dfrac{y''_{xt}}{x'_t}$. Маємо

$$y'' = \frac{\dfrac{\dfrac{-2t}{2\sqrt{1 - t^2}} t - \sqrt{1 - t^2}}{t^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}}} \Rightarrow y'' = \frac{-1}{t^2}.$$

Відповідь: а) $y' = 3(x^2 + y) - 2x$; $y'' = 9(x^2 + y) - 2$;

б) $y' = \dfrac{\sqrt{1 - t^2}}{t}$; $y'' = \dfrac{-1}{t^2}$.

13. Для даної функції y і аргументу x_0 обчисліть $y'''(x_0)$: $y=(5x-3)^8,\ x_0=1$.

Розв'язання. За правилом знаходження похідної складеної функції послідовно продиференціюємо задану функцію

$y=(5x-3)^8 \Rightarrow y'=8(5x-3)^7\cdot 5,\quad y''=8\cdot 7(5x-3)^6\cdot 5^2,$

$y'''=8\cdot 7\cdot 6(5x-3)^5\cdot 5^3.$

Звідси значення третьої похідної у точці $x_0=1$ дорівнює

$y'''(1)=8\cdot 7\cdot 6\cdot 5^3\cdot(-2)^5=-1344000.$

Відповідь: $y'''(1)=-1344000$.

14. Запишіть формулу для похідної n-го порядку функції $y=\dfrac{1}{1+x}$.

Розв'язання. Послідовно диференціюючи дістанемо

$$y=\frac{1}{1+x}\Rightarrow y'=-\frac{1}{(1+x)^2},\quad y''=\frac{-1\cdot(-2)}{(1+x)^3},\quad y'''=\frac{-1\cdot(-2)\cdot(-3)}{(1+x)^4}.$$

Аналізуючи одержані формули, запишемо формулу для похідної n-го порядку функції $y=\dfrac{1}{1+x}$: $y^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$.

Справедливість одержаної рівності можна довести методом математичної індукції.

Відповідь: $y^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$.

15. Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{4x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg}(\frac{5x}{2})}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin 2x\operatorname{ctg}x$.

Розв'язання. а) Маємо невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. За правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x-\sin x}{4x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{tg}x-\sin x)'}{(4x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{\cos^2 2x}-\cos x}{4-\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-\cos x\cos^2 2x}{\cos^2 2x(4-\cos x)}=\frac{1}{3}.$$

б) Маємо невизначеність типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. За правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg}(\dfrac{5x}{2})}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{\pi}{x^2}}{-\dfrac{5}{2}\dfrac{1}{\sin^2(5x/2)}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\pi}{5}\frac{\sin^2(5x/2)}{x^2}.$$

Скористаємось еквівалентністю $\sin x\sim x,\ x\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\pi}{5}\frac{\sin^2(5x/2)}{x^2}=\frac{2\pi}{5}\lim_{x\to 0}\frac{(5x/2)^2}{x^2}=\frac{2\pi}{5}\lim_{x\to 0}\frac{25x^2}{4x^2}=\frac{5\pi}{2}.$$

в) Маємо невизначеність типу $[0\cdot\infty]$. Правило Лопіталя зразу застосувати неможна.

Перетворимо функцію $\arcsin 2x\operatorname{ctg}x=\dfrac{\arcsin 2x}{\operatorname{tg}x}$ і одержимо невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, для розкриття якої застосуємо правило Лопіталя

$$\lim_{x\to 0}\arcsin 2x\operatorname{ctg}x=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}=2.$$

Відповідь: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{4x-\sin x}=\dfrac{1}{3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg}(\dfrac{5x}{2})}=\dfrac{5\pi}{2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin 2x\operatorname{ctg}x=2$.

16. У якій точці кривої $y = 4x^2 - 12x + 13$ дотична паралельна до прямої $y = 4x - 3$?

Розв'язання. Рівняння дотичної до кривої задають формулою
$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, де (x_0, y_0)– точка дотику, $f'(x_0)$– кутовий коефіцієнт дотичної. Як відомо, прямі паралельні, якщо їх кутові коефіцієнти рівні, тому $y' = 8x - 12 \Rightarrow 8x_0 - 12 = 4$, $x_0 = 2$, $y_0 = 4 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 13$, $y_0 = 5$. Отже, дотична до кривої паралельна до прямої $y = 4x - 3$ у точці $(2, 5)$.

17. Складіть рівняння дотичної та нормалі до кривої $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = 1 + t^3 \end{cases}$ у точці, що відповідає параметру $t = 2$.

Розв'язання. Запишемо рівняння дотичної $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ та нормалі $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ до кривої.

Знайдемо точку дотику, що відповідає параметру $t = 2$
$\begin{cases} x_0 = 1 - 2^2, \\ y_0 = 1 + 2^3 \end{cases}$, $\begin{cases} x_0 = -3, \\ y_0 = 9 \end{cases}$ та значення похідної у точці дотику
$y' = \dfrac{y'_t}{x'_t} \Rightarrow y' = \dfrac{-2t}{3t^2}$, $y'_0 = \dfrac{-2 \cdot 2}{3 \cdot 4} = -\dfrac{1}{3}$. Підставимо знайдені значення у рівняння дотичної $y - 9 = -\dfrac{1}{3}(x + 3)$ або $y = -\dfrac{1}{3}x + 8$
та нормалі $y - 9 = -3(x + 3) \Rightarrow y = -3x$.

Відповідь: рівняння дотичної $y = -\dfrac{1}{3}x + 8$ та нормалі $y = -3x$.

18. Дослідіть функцію $y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$ та побудуйте її графік.

Розв'язання. 1) Область існування – вся числова пряма, крім точки $x = 1$, тобто $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$.

2) Графік функції $y = f(x)$ перетинає вісь ординат (якщо це можливо) в точці $(0; f(0))$. Знаходимо $y(0) = -1$, отже $A(0;-1)$– точка перетину кривої з віссю Oy. Щоб знайти точки перетину графіка з віссю Ox, потрібно розв'язати рівняння $y = 0$, тобто $\frac{x^2+1}{x-1} = 0$. Це рівняння не має дійсних коренів, тому дана функція не перетинає вісь абсцис.

3) Функція неперіодична. Розглянемо вираз $f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x-1} = \frac{x^2+1}{-x-1}$,

таким чином, $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$. Це означає, що дана функція не є ні парною, ні непарною, тобто є функцією загального виду.

4) Функція в точці $x = 1$ має розрив другого роду, причому

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^2+1}{x-1} = -\infty, \ \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2+1}{x-1} = +\infty.$$

В усіх інших точках функція неперервна.

5) Знайдемо похідну $y' = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$ і розв'яжемо рівняння $y' = 0$, тобто $x^2 - 2x - 1 = 0$, $x_1 = 1-\sqrt{2}$, $x_2 = 1+\sqrt{2}$– стаціонарні точки. Крім того, похідна невизначена при $x = 1$. Отже, $x_1 = 1-\sqrt{2}$, $x_2 = 1+\sqrt{2}$, $x_3 = 1$– критичні точки або точки можливого екстремуму. Ці точки розбивають числову пряму на чотири інтервали $(-\infty; 1-\sqrt{2})$, $(1-\sqrt{2}; 1)$, $(1; 1+\sqrt{2})$, $(1+\sqrt{2}, \infty)$.

На кожному з цих інтервалів похідна y' має певний знак, який можна встановити за методом інтервалів або обчислення значень похідної в окремих точках (по одній точці з кожного інтервалу). На інтервалах $(-\infty; 1-\sqrt{2})$, $(1+\sqrt{2}, \infty)$ похідна додатна, отже функція зростає; якщо $x \in (1-\sqrt{2}; 1) \cup (1; 1+\sqrt{2})$, то функція спадає, бо на цих інтервалах похідна від'ємна. При переході

через точку $x_1 = 1-\sqrt{2}$ (рух відбувається зліва направо) похідна змінює знак з плюса на мінус, отже, в цій точці досягається локальний максимум, знайдемо

$$y_{\max} = y(1-\sqrt{2}) = \frac{(1-\sqrt{2})^2+1}{1-\sqrt{2}-1} = 2-2\sqrt{2}.$$

При переході через точку $x_2 = 1+\sqrt{2}$ похідна змінює знак з мінуса на плюс, отже, в цій точці існує локальний мінімум,

причому $y_{\min} = y(1+\sqrt{2}) = \dfrac{(1+\sqrt{2})^2+1}{1+\sqrt{2}-1} = 2+2\sqrt{2}$.

Точка $x=1$ не є точкою екстремуму (у цій точці функція невизначена).

6) Знайдемо другу похідну

$$y'' = \left(\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}\right)' =$$

$$= \frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-1)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

На інтервалі $(-\infty;1)$ $y''<0$, отже, на цьому інтервалі крива опукла; якщо $x\in(1;\infty)$, то $y''>0-$ крива вгнута. В точці $x=1$ функція невизначена, тому ця точка не є точкою перегину.

7) З результатів п.4 випливає, що пряма $x=1-$ вертикальна асимптота кривої.

Оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x-1} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x-1} = -\infty$,

то горизонтальні асимптоти відсутні.

Знайдемо границі

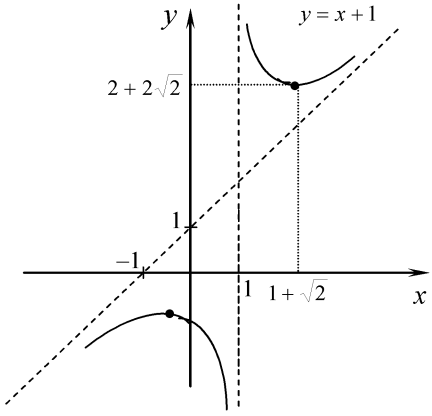
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x} = 1,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x} = 1.$$

Отже, $k = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 1$,

тоді $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(\dfrac{x^2+1}{x-1}-x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+1}{x-1} = 1.$

Таким чином, пряма $y = x + 1$ – похила асимптота даної кривої. Інших асимптот немає

8) Враховуючи проведені дослідження, будуємо графік.



19. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y = \frac{x^4}{4} - x^3 + 7$ на відрізку $[1;2]$.

Розв'язання. Задана на відрізку неперервна функція досягає своїх найбільшого та найменшого значень або у стаціонарних точках, які потрапляють у цей відрізок, або на кінцях відрізку. Знайдемо стаціонарні точки

$$y' = x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 3.$$

При переході через точку $x = 0$ похідна функції знак не змінює, тобто ця точка не є стаціонарною. Точка $x = 3$ – стаціонарна (похідна міняє знак з "–" на "+" тобто є точкою мінімуму), але $x = 3$ не належить відрізку $[1;2]$. Тому своїх найбільшого та найменшого значень функція досягає на кінцях відрізка:

$y(1) = \frac{1}{4} - 1 + 7 = 6\frac{1}{4}$ – найбільше значення,

$y(2) = 4 - 8 + 7 = 3$ – найменше значення функції на відрізку $[1;2]$.

20. Виробник з'ясував, що тижневий прибуток P фірми залежить від тижневого рекламного бюджету x за формулою

$$P(x) = 200\sqrt{x} - x - 1000,$$

де x і P вимірюються в гривнях. Знайти максимальний прибуток, отриманий протягом тижня, і з'ясувати, за яких вкладеннях рекламного бюджету прибуток фірми зростає, а за яких спадає.

Розв'язання. Необхідно знайти значення x_0, за якого функція $P(x)$ досягає максимуму. Для цього розв'яжемо рівняння

$$P'(x_0) = 0.$$

$$P'(x_0) = \frac{100}{\sqrt{x_0}} - 1 = 0, \text{ або } x_0 = 10000.$$

Оскільки при $x < 10\ 000$ $P'(x) > 0$, а при $x > 10\,000$, $P'(x) < 0$, то при вкладенні в рекламний бюджет до 10 000 грн. прибуток фірми зростатиме, а при вкладенні більше, ніж 10 000 грн., прибуток фірми спадатиме. При вкладанні рівно 10 000 грн. прибуток фірми буде максимальним і складатиме

$$P(x_0) = 200\sqrt{10\ 000} - 10\,000 - 1000 = 9000 \text{ грн.}$$

21. Функція попиту y від ціни x продукту має вигляд $y = 10 - x$. Знайти коефіцієнт еластичності попиту при ціні товару $x = 2$ од.

Розв'язання. Коефіцієнт еластичності попиту дорівнює

$$E_x(y) = \frac{x}{y} y' = \frac{x}{10 - x}(-1) = \frac{-x}{10 - x}.$$

При $x = 2$ отримаємо:

$$E_{x=2}(y) = \frac{-2}{10 - 2} = 0,25,$$

тобто за збільшення ціни на 1 % попит на товар зменшиться на 0,25 %. Враховуючи, що $\left|E_{x=2}(y)\right| < 1$ попит при ціні $x = 2$ нееластичний.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Барковський В. В.* Вища математика для економістів. [Текст]: учеб./Барковський В. В., Барковська Н. В. – К.: ЦУЛ, 2002. – 400 с.– ISBN 966-7938-42-5

2. *Боярский А. К.* Математика для економистов [Текст]: учеб./ – М.: Высш. шк., 1961. – 264 с.

3. *Булдигін В. В.* Вища математика. : Конспект лекцій для студентів фінансово—економічного профілю [Текст]: навч. посіб. / В. В. Булдигін, З. П. Ординська, Л. А. Репета – К.: НТУУ "КПІ", 2008. – 200 с.

4. *Замков О. О.* Математические методы в економике [Текст]: учеб./ О. О. Замков, А. В.Толстопятенко, Ю. Н. Черемнык – М.: ДИС, 2001. – 240 с. – ISBN 5-86509-054-2

5. *Карасев Е. И.* Курс высшей математики для економических вузов. – В 2 ч. [Текст]: учеб./ Е. И. Карасев, З. И. Аксютина, Т. И. Савельева. –М.: Высш. шк., 1982.

6. *Краас В. М.* Высшая математика для економических специальностей [Текст]: учеб./ – М.: Высш. шк., 1997. – 256 с.

7. *Кремер Н. Ш.* Высшая математика для економистов [Текст]: учеб./– М.: Юнити,1997. – 440 с. – ISBN 5-85173-069-2

8. *Ординська З. П.*Аналітична геометрія.Елементи лінійної алгебри. Теорія та задачі для самостійної роботи. навч. посіб. для студентів економічних спеціальностей [Ел. ресурс]/ З.П.Ординська, Л.А.Репета. – К.: НТУУ «КПІ», 2016.- 150 с

9. *Іванов О. В.* Методичні вказівки до виконання типової розрахункової роботи «Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних»[Текст]/ О. В. Іванов, З. П. Ординська, Л. А. Репета, О. О. Дем'яненко—К.: ІВЦ "Видавництво «Політехніка»", 2002.—Ч. II.—84 с.

10. *Іванов О. В.* Методичні вказівки до виконання типової розрахункової роботи «Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння. Ряди.» [Текст]/ О. В. Іванов, З. П. Ординська, Л. А. Репета, О. О. Дем'яненко—К.: ІВЦ "Видавництво «Політехніка»", 2002.—Ч. III.—140 с.

11. *Ординська З. П.* Методичні вказівки до виконання типової розрахункової роботи «Елементи лінійної, векторної алгебри та аналітичної геометрії» [Текст]/ З. П. Ординська, Л. А. Репета, О. О. Дем'яненко—К.: ІВЦ "Видавництво Політехніка»", 2003.—Ч. I.—68 с.