РОЗВ'ЯЗКИ СПІЛЬНИХ ЗАДАЧ ФАКУЛЬТЕТСЬКОГО ТУРУ МАТЕМАТИЧНОЇ ОЛІМПІАДИ НТУУ «КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО», 2016/17 Н.Р.

І курс

5. (*1-й та старші курси*) Довести, що в будь-якій нескінченій послідовності десяткових цифр знайдеться підрядок, що утворює число, яке ділиться на 2017.

Приклад: $5222089\ldots1124\underbrace{039513039}_{=2017\cdot1959}005262\ldots$

Розв'язання. Візьмемо перші 2017 цифр: $a_1a_2\ldots a_{2017}$. Якщо серед них є 0, або якщо для деякого $k\in\{1,2,\ldots,2017\}$ $\overline{a_k\ldots a_{2017}}\vdots 2017$, то доведено. Якщо ні, то серед 2017 чисел

$$\overline{a_1\ldots a_{2017}},\ \overline{a_2\ldots a_{2017}},\ \ldots,\ a_{2017}$$

є два, що дають однакові остачі при діленні на 2017 (всього можливих варіантів остач 2016). Нехай це $\overline{a_k\ldots a_{2017}}$ і $\overline{a_l\ldots a_{2017}}$, де $k<l$. Тоді їх різниця $\overline{a_k\ldots a_{l-1}00\ldots0}$ ділиться на 2017. Але вона дорівнює $10^{2017-l}\cdot\overline{a_k\ldots a_{l-1}}$, і, оскільки 10 і 2017 взаємно прості, то $\overline{a_k\ldots a_{l-1}}\vdots 2017$.

6. (*1 курс*) Нехай $d \in \mathbb{N}$, $a_1,\ldots,a_d,r$ --- додатні числа такі, що $\prod_{i=1}^{d} a_i = r^d$. Довести, що для всіх $s \geq 0$ виконується нерівність

$$\prod_{i=1}^{d} (a_i + s) \geq (r + s)^d.$$

Розв'язання. $\prod_{i=1}^{d} (a_i + s) = \sum_{j=0}^{d} v_j \cdot s^{d-j}$, де $v_0 = 1$, $\forall j \in \{1,2,\ldots,d\}$ v_j – сума добутків попарно різних a_i, в кожному з яких рівно по j співмножників. Для кожного $j \in \{1,2,\ldots,d\}$ кожен a_i входить рівно до C_{d-1}^{j-1} добутків, які є доданками v_j. Всього добутків C_d^j. Застосуємо теорему Коші про нерівність меж середнім арифметичним і середнім геометричним до цих добутків. Отримаємо:

$$v_j \geq C_d^j \cdot \left(a_1^{C_{d-1}^{j-1}} \cdot a_2^{C_{d-1}^{j-1}} \cdot \ldots \cdot a_d^{C_{d-1}^{j-1}}\right)^{1/C_d^j} = C_d^j \cdot \left(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_d\right)^{C_{d-1}^{j-1}/C_d^j} = C_d^j \cdot \left(r^d\right)^{C_{d-1}^{j-1}/C_d^j} = C_d^j \cdot r^j.$$

Звідси $v_j \cdot s^{d-j} \geq C_d^j \cdot r^j s^{d-j}$ при $j \geq 1$ і $v_j \cdot s^{d-j} = C_d^j \cdot r^j s^{d-j}$ при $j = 0$, тобто $\prod_{i=1}^{d} (a_i + s) \geq \sum_{j=0}^{d} C_d^j \cdot r^j s^{d-j} = (r + s)^d$.

6. (*Старші курси*) Знайти суму ряду

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^m y^n}{m+n},$$

де $x, y \in [0,1)$ --- фіксовані числа.

Розв'язання.

1-й спосіб.

Якщо $x = y$, то

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^m y^n}{m+n} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{m+n}}{m+n} = \sum_{s=2}^{\infty}\frac{s-1}{s}x^s = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{s-1}{s}x^s = \sum_{s=1}^{\infty}x^s - \sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s}x^s = \frac{x}{1-x} + \ln(1-x).$$

Якщо $x \neq y$, то $x - y \neq 0$. Тоді

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^m y^n}{m+n} = \sum_{s=2}^{\infty}\frac{x^{s-1}y + x^{s-2}y^2 + \ldots + xy^{s-1}}{s} =$$

$$= \sum_{s=2}^{\infty}\frac{x^s + x^{s-1}y + x^{s-2}y^2 + \ldots + xy^{s-1} + y^s}{s} - \sum_{s=2}^{\infty}\frac{x^s}{s} - \sum_{s=2}^{\infty}\frac{y^s}{s} =$$

$$= \frac{1}{x-y}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{x^{s+1} - y^{s+1}}{s} - \sum_{s=2}^{\infty}\frac{x^s}{s} - \sum_{s=2}^{\infty}\frac{y^s}{s} = \left(\frac{x}{x-y} - 1\right)\sum_{s=2}^{\infty}\frac{x^s}{s} - \left(\frac{y}{x-y} + 1\right)\sum_{s=2}^{\infty}\frac{y^s}{s} =$$

$$= \frac{y}{x-y}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{x^s}{s} - \frac{x}{x-y}\sum_{s=2}^{\infty}\frac{y^s}{s} = \frac{y}{x-y}\left(-x - \ln(1-x)\right) - \frac{x}{x-y}\left(-y - \ln(1-y)\right) =$$

$$= \frac{x}{x-y}\ln(1-y) - \frac{y}{x-y}\ln(1-x).$$

2-й спосіб.

Якщо $x = y$ – див. 1-й спосіб.

Якщо $x \neq y$, помітимо, що

$$\frac{1}{m+n} = \int_0^1 t^{m+n-1}dt.$$

Тому

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^m y^n}{m+n} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 x^m y^n t^{m+n-1}dt = \int_0^1\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}x^m y^n t^{m+n-1}dt = \int_0^1\sum_{s=1}^{\infty}\left(x^s y + \ldots + xy^s\right)t^s dt =$$

$$= \frac{xy}{x-y}\int_0^1\sum_{s=1}^{\infty}\left(x^s - y^s\right)t^s dt = \frac{xy}{x-y}\int_0^1\sum_{s=1}^{\infty}x^s t^s dt - \frac{xy}{x-y}\int_0^1\sum_{s=1}^{\infty}y^s t^s dt.$$

Зробимо заміну $u = xt$, тоді

$$\frac{xy}{x-y}\int_0^1 \sum_{s=1}^{\infty} x^s t^s dt = \frac{y}{x-y}\int_0^x \sum_{s=1}^{\infty} u^s du = \frac{y}{x-y}\int_0^x \frac{udu}{1-u} =$$

$$\frac{y}{x-y}\int_0^x \frac{du}{1-u} - \frac{xy}{x-y} = -\frac{y}{x-y}\ln(1-x) - \frac{xy}{x-y}.$$

Аналогічно знаходимо

$$\frac{xy}{x-y}\int_0^1 \sum_{s=1}^{\infty} y^s t^s dt == -\frac{x}{x-y}\ln(1-y) - \frac{xy}{x-y}.$$

Отже,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^m y^n}{m+n} = \frac{x}{x-y}\ln(1-y) - \frac{y}{x-y}\ln(1-x).$$

Відповідь: $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^m y^n}{m+n} = \frac{x}{1-x} + \ln(1-x)$, якщо $x = y$,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^m y^n}{m+n} = \frac{x}{x-y}\ln(1-y) - \frac{y}{x-y}\ln(1-x), \text{ якщо } x \neq y.$$